

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
"ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΠΙΣΤΩΤΙΚΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ
ΜΕ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ VALUE AT RISK"

ΦΟΙΤΗΤΡΙΑ: ΜΠΑΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΖΑΠΡΑΝΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΤΗΣ:
ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΜΙΧΑΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2002

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	1
1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ	2
1.1 Μέτρα εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου	4
1.2 Διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου.....	6
1.3 Υποδείγματα εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου.....	9
1.3.1 Προσέγγιση κεφαλαιακής δομής	11
1.3.2 Προσέγγιση απλοποιημένου τύπου.....	15
1.4 Τελευταίες εξελίξεις στη διαχείριση πιστωτικού κινδύνου	17
2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ VALUE AT RISK (VAR)	20
2.1 Υπολογισμός της VaR	23
2.1.1 Υπολογισμός VaR για γενικές κατανομές.....	23
2.1.2 Υπολογισμός VaR για παραμετρικές κατανομές.....	24
2.2 Επιλογή της χρονικής διάρκειας και του διαστήματος εμπιστοσύνης.....	25
2.3 Εκτίμηση της ακρίβειας της VaR	28
2.4 Μέθοδοι υπολογισμού της VaR	29
2.4.1 Δέλτα-κανονική αποτίμηση.....	30
2.4.2 Ιστορική προσομοίωση.....	32
2.4.3 Προσομοίωση Monte Carlo	34
3. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: CREDITMETRICS	36
3.1 Περιγραφή της προσέγγισης.....	37
3.2 Εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου για χαρτοφυλάκιο ομολόγων	41
3.2.1 Βήμα 1: Υπολογισμός της πιθανότητας μεταβολής πιστοληπτικής ικανότητας.....	42
3.2.2 Βήμα 2: Προσδιορισμός της αξίας του ομολόγου	42
3.2.3 Βήμα 3: Εύρεση της κατανομής των τιμών χαρτοφυλακίου ομολόγων.....	43
3.2.4 Υπολογισμός της κοινής πιθανότητας μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας	45
3.3 Υπολογισμός των συσχετίσεων των αποδόσεων του ενεργητικού	49
3.4 Υπολογισμός της VaR.....	52
4. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: PORTFOLIO MANAGER	54
4.1 Περιγραφή της προσέγγισης.....	55
4.1.1 Εκτίμηση της αξίας του ενεργητικού και της μεταβλητότητάς της απόδοσής του	58
4.1.2 Υπολογισμός της απόστασης από την αθέτηση.....	59
4.1.3 Υπολογισμός της πιθανότητας αθέτησης.....	61
4.2 Υπολογισμός της κατανομής ζημίας.....	64

4.3 Υπολογισμός των συσχετίσεων των αποδόσεων του ενεργητικού	66
6. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: CREDITRISK+	68
6.1 Περιγραφή της προσέγγισης.....	68
6.2 Συσχετίσεις και επιδράσεις εξωτερικών παραγόντων	70
6.3 Ανάλυση οικονομικών τομέων (Sector analysis)	72
6.4 Υπολογισμός της συχνότητας αθέτησης.....	74
6.4.1 Πιστωτικά γεγονότα με σταθερούς ρυθμούς αθέτησης.....	75
6.4.2 Πιστωτικά γεγονότα με μεταβλητούς ρυθμούς αθέτησης.....	76
6.5 Προσδιορισμός της κατανομής της ζημίας	77
6.5.1 Ζημίες με σταθερούς ρυθμούς αθέτησης	77
6.5.2 Ζημίες με μεταβλητούς ρυθμούς αθέτησης.....	79
6.6 Κατανομή πολυετούς ζημίας.....	80
6. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: CREDITPORTFOLIOVIEW	83
6.1 Υπόδειγμα υπολογισμού συστηματικού κινδύνου	84
6.1.1 Αποτύπωση της οικονομικής κατάστασης.....	84
6.1.2 Υπολογισμός των κλαδικών πιθανοτήτων αθέτησης.....	85
6.1.3 Υπολογισμός των αθροιστικών κατανομών μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας.....	87
6.2 Υπολογισμός της κατανομής της ζημίας του χαρτοφυλακίου	90
7. ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΠΙΤΩΤΙΚΟΥ	
ΚΙΝΔΥΝΟΥ (VALIDATION).....	94
8. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	96
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	102

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παγκοσμιοποίηση των αγορών και η απελευθέρωση της κίνησης κεφαλαίων καθώς και η ανάπτυξη σύνθετων χρηματοοικονομικών προϊόντων όπως τα παράγωγα δημιουργούν κινδύνους στις τράπεζες που είναι πλέον αδύνατο να αξιολογηθούν με τις παραδοσιακές μεθόδους όπως ο έλεγχος των χρηματοοικονομικών καταστάσεων των επιχειρήσεων. Καθίσταται πλέον αναγκαία η ανάπτυξη ολοκληρωμένων συστημάτων που θα επιτρέψουν στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα να διαχειριστούν σωστά τους κινδύνους που αναλαμβάνουν και να αποφύγουν τριγμούς από ενδεχόμενες άστοχες τοποθετήσεις. Η εργασία αυτή σκοπό έχει να περιγράψει τα τέσσερα γνωστότερα υποδείγματα εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου που στηρίζονται σε μία μέθοδο που αναπτύχθηκε πρόσφατα, τη Value at Risk. Πρώτον, το CreditMetrics της JP Morgan, στο οποίο η εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου στηρίζεται στην πιθανότητα μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας του πιστούχου σε δεδομένο χρόνο. Δεύτερον, το Portfolio Manager της KMV, το οποίο βασίζεται στη θεωρία του Merton ότι η διαδικασία της αθέτησης των υποχρεώσεων σχετίζεται με την κεφαλαιακή δομή της επιχείρησης και η αθέτηση επέρχεται όταν το ύψος του ενεργητικού πέσει κάτω από ένα κρίσιμο σημείο. Τρίτον, το CreditRisk+ της Credit Suisse First Boston, το οποίο θεωρεί ότι ο πιστωτικός κίνδυνος προέρχεται μόνο από την αθέτηση των υποχρεώσεων των επιχειρήσεων, η εμφάνιση της οποίας ακολουθεί τυχαία κατανομή στο χρόνο (Poisson). Τέλος το CreditPortfolioView της McKinsey, σύμφωνα με το οποίο η πιθανότητα αθέτησης των επιχειρήσεων προσδιορίζεται από εξωγενείς μακροοικονομικούς παράγοντες όπως η αύξηση του ΑΕΠ, η ανεργία, τα επιτόκια κ.α. και οι οποίοι σε μεγάλο βαθμό καθορίζουν τους οικονομικούς κύκλους. Η σύγκριση των υποδειγμάτων που ακολουθεί τονίζει τη χρησιμότητά τους και τα βήματα που πρέπει να γίνουν ακόμη για να βελτιωθεί η ακρίβεια και η αξιοπιστία τους.

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Κίνδυνος για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα είναι η αβεβαιότητα (uncertainty) σχετικά με την εξέλιξη κάποιων κρίσιμων μεγεθών. Για παράδειγμα η μεταβλητότητα (volatility) που μπορεί να εμφανίζει η αξία των περιουσιακών στοιχείων και των υποχρεώσεων μιας χρηματοδοτούμενης επιχείρησης, είτε αυτό συνεπάγεται αυξημένα κέρδη είτε ενδεχόμενες ζημιές, αποτελεί κίνδυνο για το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα. Θετικές αποκλίσεις, όπως λόγω χάρη υπερβολικά κέρδη, υποκρύπτουν κίνδυνο καθώς συχνά είναι αποτέλεσμα ρισοκίνδυνων επιλογών. Η μεταβλητότητα αυτή μπορεί να οφείλεται σε ανθρώπινους παράγοντες όπως πληθωρισμό, οικονομικό κύκλο, πόλεμο καθώς και σε αναπάντεχα φυσικά φαινόμενα όπως λόγω χάρη σεισμό. Για να μετρήσει κάποιος τον κίνδυνο πρέπει να ορίσει πρώτα τη μεταβλητή που τον ενδιαφέρει, η οποία μπορεί να είναι αξία χαρτοφυλακίου, κέρδη, ή μια συγκεκριμένη χρηματοροπή. Οι *χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι (financial risks)* προκύπτουν από την επίδραση χρηματοοικονομικών παραγόντων στη μεταβλητή αυτή.

Ειδικότερα για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα η διαχείριση του κινδύνου είναι πρωταρχικής σημασίας, καθώς σκοπός τους είναι να αναλαμβάνουν, να μεσολαβούν και να συμβουλεύουν για χρηματοοικονομικούς κινδύνους. Είναι συνεπώς σημαντικό να μπορούν να μετρούν τους κινδύνους με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια έτσι ώστε να μπορούν να τους αποτιμούν και να τους ελέγχουν. Αυτό έγινε φανερό ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια με τη ραγδαία ανάπτυξη των παραγώγων, όπου τα ονομαστικά ποσά δεν έχουν καμμία σχέση με τα ποσά που πραγματικά διακυβεύονται και η σωστή εκτίμηση της μεταβλητότητας του υποκείμενου μέσου είναι καθοριστική. Έχοντας πλήρη αντίληψη του κινδύνου οι χρηματοοικονομικοί διευθυντές μπορούν να προϋπολογίσουν αρνητικά αποτελέσματα και να είναι καλύτερα προετοιμασμένοι έναντι της αναπόφευκτης αβεβαιότητας.

Εκτός από τον *κίνδυνο αγοράς (market risk)* που δημιουργούν οι μεταβολές των τιμών των επιτοκίων, των νομισμάτων, των χρεογράφων ή των προϊόντων, σημαντικό μέρος του κινδύνου που αντιμετωπίζουν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα οφείλεται στην αδυναμία των πελατών τους να εκπληρώσουν συμβατικές υποχρεώσεις τους, οφείλεται δηλαδή στον *πιστωτικό κίνδυνο (credit risk)*. Τα κύρια συστατικά του πιστωτικού κινδύνου είναι (α) ο κίνδυνος ο αντισυμβαλλόμενος να

αθετήσει τις υποχρεώσεις του (default risk)¹ και (β) η αβεβαιότητα σχετικά με το ύψος του ποσού που είναι εκτεθειμένο σε κίνδυνο (exposure) και του ποσοστού που τελικά θα ανακτηθεί (recovery rate). Κίνδυνος όμως μπορεί να προκύψει ακόμη και όταν ο αντισυμβαλλόμενος δεν αθετήσει τις υποχρεώσεις του από τη μεταβολή της πιστοληπτικής του ικανότητας (credit quality). Μια ενδεχόμενη υποβάθμιση (downgrade) λόγου χάρη συνεπάγεται οικονομική ζημία εξ αιτίας της μείωσης της λογιστικής αξίας του χρέους που οφείλεται στην αύξηση του περιθωρίου επιτοκίων. Η κοστολόγηση των πιστοδοτήσεων αντανακλά αυτούς τους κινδύνους, καθώς το περιθώριο πάνω από το κόστος άντλησης κεφαλαίων του πιστωτικού ιδρύματος πρέπει να καλύπτει την αναμενόμενη ζημία και το κόστος του εποπτικού κεφαλαίου που υποχρεούται να διατηρεί το ίδρυμα για την κάλυψη των μη αναμενόμενων ζημιών.

Οι τράπεζες εκτιμούν τους κινδύνους εξετάζοντας προηγούμενες πιθανότητες αθέτησης πιστούχων με χαρακτηριστικά παρόμοια με αυτά του εκάστοτε πελάτη τους. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούν την κατάταξη αξιολογικών οίκων όπως οι Moody's και Standard & Poor's ή δημιουργούν τα δικά τους εσωτερικά συστήματα διαβάθμισης με βάση ιστορικά στοιχεία που διαθέτουν για τις πιθανότητες αθέτησης και τις αναμενόμενες ζημίες. Τα τελευταία χρόνια εντείνεται η ανάγκη μιας πιο ποσοτικής αντιμετώπισης του πιστωτικού κινδύνου καθώς αυξάνονται τα ποσά που διακυβεύονται καθώς και η αβεβαιότητα σχετικά με τη μελλοντική εξέλιξή τους. Σ' αυτό συντελεί η αλματώδης ανάπτυξη και πολυπλοκότητα των χρηματοοικονομικών προϊόντων που διατίθενται στην αγορά όπως λόγου χάρη τα χρηματοοικονομικά παράγωγα, των οποίων η ανάπτυξη αυξάνει δυναμικά τόσο το μέγεθος όσο και τη διακύμανση του ποσού που εκτίθεται σε κίνδυνο σε αντίθεση με τους παραδοσιακούς πιστωτικούς τίτλους (credit instruments) όπως τα δάνεια ή οι ομολογίες. Σε κάθε περίπτωση οι διαχειριστές πρέπει να κατανοήσουν τόσο τη φύση του πιστωτικού κινδύνου που αναλαμβάνουν όσο και τον κίνδυνο αγοράς που αυτός εμπεριέχει. Η ραγδαία πτώση των τιμών των μετοχών καθώς και οι πρόσφατες πτωχεύσεις οικονομικών κολοσσών έδειξαν πόσο ευάλωτα είναι τα χαρτοφυλάκια των τραπεζών σε αναπάντεχες ακραίες καταστάσεις.

¹ Η χρήση του όρου "αθέτηση" αντί του συνήθους "πτώχευση" σκοπό έχει να τονίσει την αδυναμία του πιστούχου να καλύψει έστω και μία ληξιπρόθεσμη οφειλή σε κεφάλαιο ή τόκους, γεγονός που σηματοδοτεί κίνδυνο για το δανειστή.

1.1 Μέτρα εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου

Υπάρχουν αρκετοί δείκτες που μετρούν τη σχετική επικινδυνότητα των διαφόρων πιστωτικών τίτλων. Το απλούστερο μέτρο επικινδυνότητας είναι το περιθώριο επιτοκίων (credit spread) πάνω από την απόδοση χωρίς κίνδυνο (risk-free rate) που η αγορά απαιτεί για μια κατηγορία οφειλετών. Τα περιθώρια επιτοκίων αντανακλούν την αντίληψη της αγοράς για την πιθανότητα αθέτησης του εκδότη ενός τίτλου και την αναμενόμενη ζημία σε περίπτωση αθέτησης (Loss Given Default). Δεν είναι απόλυτα μέτρα εκτίμησης κινδύνου γιατί επηρεάζονται ταυτόχρονα και από τη δυνατότητα εύκολης ρευστοποίησης των τίτλων. Αν κάποιος επιθυμεί να συγκρίνει κινδύνους σε μεγάλο χρονικό ορίζοντα π.χ. ένα χρόνο, αυτό που έχει μεγαλύτερη σημασία είναι η μεταβλητότητα των περιθωρίων, δηλαδή ο βαθμός κατά τον οποίο μεταβάλλεται η πιστοληπτική ικανότητα του οφειλέτη.

Ένα δεύτερο μέτρο εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου, και ίσως το αμεσότερο, είναι η πιθανότητα αθέτησης (default probability) για ορισμένη κατηγορία οφειλετών που υπολογίζεται από ιστορικά δεδομένα. Η συνηθέστερη πηγή άντλησης αυτής της πιθανότητας είναι οι διεθνείς αξιολογικοί οίκοι, οι οποίοι όμως έχουν στοιχεία κυρίως για αμερικανικές επιχειρήσεις. Για το λόγο αυτό οι τράπεζες καταφεύγουν στις δικές τους βάσεις δεδομένων, προκειμένου να εξάγουν μια εκτίμηση του σχετικού κινδύνου κάθε οφειλέτη. Για την εκτίμηση της πιθανότητας αθέτησης απαιτούνται τα εξής στοιχεία:

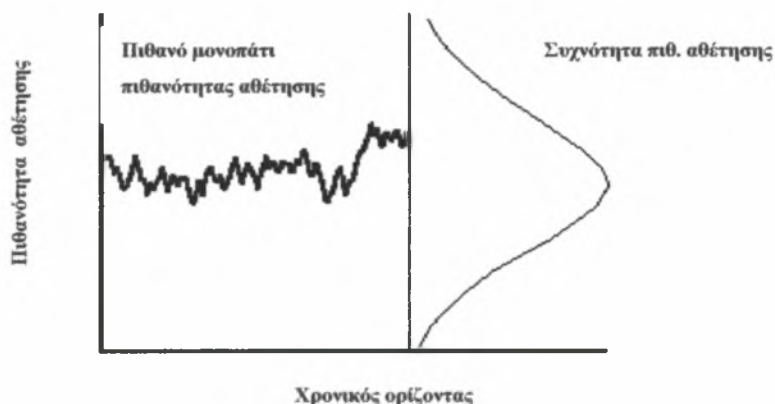
- Η αγοραία αξία του ενεργητικού της επιχείρησης (Value of assets). Απεικονίζει τις προοπτικές της επιχείρησης και εμπεριέχει πληροφορίες για τον κλάδο και την οικονομία.
- Η μεταβλητότητα του ενεργητικού (Asset risk). Καθώς η αγοραία αξία του ενεργητικού της επιχείρησης δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί ακριβώς αλλά εκτιμάται, ενέχει τον επιχειρηματικό κίνδυνο (business risk) ή τον κλαδικό κίνδυνο (industry risk).
- Ο βαθμός εξωτερικού δανεισμού (Leverage). Υπολογίζεται σαν ο λόγος της λογιστικής αξίας των υποχρεώσεων προς την αγοραία αξία του ενεργητικού της επιχείρησης.

Η αποτύπωση της πιθανότητας αθέτησης γίνεται με δύο τρόπους:

- Ως συνεχής μεταβλητή: Όταν αντιμετωπίζεται σαν συνεχής μεταβλητή, η δυνατές τιμές της πιθανότητας αθέτησης περιγράφονται από μια κατανομή η

οποία χαρακτηρίζεται από την αναμενόμενη τιμή και την μεταβλητότητα. Έχοντας κανείς τα δύο παραπάνω δεδομένα μπορεί να εκτιμήσει τις μελλοντικές τιμές της μεταβλητής, οι οποίες θα περιγράφονται από ένα σχήμα όπως το παρακάτω:

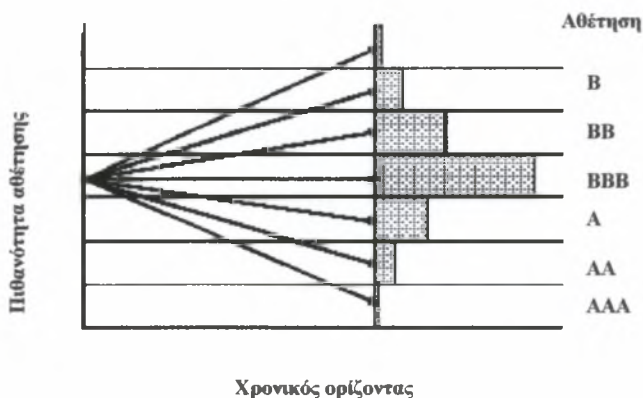
Σχήμα 1. Κατανομή της ζημίας ως συνεχής μεταβλητή



Πηγή: Credit Suisse First Boston

- **Ως διακριτή μεταβλητή:** Θεωρώντας την πιθανότητα αθέτησης ως διακριτή μεταβλητή, ακολουθείται μια απλούστερη διαδικασία από την παραπάνω. Ο συνηθέστερος τρόπος είναι να διακρίνονται οι επιχειρήσεις σε κατηγορίες πιστοληπτικής ικανότητας, σε καθεμία από τις οποίες αντιστοιχεί μια πιθανότητα αθέτησης. Επιπλέον πληροφόρηση απαιτείται προκειμένου να εκτιμηθούν οι μελλοντικές τιμές της μεταβλητής. Αυτές δίνονται συνήθως σε πίνακες μετάβασης, οι οποίοι δίνουν την πιθανότητα παραμονής στην ίδια κατηγορία και επομένως διατήρησης της ίδιας πιθανότητας αθέτησης καθώς και τις πιθανότητες μετάβασης σε διαφορετικές κατηγορίες πιστοληπτικής ικανότητας με διαφορετική πιθανότητα αθέτησης. Η περίπτωση αυτή περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα:

Σχήμα 2. Κατανομή της ζημίας ως διακριτή μεταβλητή



Πηγή: Credit Suisse First Boston

Η πιθανότητα αθέτησης δεν μπορεί να αποτυπώσει τον κίνδυνο της οικονομικής ζημίας από τη μεταβολή της λογιστικής αξίας των πιστοδοτήσεων όταν δεν υπάρχει αντικειμενική περίπτωση αθέτησης. Ο κίνδυνος αυτός μπορεί να εκτιμηθεί μόνο αν είναι γνωστή η πιθανότητα μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας ή πιθανότητα μετάβασης (credit migration probability) της επιχείρησης. Μπορεί να θεωρηθεί ότι η πιθανότητα αθέτησης είναι μερική περίπτωση αυτής της πιθανότητας, γεγονός που την καθιστά πολύ σημαντική. Καθώς λοιπόν και αυτή η πιθανότητα μπορεί να υπολογιστεί από ιστορικά στοιχεία που διαθέτουν οι αξιολογικοί οίκοι, παρουσιάζει το ίδιο μειονέκτημα με τις πιθανότητες αθέτησης όταν πρόκειται για επιχειρήσεις εκτός της αμερικανικής επικράτειας.

Τα τελευταία χρόνια, για την εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου χρησιμοποιείται ολοένα και περισσότερο ένα στατιστικό μέτρο που ονομάζεται "Αξία σε Κίνδυνο" (Value at Risk – VaR). Η VaR ορίζεται σαν η ζημία που θα ξεπεραστεί σε ένα ορισμένο ποσοστό των περιπτώσεων (το διάστημα εμπιστοσύνης) αν ο πιστωτικός τίτλος κρατηθεί για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Για τον υπολογισμό της VaR οι τράπεζες θέτουν συνήθως μεγάλα χρονικά διαστήματα π.χ. ένα έτος και μικρά διαστήματα εμπιστοσύνης π.χ. 1%, 0,1% ή ακόμη και μικρότερα. Η VaR μπορεί να υπολογιστεί τόσο σε επίπεδο μεμονωμένων ποσών εκτεθειμένων σε κίνδυνο όσο και σε επίπεδο χαρτοφυλακίου αφού εκτιμηθούν οι επιμέρους συσχετίσεις.

Από τα παραπάνω μέτρα τα τρία τελευταία δίνουν τα πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα και αντικατοπτρίζουν την εξέλιξη της πιστοληπτικής ικανότητας των οφειλετών. Τα περιθώρια επιτοκίων μπορούν να χρησιμοποιηθούν συμπληρωματικά στις περιπτώσεις που υπάρχουν ελλιπή στοιχεία για την αξιολόγηση κάποιων από αυτούς. Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν ως ένδειξη επικινδυνότητας για πιστωτικούς τίτλους ισοδύναμους ως προς τα άλλα μέτρα, λόγω χάρη με την ίδια πιθανότητα μεταβολής πιστοληπτικής ικανότητας

1.2 Διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα όλο και περισσότερο μετρούν και διαχειρίζονται τον πιστωτικό κίνδυνο σε επίπεδο χαρτοφυλακίου πιστοδοτήσεων (credit portfolio) εκτός από το επίπεδο της μεμονωμένης συναλλαγής. Η αλλαγή αυτή της προοπτικής προήλθε από διάφορους λόγους. Πρώτον, ο κλασικός διαχωρισμός

των πιστοδοτήσεων σε "καλές" και "κακές" δεν ισχύει πλέον. Βασική προϋπόθεση για τη σωστή διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου σε επίπεδο χαρτοφυλακίου είναι η παραδοχή ότι όλες οι πιστώσεις μπορούν κάποια στιγμή να γίνουν "κακές" κάτω από ένα συγκεκριμένο οικονομικό σενάριο. Ο δεύτερος λόγος είναι η συνεχώς μειούμενη αποδοτικότητα των παραδοσιακών ειδών πιστοδοτήσεων, η οποία αφήνει λίγα περιθώρια για λάθος εκτιμήσεις όσον αφορά την επιλογή και την κοστολόγηση σε επίπεδο συναλλαγής, ή για αποφάσεις σε επίπεδο χαρτοφυλακίου, όπου η διαφοροποίηση και η έγκαιρη αντίδραση κάνουν τη διαφορά μεταξύ του κέρδους και της ζημίας. Τέλος οι διαχειριστές κινδύνων έχουν πλέον μεγαλύτερη δυνατότητα να ελέγξουν τον κίνδυνο αφού αυτός προκύψει, με την αυξημένη ρευστότητα στη δευτερογενή αγορά πιστοδοτήσεων (secondary loan market), την αυξανόμενη σημασία του κοινοπρακτικού δανεισμού, την ύπαρξη των πιστωτικών παραγώγων και τριτεγγυήσεων κλπ.

Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της διαχείρισης του πιστωτικού κινδύνου σε επίπεδο χαρτοφυλακίου και όχι μεμονωμένων συναλλαγών είναι ο περιορισμός του κινδύνου συγκέντρωσης (*concentration risk*). Ο κίνδυνος συγκέντρωσης αφορά την αύξηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου από μεγάλη έκθεση σε κίνδυνο σε ένα μόνο πιστούχο ή σε πιστούχους συναφούς κινδύνου από άποψη δραστηριότητας, γεωγραφικής θέσης και λουιά. Ο λόγος είναι ότι σε αντίθεση με τις μετοχές, η επένδυση σε εταιρικές ομολογίες δεν παρέχει μεγάλες δυνατότητες υπερβολικού κέρδους. Η περιορισμένη δυνατότητα αύξησης του περιθωρίου επιτοκίων σημαίνει πως ο επενδυτής δεν θα πολλαπλασιάσει την απόδοσή του αναλαμβάνοντας μεγαλύτερο πιστωτικό κίνδυνο. Έτσι όπως και με άλλα σπάνια γεγονότα με μεγάλο κόστος, η διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου γίνεται μόνο στα πλαίσια του χαρτοφυλακίου.

Παραδοσιακά ο έλεγχος της συγκέντρωσης κινδύνου γίνονταν με βάση ποιοτικά κυρίως κριτήρια ενώ ο κίνδυνος περιοριζόταν θέτοντας ανώτατα αποδεκτά όρια συγκέντρωσης συναφών κινδύνων σε ένα χαρτοφυλάκιο. Κατ' αυτόν τον τρόπο όμως δεν λαμβανόταν υπόψη η σχέση κινδύνου-απόδοσης, αφού τοποθετήσεις διαφορετικής επικινδυνότητας αντιμετωπίζονταν κατά τον ίδιο τρόπο με βάση το πιστωτικό όριο, άσχετα από τις αποδόσεις τους. Αντίθετα οι σύγχρονες μέθοδοι υιοθετούν μια πιο ποσοτική προσέγγιση και επιτρέπουν στους διαχειριστές χαρτοφυλακίων να αντιστοιχίζουν τις εκάστοτε πιστώσεις και τα πιστωτικά όρια σε οριακές διακυμάνσεις της αξίας του χαρτοφυλακίου (*marginal portfolio volatility*).

Για παράδειγμα, όταν αναλάβουν έναν επιπλέον κίνδυνο από τον ίδιο πιστούχο είναι σε θέση να γνωρίζουν τον οριακό κίνδυνο στο χαρτοφυλάκιο, κίνδυνο ο οποίος αυξάνεται γεωμετρικά με την αύξηση της συγκέντρωσης. Αντίθετα ισόποση έκθεση σε κίνδυνο από διαφορετικό πιστούχο ίδιας πιστοληπτικής ικανότητας αλλά μικρότερης ήδη υπάρχουσας ανοικτής πίστωσης έχει σαν αποτέλεσμα σαφώς λιγότερο συνολικό κίνδυνο. Οι σύγχρονες μέθοδοι έχουν τη δυνατότητα να εκτιμήσουν τη συγκέντρωση του κινδύνου σε διάφορα επίπεδα όπως λόγου χάρη σε επίπεδο κλάδου δραστηριότητας, χώρας, πιστωτικού τίτλου κλπ. Μπορούν επομένως να χρησιμοποιηθούν από τους διαχειριστές χαρτοφυλακίων για μια πιο ορθολογική και με βάση τον κίνδυνο κατανομή των διαθέσιμων κεφαλαίων.

Η καλύτερη κατανόηση του χαρτοφυλακίου πιστοδοτήσεων βοηθά τους διαχειριστές χαρτοφυλακίων να εντοπίζουν όχι μόνο τους κινδύνους συγκέντρωσης αλλά και της *ευκαιρίες διασποράς (diversification) του κινδύνου*. Έτσι μπορούν να παίρνουν τις θέσεις εκείνες με τις οποίες κάνουν την καλύτερη δυνατή χρήση των περιορισμένων πόρων που διαθέτουν, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η δυνατότητα ανάληψης κινδύνων. Για να κάνουν οι εν λόγω διαχειριστές τους ανάλογους συμβιβασμούς ανάμεσα στην απόδοση και στον κίνδυνο, πρέπει να γνωρίζουν όχι μόνο το ύψος των αναμενόμενων και μη ζημιών αλλά και την πιθανότητα πραγματοποίησης αυτών. Για παράδειγμα οι διαχειριστές χαρτοφυλακίων των συνταξιοδοτικών ταμείων τοποθετούνται σε εταιρικές ομολογίες που έχουν τις μεγαλύτερες δυνατές αναμενόμενες αποδόσεις, γνωρίζοντας όμως από πριν τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν. Τα σύγχρονα υποδείγματα εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου είναι σε θέση να διακρίνουν τόσο τον κίνδυνο συγκέντρωσης όσο και τις ευκαιρίες διασποράς υπολογίζοντας την οριακή συνεισφορά (*marginal contribution*) των μεμονωμένων τίτλων στο συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.

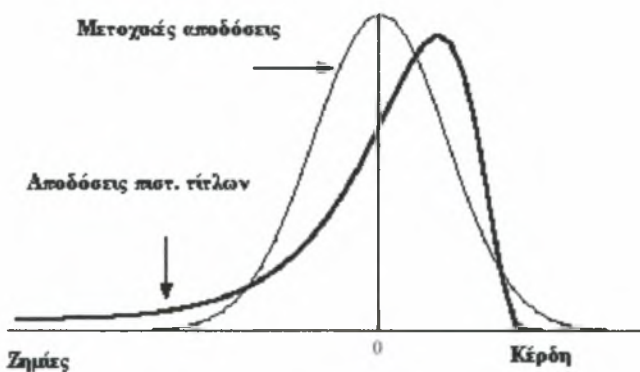
Τέλος, για να είναι πλήρης η αποτύπωση του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου χρειάζεται να μπορεί να γίνει διάκριση ανάμεσα στο ποσοστό που οφείλεται σε διακυμάνσεις των τιμών της αγοράς και σε αυτό που οφείλεται στις ιδιαιτερότητες του δανειολήπτη. Ο κίνδυνος μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας του δανειολήπτη είναι λόγου χάρη πιστωτικός ενώ ο κίνδυνος περιθωρίου επιτοκίων είναι πιστωτικός, όταν οφείλεται σε μεταβολή της πιστοληπτικής ικανότητας του δανειολήπτη, και κίνδυνος αγοράς όταν οφείλεται σε μεταβολές των επιτοκίων της κεφαλαιαγοράς. Επίσης, πρέπει κανείς να μπορεί να εκτιμά κατά πόσο οι τιμές των επιτοκίων περιλαμβάνουν το κομμάτι εκείνο του πιστωτικού κινδύνου που

προεξοφλούν οι επενδυτές ότι θα υπάρξει πριν ανακοινώσουν οι οίκοι αξιολόγησης τον υποβιβασμό μιας επιχείρησης. Ακόμη, αφού η αθέτηση είναι μια περίπτωση υποβιβασμού, στην οποία η πιστοληπτική ικανότητα έχει χειροτερεύσει τόσο που ο δανειολήπτης αδυνατεί να καλύψει τις υποχρεώσεις του, ένα επαρκές υπόδειγμα εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου πρέπει να εκτιμά κατά τον ίδιο τρόπο ενοποιώντας τους, τον κίνδυνο υποβιβασμού δηλαδή τον κίνδυνο μεταβολής του περιθωρίου επιτοκίων και τον κίνδυνο αθέτησης. Τέλος, καθώς οι μεταβολές των όρων της αγοράς όπως τα επιτόκια, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες, η ανεργία, ο πληθωρισμός ενδέχεται να επηρεάζουν την ικανότητα μιας επιχείρησης να καλύπτει τις υποχρεώσεις της, ένα πλήρες υπόδειγμα εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου θα πρέπει να συνεκτιμά και τον κίνδυνο αγοράς. Μέχρι στιγμής κανένα από τα μοντέλα που έχουν προταθεί δεν μπόρεσε να καθορίσει ένα τέτοιο πλαίσιο.

1.3 Υποδείγματα εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου

Η κατασκευή ενός υποδείματος για τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου πιστωτικών τίτλων είναι εξαιρετικά δύσκολη. Έτσι ενώ η σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίου έχει πραγματοποιήσει άλματα στην αποτίμηση του κινδύνου ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου, αποδεικνύεται αναποτελεσματική στην εκτίμηση του κινδύνου των χαρτοφυλακίων πιστωτικών τίτλων. Ένας λόγος είναι γιατί ενώ οι μετοχικές αποδόσεις ακολουθούν κατά κανόνα κανονική κατανομή, οι αποδόσεις των χαρτοφυλακίων πιστωτικών τίτλων είναι εξαιρετικά ασύμμετρες και συγκεκριμένα εμφανίζουν μεγάλη συγκέντρωση τιμών προς τα αριστερά (σχήμα 1). Επομένως χρειάζονται περισσότερα στοιχεία από τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση για να οριστεί πλήρως η κατανομή.

Σχήμα 3. Αποδόσεις μετοχικών και πιστωτικών τίτλων



Η μεγάλη ασυμμετρία στα αριστερά της κατανομής προέρχεται από τις αθετήσεις. Το χαρακτηριστικό των πιστοδοτήσεων είναι ότι έχουν μια αρκετά μεγάλη πιθανότητα σχετικά μικρής απόδοσης από το καθαρό επιτοκιακό κέρδος (Net Interest Earnings) και ταυτόχρονα μια σχετικά μικρή πιθανότητα απώλειας μεγάλου μέρους της επένδυσης. Μέσα στα πλαίσια ενός χαρτοφυλακίου πιστοδοτήσεων ο συνδυασμός των δύο αυτών πιθανοτήτων δημιουργεί την ομαλή αλλά ασύμμετρη παραπάνω κατανομή.

Το μεγαλύτερο ίσως πρόβλημα για τη δημιουργία των υποδειγμάτων εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου είναι η έλλειψη στοιχείων καθώς τα πιστωτικά γεγονότα είναι μάλλον σπάνια. Έχει παρατηρηθεί πως μόλις το 2% των επιχειρήσεων αθετούν τις υποχρεώσεις τους, γεγονός που δυσχεραίνει την κατασκευή ενός υποδείγματος, αφού ο αριθμός των γεγονότων στα οποία θα βασιστεί είναι εξαιρετικά περιορισμένος.

Ένα δεύτερο πρόβλημα είναι ότι στα υποδείγματα αυτά χρειάζεται να εισαχθούν αρκετές παράμετροι, πρώτα για να ποσοτικοποιηθεί ο κίνδυνος ζημίας από μεμονωμένες θέσεις και κατόπιν για να εκτιμηθούν οι επιμέρους συσχετίσεις που δημιουργούνται από κοινούς παράγοντες κινδύνου, έτσι ώστε να υπολογιστεί η ζημία σε επίπεδο χαρτοφυλακίου. Η αναμενόμενη ζημία για μια τράπεζα από μια τυπική πιστοδότηση σε περίπτωση αθέτησης περιλαμβάνει τρεις παράγοντες αβεβαιότητας:

Αναμενόμενη Ζημία=Πιθανότητα Αθέτησης*Ποσό εκτεθειμένο σε κίνδυνο*(1-Ποσοστό Ανάκτησης)

Το ποσό που θα είναι εκτεθειμένο σε κίνδυνο (exposure) τη χρονική στιγμή που η επιχείρηση θα αθετήσει τις υποχρεώσεις της εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Ο πρώτος παράγοντας είναι το ισχύον επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Προκειμένου να ενσωματωθεί το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο στην αποτίμηση του χρέους μιας επιχείρησης, έτσι ώστε να εκτιμηθεί η μελλοντική εξέλιξή του, ορισμένα μοντέλα το θεωρούν σταθερό (π.χ. το επιτόκιο των ετήσιων κρατικών τίτλων) ενώ άλλα προβλέπουν στοχαστική διαδικασία εξέλιξής του. Ο δεύτερος παράγοντας είναι οι διάφοροι όροι και περιορισμοί που περιέχονται στη σύμβαση έκδοσης του δανείου (indenture), όπως λόγου χάρη η λήξη, το επιτόκιο, οι όροι αποπληρωμής ή ανάκλησης. Ένας τρίτος παράγοντας είναι η ύπαρξη αχρησιμοποίητων ορίων πιστοδότησης.

Το ποσοστό ανάκτησης (recovery rate) εξαρτάται από την προτεραιότητα σε περίπτωση χρεοκοπίας και ρευστοποίησης των περιουσιακών στοιχείων της

επιχείρησης, τη μελλοντική εμπορευσιμότητα των εμπράγματων εξασφαλίσεων, τα ενδεχόμενα έξοδα ρευστοποίησης κ.α.

Η πιθανότητα αθέτησης (default probability) είναι το σημαντικότερο καθώς και το δυσκολότερο να εκτιμηθεί στοιχείο του πιστωτικού κινδύνου. Συνήθως η εκτίμησή της βασίζεται σε μία αρχική ταξινόμηση των τίτλων ανάλογα με την πιστοληπτική ικανότητα του εκδότη αλλά μπορεί να παρουσιάσει μεγάλες διακυμάνσεις κατά τη διάρκεια της πιστοδότησης.

Οι συσχετίσεις αθέτησης (default correlations) χρησιμεύουν για τον υπολογισμό κοινών πιθανοτήτων αθέτησης δύο ή περισσότερων πιστούχων. Επειδή η άμεση εκτίμησή τους από ιστορικά δεδομένα είναι αδύνατη λόγω έλλειψης επαρκών στοιχείων, συνήθως προσεγγίζονται από άλλες μεταβλητές. Η αξιοπιστία αυτών των προσεγγίσεων παίζει καθοριστικό ρόλο για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων των υποδειγμάτων.

Ο κίνδυνος αθέτησης της επιχείρησης αυξάνει καθώς η αγοραία αξία του ενεργητικού της πλησιάζει την λογιστική αξία των υποχρεώσεών της και η επιχείρηση αθετεί τις υποχρεώσεις της όταν το ενεργητικό της δεν επαρκεί για να τις καλύψει. Από μελέτες που έχουν γίνει έχει βρεθεί πως οι περισσότερες επιχειρήσεις συνεχίζουν να λειτουργούν ακόμη και όταν η αγοραία αξία του ενεργητικού τους γίνει ίση με τη λογιστική αξία των συνολικών τους υποχρεώσεων, λόγω της μακροπρόθεσμης διάρθρωσης αυτών. Έτσι έχει δειχθεί ότι το σημείο στο οποίο οι περισσότερες επιχειρήσεις χρεοκοπούν είναι κάπου ανάμεσα στις συνολικές υποχρεώσεις τους και στις βραχυπρόθεσμες ή τρέχουσες υποχρεώσεις .

Υπάρχουν δύο είδη προσεγγίσεων προκειμένου να εκτιμηθεί η πιθανότητα αθέτησης, η *προσέγγιση κεφαλαιακής δομής (structural approach)* και η *προσέγγιση απλοποιημένου τύπου (reduced form approach)*.

1.3.1 Προσέγγιση κεφαλαιακής δομής

Μία κοινή προσέγγιση εκτίμησης της πιθανότητας αθέτησης είναι η σύγκριση της αξίας του ενεργητικού της επιχείρησης με το ύψος των υποχρεώσεών της στην κεφαλαιακή της δομή (capital structure). Η προσέγγιση αυτή θεωρεί την αγοραία αξία του ενεργητικού της επιχείρησης ως καθοριστικό παράγοντα της πιθανότητας αθέτησης.

Η κλασική έκδοσή της χρησιμοποιεί τη θεωρία του Merton (1974) για την αποτίμηση του εταιρικού χρέους. Σύμφωνα με αυτή η επιχείρηση αθετεί τις υποχρεώσεις της όταν η αξία του ενεργητικού της πέσει σε ένα αρκετά χαμηλό

επίπεδο σε σχέση με το ύψος των συνολικών υποχρεώσεών της. Οι μετοχές της επιχείρησης θεωρούνται σαν ένα δικαίωμα προαίρεσης αγοράς (call option) γραμμένο πάνω στο σύνολο των περιουσιακών της στοιχείων και με τιμή εξάσκησης τη λογιστική αξία του χρέους της. Χρησιμοποιώντας ένα οποιοδήποτε υπόδειγμα αποτίμησης δικαιωμάτων (option pricing model) όπως λόγου χάρη των Black-Scholes εκτιμάται η αξία ενεργητικού και χρησιμοποιώντας τη βασική λογιστική εξίσωση σε τιμές αγοράς, Ενεργητικό = Ίδια Κεφάλαια. + Ξένα κεφάλαια, προσδιορίζεται η αξία του χρέους της επιχείρησης.

Η απλούστερη μορφή της προσέγγισης θεωρεί ότι η κεφαλαιακή δομή της επιχείρησης αποτελείται από ίδια κεφάλαια και ομολογιακό δάνειο χωρίς τοκομερίδια, ονομαστικής αξίας F και διάρκειας T (Giesecke, 2002). Η επιχείρηση δεν δίνει μέρισμα στο χρόνο T . Η αξία του χρέους της επιχείρησης $D(V_A, F, r, T)$ είναι συνάρτηση του ενεργητικού της V_A , της ονομαστικής αξίας F , του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο r και της διάρκειας T . Έστω $V_{A(t)}$ η αξία του ενεργητικού της επιχείρησης στη χρονική στιγμή t . Όταν το δάνειο λήξει στο χρόνο T , οι πιστωτές θα λάβουν την ονομαστική αξία F , εφόσον υπάρχει αρκετή αξία στην επιχείρηση για να καλύψει αυτή την πληρωμή, δηλαδή εφόσον $V_{A(t)} > F$. Οι μέτοχοι στη συνέχεια παίρνουν τη διαφορά $V_{A(t)} - F$. Αν όμως η αξία του ενεργητικού της επιχείρησης δεν επαρκεί να καλύψει το δάνειο, αν δηλαδή $V_{A(t)} < F$, τότε οι πιστωτές παίρνουν όση αξία υπάρχει ενώ οι μέτοχοι δεν παίρνουν τίποτα. Για λόγους απλούστευσης το υπόδειγμα θεωρεί δεδομένο πως δεν υπάρχουν κόστη ρευστοποίησης της επιχείρησης και πως οι πιστωτές έχουν απόλυτη προτεραιότητα στο προϊόν της ρευστοποίησης. Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα θεωρείται επίσης ότι οι ομολογιούχοι δανειστές λαμβάνουν όση αξία έχει απομείνει στην επιχείρηση στη λήξη του δανείου και όχι νωρίτερα, η αξία του χρέους δεν μπορεί να ξεπεράσει την αξία της επιχείρησης και αν η επιχείρηση έχει μηδενική αξία τότε και το χρέος έχει μηδενική αξία. Επομένως το ποσό που θα λάβουν οι πιστωτές στο χρόνο T είναι:

$$\begin{cases} F, & V_{A(t)} \geq F \\ V_{A(t)}, & V_{A(t)} < F \end{cases} \quad (1)$$

Ο βασικός ισχυρισμός του Merton είναι ότι η (1) ισοδυναμεί με απόδοση θέσης σε δικαίωμα προαίρεσης και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η θεωρία αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης (option pricing theory) προκειμένου να αποτιμηθεί το χρέος της επιχείρησης. Έτσι η απόδοση του δικαιώματος αυτού θα είναι:

$$F - \max\{F - V_{A(t)}, 0\}$$

οπότε το χρέος της επιχείρησης μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο τμήματα:

- Το πρώτο τμήμα F είναι η απόδοση στο χρόνο T ενός ομολόγου χωρίς τοκομερίδιο απαλλαγμένου κινδύνων, λήξης T και ονομαστικής αξίας F .
- Το δεύτερο τμήμα $-\max\{F - V_{A(t)}, 0\}$ είναι η απόδοση από μία θέση πώλησης ενός δικαιώματος πώλησης γραμμένο πάνω στο ενεργητικό της επιχείρησης, με τιμή εξάσκησης F και λήξη T .

Είναι δηλαδή ισοδύναμο με ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από τις εξής θέσεις:

- (1) αγορά ενός ομολόγου χωρίς τοκομερίδιο απαλλαγμένου κινδύνων λήξης T και ονομαστικής αξίας F και
- (2) πώληση ενός δικαιώματος πώλησης γραμμένο στα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης με τιμή εξάσκησης F και λήξη T .

Οι προϋποθέσεις που ισχύουν είναι εκτός από αυτή της ύπαρξης τέλειων αγορών (perfect markets) οι ακόλουθες:

- Η διαπραγμάτευση των τίτλων της επιχείρησης λαμβάνει χώρα σε συνεχή χρόνο.
- Η χρονική διάρθρωση των επιτοκίων (term structure) είναι επίπεδη και γνωστή με βεβαιότητα. Επομένως η τιμή μιας ομολογίας που υπόσχεται πληρωμή 1 ευρώ στο χρόνο t είναι $P(t) = e^{-rt}$, όπου r είναι η στιγμιαία απόδοση χωρίς κίνδυνο, σταθερή σε όλη τη διάρκεια.
- Η εξέλιξη της αξίας της επιχείρησης στο χρόνο περιγράφεται από μια στοχαστική διαδικασία διάχυσης με την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$dV_{A(t)} = \mu V_{A(t)} dt + \sigma_A V_{A(t)} dz \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \frac{dV_{A(t)}}{V_{A(t)}} = \mu dt + \sigma_A dz \quad (2)$$

όπου μ είναι η στιγμιαία απόδοση του ενεργητικού της επιχείρησης στη μονάδα του χρόνου, σ_A^2 η στιγμιαία διασπορά της απόδοσης του ενεργητικού της επιχείρησης στη μονάδα του χρόνου και dz μια τυπική διαδικασία Gauss-Wiener. Συνεπώς, η μεταβολή της αξίας της επιχείρησης είναι συνεχής στο χρόνο και οι αποδόσεις των τίτλων της είναι χρονικά ανεξάρτητες.

Η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) είναι $V_{A(t)} = V_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t + \sigma_A \sqrt{t} z_t}$ και οι παραπάνω προϋποθέσεις καθιστούν δυνατή τη χρήση του υποδείγματος Black-

Scholes για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Έτσι για να αποτιμηθεί το χρέος της επιχείρησης σύμφωνα με τα παραπάνω θα πρέπει να βρεθεί με προεξόφληση η αξία Fe^{-rt} του χρέους χωρίς κίνδυνο και από αυτή να αφαιρεθεί η αξία του δικαιώματος πώλησης. Συνεπώς, η αξία του χρέους της επιχείρησης δίνεται από τον τύπο:

$$D = V_{A(t)}\Phi(-d_1) + Fe^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η εξίσωση της τυπικής κανονικής κατανομής και

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_{A(t)}}{F}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

κι επομένως εξαρτάται από την αξία και τη μεταβλητότητα του ενεργητικού. Το πρόβλημα συνεπώς έγκειται στο να εκτιμηθούν οι δύο αυτές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές δεν είναι δυνατό να παρατηρηθούν. Η αγοραία αξία του ενεργητικού θα μπορούσε άμεσα να υπολογιστεί αν εκτός από τις μετοχές και όλος ο εξωτερικός δανεισμός της επιχείρησης ήταν διαπραγματεύσιμος στην αγορά. Επειδή στην πράξη διαπραγματεύονται μόνο οι μετοχές και μέρος του χρέους των εισηγμένων επιχειρήσεων, η εξέλιξη της αξίας της επιχείρησης και η μεταβλητότητά της δεν μπορούν να παρατηρηθούν άμεσα. Είναι όμως δυνατό να χρησιμοποιηθούν τιμές από δημόσια διαπραγματεύσιμους τίτλους της επιχείρησης για την προσέγγισή τους. Έστω μια επιχείρηση της οποίας οι μετοχές είναι δημόσια διαπραγματεύσιμες, οπότε E_t είναι σε κάθε στιγμή το ύψος των ιδίων κεφαλαίων και σ_E η μεταβλητότητά τους (όπως υπολογίζεται από τις παρατηρούμενες τιμές των μετοχών). Επειδή η απόδοση των ιδίων κεφαλαίων προκύπτει από την αξία $V_{A(t)}$ της επιχείρησης αφού εξοφληθούν στη λήξη τους οι οφειλές προς ξένους, αυτό που απομένει στους μετόχους είναι:

$$\begin{cases} V_{A(t)} - F, & V_{A(t)} \geq F \\ 0, & V_{A(t)} < F \end{cases}$$

που ισοδυναμεί με την απόδοση ενός δικαιώματος προαίρεσης αγοράς γραμμένο πάνω στο ενεργητικό της επιχείρησης, με τιμή εξάσκησης F και λήξη T . Επομένως, η αξία των ιδίων κεφαλαίων είναι ίση με την αξία του δικαιώματος, η οποία εξαρτάται από την αξία της επιχείρησης και τη μεταβλητότητά της, όπως επίσης και από τις μεταβλητές F , $T-t$ και r , των οποίων οι τιμές είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Έτσι από την εξίσωση Black-Scholes, διατηρώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, θα είναι:

$$E_t = V_{A(t)} \Phi(d_1) - Fe^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (3)$$

Αφού όμως η E_t είναι δικαίωμα αγοράς γραμμένο στην αξία της επιχείρησης, η μεταβλητότητά της θα είναι επίσης συνάρτηση των $V_{A(t)}$ και σ_A . Επομένως και αυτής η τιμή υπολογίζεται από το υπόδειγμα Black-Scholes και είναι:

$$\sigma_E = \sigma_A V_{A(t)} \frac{\Phi(d_1)}{E_t} \quad (4)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (3) και (4) υπολογίζονται οι τιμές των $V_{A(t)}$ και σ_A .

Αργότερα η προσέγγιση επεκτάθηκε έτσι ώστε να καλύπτει πιο σύνθετες κεφαλαιακές δομές καθώς και ιδιαίτερους δεσμευτικούς όρους των δανείων. Με βάση τα παραπάνω μπορεί να υπολογιστεί και η πιθανότητα αθέτησης της επιχείρησης:

$$\begin{aligned} P_{Def} &= P[V_{A(t)} < F] = P\left[V_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t + \sigma_A \sqrt{t} z_t} < F\right] \\ &= P\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)(T-t) + \sigma_A \sqrt{T-t} z_t \leq \ln \frac{F}{V_0}\right] \\ &= P\left[z_t < \frac{\ln\left(\frac{F}{V_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{F}{V_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}}\right) \end{aligned}$$

αφού $z_t \sim N(0,1)$.

1.3.2 Προσέγγιση απλοποιημένου τύπου

Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, ο χρόνος που η επιχείρηση αθετεί τις υποχρεώσεις της καθορίζεται από εξωγενείς παράγοντες, άσχετους με την κεφαλαιακή της δομή. Η πιθανότητα αθέτησης ακολουθεί στοχαστική διαδικασία και συνεπώς δεν χρειάζεται να είναι γνωστοί οι λόγοι που την προκάλεσαν. Η αποσύνδεση αυτή της διαδικασίας αθέτησης από τα χαρακτηριστικά της επιχείρησης απλοποιεί μεν την προσέγγιση, ενέχει όμως τον κίνδυνο να εξαχθούν λανθασμένα συμπεράσματα αν αγνοηθούν πληροφορίες της αγοράς σχετικές με υπαρκτές αιτίες αθέτησης.

Μία πρώτη έκδοση αυτής της προσέγγισης προτάθηκε από τους Jarrow και Turnbull το 1995, στην οποία ο χρόνος κατά τον οποίου μια επιχείρηση αθετεί τις υποχρεώσεις της ακολουθεί εκθετική κατανομή. Αργότερα το 1997 οι Jarrow, Lando και Turnbull επεκτείνουν το υπόδειγμα θεωρώντας ότι ο χρόνος αθέτησης ακολουθεί μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου. Χρησιμοποιούν τους πίνακες μετάβασης της S&P και στην περίπτωση αυτή η αθέτηση είναι το τελευταίο στάδιο της αλυσίδας στις κατηγορίες πιστοληπτικής ικανότητας της επιχείρησης.

Το 1999 οι Duffie και Singleton προτείνουν ένα νέο υπόδειγμα σύμφωνα με το οποίο η αθέτηση είναι μια στοχαστική διαδικασία βαθμού διακινδύνευσης (hazard rate stochastic process). Επειδή αυτού του είδους τα μοντέλα δεν απαιτούν μια σχέση αιτίας-αποτελέσματος μεταξύ της αξίας της επιχείρησης και της αθέτησης, στηρίζονται περισσότερο στο περιθώριο επιτοκίων. Επιπλέον οι παράμετροι που υπολογίζονται σε αυτά τα μοντέλα επιδεικνύουν αστάθεια στο χρόνο. Το πλεονέκτημά τους είναι ότι δίνουν καλά αποτελέσματα για ορισμένα δεδομένα περιθωρίου επιτοκίων και αποτιμούν με συνέπεια διάφορα χρηματοοικονομικά παράγωγα και πιστωτικούς τίτλους. Οι παράμετροι όμως είναι χρήσιμοι μόνο για την ανάλυση βραχυπρόθεσμων θέσεων, ίσως και ημερήσιων. Είναι εξαιρετικά χρήσιμα για την αποτίμηση πιστωτικών τίτλων με σύνθετους όρους, πιστωτικά παράγωγα, καταναλωτικά δάνεια, κρατικά ομόλογα και άλλα είδη χρέους των οποίων η μεταβολή της αξίας δεν επιδέχεται εξήγηση με βάση την οικονομική θεωρία.

Στη συνηθέστερη μορφή της προσέγγισης απολοποιημένου τύπου η αθέτηση περιγράφεται από μία στοχαστική διαδικασία, η οποία καθορίζεται από μια εξωγενή διαδικασία έντασης (intensity based reduced form approach) όπως για παράδειγμα η κατανομή Poisson (Giesecke, 2002). Έτσι αν T_1, T_2, \dots είναι οι χρόνοι εκδήλωσης ενός γεγονότος (στην προκειμένη περίπτωση της αθέτησης), N_t είναι ο αριθμός των εκδηλώσεων του γεγονότος στο διάστημα $[0, t]$, όπου:

$$N_t = \sum_i 1_{\{T_i \leq t\}}$$

τότε η $N = (N_t)_{t \geq 0}$ είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση λ , όταν οι ενδιάμεσες εκδηλώσεις αθέτησης $N_t - N_s$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν κατανομή Poisson με ένταση $\lambda(t-s)$ για $s < t$, δηλαδή:

$$P[N_t - N_s = k] = \frac{1}{k!} \lambda^k (t-s)^k e^{-\lambda(t-s)}$$

Βασική προϋπόθεση της προσέγγισης αυτής είναι να τεθεί ο χρόνος εκδήλωσης της αθέτησης σαν το πρώτο άλμα μιας Poisson διαδικασίας με δεδομένη ένταση λ . Ο χρόνος αθέτησης τ ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και η πιθανότητα αθέτησης δίνεται από τη σχέση:

$$F(T) = P[\tau \leq T] = 1 - e^{-\lambda T}$$

Η ένταση ή ο ρυθμός διακινδύνευσης είναι η δεσμευμένη πιθανότητα εκδήλωσης αθέτησης, δοθέντος ότι δεν έχει προηγηθεί αθέτηση:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P[\tau \in (t, t+h) | \tau > t] = \lambda$$

Στην περίπτωση αυτή αν η δείκτρια συνάρτηση αθέτησης ορίζεται ως

$$1_{\{\tau=T\}} = \begin{cases} 1, & \tau = T \\ 0, & \tau \neq T \end{cases} \text{ και } \tilde{E}(\cdot) \text{ η αναμενόμενη τιμή με βάση τη risk-neutral}$$

πιθανότητα (η πιθανότητα που υπολογίζεται με βάση το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r) τότε η τιμή ενός ομολόγου λήξης T και ποσοστού ανάκτησης σε περίπτωση αθέτησης R , όταν το επιτόκιο r παραμένει σταθερό είναι στο χρόνο 0:

$$\begin{aligned} B_0^T &= \tilde{E}[e^{-rT} (1_{\{\tau>T\}} + R1_{\{\tau \leq T\}})] \\ &= e^{-rT} (e^{-\tilde{\lambda}T} + R(1 - e^{-\tilde{\lambda}T})) \\ &= \bar{B}_0^T - \bar{B}_0^T (1 - R) \tilde{P}[\tau \leq T] \end{aligned}$$

η οποία είναι η αξία ενός ομολόγου χωρίς κίνδυνο και χωρίς τοκομερίδιο μείον την αξία της risk-neutral αναμενόμενης ζημίας. Στην περίπτωση που $R=0$, τότε είναι:

$$B_0^T = \bar{B}_0^T \tilde{P}[\tau > T] = e^{-(r+\tilde{\lambda})T}$$

δηλαδή ένα οποιοδήποτε ομόλογο μπορεί να αποτιμηθεί όπως τα ομόλογα χωρίς κίνδυνο, προσαρμόζοντας κατάλληλα το προεξοφλητικό επιτόκιο. Αντί το επιτοκίου χωρίς κίνδυνο r χρησιμοποιείται το επιτόκιο με κίνδυνο αθέτησης $r + \tilde{\lambda}$, όπου $\tilde{\lambda}$ είναι η risk-neutral ένταση.

1.4 Τελευταίες εξελίξεις στη διαχείριση πιστωτικού κινδύνου

Τα τελευταία χρόνια έχουν προταθεί τέσσερα υποδείγματα εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου:

CreditMetrics της JP Morgan

Δημοσιοποιήθηκε το 1997 και βασίζεται στην πιθανότητα μετάβασης του κάθε υπόχρεου από μία κατάσταση πιστωτικού κινδύνου σε άλλη ή και στην κατάσταση αθέτησης, μέσα σε ορισμένο χρονικό διάστημα. Ο κίνδυνος προέρχεται είτε από τη μεταβολή της πιστοληπτικής ικανότητας της επιχείρησης λόγω της μεταβλητότητας της αξίας των περιουσιακών της στοιχείων είτε από τη μεταβολή της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων της αγοράς.

Portfolio Manager της KMV

Υπολογίζει την αναμενόμενη συχνότητα αθέτησης (Expected Default Frequency) για κάθε υπόχρεο χωριστά ανεξάρτητα από την κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας που αυτός ανήκει. Η πιθανότητα να περιέλθει η επιχείρηση σε κατάσταση αθέτησης εξαρτάται από τη μεταβλητότητα της αγοραίας αξίας των περιουσιακών της στοιχείων σε σχέση με το ύψος των δανειακών της υποχρεώσεων στην κεφαλαιακή της δομή (structural approach).

CreditRisk+ της Credit Suisse First Boston

Παρουσιάστηκε στα τέλη του 1996 από την Credit Suisse Financial Products, θυγατρική του χρηματοπιστωτικού ομίλου Credit Suisse First Boston. Το υπόδειγμα χρησιμοποιεί μαθηματικές τεχνικές γνωστές κυρίως στο χώρο των ασφαλειών. Η πιθανότητα αθέτησης θεωρείται ότι ακολουθεί Γάμμα ή Poisson κατανομή (στοχαστική διαδικασία) ανάλογα με το χώρο στον οποίο δραστηριοποιείται η επιχείρηση δηλαδή εξαρτάται από εξωγενείς παράγοντες (reduced form approach) και όχι από την κεφαλαιακή δομή και επομένως την αξία της επιχείρησης.

CreditPortfolioView της McKinsey & Co

Το υπόδειγμα υπολογίζει για κάθε επιχείρηση χωριστά μια πιθανότητα αθέτησης καθώς και πιθανότητα μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας, σύμφωνα με κανονικά μεταβαλλόμενους μακροοικονομικούς παράγοντες. Ενσωματώνει επομένως την κατάσταση της οικονομίας καθώς οι πίνακες μετάβασης τροποποιούνται κατά τη διάρκεια του οικονομικού κύκλου, έτσι ώστε να περιλαμβάνουν αυξημένη πιθανότητα αναβάθμισης σε περιόδους οικονομικής άνθησης και αντίθετα αυξημένη πιθανότητα υποβάθμισης σε περιόδους κρίσεων.

Θα πρέπει να σημειωθεί πως όλα αυτά τα υποδείγματα δεν αποτελούν παρά εργαλεία μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου, που όμως λειτουργούν συμπληρωματικά στην εμπειρία και την επαγγελματική κρίση των αρμοδίων στελεχών που είναι επιφορτισμένα με την εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου που

διατρέχει το πιστωτικό ίδρυμα. Που σημαίνει πως κανένα από τα παραπάνω υποδείγματα δεν είναι ικανό να εγγυηθεί 100% ακριβή αποτελέσματα και επομένως ασφαλή πρόβλεψη της κατάστασης αθέτησης μιας επιχείρησης.

Το υπόλοιπο της εργασίας έχει ως ακολούθως. Στο μέρος 2 περιγράφεται η μέθοδος VaR και οι βασικές προσεγγίσεις της. Στα μέρη 3-6 περιγράφονται τα τέσσερα υποδείγματα εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου που χρησιμοποιούν τη μέθοδο VaR: το CreditMetrics της JP Morgan, το Portfolio Manager της KMV, το CreditRisk+ της Credit Suisse First Boston και το CreditPortfolioView της Mc Kinsey & Co. Στο μέρος 7 γίνεται μια σύντομη αναφορά στον έλεγχο εγκυρότητας των αποτελεσμάτων των υποδειγμάτων και τέλος στο μέρος 8 γίνεται μια σύγκριση των υποδειγμάτων και αναφέρονται τα συμπεράσματα της εργασίας.

2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ VALUE AT RISK (VAR)

Το κοινό χαρακτηριστικό όλων των παραπάνω υποδειγμάτων είναι ότι χρησιμοποιούν τη μέθοδο Value at Risk (VaR)². Η μέθοδος αρχικά αναπτύχθηκε για να μετρά τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο αγοράς με αφορμή τις χρηματοοικονομικές καταστροφές των αρχών της δεκαετίας του 90, όπως λόγω χάρη την κατάρρευση της Barings κ.α.. Στις μέρες μας όμως η συγκεκριμένη μεθοδολογία καλύπτει πολύ περισσότερους τομείς και συνιστά πλέον το βασικότερο εργαλείο με το οποίο τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ελέγχουν και διαχειρίζονται τόσο τον πιστωτικό όσο και τον λειτουργικό κίνδυνο.

Η VaR είναι μία μέθοδος εκτίμησης κινδύνου που χρησιμοποιεί συνηθισμένες στατιστικές τεχνικές. Συγκεκριμένα μετράει τη χειρότερη δυνατή ζημία σε δεδομένο χρονικό ορίζοντα κάτω από φυσιολογικές κινήσεις της αγοράς και με δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης. Για παράδειγμα όταν μια Τράπεζα λέει ότι η ημερήσια VaR του χαρτοφυλακίου συναλλαγών της είναι 100 εκατομμύρια ευρώ με διάστημα εμπιστοσύνης 99%, εννοεί ότι κάτω από φυσιολογικές συνθήκες της αγοράς υπάρχει πιθανότητα 1% να υποστεί σε μία ημέρα ζημία πάνω από 100 εκατομμύρια ευρώ. Έχοντας δηλαδή στη διάθεσή του ένα μόνο αριθμό ο χρήστης μπορεί να εκτιμήσει την έκθεση της Τράπεζας σε κίνδυνο καθώς και την πιθανότητα ενός ατυχούς γεγονότος. Είναι επίσης σημαντικό ότι ο συγκεκριμένος αριθμός μετράει τον κίνδυνο στο νόμισμα που εκφράζονται τα μεγέθη της Τράπεζας δηλαδή σε ευρώ, έτσι ώστε να μπορούν να αποφασίσουν οι αρμόδιοι διευθυντές ή οι μέτοχοι αν αισθάνονται ασφαλείς με αυτό το επίπεδο του κινδύνου. Σε αντίθεση με προηγούμενες μεθόδους η VaR δίνει μια ολοκληρωμένη άποψη του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου, καθώς λαμβάνει υπόψη εκτός από τις τρέχουσες θέσεις, τις συσχετίσεις και τη χρηματοοικονομική μόχλευση (leverage). Η ραγδαία εξέλιξη της μεθόδου οφείλεται κυρίως σε τρεις παράγοντες: α) τη μεγαλύτερη πίεση από μέρους των ελεγκτικών αρχών για καλύτερο έλεγχο του χρηματοοικονομικού κινδύνου, β) την παγκοσμιοποίηση των αγορών χρήματος, η οποία δημιουργεί ολόένα και

² Ο όρος Value at Risk χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά τον Ιούλιο του 93 σε μια εκδήλωση που διοργάνωσε η Group of Thirty, μια συμβουλευτική ομάδα κορυφαίων τραπεζιτών, οικονομολόγων και ακαδημαϊκών από μεγάλες βιομηχανικές χώρες, προκειμένου να συζητηθούν οι καλύτερες πρακτικές διαχείρισης κινδύνων.

περισσότερες πηγές κινδύνου και γ) την πρόοδο της τεχνολογίας, η οποία έχει καταστήσει δυνατή τη συνολική διαχείριση του κινδύνου στο πλαίσιο όλης της επιχείρησης.

Βασικά η VaR πρέπει να χρησιμοποιείται από κάθε επιχείρηση η οποία εκτίθεται σε χρηματοοικονομικό κίνδυνο. Η εφαρμογή της μεθόδου μπορεί να χρησιμεύσει για την:

- Πληροφόρηση της διοίκησης για τους κινδύνους από τις επενδυτικές και συναλλακτικές κινήσεις.
- Θέσπιση ορίων στους αναλαμβανόμενους κινδύνους.
- Κατανομή πόρων στα διάφορα τμήματα της επιχείρησης με βάση τη σχέση απόδοσης προς αναλαμβανόμενο κίνδυνο.

Για τους παραπάνω λόγους η μέθοδος υιοθετήθηκε από:

- Χρηματοοικονομικά ιδρύματα με μεγάλα και σύνθετα χαρτοφυλάκια συναλλαγών και τα οποία εφαρμόζουν κεντρικό σύστημα διαχείρισης κινδύνων.
- Ελεγκτικές αρχές όπως λόγου χάρη η U.S. Federal Reserve Bank, η Basel Committee on Banking Supervision και άλλοι προκειμένου να καθορίσουν το ελάχιστο επίπεδο διαθεσίμων των Τραπεζών για κάλυψη χρηματοοικονομικών κινδύνων.
- Επιχειρήσεις που εκτίθενται σε χρηματοοικονομικό κίνδυνο όπως λόγου χάρη οι πολυεθνικές, οι οποίες συναλλάσσονται σε διάφορα νομίσματα.
- Θεσμικοί επενδυτές όπως τα ασφαλιστικά ταμεία, τα οποία διαχειρίζονται τεράστια ποσά, επενδυμένα σε διάφορους τίτλους.

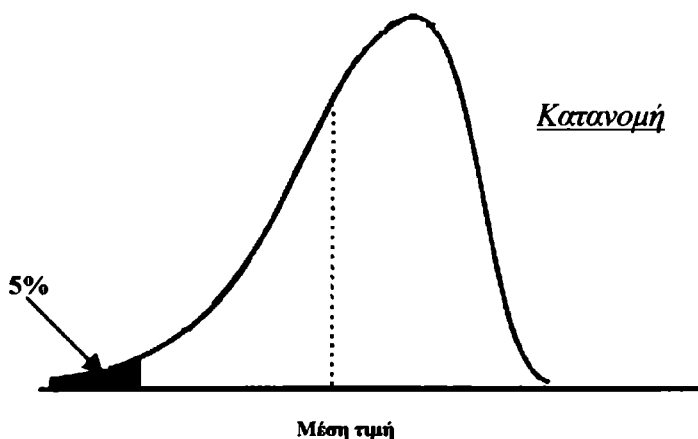
Καθώς η χρήση της μεθόδου προϋποθέτει διαφάνεια στη διαχείριση των κινδύνων καθώς και διάκριση των συναλλακτικών από τις ελεγκτικές θέσεις, εκτιμάται πως πολλές από τις πρόσφατες χρηματοοικονομικές καταστροφές θα μπορούσαν να είχαν αποφευχθεί αν η VaR είχε υιοθετηθεί από τους οργανισμούς που επλήγησαν. Αν ήταν δηλαδή υποχρεωμένοι οι traders να αποτιμούν τις θέσεις τους σε τιμές της αγοράς – mark-to-market- και ήταν σε θέση οι διοικήσεις να ελέγχουν τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο.

Η VaR συνοψίζει τη χειρότερη ζημία που μπορεί να υποστεί μια επιχείρηση στη διάρκεια ενός χρονικού ορίζοντα και με δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης. Συγκεκριμένα η VaR περιγράφει ένα ποσοστιαίο σημείο της μελλοντικής κατανομής των κερδών ή ζημιών στη διάρκεια του υπό μελέτη χρονικού ορίζοντα. Αν c είναι το

επιλεγμένο διάστημα εμπιστοσύνης, η VaR αντιστοιχεί στο 1- α αριστερό άκρο της κατανομής. Για παράδειγμα με 95% διάστημα εμπιστοσύνης η VaR πρέπει να είναι τόση ώστε να την ξεπερνά το 5% του συνολικού αριθμού των παρατηρήσεων στην κατανομή.

Προκειμένου να υπολογιστεί η VaR μιας θέσης πρέπει πρώτα να προσομοιωθεί η απόδοση της θέσης από ιστορικά δεδομένα για χρονικό διάστημα ίσο με αυτό που μελετάται π.χ. ένα μήνα, να κατασκευαστεί η κατανομή πυκνότητας πιθανότητας των μηνιαίων αποδόσεων και να οριστεί ένα ικανοποιητικό επίπεδο εμπιστοσύνης π.χ. 95%. Η VaR είναι η τιμή από την οποία είναι μικρότερες το 5% των παρατηρήσεων. Συνεπώς η πιθανότητα να εμφανίσει η συγκεκριμένη θέση ζημία μεγαλύτερη από τη VaR είναι 5%

Σχήμα 4. Γραφική απεικόνιση της VaR



Στη βιβλιογραφία εκτός από τη VaR που περιγράφεται παραπάνω αναφέρεται και η Σχετική VaR (Relative VaR) η οποία αντί της απόλυτης ζημίας δίνει την απόσταση από τη μέση τιμή της κατανομής των αποδόσεων. Σε καμία περίπτωση όμως δεν πρέπει να εννοηθεί ότι η VaR απεικονίζει τη χειρότερη δυνατή ζημία που μπορεί να υποστεί η επιχείρηση σε οποιαδήποτε στιγμή. Αυτή μπορεί μόνο να εκτιμηθεί με έλεγχο ακραίων καταστάσεων, ο οποίος πρέπει να είναι αναπόσπαστο συμπλήρωμα της VaR. Επίσης η χρήση ενός υποδείγματος εκτίμησης κινδύνου που βασίζεται στη μέθοδο VaR δεν μπορεί να υποκαταστήσει την κρίση και την εμπειρία ενός επαγγελματία χρηματοοικονομικού διευθυντή ή αναλυτή. Συνεπώς η VaR μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα απαραίτητο εργαλείο, που όμως από μόνο του δεν αρκεί για τον πλήρη έλεγχο του κινδύνου που αντιμετωπίζει μια επιχείρηση. Πρέπει να συνοδεύεται από περιορισμούς και ελέγχους και επιπλέον από μια ανεξάρτητη

λειτουργία διαχείρισης του κινδύνου. Στην πραγματικότητα η υιοθέτηση της μεθόδου VaR έχει οδηγήσει σε ευρεία χρήση ασφαλών πρακτικών διαχείρισης κινδύνου.

2.1 Υπολογισμός της VaR

Για τον υπολογισμό της VaR τίθενται δύο προϋποθέσεις. Πρώτον ότι το χαρτοφυλάκιο παραμένει “παγωμένο” στη συγκεκριμένη χρονική περίοδο ή γενικότερα το επίπεδο αποδεκτού κινδύνου της επιχείρησης δε μεταβάλλεται. Η δεύτερη προϋπόθεση είναι ότι το χαρτοφυλάκιο θα αποτιμηθεί σε τιμές της αγοράς στη λήξη της χρονικής περιόδου. Αυτό θα γίνει είτε λαμβάνοντας την εμπειρική κατανομή που προκύπτει από ιστορικά δεδομένα, είτε λαμβάνοντας μια παραμετρική προσέγγιση της κατανομής όπως λόγου χάρη την κανονική κατανομή, οπότε η VaR θα υπολογιστεί από την τυπική απόκλιση. Έστω λοιπόν ότι πρέπει να υπολογιστεί η VaR ενός μετοχικού χαρτοφυλακίου 100 εκατομμυρίων ευρώ για χρονική περίοδο 10 ημερών και με διάστημα εμπιστοσύνης 99%. Τα βήματα που ακολουθούνται είναι (Jorion, 2001):

- Αποτίμηση του τρέχοντος χαρτοφυλακίου σε τιμές της αγοράς (π.χ. 100 εκ. Ευρώ)
- Μέτρηση της μεταβλητότητας των παραγόντων κινδύνου (π.χ. 15% το χρόνο)
- Ορισμός του υπό μελέτη χρονικού ορίζοντα (π.χ. 10 ημέρες)
- Καθορισμός του διαστήματος εμπιστοσύνης (π.χ. 99%, το οποίο αντιστοιχεί σε $\alpha=2,33$ στην κανονική κατανομή)
- Υπολογισμός της μεγαλύτερης απώλειας με βάση τα προηγούμενα (π.χ. $100 \times 15\% \times \sqrt{10/252} \times 2,33 = 7$ εκατ. Ευρώ)

Αναλυτικά ο υπολογισμός της VaR έχει ως εξής:

2.1.1 Υπολογισμός VaR για γενικές κατανομές

Έστω αρχικό χαρτοφυλάκιο W_0 με απόδοση R . Η αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος του χρονικού διαστήματος t θα είναι $W=W_0(1+R)$. Η μέση απόδοση και η τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου είναι αντίστοιχα μ και σ . Η ελάχιστη τιμή του χαρτοφυλακίου στο δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης ορίζεται ως $W^* = W_0(1+R^*)$. Κατόπιν τούτων η VaR ορίζεται ως:

$$VaR = W_0 \cdot W^* - W_0 R^*$$

Η σχετική VaR, η οποία σημειωτέον είναι πιο χρήσιμη γιατί εκτιμά τον κίνδυνο με βάση την απόκλιση από τη μέση ή την "προυπολογισθείσα" τιμή στη λήξη του χρονικού ορίζοντα, υπολογίζεται ως:

$$\text{VaR} = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu)$$

Και στις δύο περιπτώσεις η εύρεση της VaR ισοδυναμεί με την εύρεση του W^* ή της ελάχιστης απόδοσης R^* . Γενικότερα αν $f(w)$ είναι η κατανομή πυκνότητας πιθανότητας της μελλοντικής αξίας του χαρτοφυλακίου, τότε για διάστημα εμπιστοσύνης c η μικρότερη δυνατή τιμή W^* , τέτοια ώστε να ξεπεραστεί με πιθανότητα c είναι:

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dw$$

ή αλλιώς η πιθανότητα τιμής μικρότερης από W^* , $p = P(w \leq W^*)$ είναι $1-c$:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = P(w \leq W^*) = p$$

Με άλλα λόγια η επιφάνεια από το $-\infty$ ως το W^* πρέπει να είναι $p=1-c$, λόγου χάρη στο προηγούμενο παράδειγμα 5%.

2.1.2 Υπολογισμός VaR για παραμετρικές κατανομές

Ο υπολογισμός της VaR είναι απλούστερος όταν η αξία του χαρτοφυλακίου θεωρηθεί ότι ακολουθεί μια παραμετρική κατανομή όπως λόγου χάρη η κανονική. Στην περίπτωση αυτή η VaR υπολογίζεται από την τυπική απόκλιση και έναν παράγοντα που εξαρτάται από το διάστημα εμπιστοσύνης. Πρόκειται δηλαδή για μια παραμετρική μέθοδο, καθώς απαιτεί την εκτίμηση παραμέτρων αντί της εύρεσης του ποσοστιαίου σημείου απευθείας από την εμπειρική κατανομή. Η μέθοδος αυτή είναι απλούστερη, βολικότερη και ακριβέστερη αρκεί οι τιμές του χαρτοφυλακίου να προσεγγίζονται από την κανονική κατανομή ή οποιαδήποτε άλλη παραμετρική κατανομή.

Στην πράξη συνήθως θεωρείται ότι η απόδοση του χαρτοφυλακίου ακολουθεί κανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(R)$. Η υπόθεση της κανονικότητας αν και είναι φανερό ότι δεν είναι εντελώς βάσιμη, εντούτοις έχει το πλεονέκτημα ότι διευκολύνει τους υπολογισμούς. Μπορεί δηλαδή να υπολογιστεί το διάστημα εμπιστοσύνης με βάση μόνο μία παράμετρο a η οποία αποτυπώνει την απόσταση του εκάστοτε ποσοστιαίου σημείου από την μέση τιμή μ σε μονάδες τυπικής απόκλισης σ . Επομένως αν στην ελάχιστη αξία W^* αντιστοιχιστεί η ελάχιστη απόδοση R^* , τέτοια ώστε $W^* = W_0(1+R^*)$, η R^* είναι γενικά αρνητική αφού η VaR αναφέρεται στο τμήμα της κατανομής που περιγράφει τις ζημίες οπότε μπορεί να γραφτεί ως $-|R^*|$. Στη συνέχεια η τυχαία μεταβλητή R^* μπορεί να μετασχηματιστεί

σε τυποποιημένη κανονική μεταβλητή $\varepsilon \sim N(0,1)$ και να συσχετιστεί με τον παράγοντα α της κατανομής ως:

$$-\alpha = \frac{-|R^*| - \mu}{\sigma} \quad (5)$$

Επομένως θα είναι:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{R^*} f(w)dw = \int_{-\infty}^{R^*} f(r)dr = \int_{-\infty}^{\alpha} \Phi(\varepsilon)d\varepsilon$$

Επομένως το πρόβλημα υπολογισμού της VaR έγκειται στο να βρεθεί ο παράγοντας α τέτοιος ώστε η επιφάνεια αριστερά του να είναι ίση με $1-c$. Αυτό όμως μπορεί να διαβαστεί απευθείας από τους πίνακες της αθροιστικής τυπικής κανονικής κατανομής. Λόγου χάρη αριστερό διάστημα εμπιστοσύνης 5% αντιστοιχεί σε $\alpha=1,65$. Εξάλλου από την (5) βρίσκεται ότι η ελάχιστη αναμενόμενη απόδοση είναι:

$$R^* = -\alpha\sigma + \mu$$

Αν επιπλέον υποθεθεί ότι οι παράμετροι μ και σ εκφράζονται σε ετήσια βάση, ενώ το διάστημα που εξετάζεται είναι Δt έτη, τότε η προσαρμοσμένη τυπική απόκλιση είναι $\sigma\sqrt{\Delta t}$, οπότε η σχετική VaR θα είναι:

$$VAR = -W_0(R^* - \mu) = W_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t}$$

Με άλλα λόγια η VaR είναι απλά το γινόμενο της αρχικής αξίας του χαρτοφυλακίου επί την τυπική απόκλιση της κατανομής και επί ένας παράγοντα που καθορίζεται από το χρονικό ορίζοντα και το διάστημα εμπιστοσύνης. Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε παραμετρική κατανομή, αρκεί η μοναδική παράμετρος που περιέχει αβεβαιότητα να είναι η σ . Η κανονική κατανομή προτιμάται ιδιαίτερα γιατί προσεγγίζει πολλές εμπειρικές κατανομές, κυρίως αυτές των τιμών των μεγάλων, καλά διαφοροποιημένων χαρτοφυλακίων. Δεν ενδείκνυται για χαρτοφυλάκια με ισχυρές θέσεις σε δικαιώματα προαίρεσης καθώς και σε μη διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια.

2.2 Επιλογή της χρονικής διάρκειας και του διαστήματος εμπιστοσύνης

Σε γενικές γραμμές η VaR αυξάνεται καθώς αυξάνεται τόσο η χρονική διάρκεια όσο και το διάστημα εμπιστοσύνης. Έτσι αυξομειώνοντας τον ένα ή τον άλλο παράγοντα μπορεί να προκύψουν ισοδύναμες VaR. Επίσης όταν χρησιμοποιούνται παραμετρικές κατανομές είναι εύκολο να υπολογιστεί η VaR με διάφορα διαστήματα εμπιστοσύνης και για διάφορες διάρκειες. Ιδιαίτερα για τις μετατροπές της χρονικής διάρκειας με βάση τη σχέση $\sigma\sqrt{\Delta t}$ θα πρέπει επιπλέον οι

αποδόσεις του χαρτοφυλακίου να είναι χρονικά ανεξάρτητες, κανονικά κατανομημένες και με σταθερές παραμέτρους (μέση τιμή – τυπική απόκλιση). Η επιλογή του παράγοντα εξαρτάται από το λόγο που χρησιμοποιείται η VaR.

Όταν η VaR χρησιμοποιείται για να συγκρίνει κινδύνους της ίδιας επιχείρησης σε διαφορετικές αγορές η επιλογή και των δυο παραγόντων μπορεί να είναι αυθαίρετη. Μια τράπεζα λόγω χάρη μπορεί να χρησιμοποιεί μια 99% VaR για χρονικό ορίζοντα ενός έτους προκειμένου να συγκρίνει τους κινδύνους που αναλαμβάνονται από τις διάφορες μονάδες της. Στην περίπτωση αυτή δεν έχει τόση σημασία η επιλογή των παραγόντων όσο η συνέπεια στην επιλογή τους. Όλες οι μονάδες δηλαδή θα πρέπει να κρίνονται με κοινό μέτρο.

Όταν όμως η VaR χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της μεγαλύτερης δυνατής ζημίας που μπορεί να υποστεί μια επιχείρηση, τότε η επιλογή του χρονικού ορίζοντα εξαρτάται από τη φύση του χαρτοφυλακίου. Μια προσέγγιση είναι να οριστεί ως ο χρόνος που απαιτείται για την ομαλή ρευστοποίησή του. Οι τράπεζες λόγω χάρη χρησιμοποιούν ημερήσια VaR λόγω της ρευστότητας και της συνεχούς ανανέωσης των χαρτοφυλακίων τους. Αντίθετα τα ασφαλιστικά ταμεία επενδύουν σημαντικά κεφάλαια σε τίτλους σταθερής απόδοσης, οπότε επιλέγουν μεγαλύτερο χρονικό ορίζοντα, συνήθως 1 μήνα. Μια άλλη ερμηνεία αυτής της προσέγγισης είναι ότι το χρονικό διάστημα που επιλέγεται είναι τέτοιο ώστε να μπορούν να αντισταθμιστούν οι κίνδυνοι αγοράς. Μια δεύτερη προσέγγιση είναι να επιλεγεί η χρονική διάρκεια κατά την οποία το χαρτοφυλάκιο παραμένει σταθερό. Αυτό γιατί αφού ο υπολογισμός της VaR προϋποθέτει ότι το χαρτοφυλάκιο παραμένει “παγωμένο”, η τιμή της δεν έχει νόημα για μεγαλύτερο χρονικό ορίζοντα. Έτσι αν οι διαχειριστές του χαρτοφυλακίου χρειάζεται να αναθεωρούν τη διάρθρωσή του κάθε μήνα, με αυτή τη διάρκεια πρέπει να υπολογίζεται η VaR. Επίσης, η υπόθεση της κανονικότητας των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο για μικρούς χρονικούς ορίζοντες. Στην πράξη ο μικρότερος ορίζοντας που χρησιμοποιείται είναι μία ημέρα. Για τις παραπάνω περιπτώσεις η επιλογή του διαστήματος εμπιστοσύνης εξαρτάται από το επίπεδο αποδεκτού κινδύνου της επιχείρησης αφού μεγαλύτερο διάστημα εμπιστοσύνης δίνει μεγαλύτερη VaR.

Μια τρίτη περίπτωση χρήσης της VaR είναι για τον καθορισμό του διαθέσιμου κεφαλαίου σε αντιστάθμιση του αναλαμβανόμενου κινδύνου. Στην περίπτωση αυτή η VaR πρέπει να περιγράφει πλήρως και με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια όλους τους κινδύνους που αντιμετωπίζει η επιχείρηση, όπως κίνδυνο

αγοράς, πιστωτικό, λειτουργικό κ.α. Η επιλογή του διαστήματος εμπιστοσύνης πρέπει να αντικατοπτρίζει την απέχθεια της επιχείρησης προς τον κίνδυνο (risk aversion) και το κόστος από ζημία που ξεπερνάει τη VaR. Μεγαλύτερη απέχθεια προς τον κίνδυνο ή μεγαλύτερο κόστος ζημίας σημαίνει διατήρηση μεγαλύτερου διαθέσιμου κεφαλαίου για να καλυφθεί η ζημία, γεγονός που οδηγεί στην επιλογή μεγαλύτερου διαστήματος εμπιστοσύνης. Παράλληλα η επιλογή του χρονικού ορίζοντα πρέπει να είναι τέτοια που να επιτρέπει διορθωτικές κινήσεις όταν αρχίσουν να αναπτύσσονται οι ζημιές. Οι διορθωτικές κινήσεις μπορεί να είναι μείωση της επικινδυνότητας του χαρτοφυλακίου ή αύξηση του μετοχικού κεφαλαίου. Για παράδειγμα αν ένα τραπεζικό ίδρυμα επιθυμεί να διατηρηθεί στην κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας Βαα, οπότε η πιθανότητα αθέτησης τον επόμενο χρόνο να είναι 0,17%, θα πρέπει να έχει αρκετά κεφάλαια ώστε να καλύψει τη VaR του για ένα χρόνο με διάστημα εμπιστοσύνης 99,83% (100-0,17). Μεγαλύτεροι χρονικοί ορίζοντες με το ίδιο προφίλ κινδύνου αναπόφευκτα οδηγούν σε μεγαλύτερες πιθανότητες αθέτησης.

Η επιλογή των ποσοτικών αυτών παραγόντων είναι επίσης σημαντική για τη διαπίστωση της εγκυρότητας και αξιοπιστίας των υποδειγμάτων που χρησιμοποιούν τη VaR. Για το σκοπό αυτό γίνονται διάφοροι έλεγχοι που σκοπό έχουν να ανακαλύψουν τυχόν τάσεις υποτίμησης ή υπερεκτίμησης των αποτελεσμάτων. Μεγάλοι χρονικοί ορίζοντες σημαίνει ότι ο αριθμός των παρατηρήσεων μικραίνει και μαζί με αυτόν και η δυνατότητα του ελέγχου. Αν λόγω χάρη οριστεί διάστημα δύο εβδομάδων θα υπάρξουν μόνο 26 ανεξάρτητες παρατηρήσεις σε ένα χρόνο για να επαληθευθεί η αξιοπιστία του υποδείγματος, γεγονός που καθιστά τον έλεγχο προβληματικό. Αντίθετα αν επιλεγεί χρονικός ορίζοντας μιας ημέρας θα υπάρξουν περίπου 252 παρατηρήσεις σε ένα χρόνο. Ομοίως επιλογή μεγάλου διαστήματος εμπιστοσύνης έχει σαν αποτέλεσμα να βρεθούν πολύ λίγες παρατηρήσεις στο αριστερό τμήμα της κατανομής και συνεπώς αδυναμία ελέγχου. Αν λόγω χάρη για μια ημερήσια VaR επιλεγεί διάστημα εμπιστοσύνης 99% θα χρειαστούν 100 ημέρες για να επιβεβαιωθεί ότι το υπόδειγμα ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.

Σαν παράδειγμα αναφέρεται η προσέγγιση της Επιτροπής της Βασιλείας, η οποία ορίζει για τα εσωτερικά συστήματα διαβάθμισης των τραπεζών διάστημα εμπιστοσύνης 99% για χρονικό ορίζοντα 10 ημερών. Η VaR που υπολογίζεται με αυτούς τους παράγοντες πολλαπλασιάζεται κατόπιν επί 3 προκειμένου να καθοριστεί το απαραίτητο διαθέσιμο κεφάλαιο. Η επιτροπή επέλεξε ορίζοντα 10 ημερών επειδή πίστευε πως κατ' αυτόν τον τρόπο αντισταθμίζεται το κόστος συχνού ελέγχου από την

έγκαιρη διάγνωση ενδεχόμενων προβλημάτων. Η επιτροπή επίσης επέλεξε διάστημα εμπιστοσύνης 99% θέλοντας να συγκεράσει την επιθυμία των ελεγκτικών αρχών να διασφαλίσουν ένα υγιές χρηματοπιστωτικό σύστημα και τη δυσaréσκεια των τραπεζιτών για τα δυσμενή αποτελέσματα των υποχρεωτικών διαθεσίμων στην κερδοφορία των τραπεζών. Ακόμη κι έτσι όμως ζημία χειρότερη από τη VaR μπορεί να εμφανιστεί στο 1% των περιπτώσεων δηλαδή περίπου μια φορά στα τέσσερα χρόνια (υπολογίζεται ότι οι εργάσιμες ημέρες κάθε έτους είναι περίπου 252). Για το λόγο αυτό εισάγεται ο παράγοντας 3 ο οποίος καθιστά το γεγονός της χρεοκοπίας του πιστωτικού ιδρύματος σχεδόν αδύνατο.

2.3 Εκτίμηση της ακρίβειας της VaR

Είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουν οι χρήστες της μεθόδου το βαθμό ακρίβειας των εκτιμήσεων που παρέχει, καθώς αυτή επηρεάζεται από το εκάστοτε δείγμα δεδομένων. Με άλλα λόγια διαφορετικά δείγματα θα δώσουν διαφορετικές VaR. Όταν η κατανομή των τιμών του μεγέθους του οποίου υπολογίζεται η VaR είναι κανονική, τότε η εκτιμώμενη μέση τιμή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή την πραγματική μέση τιμή και τυπική απόκλιση σ^2/T , όπου T ο αριθμός των παρατηρήσεων:

$$\hat{\mu} \approx N(\mu, \sigma^2 / T)$$

Το τυπικό σφάλμα της εκτιμώμενης μέσης τιμής τείνει στο 0 καθώς αυξάνει ο αριθμός των παρατηρήσεων. Όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων T είναι μεγαλύτερος από 20, η εκτιμώμενη διασπορά προσεγγίζεται επίσης από κανονική κατανομή:

$$\hat{\sigma}^2 \approx N\left(\sigma^2, \sigma^4 \frac{2}{T-1}\right)$$

Τέλος το τυπικό σφάλμα της εκτιμώμενης τυπικής απόκλισης για μεγάλα δείγματα δίνεται από τη σχέση:

$$se(\hat{\sigma}) = \sigma \sqrt{\frac{1}{2T}}$$

Έχει αποδειχθεί ότι όταν για τον υπολογισμό της VaR χρησιμοποιούνται εμπειρικές κατανομές των οποίων υπολογίζεται το εκάστοτε ποσοστιαίο σημείο, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα σφάλματος που συνδέεται με το γεγονός ότι στο τμήμα αυτό της κατανομής υπάρχουν πολύ λίγες παρατηρήσεις. Αντίθετα όταν για τον υπολογισμό της VaR χρησιμοποιούνται παραμετρικές κατανομές, βελτιώνεται

σημαντικά η ακρίβεια, καθώς η τυπική απόκλιση του δείγματος περιέχει περισσότερες πληροφορίες από ένα ποσοστιαίο σημείο του.

2.4 Μέθοδοι υπολογισμού της VaR

Οι μέθοδοι υπολογισμού της VaR διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία χρησιμοποιεί *μερική αποτίμηση (local valuation)*. Οι μέθοδοι μερικής αποτίμησης μετρούν τον κίνδυνο αποτιμώντας το αρχικό χαρτοφυλάκιο και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας μερικές παραγώγους για να συμπεράνουν τις δυνατές κινήσεις του (ανοδικές ή καθοδικές). Η *Δέλτα-κανονική προσέγγιση (delta-normal approach)* χρησιμοποιεί γραμμικές πρώτες ή δ-παραγώγους και προϋποθέτει κανονικές κατανομές των τιμών. Καθώς η Δέλτα-κανονική προσέγγιση είναι πολύ εύκολη στη χρήση, συχνά χρησιμοποιείται και μια παραλλαγή της, “the Greeks”, η οποία αποτελείται από πρώτης και δεύτερης τάξης παραγώγους και είναι κατάλληλη για μη διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια. Η δεύτερη κατηγορία χρησιμοποιεί την *πλήρη αποτίμηση (full valuation)*. Οι μέθοδοι πλήρους αποτίμησης μετρούν τον κίνδυνο θεωρώντας διάφορα σενάρια και εκτιμώντας την εκάστοτε αξία του χαρτοφυλακίου. Η πλήρης αποτίμηση χρησιμοποιείται στις μεθόδους της *ιστορικής προσομοίωσης (historical simulation)* και της *προσομοίωσης Μόντε Κάρλο (Monte Carlo simulation)*.

Από τις παραπάνω κατηγορίες η μερική αποτίμηση χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις στις οποίες η ταχύτητα παίζει σημαντικό ρόλο, όπως λόγου χάρη τα χαρτοφυλάκια με μεγάλη διασπορά κινδύνου και όπου χρειάζεται να υπολογιστεί μεγάλος αριθμός συσχετίσεων. Αντίθετα στις περιπτώσεις που χρειάζεται μεγαλύτερη ακρίβεια, όπως λόγου χάρη χαρτοφυλάκια που είναι εκτεθειμένα σε μη γραμμικούς κινδύνους (π.χ. παράγωγα προϊόντα) η πλήρης αποτίμηση είναι προτιμότερη. Για παράδειγμα δικαιώματα προαίρεσης που είναι at the money και κοντά στη λήξη τους έχουν πολύ ασταθή δέλτα και συνεπώς ασύμμετρες κατανομές τιμών. Ένα άλλο παράδειγμα είναι τα long straddle, όπου η χειρότερη τιμή τους προκύπτει όταν η τιμή spot του υποκείμενου μέσου δε μεταβληθεί καθόλου. Όταν λοιπόν οι αποδόσεις είναι μη γραμμικές και επομένως χρειάζεται εκτός των άκρων να μελετηθούν όλες οι ενδιάμεσες τιμές, τότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί η πλήρης αποτίμηση γιατί λαμβάνει υπόψη εκτός από την έλλειψη γραμμικότητας, τις ενδιάμεσες πληρωμές, καθώς και τη διαχρονική εξέλιξη των αποδόσεων.

2.4.1 Δέλτα-κανονική αποτίμηση

Η μέθοδο μερικής αποτίμησης συνήθως προϋποθέτουν ότι οι τιμές των παραγόντων κινδύνου του χαρτοφυλακίου ακολουθούν κανονική κατανομή, και άρα και οι τιμές του ίδιου του χαρτοφυλακίου ακολουθούν κανονική κατανομή (Jorion, 2001). Η προσέγγιση χρησιμοποιείται για θέσεις των οποίων οι κίνδυνοι δεν είναι γραμμικοί, μπορούν όμως να προσεγγιστούν γραμμικά. Παίρνοντας για παράδειγμα έναν πιστωτικό τίτλο (π.χ. ένα δικαίωμα προαίρεσης) του οποίου η τιμή V διαμορφώνεται από ένα μόνο παράγοντα κινδύνου S (τιμή της υποκείμενης μετοχής), οπότε η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι $V_0=V(S_0)$, υπολογίζεται η πρώτη μερική παράγωγος Δ_0 , ή αλλιώς η ευαισθησία του χαρτοφυλακίου στις μεταβολές της τιμής του S στη θέση S_0 . Η μεταβλητή αυτή είναι γνωστή ως *τροποποιημένη διάρκεια* για τους τίτλους σταθερής απόδοσης και *δέλτα* για τα χρηματοοικονομικά παράγωγα. Το δέλτα του χαρτοφυλακίου είναι ίσο με το άθροισμα των δέλτα των επιμέρους τμημάτων του. Συνεπώς η δυνατή πτώση της αξίας του dV θα ισούται με:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} \Big|_0 dS = \Delta_0 \times dS$$

Επομένως η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου συνδέεται γραμμικά με τη μεταβολή της αξίας του χρεογράφου, οπότε η μεγαλύτερη ζημία θα εμφανιστεί σε μία ακραία τιμή του S . Συνεπώς η VaR του χαρτοφυλακίου θα ισούται με το γινόμενο του Δ_0 επί τη VaR της μεταβλητής S :

$$VAR = |\Delta_0| \times VAR_S = |\Delta_0| \times (\alpha\sigma S_0)$$

όπου σ η τυπική απόκλιση των μεταβολών των τιμών της S , οι οποίες θεωρείται ότι ακολουθούν κανονική κατανομή.

Για τους τίτλους σταθερής απόδοσης (π.χ. ομόλογα) ο παράγοντας κινδύνου είναι η απόδοση y και η σχέση τιμής-απόδοσης είναι ως γνωστόν:

$$dV = -D^* V dy$$

όπου D^* η τροποποιημένη διάρκεια. Στην περίπτωση αυτή η VaR του χαρτοφυλακίου είναι:

$$VAR = (D^* V) \times (\alpha\sigma)$$

όπου σ η τυπική απόκλιση των μεταβολών των αποδόσεων. Και πάλι προϋποτίθεται ότι οι μεταβολές των αποδόσεων ακολουθούν κανονική κατανομή.

Το πόσο καλή είναι αυτή η προσέγγιση εξαρτάται από το είδος του χαρτοφυλακίου και από το χρονικό ορίζοντα. Όσο μικρότερος είναι ο χρονικός

ορίζοντας τόσο καλύτερη είναι η Δέλτα-κανονική προσέγγιση. Επίσης η ύπαρξη μη γραμμικών παραγόντων κινδύνου όπως λόγου χάρη τα δικαιώματα προαίρεσης δεν αναιρεί απαραίτητα τη Δέλτα-κανονική προσέγγιση. Το πόσο καλή μπορεί να είναι η προσέγγιση εξαρτάται από το είδος του δικαιώματος, τη λήξη του καθώς και τη μεταβλητότητα του υποκείμενου μέσου.

Προκειμένου να χρησιμοποιηθεί η Δέλτα-κανονική προσέγγιση για σύνθετα χαρτοφυλάκια ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

- Καθορίζεται ένας αριθμός παραγόντων κινδύνου
- Αναλύονται όλοι οι τίτλοι του χαρτοφυλακίου σε γραμμικούς συνδυασμούς των παραγόντων κινδύνου
- Υπολογίζονται τα συγκεντρωτικά ποσά ανά παράγοντα κινδύνου
- Εκτιμάται ο πίνακας συνδιακύμανσης των παραγόντων κινδύνου
- Υπολογίζεται ο συνολικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου

Η VaR του χαρτοφυλακίου δίνεται από τον τύπο:

$$VAR = \alpha \sqrt{\chi'_{t+1} \Sigma_{t+1} \chi_t}$$

όπου χ'_t και χ_t είναι ο πίνακας-γραμμή και ο ανάστροφός του των συνολικών εκθέσεων ανά παράγοντα κινδύνου και Σ_{t+1} η εκτίμηση του πίνακα συνδιακύμανσης στη διάρκεια για την οποία υπολογίζεται η VaR.

Η ακρίβεια της προσέγγισης μπορεί να αυξηθεί θεωρώντας και μεγαλύτερης τάξης παραγώγους, χρησιμοποιώντας σειρές Taylor. Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται Δέλτα-γάμμα προσέγγιση ή The Greeks. Η εξίσωση της αποτίμησης έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \dots \\ &= \Delta dS + \frac{1}{2} \Gamma dS^2 + \Theta dt + \dots \end{aligned}$$

όπου Γ είναι η δεύτερη μερική παράγωγος της αξίας του χαρτοφυλακίου και Θ είναι η μεταβολή στο χρόνο.

Η προσέγγιση αυτή δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τη Δέλτα-κανονική προσέγγιση ιδιαίτερα όταν υπάρχουν μεγάλες διακυμάνσεις στην τιμή του υποκείμενου μέσου. Θεωρητικά η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για περισσότερους από ένα παράγοντες κινδύνου, αν όπου dS θέσουμε έναν πίνακα-στήλη N μεταβολών τιμών αγοράς, Δ ένα πίνακα N τιμών δέλτα, και Γ έναν $N \times N$ πίνακα μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης. Δυστυχώς η μέθοδος δεν μπορεί να

χρησιμοποιηθεί όταν υπάρχουν πολλοί παράγοντες κινδύνου, επειδή τότε ο αριθμός των υπολογισμών που απαιτούνται αυξάνεται γεωμετρικά.

Συμπερασματικά, η Δέλτα-κανονική προσέγγιση είναι εύκολη στη χρήση και γρήγορη καθώς σε σύνθετα χαρτοφυλάκια επιτρέπει την αποτύπωση των επιμέρους τμημάτων τους σαν γραμμικούς συνδυασμούς ορισμένων μόνο παραγόντων κινδύνου. Επιπλέον σαν παραμετρική μέθοδος επιτρέπει περαιτέρω ανάλυση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου καθώς μέσω των υπολογισμών της μπορούν να εκτιμηθούν και παράγωγα μέτρα κινδύνου όπως η οριακή (marginal) και η διαφορική ή αυξητική (incremental) VaR. Στα μειονεκτήματα της μεθόδου αναφέρονται η ύπαρξη μεγάλης συγκέντρωσης τιμών στα άκρα των περισσοτέρων κατανομών τιμών χαρτοφυλακίων και συνεπώς αδυναμία προσέγγισής τους με κανονική κατανομή. Η μέθοδος λόγω της κανονικότητας εκτιμά μικρότερο αριθμό ακραίων παρατηρήσεων και άρα μικρότερο κίνδυνο από τον πραγματικό. Επίσης η μέθοδος δεν μπορεί να λάβει υπόψη την ασυμμετρία των κατανομών μη γραμμικών κινδύνων όπως είναι τα δικαιώματα προαίρεσης.

2.4.2 Ιστορική προσομοίωση

Η ιστορική προσομοίωση όπως προαναφέρθηκε ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων πλήρους αποτίμησης. Η μέθοδος ανατρέχει σε ιστορικά δεδομένα π.χ. τιμές των τελευταίων 250 ημερών και χρησιμοποιώντας τρέχουσες θέσεις εκτιμά μια κατανομή αποδόσεων του χαρτοφυλακίου στο χρόνο για διάφορα σενάρια k (Jorion, 2001):

$$R_{p,k} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} R_{i,k} \quad k = 1, \dots, t$$

όπου $w_{i,t}$ οι συντελεστές βάρους των διαφόρων κινδύνων στο χαρτοφυλάκιο. Κατ' αυτόν τον τρόπο δεν αναπαράγεται ένα πραγματικό χαρτοφυλάκιο αλλά δημιουργείται μια χρονοσειρά ενός υποθετικού χαρτοφυλακίου το οποίο έχει τις ίδιες θέσεις με το πραγματικό. Στην πραγματικότητα η ιστορική προσομοίωση χρησιμοποιεί αντί για μεμονωμένες αποδόσεις καμπύλες αποδόσεων έτσι ώστε να εφαρμόζονται για κάθε σενάριο k οι ιστορικές μεταβολές στις τρέχουσες τιμές:

$$S_{i,k}^* = S_{i,0} + \Delta S_{i,k} \quad i = 1, \dots, N$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο υπολογίζεται μια νέα αξία χαρτοφυλακίου $V_{p,k}^*$ η οποία εμπεριέχει και μη γραμμικές σχέσεις. Έτσι δημιουργείται η υποθετική απόδοση για το σενάριο k :

$$R_{p,k} = \frac{V_k^* - V_0}{V_0}$$

Η VaR υπολογίζεται από τη συνολική κατανομή των υποθετικών αποδόσεων, στην οποία το κάθε σενάριο έχει τον ίδιο συντελεστή βάρους $1/t$. Η επιλογή της χρονικής περιόδου από όπου θα αντληθούν τα ιστορικά δεδομένα είναι αποτέλεσμα συμβιβασμού ανάμεσα στη μεγαλύτερη ακρίβεια που παρέχουν τα μεγάλα διαστήματα και στο ενδεχόμενο να συμπεριληφθούν παλαιότερα και συνεπώς άσχετα στοιχεία, με αποτέλεσμα να μην φανούν οι πρόσφατες τάσεις.

Η μέθοδος έχει σημαντικά πλεονεκτήματα. Είναι σχετικά εύκολη στη χρήση ιδιαίτερα όταν η επιχείρηση έχει δικό της αρχείο ιστορικών δεδομένων. Επίσης αποφεύγει τον κόπο υπολογισμού συσχετίσεων καθώς αυτές εμπεριέχονται στις χρονοσειρές των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων. Επίσης η μέθοδος είναι κατάλληλη και για μη γραμμικούς κινδύνους όπως και για μη κανονικές κατανομές. Η πλήρης αποτίμηση βασίζεται μόνο σε πραγματικές τιμές και ως εκ τούτου ενσωματώνει συσχετίσεις, γ και ν κινδύνους. Τέλος λαμβάνει υπόψη της τις ασυμμετρίες των κατανομών των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων καθώς δεν βασίζεται σε υποδείγματα αποτίμησης. Για όλους τους παραπάνω λόγους είναι η ευρύτερα διαδεδομένη μέθοδος υπολογισμού της VaR.

Η μέθοδος έχει και ορισμένα μειονεκτήματα. Πρώτον προϋποθέτει την ύπαρξη επαρκών ιστορικών δεδομένων. Μερικοί τίτλοι όμως μπορεί να μην έχουν την απαιτούμενο αριθμό παρατηρήσεων ή η επιχείρηση να μην κατέγραφε την εξέλιξή τους. Επιπλέον η μέθοδος προϋποθέτει ότι το παρελθόν περιέχει όλη την πληροφόρηση που χρειάζεται για να περιγράψει το μέλλον. Αν όμως το χρονικό διάστημα από το οποίο θα επιλεγούν τα ιστορικά δεδομένα δεν περιέχει σημαντικά γεγονότα όπως λόγω χάρη υποτίμηση ενός νομίσματος οι ακραίες παρατηρήσεις δεν θα είναι αρκετές. Αντίθετα ενδέχεται να περιέχονται γεγονότα που δεν πρόκειται να ξανασυμβούν. Ακόμη η μέθοδος αδυνατεί να ενσωματώσει ορισμένα γεγονότα όπως π.χ. αλλαγές που είναι άμεσα προβλέψιμες από την οικονομική συγκυρία αλλά παρόλα αυτά δεν υπάρχουν στα ιστορικά δεδομένα. Επίσης η μέθοδος δίνει το ίδιο βάρος σε όλες τις παρατηρήσεις τόσο τις παλιές όσο και τις πρόσφατες, με

αποτέλεσμα όταν μια παλιά παρατήρηση παραληφθεί λόγω αλλαγής του χρονικού ορίζοντα να προκύπτει σημαντικά διαφορετική VaR. Έτσι ενώ οι μεγάλοι χρονικοί ορίζοντες είναι απαραίτητοι για να μειώσουν κατά το δυνατόν το σφάλμα της εκτίμησης, ενδέχεται να αλλοιώσουν παράλληλα το αποτέλεσμα γιατί περιέχουν άσχετα γεγονότα. Τέλος η μέθοδος καθίσταται άβολη για μεγάλα χαρτοφυλάκια με σύνθετες δομές. Στην περίπτωση αυτή οι χρήστες αναγκάζονται προκειμένου να απλουστεύσουν και να επιταχύνουν τη διαδικασία να ομαδοποιούν τις παρατηρήσεις ή να αντικαθιστούν μεταβολές τιμών τίτλων με τα ισοδύναμα δέλτα τους. Οι απλουστεύσεις αυτές όμως ενδέχεται να αναιρέσουν το νόημα της μεθόδου που είναι η πλήρης αποτίμηση.

2.4.3 Προσομοίωση Monte Carlo

Η προσομοίωση Monte Carlo καλύπτει ένα ευρύ φάσμα πιθανών τιμών χρηματοοικονομικών μεταβλητών και λαμβάνει υπόψη τις συσχετίσεις τους. Η μέθοδος, η οποία προσομοιώνει διάφορα σενάρια για την αξία του χαρτοφυλακίου σε μια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή, χωρίζεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο, που είναι και το πλέον καθοριστικό, ο αρμόδιος διαχειριστής κινδύνου επιλέγει μια στοχαστική διαδικασία την οποία θα ακολουθούν οι χρηματοοικονομικές μεταβλητές καθώς και τις απαιτούμενες παραμέτρους. Παράμετροι όπως κίνδυνοι και συσχετίσεις μπορούν να αντληθούν από ιστορικές τιμές ή από τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης (π.χ. implied volatility). Μια συνήθης στοχαστική διαδικασία είναι η γεωμετρική κίνηση Brown (geometric Brownian motion – GBM). Το υπόδειγμα υποθέτει πως οι τιμές είναι χρονικά ανεξάρτητες και μικρές κινήσεις τιμών περιγράφονται από την εξίσωση:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz$$

όπου dz είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά dt . Η μεταβλητή αυτή δε βασίζεται σε προηγούμενη πληροφόρηση και προκαλεί τις τυχαίες αυξομειώσεις των τιμών. Οι παράμετροι μ_t και σ_t αντιπροσωπεύουν τη στιγμιαία μεταβολή και μεταβλητότητα στο χρόνο t , οι οποίες επίσης μεταβάλλονται με το χρόνο. Στη συνέχεια ακολουθούνται υποθετικά μονοπάτια τιμών για όλες τις μεταβλητές που εξετάζονται και το χαρτοφυλάκιο αποτιμάται σε τιμές αγοράς στο τέλος του προεπιλεγμένου χρονικού ορίζοντα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της πλήρους αποτίμησης [$V_k^* = V(S_{i,k}^*)$]. Τα αποτελέσματα όλων αυτών των προσομοιώσεων χρησιμοποιούνται για τον εκτίμηση

της κατανομής της μελλοντικής αξίας του χαρτοφυλακίου. Η μέθοδος Monte Carlo επομένως είναι παρόμοια με τη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης εκτός από το γεγονός ότι οι υποθετικές μεταβολές των τιμών των μεταβλητών είναι τυχαίοι αριθμοί προκαθορισμένης στοχαστικής διαδικασίας και δεν αντλούνται από δείγμα ιστορικών στοιχείων.

Η προσομοίωση Monte Carlo είναι το πιο δυνατό εργαλείο για τον υπολογισμό της VaR. Λαμβάνει υπόψη ένα ευρύ φάσμα κινδύνων, συμπεριλαμβανομένων των μη γραμμικών κινδύνων, των κινδύνων μεταβλητότητας (volatility risk). Είναι αρκετά ευέλικτη ώστε να ενσωματώνει την εξέλιξη της μεταβλητότητας των τιμών στο χρόνο, ακραίες τιμές καθώς και ακραία σενάρια. Οι προσομοιώσεις δίνουν τη συνολική κατανομή των τιμών του χαρτοφυλακίου από όπου κανείς μπορεί να μελετήσει και τιμές πέραν της VaR. Η μέθοδος επίσης μπορεί να ενσωματώσει μεταβολές στη διάρθρωση του χαρτοφυλακίου με το πέρασμα του χρόνου όπως λόγω χάρη ενδιάμεσες πληρωμές ή αποτελέσματα προκαθορισμένων στρατηγικών (π.χ. αντιστάθμισης).

Το μεγαλύτερο μειονέκτημα της μεθόδου είναι ο χρόνος που χρειάζεται για την πραγματοποίηση όλων των απαραίτητων υπολογισμών. Είναι επίσης η πιο δαπανηρή μέθοδος από άποψη υποδομών και εκπαίδευσης στελεχών. Αν και η μέθοδος απαιτεί σημαντικό κόστος για την εγκατάστασή της τόσο σε εξοπλισμό όσο και σε λογισμικό είναι άκρως απαραίτητη για ιδρύματα όπου απαιτείται σωστή διαχείριση κινδύνων από σύνθετα χαρτοφυλάκια. Τέλος καθώς η μέθοδος στηρίζεται σε στοχαστικές διαδικασίες για τους παράγοντες κινδύνου και υποδείγματα αποτίμησης για τίτλους όπως τα δικαιώματα προαίρεσης, μπορεί να δώσει εσφαλμένα αποτελέσματα αν κάποιο από αυτά τα υποδείγματα δεν είναι σωστό. Προκειμένου να ερευνηθεί αν τα αποτελέσματα εξακολουθούν να ισχύουν και με τη χρήση άλλων υποδειγμάτων χρειάζεται η μέθοδος να συμπληρωθεί με ανάλυση ευαισθησίας.

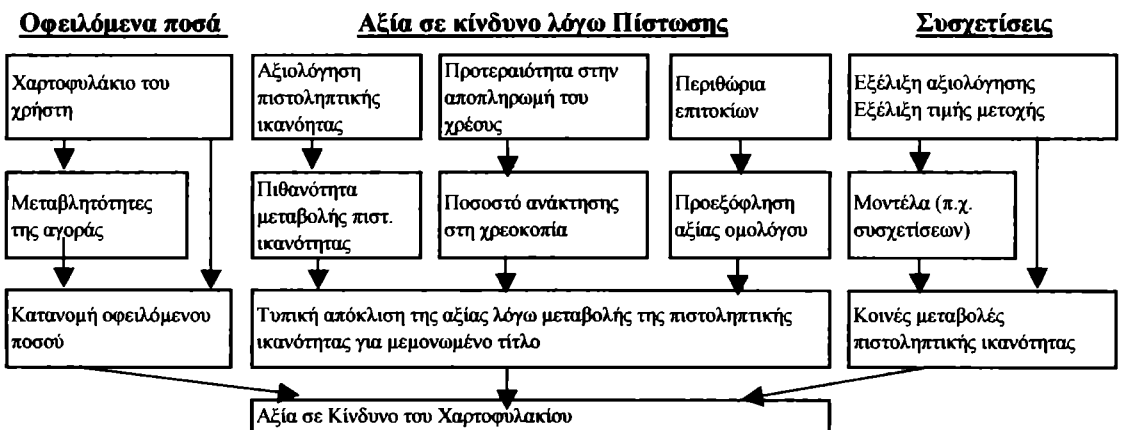
3. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: CREDITMETRICS

Το CreditMetrics είναι ένα υπόδειγμα εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου που στηρίζεται στην υπόθεση ότι ο κίνδυνος από τους πιστωτικούς τίτλους ενός χαρτοφυλακίου εξαρτάται από την πιστοληπτική ικανότητα του εκδότη και την πιθανότητα μεταβολής της για μεμονωμένους τίτλους και τις συσχετίσεις μεταβολής πιστοληπτικής ικανότητας για ζεύγη τίτλων. Η πιθανότητα μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας του οφειλέτη (συμπεριλαμβανομένης και της αθέτησης) σε ορισμένο χρονικό διάστημα μπορεί να εκφραστεί σαν την πιθανότητα μια τυχαία αφανής μεταβλητή που ακολουθεί τυπική κανονική μεταβλητή να πάρει μικρότερες τιμές από ορισμένα όρια. Τα όρια αυτά υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την τρέχουσα κατάταξη του πιστούχου και ιστορικές τιμές των πιθανοτήτων μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας που περιέχονται στους πίνακες μετάβασης (transition matrices) που δημοσιεύουν οι αξιολογικοί οίκοι. Τα μέσα περιθώρια επιτοκίων για κάθε κατηγορία συνδυάζονται με τις πιθανότητες μετάβασης και δίνουν τη μέση τιμή και μεταβλητότητα της απόδοσης κάθε τίτλου. Οι συσχετίσεις μεταξύ της μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας οποιουδήποτε ζεύγους οφειλετών οφείλονται σε συστηματικούς και μη συστηματικούς παράγοντες κινδύνου και σε συνδυασμό με τις μεταβλητότητες των αποδόσεων μπορούν να δώσουν ένα μέτρο της συνολικής μεταβλητότητας του χαρτοφυλακίου. Υποθέτοντας ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου ακολουθούν κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με σταθερή μεταβλητότητα και χρησιμοποιώντας προσομοίωση Monte Carlo υπολογίζεται η VaR για το συνολικό πιστωτικό κίνδυνο χρησιμοποιώντας τη μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου και την αναμενόμενη απόδοση.

Μια δεύτερη υπόθεση στην οποία στηρίζεται το υπόδειγμα είναι ότι τα περιθώρια επιτοκίων με τα οποία θα προεξοφληθούν οι αποδόσεις των οφειλετών συγκεκριμένης πιστοληπτικής ικανότητας είναι γνωστά εκ των προτέρων και υπολογίζονται από την καμπύλη μελλοντικής απόδοσης των ομολόγων χωρίς τοκομερίδιο (zero coupon forward curve). Ο συνδυασμός των δύο παραπάνω υποθέσεων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αν κάποιος γνωρίζει την πιθανότητα με την οποία ένας πιστούχος i κατηγορίας θα είναι j κατηγορία στο μέλλον, τότε μπορεί να εκτιμηθεί και το ύψος του ποσού που είναι εκτεθειμένο σε κίνδυνο από αυτόν τον πιστούχο.

3.1 Περιγραφή της προσέγγισης

Η μεταβολή της πιστοληπτικής ικανότητας είναι αποτέλεσμα της μεταβολής της αξίας της επιχείρησης, την οποία το υπόδειγμα εκτιμά με βάση τη θεωρία του Merton: η επιχείρηση οδηγείται σε αθέτηση των υποχρεώσεών της όταν η αξία των περιουσιακών της στοιχείων γίνει μικρότερη από τις υποχρεώσεις της. Ο κίνδυνος προέρχεται είτε από τη μεταβολή της πιστοληπτικής ικανότητας της επιχείρησης λόγω της μεταβλητότητας της αξίας των περιουσιακών της στοιχείων είτε από τη μεταβολή της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων της αγοράς. Σε σχέση με τον κίνδυνο αγοράς, ο υπολογισμός της credit-VaR είναι δυσκολότερος γιατί οι μεταβολές των τιμών των χαρτοφυλακίων δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, λόγω του περιορισμένου κέρδους από τη βελτίωση της πιστοληπτικής ικανότητας του πιστούχου και σημαντικής απώλειας σε περίπτωση υποβιβασμού του. Επειδή οι κατανομές είναι ασύμμετρες τα επίπεδα των εκατοστημορίων δεν μπορούν να υπολογιστούν από τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται τεχνικές προσομοίωσης Monte Carlo. Τεχνικές προσομοίωσης χρησιμοποιούνται επίσης για μεγάλα χαρτοφυλάκια όπου είναι αναγκαίος ο υπολογισμός συσχετίσεων πιθανοτήτων αθέτησης. Το γενικό πλαίσιο στο οποίο στηρίζεται το υπόδειγμα περιγράφεται στο παρακάτω διάγραμμα:



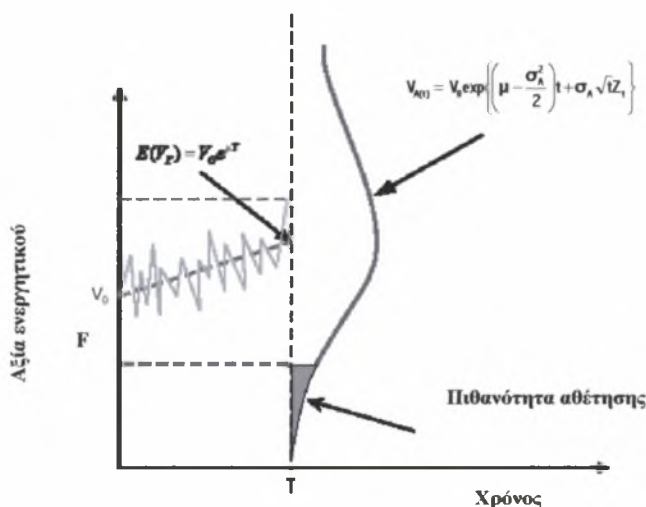
Πηγή: JP Morgan

Το υπόδειγμα θεωρεί ότι η αξία του ενεργητικού της επιχείρησης είναι αυτή που προκαλεί τη μεταβολή της πιστοληπτικής της ικανότητας και στηρίζεται στην θεωρία του Merton ότι υπάρχει ένα ορισμένο επίπεδο τέτοιο ώστε αν το ενεργητικό της επιχείρησης πέσει κάτω από αυτό τον επόμενο χρόνο η επιχείρηση θα αθετήσει τις υποχρεώσεις της. Ως γνωστόν η αξία των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης $V_{A(t)}$ ακολουθεί μια τυπική γεωμετρική κίνηση Brown:

$$V_{A(t)} = V_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A \sqrt{t} Z_t \right\}$$

όπου $Z_t \sim N(0,1)$, μ και σ_A^2 η μέση τιμή και η διασπορά αντίστοιχα των στιγμιαίων αποδόσεων του ενεργητικού της επιχείρησης, Το υπόδειγμα επίσης προϋποθέτει ότι η κεφαλαιακή δομή της επιχείρησης αποτελείται μόνο από ίδια κεφάλαια S_t και ένα απλό ομολογιακό δάνειο χωρίς τοκομερίδια, ονομαστικής αξίας F το οποίο λήγει στο χρόνο T . Με αυτά τα δεδομένα η επιχείρηση αθετεί τις υποχρεώσεις της στη λήξη του ομολογιακού δανείου, όταν η αξία του ενεργητικού της είναι μικρότερη από την πληρωμή F στους ομολογιούχους δανειστές. Το παρακάτω σχήμα δείχνει την κατανομή της αξίας του ενεργητικού της επιχείρησης στη λήξη του δανείου T και την πιθανότητα αθέτησης που είναι η σκιασμένη επιφάνεια κάτω από το F .

Σχήμα 5. Κατανομή της αξίας του ενεργητικού στη λήξη του ομολογιακού δανείου



Επεκτείνοντας τον παραπάνω συλλογισμό, το υπόδειγμα δέχεται την ύπαρξη μιας σειράς επιπέδων αξίας του ενεργητικού τα οποία καθορίζουν την πιστοληπτική ικανότητα της επιχείρησης ή την περίπτωση αθέτησης τον επόμενο χρόνο (Gupton et al., 1997). Το επίπεδο της αξίας του ενεργητικού που αντιστοιχεί σε αλλαγή κατηγορίας πιστοληπτικής ικανότητας ονομάζεται *επίπεδο μετάβασης (asset threshold)*. Αν είναι γνωστά αυτά τα επίπεδα, τότε το μόνο που απομένει να βρεθεί είναι η κατανομή της μεταβολής του ενεργητικού της επιχείρησης για να μπορέσει να περιγραφεί η εξέλιξη της πιστοληπτικής της ικανότητας. Για να γίνει αυτό, το υπόδειγμα δέχεται ότι οι επί τοις % μεταβολές της αξίας του ενεργητικού (ουσιαστικά δηλαδή οι αποδόσεις του R) ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ_A . Με δεδομένες αυτές τις παραμέτρους μπορεί να βρεθεί μια

σχέση ανάμεσα στα επίπεδα μετάβασης και τις πιθανότητες μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας που δίνονται από τους πίνακες μετάβασης. Οι πίνακες μετάβασης δημοσιεύονται κυρίως από αξιολογικούς οίκους όπως η Moody's ή η Standard and Poor's (S&P). Η τελευταία λόγω χάρη διακρίνει επτά κατηγορίες πιστοληπτικής ικανότητας, με μεγαλύτερη την AAA και μικρότερη την CCC, ενώ η τελευταία κατηγορία είναι η αθέτηση των υποχρεώσεων. Η περίπτωση αθέτησης προκύπτει όταν ο δανειζόμενος αδυνατεί να καλύψει έστω μία υποχρέωσή του σε κεφάλαιο ή τόκους. Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας μετάβασης για ένα έτος με τις σχετικές πιθανότητες που δημοσίευσε η εταιρία S&P το 1996:

Πίνακας 1. Πίνακας μετάβασης ενός έτους

Αρχική ταξινόμηση	Πιθανότητα ταξινόμησης στο τέλος του έτους (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Αθέτηση
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0,00	0,00	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,30	1,17	0,12	1,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,20
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,79

Οι πιθανότητες αυτές βασίζονται σε μακροχρόνια ιστορικά στοιχεία που αφορούν επιχειρήσεις όλων των κλάδων. Είναι προφανές ότι τα δεδομένα αυτά πρέπει να ερμηνεύονται με προσοχή καθώς δεν είναι παρά μέσες τιμές άκρως ετερογενών δειγμάτων επιχειρήσεων και καλύπτουν μάλιστα πολλούς οικονομικούς κύκλους. Γενικά έχει παρατηρηθεί πως η μεγαλύτερη πιθανότητα είναι να παραμείνει ένα ομόλογο στην ίδια κατηγορία, ενώ η αμέσως μικρότερη πιθανότητα είναι να μεταβεί στην επόμενη ανώτερη ή κατώτερη κατηγορία. Στον πίνακα εμφανίζονται ανωμαλίες που οφείλονται σε δειγματοληπτικό λάθος λόγω έλλειψης δεδομένων. Έτσι η πιθανότητα 0,22% να μεταπηδήσει μια επιχείρηση από την κατηγορία CCC στην AAA προέκυψε από μία και μοναδική περίπτωση στα 15 χρόνια ιστορικά δεδομένα που περιγράφει ο πίνακας. Ακόμη και οι μακροοικονομικοί παράγοντες φαίνεται να επηρεάζουν τις πιθανότητες αυτές καθώς σε περιόδους ύφεσης είναι μεγαλύτερες οι πιθανότητες υποβάθμισης ενώ αντίθετα σε περιόδους ανάπτυξης είναι μεγαλύτερες οι πιθανότητες αναβάθμισης. Τέλος οι εταιρίες αξιολόγησης δημοσιεύουν πίνακες μετάβασης για μεγαλύτερους χρονικούς ορίζοντες, όπως ο παρακάτω:

Πίνακας 2. Μέση αθροιστική πιθανότητα αθέτησης (%)

	1	2	3	4	5 ...	7 ...	10 ...	15
AAA	0,00	0,00	0,07	0,15	0,24 ...	0,66 ...	1,40 ...	1,40
AA	0,00	0,02	0,12	0,25	0,43 ...	0,89 ...	1,29 ...	1,48
A	0,06	0,16	0,27	0,44	0,67 ...	1,12 ...	2,17 ...	3,00
BBB	0,18	0,44	0,72	1,27	1,78 ...	2,99 ...	4,34 ...	4,70
BB	1,06	3,48	6,12	8,68	10,97 ...	14,46 ...	17,73 ...	19,91
B	5,20	11,00	15,95	19,40	21,88 ...	25,14 ...	29,02 ...	30,65
CCC	19,79	26,92	31,63	35,97	40,15 ...	42,64 ...	45,10 ...	45,10

Πηγή: S&P Credit Week, Apr. 15, 1996

Έτσι για επιχείρηση κατάταξης BB οι πιθανότητες μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας δίνονται από τον πίνακα 1. Από την άλλη μεριά, από τον ορισμό των επιπέδων μετάβασης προκύπτει ότι υπάρχει απόδοση του ενεργητικού Z_{Def} τέτοια ώστε αν $R < Z_{Def}$, τότε η επιχείρηση καταλήγει να αθετήσει τις υποχρεώσεις της. Αν $Z_{Def} < R < Z_{CCC}$ τότε η επιχείρηση υποβαθμίζεται στην κατηγορία CCC κοκ. Αφού θεωρείται ότι η R ακολουθεί κανονική κατανομή, μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα καθενός από τα παραπάνω γεγονότα:

$$\Pr(Def) = \Pr(R < Z_{Def}) = \Phi(Z_{Def} / \sigma_A)$$

$$\Pr(CCC) = \Pr(Z_{Def} < R < Z_{CCC}) = \Phi(Z_{CCC} / \sigma_A) - \Phi(Z_{Def} / \sigma_A) \text{ κοκ}$$

όπου Φ είναι η αθροιστική πιθανότητα για την τυπική κανονική κατανομή. Συγκεντρωτικά οι πιθανότητες αυτές φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 3. Πιθανότητες μετάβασης σε ένα χρόνο για οφειλέτη κατηγορίας BB

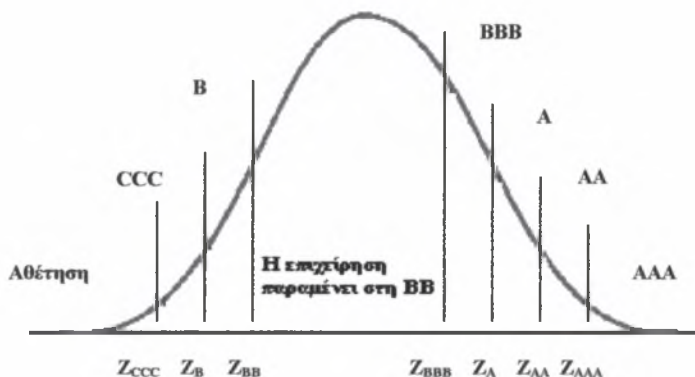
Κατηγορία	Πιθανότητα από τον πίνακα μετάβασης (%)	Πιθανότητα σύμφωνα με το μοντέλο αξίας ενεργητικού
AAA	0,03	$1 - \Phi(Z_{AA}/\sigma_A)$
AA	0,14	$\Phi(Z_{AA}/\sigma_A) - \Phi(Z_A/\sigma_A)$
A	0,67	$\Phi(Z_A/\sigma_A) - \Phi(Z_{BBB}/\sigma_A)$
BBB	7,73	$\Phi(Z_{BBB}/\sigma_A) - \Phi(Z_{BB}/\sigma_A)$
BB	80,53	$\Phi(Z_{BB}/\sigma_A) - \Phi(Z_B/\sigma_A)$
B	8,84	$\Phi(Z_B/\sigma_A) - \Phi(Z_{CCC}/\sigma_A)$
CCC	1,00	$\Phi(Z_{CCC}/\sigma_A) - \Phi(Z_{Def}/\sigma_A)$
Αθέτηση	1,06	$\Phi(Z_{Def}/\sigma_A)$

Πηγή: CreditMetrics JP Morgan

Χωρίζεται δηλαδή η κατανομή των αποδόσεων του ενεργητικού σε επιμέρους τμήματα κατά τέτοιο τρόπο ώστε να επαληθεύει πλήρως τις συχνότητες που δίνει ο αντίστοιχος πίνακας μετάβασης. Το επόμενο σχήμα δείχνει την κατανομή των αποδόσεων του ενεργητικού ένα χρόνο μετά, η οποία είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Τα επίπεδα μετάβασης αντιστοιχούν στις πιθανότητες μεταβολής της

πιστοληπτικής ικανότητας για έναν πιστούχο BB όπως δίνονται στον πίνακα μετάβασης 1. Το άκρο της κατανομής που βρίσκεται στα δεξιά του επιπέδου Z_{AAA} αντιστοιχεί στην πιθανότητα να αναβαθμιστεί ο πιστούχος στην κατηγορία AAA, δηλαδή 0,03%. Η επιφάνεια ανάμεσα στα επίπεδα Z_{AAA} και Z_{AA} αντιστοιχεί στην πιθανότητα να αναβαθμιστεί στην κατηγορία AA κ.ο.κ. Τέλος το τμήμα της κατανομής που βρίσκεται αριστερά του επιπέδου Z_{CCC} αντιστοιχεί στην πιθανότητα αθέτησης δηλαδή 1,06%.

Σχήμα 6. Γενίκευση της θεωρίας του Merton



Πηγή: CreditMetrics

Συνεπώς για να ολοκληρωθεί η σύνδεση, θα πρέπει η πιθανότητες στις δύο στήλες του πίνακα 3 να είναι ίσες. Για παράδειγμα, για την αθέτηση θα πρέπει $\Phi(Z_{Def}/\sigma_A)$ να είναι ίση με 1,06%, από όπου υπολογίζεται το Z_{Def} :

$$Z_{Def} = \Phi^{-1}(1,06\%)\sigma_A = -2,30\sigma_A$$

όπου $\Phi^{-1}(p)$ είναι το επίπεδο κάτω από το οποίο πέφτει μια μεταβλητή που ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή με πιθανότητα p . Όμοια, το Z_{CCC} υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Z_{CCC} = \Phi^{-1}(p_{Def} + p_{CCC})\sigma_A = \Phi^{-1}(1,06\% + 1\%)\sigma_A = -2,04\sigma_A \text{ κ.ο.κ.}$$

3.2 Εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου για χαρτοφυλάκιο ομολόγων

Για την εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων ακολουθούνται τα εξής βήματα (Gupton et al., 1997):

Βήμα 1: Γίνεται ταξινόμηση από τους αξιολογικούς οίκους του ακάλυπτου χρέους (unsecured debt) του εκδότη του κάθε ομολόγου από την οποία καθορίζεται η πιθανότητα αθέτησης ή η πιθανότητα μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας.

Βήμα 2: Από την προτεραιότητα στη ρευστοποίηση του ομολόγου καθορίζεται το ποσοστό ανάκτησης σε περίπτωση χρεοκοπίας του εκδότη. Από την καμπύλη μελλοντικής απόδοσης των ομολόγων χωρίς τοκομερίδιο για κάθε κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας καθορίζεται η τιμή του ομολόγου σε περίπτωση υποβάθμισης ή αναβάθμισης του εκδότη. Και οι δύο παράμετροι χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της μελλοντικής αξίας του ομολόγου.

Βήμα 3: Οι πιθανότητες από το Βήμα 1 και οι τιμές από το Βήμα 2 συνδυάζονται μεταξύ τους για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας της αξίας του χαρτοφυλακίου που οφείλεται σε μεταβολή της πιστοληπτικής ικανότητας ενός πιστούχου.

3.2.1 Βήμα 1: Υπολογισμός της πιθανότητας μεταβολής πιστοληπτικής ικανότητας

Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα ο πιστωτικός κίνδυνος υπάρχει όχι μόνο όταν ο πιστούχος αθετήσει μία από τις υποχρεώσεις του αλλά και όταν μεταβληθεί η πιστοληπτική του ικανότητα. Είναι συνεπώς απαραίτητο να υπολογιστεί η πιθανότητα μετάβασης σε οποιαδήποτε κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας στη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα για το οποίο ζητείται ο κίνδυνος. Το υπόδειγμα προϋποθέτει ότι όλοι οι εκδότες ομολόγων που ανήκουν στην ίδια κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας έχουν την ίδια πιθανότητα να αναβαθμιστούν ή να υποβιβαστούν. Όπως προαναφέρθηκε οι πιθανότητες αυτές λαμβάνονται από τους πίνακες μετάβασης.

3.2.2 Βήμα 2: Προσδιορισμός της αξίας του ομολόγου

Αφού βρεθούν οι δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να περιέλθει το ομόλογο στη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα στον οποίο πρέπει να εκτιμηθεί ο κίνδυνος, στη συνέχεια εκτιμάται η αξία του ομολόγου για κάθε μια από αυτές. Διακρίνονται δύο δυνατές περιπτώσεις:

α) Η επιχείρηση που έχει εκδώσει το ομόλογο αθετεί τις υποχρεώσεις της.

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται με βάση το ποσοστό ανάκτησης η υπολειμματική αξία του ομολόγου. Το ποσοστό ανάκτησης στο υπόδειγμα θεωρείται καθορισμένο εκ των προτέρων και εξαρτάται από την προτεραιότητα του ομολόγου στη ρευστοποίηση των στοιχείων της επιχείρησης. Με βάση ιστορικά δεδομένα έχουν δημοσιευθεί πίνακες που δίνουν αυτά τα ποσοστά όπως λόγω χάρη ο παρακάτω πίνακας που προτείνεται από τη Moody's Investors Service:

Πίνακας 4. Ποσοστά ανάκτησης

Προτεραιότητα	Μέση τιμή	Τυπ. απόκλιση
Με εξασφάλιση	53,8	26,86
Χωρίς εξασφ/ση	51,13	25,45
Μειωμένης εξ/σης	38,52	23,81

Στην προσομοίωση Monte Carlo που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της κατανομής της ζημίας, τα ποσοστά ανάκτησης θεωρείται ότι ακολουθεί κατανομή Βήτα με τις παραπάνω μέσες τιμές και αποκλίσεις.

β) Μεταβάλλεται η πιστοληπτική ικανότητα της επιχείρησης που εκδίδει το ομόλογο.

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται η παρούσα αξία των υπολειπόμενων χρηματοροών του ομολόγου στη νέα κατάταξή του. Το προεξοφλητικό επιτόκιο που χρησιμοποιείται λαμβάνεται από την καμπύλη μελλοντικών αποδόσεων των ομολόγων χωρίς τοκομερίδιο για χρονικό διάστημα από το τέλος του χρονικού ορίζοντα για τον οποίο εκτιμάται ο κίνδυνος μέχρι τη λήξη του ομολόγου. Είναι συνεπώς προκαθορισμένο και άρα δεν προβλέπει το υπόδειγμα καμία αβεβαιότητα ως προς αυτόν τον παράγοντα της αγοράς. Αφού υπάρχουν επτά κατηγορίες πιστοληπτικής ικανότητας, χρειάζονται επτά καμπύλες μελλοντικής απόδοσης ώστε να εκτιμηθεί η αξία του ομολόγου σε κάθε δυνατή κατάσταση..

3.2.3 Βήμα 3: Εύρεση της κατανομής των τιμών χαρτοφυλακίου ομολόγων

Για την κατανόηση της μεθόδου χρησιμοποιείται ένα παράδειγμα από το CreditMetrics Technical Document. Έστω πενταετές ομόλογο κατηγορίας BBB ονομαστικής αξίας \$100 με τοκομερίδιο 6%. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι πιθανότητες που δίνει η S&P για έναν BBB εκδότη να είναι σε ένα χρόνο σε μία από τις κατηγορίες πιστοληπτικής ικανότητας:

Πίνακας 5. Πιθανότητα μεταβολής πιστοληπτικής ικανότητας εκδότη ομολογίας BBB

Ταξινόμηση σε 1 έτος	Πιθανότητα (%)
AAA	0,02
AA	0,33
A	5,95
BBB	86,93
BB	5,30
B	1,17
CCC	0,12
Αθέτηση	0,18

Είναι φανερό ότι υπάρχει πολύ μεγαλύτερη πιθανότητα ο εκδότης να διατηρηθεί στην ίδια κατηγορία (86,93%) στο τέλος του ετήσιου χρονικού ορίζοντα, μικρή πιθανότητα να αναβαθμιστεί ή να υποβιβαστεί (5,95% και 5,30% αντίστοιχα) και μόλις 0,18% ο εκδότης να αθετήσει τις υποχρεώσεις του.

Στη συνέχεια υπολογίζεται η παρούσα αξία των υπολοίπων χρηματορροών (τοκομερίδια και ονομαστική αξία) του ομολόγου σύμφωνα με τη νέα ταξινόμησή του. Το προεξοφλητικό επιτόκιο λαμβάνεται από την καμπύλη μελλοντικών αποδόσεων των ομολόγων χωρίς τοκομερίδιο για ένα έως τέσσερα έτη. Τα επιτόκια αυτά δίνονται για κάθε κατηγορία από τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 6. Προεξοφλητικά επιτόκια

Κατηγορία	Έτος 1	Έτος 2	Έτος 3	Έτος 4
AAA	3,60	4,17	4,73	5,12
AA	3,65	4,22	4,78	5,17
A	3,72	4,32	4,93	5,32
BBB	4,10	4,67	5,25	5,63
BB	5,55	6,02	6,78	7,27
B	6,05	7,02	8,03	8,52
CCC	15,05	15,02	14,03	13,52

Πηγή:CreditMetrics JP Morgan

Έτσι για τον υπολογισμό της αξίας του συγκεκριμένου ομολόγου αν υποθεθεί ότι αυτό αναβαθμίζεται στην κατηγορία A, προεξοφλούνται τέσσερα τοκομερίδια και η ονομαστική του αξία με προεξοφλητικό επιτόκιο τη μελλοντική απόδοση των ομολόγων κατηγορίας A.

$$V_A = 6 + \frac{6}{(1 + 3,72)} + \frac{6}{(1 + 4,32)^2} + \frac{6}{(1 + 4,93)^3} + \frac{106}{(1 + 5,32)^4} = 108,66$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο εξάγονται οι τιμές του ομολόγου στο τέλος του έτους για όλες τις δυνατές ταξινομήσεις του. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 7. Πιθανές μελλοντικές τιμές σε ένα έτος και μεταβολές τιμών ομολόγου BBB

Ταξινόμηση σε 1 έτος	Πιθανότητα	Μελλοντική αξία (\$)	Μεταβολή ΔV(\$)
AAA	0,02	109,37	1,82
AA	0,33	109,19	1,64
A	5,95	108,66	1,11
BBB	86,93	107,55	0
BB	5,30	102,02	-5,53
B	1,17	98,10	-9,45
CCC	0,12	83,64	-23,91
Αθέτηση	0,18	51,13	-56,42

Πηγή:CreditMetrics JP Morgan

Η κατανομή που προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα είναι φανερό ότι δεν είναι κανονική. Έτσι η VaR σε ένα έτος για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% είναι -23,91 ενώ η αντίστοιχη τιμή για την κανονική κατανομή είναι -7,43.

Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για οποιοδήποτε άλλο ομόλογο περιέχεται στο χαρτοφυλάκιο. Έστω δηλαδή ότι το χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει ένα επιπλέον τριετές ομόλογο κατηγορίας A με τοκομερίδιο 5%. Το πρόβλημα έγκειται στο να υπολογιστεί η αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος του χρονικού ορίζοντα. Αν οι μεταβολές της πιστοληπτικής ικανότητας των εκδοτών των δύο ομολόγων είχαν μηδενική συσχέτιση τότε η αξία του χαρτοφυλακίου θα υπολογίζονταν αθροίζοντας τις επιμέρους αξίες ενώ η πιθανότητα να είχε το χαρτοφυλάκιο τη συγκεκριμένη αξία θα ήταν ίση με το γινόμενο των επιμέρους πιθανοτήτων. Στην πραγματικότητα όμως υπάρχουν σημαντικές συσχετίσεις ανάμεσα στη μεταβολή της πιστοληπτικής ικανότητας των διαφόρων ομολόγων οι οποίες εν γένει οφείλονται σε μακροοικονομικούς παράγοντες. Ενώ δηλαδή κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι κάθε επιχείρηση είναι μοναδική και επομένως η μεταβολή της πιστοληπτικής της ικανότητας οφείλεται σε γεγονότα και ιδιαίτερες συνθήκες που την αφορούν άμεσα, οι μελέτες αποδεικνύουν την ύπαρξη ταυτόχρονων τέτοιων μεταβολών σε μεγάλες ομάδες επιχειρήσεων και συνεπώς συσχέτιση μεταξύ τους. Οι συσχετίσεις είναι μεγαλύτερες ανάμεσα σε επιχειρήσεις του ίδιου κλάδου, ή της ίδιας γεωγραφικής περιοχής. Επιπλέον οι συσχετίσεις μεταβάλλονται ανάλογα με τη γενικότερη οικονομική κατάσταση. Σε περιόδους κρίσεων τα περισσότερα περιουσιακά στοιχεία των επιχειρήσεων ελαττώνονται σε αξία, με αποτέλεσμα περισσότερες επιχειρήσεις να αθετούν τις υποχρεώσεις τους. Το αντίθετο συμβαίνει όταν υπάρχει ανάπτυξη: οι συσχετίσεις των υποβαθμίσεων της πιστοληπτικής ικανότητας είναι μικρότερες.

Αφού λοιπόν υπολογιστούν οι συσχετίσεις των αποδόσεων του ενεργητικού, στη συνέχεια υπολογίζεται η κοινή πιθανότητα να έχουν τα ομόλογα συγκεκριμένες κατατάξεις σε ένα χρόνο και από αυτή η μελλοντική αξία του χαρτοφυλακίου.

3.2.4 Υπολογισμός της κοινής πιθανότητας μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας

Το CreditMetrics υπολογίζει πρώτα τις συσχετίσεις μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών διαφόρων οφειλετών σαν προσέγγιση των συσχετίσεων των αποδόσεων του ενεργητικού και στη συνέχεια εκτιμά τις συσχετίσεις των μεταβολών της πιστοληπτικής ικανότητας από την κοινή κατανομή των αποδόσεων των μετοχών (Crouhy et al., 2000). Οι συσχετίσεις παραμένουν σταθερές καθ' όλο τον χρονικό

ορίζοντα στον οποίο εξετάζεται ο κίνδυνος, δεν προβλέπεται δηλαδή στοχαστική διαδικασία μεταβολής τους.

Στη συνέχεια υπολογίζει την κατανομή της αξίας του χαρτοφυλακίου με βάση τις κοινές πιθανότητες μετάβασης των πιστούχων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι πιθανότητες και τα επίπεδα μετάβασης για την BBB επιχείρηση δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 8. Πιθανότητες και επίπεδα μετάβασης κατηγορίας BBB

Ταξινόμηση	Επίπεδο μετάβασης	Πιθανότητα (%)	Αξία ενεργητικού
AAA			
AA	Z_{AA}	0,02	3,43σ
A	Z_A	0,33	2,93σ
BBB	Z_{BBB}	5,95	2,39σ
BB	Z_{BB}	86,93	1,37σ
B	Z_B	5,30	-1,23σ
CCC	Z_{CCC}	1,17	-2,04σ
Αθέτηση	Z_{Def}	0,12	-2,30σ

Πηγή: CreditMetrics JP Morgan

Ομοίως μπορεί να δημιουργηθεί και δεύτερος πίνακας με τα επίπεδα και τις πιθανότητες μετάβασης για επιχείρηση κατηγορίας A:

Πίνακας 9. Πιθανότητες και επίπεδα μετάβασης κατηγορίας A

Ταξινόμηση	Πιθανότητα (%)	Επίπεδο μετάβασης	Αξία ενεργητικού
AAA	0,09		
AA	2,27	Z'_{AA}	3,12σ'
A	91,05	Z'_A	1,98σ'
BBB	5,52	Z'_{BBB}	-1,51σ'
BB	0,74	Z'_{BB}	-2,30σ'
B	0,26	Z'_B	-2,72σ'
CCC	0,01	Z'_{CCC}	-3,19σ'
Αθέτηση	0,06	Z'_{Def}	-3,24σ'

Πηγή: CreditMetrics JP Morgan

Στη συνέχεια βρίσκεται η συσχέτιση ρ μεταξύ των δύο αποδόσεων ενεργητικού R και R' και δημιουργείται ο πίνακας συνδιακύμανσης:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \rho\sigma_A\sigma'_A \\ \rho\sigma_A\sigma'_A & \sigma'^2_A \end{bmatrix}$$

με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζονται οι κοινές πιθανότητες μετάβασης. Έστω ότι ζητείται η πιθανότητα και οι δύο επιχειρήσεις να παραμείνουν στην ίδια κατηγορία,

δηλαδή η πρώτη στη BB και η δεύτερη στην A. Η κοινή πιθανότητα θα είναι (Gurton et al., 1997):

$$\Pr\{Z_B < R < Z_{BB}, Z'_{BB} < R' < Z'_A\} = \int_{Z_B}^{Z_{BB}} \int_{Z'_{BB}}^{Z'_A} f(r, r'; \Sigma) dr' dr \quad (6)$$

όπου $f(r, r'; \Sigma)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής των δύο μεταβλητών με πίνακα συνδιακύμανσης Σ^3 . Η συνάρτηση αυτή ως γνωστό δίνεται από τη σχέση:

$$f(r_{BB}, r_A; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} [r_{BB}^2 - 2\rho r_{BB}r_A + r_A^2]\right\}$$

Μπορεί επομένως να υπολογιστεί η πιθανότητα και των δύο πιστούχων να βρίσκονται σε οποιοδήποτε συνδυασμό κατηγοριών πιστοληπτικής ικανότητας, για παράδειγμα να παραμείνουν στην ίδια κατηγορία, δηλαδή BB και A αντίστοιχα, θέτοντας $\rho=0,20$:

$$\begin{aligned} & \Pr(-1,23 < r_{BB} < 1,37, -1,51 < r_A < 1,98) \\ & = \int_{-1,23}^{1,37} \int_{-1,51}^{1,98} f(r_{BB}, r_A; \rho) dr_{BB} r_A = 0,7365 \end{aligned}$$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ίδια διαδικασία ώστε να υπολογιστούν και οι υπόλοιπες 63 πιθανές κοινές κατατάξεις των δύο επιχειρήσεων και αν υποθεθεί ότι $\rho=20\%$, τότε προκύπτουν οι πιθανότητες του παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 10. Κοινές πιθανότητες μετάβασης για οφειλέτες κατηγοριών BB και A (%)

Κατηγορία πρώτης επι/σης	Κατηγορία δεύτερης επιχείρησης							Αδυν. Πληρ.	Σύνολο
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC		
AAA	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03
AA	0,00	0,01	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,14
A	0,00	0,04	0,61	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,66
BBB	0,02	0,35	7,10	0,20	0,02	0,01	0,00	0,00	7,70
BB	0,07	1,79	73,65	4,24	0,56	0,18	0,01	0,04	80,54
B	0,00	0,08	7,80	0,79	0,13	0,05	0,00	0,01	8,86
CCC	0,00	0,01	0,85	0,11	0,02	0,01	0,00	0,00	1,00
Αθέτηση	0,00	0,01	0,90	0,13	0,02	0,01	0,00	0,00	1,07
Σύνολο	0,09	2,29	91,07	5,48	0,75	0,26	0,01	0,05	100,00

Πηγή: CreditMetrics JP Morgan

Ο πίνακας αυτός είναι αρκετός για να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση της μεταβολής της αξίας ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων των δύο επιχειρήσεων. Για να

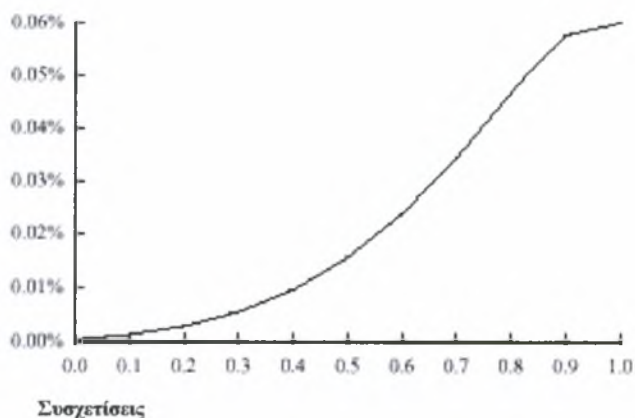
³ Οι μεταβλητές r και r' στην εξίσωση (6) αντιπροσωπεύουν τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι δύο αποδόσεις μέσα στα εκάστοτε διαστήματα.

υπολογιστεί η τυπική απόκλιση για ένα μεγαλύτερο χαρτοφυλάκιο χρειάζεται να επαναληφθεί η προηγούμενη ανάλυση για κάθε ζευγάρι. Είναι φανερό πως αν όλες οι επιχειρήσεις έχουν την ίδια συσχέτιση ρ , τότε ο μέγιστος αριθμός πινάκων που θα υπολογιστούν είναι 28, άσχετα από το μέγεθος του χαρτοφυλακίου, καθώς ο κάθε πίνακας εξαρτάται μόνο από την αρχική κατάταξη των επιχειρήσεων και τη συσχέτισή τους. Συνεπώς, αφού υπάρχουν μόνο επτά δυνατές κατατάξεις για την κάθε επιχείρηση, υπάρχουν μόνο 28 συνδυασμοί για την αρχική κατάταξη κάθε ζεύγους επιχειρήσεων. Να σημειωθεί ότι τα σύνολα για κάθε επιχείρηση των πινάκων αυτών είναι οι πιθανότητες μετάβασής της.

Η επίδραση της συσχέτισης στο προηγούμενο παράδειγμα γίνεται πιο εμφανής στην περίπτωση που και οι δύο επιχειρήσεις αθετήσουν τις υποχρεώσεις τους. Αν οι αποδόσεις του ενεργητικού τους είναι ασυσχέτιστες, η κοινή πιθανότητα αθέτησης είναι το γινόμενο των μεμονωμένων πιθανοτήτων, δηλαδή 0,0006%. Αντίθετα αν οι αποδόσεις είναι τέλεια συσχετισμένες, δηλαδή $\rho=1$, τότε κάθε φορά που η A επιχείρηση αθετεί τις υποχρεώσεις της, το ίδιο κάνει και η BB επιχείρηση. Συνεπώς η πιθανότητα αθετήσουν και οι δύο επιχειρήσεις τις υποχρεώσεις τους είναι όση και η πιθανότητα μόνο της A, δηλαδή 0,06%, που είναι εκατό φορές μεγαλύτερη από την περίπτωση που οι αποδόσεις είναι ασυσχέτιστες. Η επίδραση της συσχέτισης των αποδόσεων του ενεργητικού στην κοινή πιθανότητα μετάβασης δύο οφειλετών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Σχήμα 7. Πιθανότητα κοινών αθετήσεων σαν συνάρτηση της συσχέτισης των αποδόσεων του ενεργητικού

Κοινή πιθανότητα αθέτησης



3.3 Υπολογισμός των συσχετίσεων των αποδόσεων του ενεργητικού

Έχει αποδειχθεί ότι η εκτίμηση σωστών συσχετίσεων για τις αποδόσεις του ενεργητικού είναι πολύ σημαντική για τον υπολογισμό της VaR του χαρτοφυλακίου, καθώς αυτή είναι πολύ ευαίσθητη στη μεταβολή των συσχετίσεων και η ακριβής εκτίμησή τους είναι καθοριστική για τη βελτιστοποίηση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου. Η επίδραση είναι μάλιστα μεγαλύτερη για χαρτοφυλάκια τίτλων χαμηλής πιστοληπτικής ικανότητας. Όταν η πιστοληπτική ικανότητα των τίτλων του χαρτοφυλακίου μειώνεται, ο αναμενόμενος αριθμός των περιπτώσεων αθέτησης αυξάνει, και αυτός ο αριθμός πολλαπλασιάζεται από την αύξηση στις συσχετίσεις αθετήσεων

Επειδή οι αποδόσεις του ενεργητικού είναι δύσκολο να παρατηρηθούν, το CreditMetrics επέλεξε να χρησιμοποιεί αντί για αυτές τις αποδόσεις των μετοχών, γεγονός που ισοδυναμεί με πλήρη χρηματοδότηση των δραστηριοτήτων της επιχείρησης από ίδια κεφάλαια και ενδεχομένως να επηρεάζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Το CreditMetrics υπολογίζει τις συσχετίσεις των αποδόσεων του ενεργητικού χρησιμοποιώντας ένα υπόδειγμα πολλών παραγόντων και όχι μόνο ιστορικά δεδομένα. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγει τα δειγματοληπτικά λάθη και αυξάνει την ακρίβεια. Επιπλέον με τον τρόπο αυτό μειώνεται κατακόρυφα ο αριθμός των υπολογισμών που απαιτούνται. Τα υποδείγματα πολλών παραγόντων περιορίζουν τις συσχετίσεις που πρέπει να υπολογιστούν σε αυτές μεταξύ ενός περιορισμένου αριθμού κοινών παραγόντων που επηρεάζουν τις αποδόσεις του ενεργητικού.

Το υπόδειγμα υποθέτει πως η απόδοση του ενεργητικού της επιχείρησης καθορίζεται από ένα σύνολο κοινών ή συστηματικών παραγόντων κινδύνου και από μη συστηματικούς παράγοντες (Gupton et al.). Οι τελευταίοι εξαρτώνται από την επιχείρηση, τη χώρα ή τον κλάδο και δεν επηρεάζουν τις συσχετίσεις των αποδόσεων του ενεργητικού καθώς δε συσχετίζονται μεταξύ τους αλλά ούτε και με τους κοινούς παράγοντες. Οι συσχετίσεις των αποδόσεων του ενεργητικού μεταξύ των επιχειρήσεων εξαρτώνται μόνο από παράγοντες κινδύνου κοινούς για όλες τις επιχειρήσεις. Οι κίνδυνοι που συνδέονται με μη συστηματικούς παράγοντες μπορούν να εξαλειφθούν σε ένα διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο, ενώ αντίθετα οι κίνδυνοι που οφείλονται στους κοινούς παράγοντες δεν μπορούν να εξαλειφθούν με τη διαφοροποίηση.

Έστω χαρτοφυλάκιο το οποίο περιέχει τίτλους των οφειλετών $k, k=1, \dots, N$ των οποίων η απόδοση του ενεργητικού καθορίζεται από τους κοινούς παράγοντες σύμφωνα με τη σχέση:

$$r_k = \alpha_k + \beta_{1k} I_1 + \beta_{2k} I_2 + \varepsilon_k \quad k = 1, \dots, N$$

όπου N είναι ο αριθμός των πιστούχων (επιχειρήσεις), r_k η απόδοση του ενεργητικού της επιχείρησης k , α_k το κομμάτι της απόδοσης του ενεργητικού που δεν εξαρτάται από τους κοινούς παράγοντες, I_1 και I_2 οι κοινói παράγοντες, β_{1k} και β_{2k} οι αναμενόμενες μεταβολές της r_k με δεδομένη αλλαγή στους κοινούς παράγοντες I_1 και I_2 αντίστοιχα, ε_k ο μη συστηματικός παράγοντας κινδύνου με μέση τιμή 0 και μηδενική συσχέτιση με όλους τους κοινούς παράγοντες καθώς και με τους μη συστηματικούς παράγοντες κινδύνου των άλλων επιχειρήσεων.

Επομένως από τη θεωρία χαρτοφυλακίου συνάγεται ότι:

$$\begin{aligned} \text{var}(r_k) &\equiv \sigma_k^2 \\ &= \beta_{1k}^2 \text{var}(I_1) + \beta_{2k}^2 \text{var}(I_2) + \text{var}(\varepsilon_k^2) + 2\beta_{1k}\beta_{2k} \text{cov}(I_1, I_2) \\ \text{cov}(r_i, r_j) &\equiv \sigma_{ij} \\ &= \beta_{1i}\beta_{1j} \text{var}(I_1) + \beta_{2i}\beta_{2j} \text{var}(I_2) + (\beta_{1i}\beta_{2j} + \beta_{2i}\beta_{1j}) \text{cov}(I_1, I_2) \end{aligned}$$

Αν ρ_{ij} είναι η συσχέτιση των αποδόσεων του ενεργητικού ανάμεσα στις επιχειρήσεις i και j , τότε:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Επομένως για να υπολογιστούν οι συσχετίσεις των αποδόσεων του ενεργητικού οποιουδήποτε αριθμού επιχειρήσεων, χρειάζεται να υπολογιστούν μόνο τα β_{ik} , δηλαδή $2N$ παράμετροι, καθώς και ο πίνακας συνδιακύμανσης για τους κοινούς παράγοντες, δηλαδή 3 παράμετροι. Γενικά για K κοινούς παράγοντες κινδύνου απαιτείται ο υπολογισμός $KN + K(K-1)/2$ παραμέτρων. Στο προηγούμενο παράδειγμα, για έναν αριθμό λόγου χάρη $N=1000$ επιχειρήσεων απαιτείται ο υπολογισμός 2003 παραμέτρων ενώ αν χρησιμοποιούνταν ιστορικά δεδομένα για τον υπολογισμό των συσχετίσεων θα απαιτούνταν 499.500 διαφορετικές συσχετίσεις.

Ειπώθηκε προηγουμένως ότι οι συσχετίσεις των αποδόσεων του ενεργητικού προσεγγίζονται από τις συσχετίσεις των αποδόσεων των μετοχών. Επειδή όμως είναι αδύνατο να βρεθούν τα απαραίτητα ιστορικά στοιχεία για όλους τους τίτλους η JP

Morgan καταφεύγει σε συσχετίσεις μεταξύ κυρίων χρηματιστηριακών δεικτών και ταξινόμηση των τίτλων με βάση το ποσοστό συμμετοχής τους στην κατηγορία των εταιριών που απαρτίζουν τους δείκτες. Επομένως προκειμένου να υπολογιστούν οι εκάστοτε συσχετίσεις ακολουθούνται τα εξής δύο βήματα. Πρώτα χρησιμοποιούνται κλαδικοί χρηματιστηριακούς δείκτες σε συγκεκριμένες χώρες προκειμένου να δημιουργηθούν πίνακες συσχέτισης των τοπικών κλάδων. Έτσι μπορεί λόγω χάρη να εκτιμηθεί η συσχέτιση μεταξύ του γερμανικού ασφαλιστικού κλάδου και της αμερικάνικης χημικής βιομηχανίας. Κατόπιν αποτυπώνεται η συμμετοχή της επιχείρησης σε καθένα από τους παραπάνω κλάδους. Για παράδειγμα αν μια επιχείρηση είναι κατά 60% αμερικάνικη και κατά 40% γερμανική και παράλληλα δραστηριοποιείται κατά 30% σε ασφάλειες και 70% στην παρασκευή χημικών, η αποτύπωσή της θα είναι 18% αμερικάνικες ασφάλειες, 42% αμερικάνικες χημικές βιομηχανίες, 12% γερμανικές ασφάλειες και 28% γερμανικές χημικές βιομηχανίες. Χρησιμοποιώντας τα ποσοστά από το δεύτερο βήμα και τις συσχετίσεις μεταξύ των κλάδων των διαφόρων χωρών που υπολογίστηκαν στο πρώτο βήμα, εκτιμάται η συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών δύο οποιονδήποτε πιστούχων. Για τους υπολογισμούς λαμβάνονται υπόψη για κάθε δείκτη οι αποδόσεις των τελευταίων 190 εβδομάδων και υπολογίζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των αποδόσεων. Έτσι αν οριστεί ως $R_t^{(k)}$ η απόδοση της t εβδομάδας για τον k δείκτη, η μέση τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{R}^{(k)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t^{(k)}$$

όπου T είναι ίσο με 190 και η τυπική απόκλιση ως εξής:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t^{(k)} - \bar{R}^{(k)})^2}$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι συνδιακυμάνσεις μεταξύ των δεικτών:

$$COV(k,l) = \frac{1}{T-1} \sum (R_t^{(k)} - \bar{R}^{(k)})(R_t^{(l)} - \bar{R}^{(l)})$$

και οι συσχετίσεις των εβδομαδιαίων αποδόσεών τους:

$$\rho_{k,l} = \frac{COV(k,l)}{\sigma_k \sigma_l}$$

Το μόνο που απομένει είναι να υπολογιστεί ποιο μέρος των αποδόσεων των μετοχών του κάθε πιστούχου περιλαμβάνεται στην απόδοση του δείκτη και ποιο στα

ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της επιχείρησης (firm-specific return), οπότε εκφράζεται η τυπική απόδοση της μετοχής της επιχείρησης ως σταθμικός μέσος όρος των αποδόσεων των δεικτών και της εταιρικής απόδοσης. Τέλος υπολογίζονται οι συσχετίσεις των μετοχικών αποδόσεων καθώς και η κοινή κατανομή των αποδόσεων των μετοχών των επιχειρήσεων.

3.4 Υπολογισμός της VaR

Το υπόδειγμα χρησιμοποιεί την κοινή κατανομή των αποδόσεων των μετοχών των επιχειρήσεων για να εκτιμήσει τη κοινή πιθανότητα μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας των δύο ομολόγων σε κάθε κατηγορία – συνολικά $2 \times 8 = 16$ τιμές, η οποία είναι και η πιθανότητα να έχει το χαρτοφυλάκιο σε ένα χρόνο αξία ίση με το άθροισμα των εκάστοτε αξιών των δύο ομολόγων.

Γίνεται κατανοητό πως όταν το χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει μια πλειάδα ομολόγων γίνεται εξαιρετικά δυσχερής ο υπολογισμός της τελικής αξίας του λόγω του μεγάλου όγκου των υπολογισμών που απαιτούνται. Για το λόγο αυτό το υπόδειγμα χρησιμοποιεί τη μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo για τον υπολογισμό της κατανομής της αξίας του χαρτοφυλακίου, η οποία έχει τη μορφή ομαλής γραμμής με μεγάλη συγκέντρωση τιμών στο αριστερό μέρος εξαιτίας των μεγάλων ενδεχόμενων απωλειών και μικρή συγκέντρωση στο δεξιό μέρος εξαιτίας περιορισμένων κερδών. Η απόσταση των άκρων της κατανομής από τη μέση τιμή μπορεί να μετρηθεί σε τυπικές αποκλίσεις. Στο παραπάνω παράδειγμα υπολογίζεται ότι η κατανομή της αξίας του χαρτοφυλακίου παρουσιάζει μέγιστη τιμή μόλις 0,70 τυπικές αποκλίσεις από τη μέση τιμή και ελάχιστη τιμή 33,25 τυπικές αποκλίσεις κάτω από τη μέση τιμή. Για τον υπολογισμό της κατανομής των τιμών του χαρτοφυλακίου με τη μέθοδο της προσομοίωσης Monte Carlo απαιτούνται τα παρακάτω βήματα:

1. Υπολογισμός του επιπέδου μετάβασης για κάθε κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας.
2. Εκτίμηση της συσχέτισης ανάμεσα στις αποδόσεις του ενεργητικού κάθε ζεύγους πιστούχων.
3. Δημιουργία σεναρίων αποδόσεων ενεργητικού σύμφωνα με την κοινή κανονική κατανομή τους. Συνήθης τακτική για τη δημιουργία συσχετισμένων κανονικών μεταβλητών είναι η Cholesky decomposition. Κάθε σενάριο

χαρακτηρίζεται από n τυποποιημένες αποδόσεις ενεργητικού, μία για καθένα από τους n εκδότες τίτλων του χαρτοφυλακίου.

4. Για κάθε σενάριο και για κάθε εκδότη, η τυπική απόδοση του ενεργητικού κατατάσσεται σε μία κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας, σύμφωνα με τα επίπεδα που υπολογίστηκαν στο βήμα 1.
5. Το χαρτοφυλάκιο αποτιμάται πάλι σύμφωνα με την καμπύλη απόδοσης που αντιστοιχεί στην κάθε κατηγορία.
6. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται πολλές φορές, π.χ. 100.000 φορές, και τα αποτελέσματα δίνουν τη γραφική παράσταση της κατανομής των τιμών του χαρτοφυλακίου.
7. Στο τέλος υπολογίζονται τα ποσοστιαία σημεία π.χ. 99% της κατανομής των μελλοντικών τιμών της αξίας του χαρτοφυλακίου.

4. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: PORTFOLIO MANAGER

Η μεγαλύτερη αδυναμία του CreditMetrics είναι ότι στηρίζεται σε πιθανότητες μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας που υπολογίζονται με βάση ιστορικά δεδομένα. Η ακρίβεια των υπολογισμών του CreditMetrics βασίζεται σε δύο προϋποθέσεις: πρώτον, ότι όλες οι επιχειρήσεις που ανήκουν στην ίδια κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας έχουν την ίδια πιθανότητα να αθετήσουν τις υποχρεώσεις τους και δεύτερον, ότι η πραγματική πιθανότητα αθέτησης είναι ίδια με τον ιστορικό μέσο όρο. Οι θέσεις αυτές αμφισβητήθηκαν από την εταιρία KMV⁴, η οποία θεωρεί πως αυτό δεν μπορεί να ισχύει αφού η πιθανότητα αθέτησης είναι συνεχής μεταβλητή ενώ οι οίκοι αξιολόγησης μεταβάλλουν την πιστοληπτική ικανότητα των επιχειρήσεων όταν συγκεντρώνουν τα απαραίτητα στοιχεία. Με τη βοήθεια προσομοίωση η εταιρία έδειξε ότι οι ιστορικές μέσες τιμές των πιθανοτήτων μετάβασης και αθέτησης μπορεί να αποκλίνουν σημαντικά από τις πραγματικές. Συγκεκριμένα, η μέση ιστορική πιθανότητα αθέτησης υπερεκτιμά την πραγματική για ένα μέσο οφειλέτη. Επίσης, η εταιρία έδειξε ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις πιθανότητες αθέτησης επιχειρήσεων που ανήκουν στην ίδια κατηγορία και ότι υπάρχει επίσης σημαντική επικάλυψη του εύρους των πιθανοτήτων αθέτησης επιχειρήσεων που ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες. Βρέθηκαν δηλαδή επιχειρήσεις των κατηγοριών BBB και A να έχουν την ίδια πιθανότητα αθέτησης. Το γεγονός αυτό μπορεί να προκαλέσει στρεβλώσεις στην αγορά, αφού οι τίτλοι της επιχείρησης της οποίας η πιθανότητα αθέτησης έχει υποεκτιμηθεί θα προτιμηθούν έναντι αυτών της επιχείρησης της οποίας η πιθανότητα αθέτησης έχει υπερεκτιμηθεί.

Για τους λόγους αυτούς η εταιρία KMV δεν χρησιμοποιεί τους πίνακες των αξιολογικών οίκων προκειμένου να υπολογίσει την πιθανότητα αθέτησης μιας επιχείρησης. Αντίθετα υπολογίζει την *αναμενόμενη πιθανότητα αθέτησης* (*Expected Default Frequency - EDFTM*) για κάθε επιχείρηση χωριστά, βασισόμενη στη θεωρία του Merton: η επιχείρηση θεωρείται ότι αθετεί τις υποχρεώσεις της όταν η αξία του ενεργητικού της πέσει κάτω από την αξία των υποχρεώσεών της. Το μέγεθος της διαφοράς ανάμεσα στο ενεργητικό και τις υποχρεώσεις και η μεταβλητότητα του ενεργητικού καθορίζουν την πιθανότητα αθέτησης του πιστούχου. Η KMV έχει

⁴ KMV είναι το σήμα κατατεθέν της ομώνυμης εταιρίας, η οποία ιδρύθηκε το 1989 από τους Steven Kealhofer, John McQuown και Oldrich Vasicek. Τον Απρίλιο του 2002 η εταιρία αποκτήθηκε από τη Moody's Co.

δημιουργήσει μια μεγάλη βάση δεδομένων ώστε να μπορεί να εκτιμά την κατανομή της ζημίας σε σχέση με τις πιθανότητες αθέτησης και μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας. Το λογισμικό που διαθέτει – Credit Monitor – υπολογίζει την πιθανότητα αθέτησης για κάθε πιστούχο σαν συνάρτηση της κεφαλαιακής δομής της επιχείρησης, της μεταβλητότητας της απόδοσης του ενεργητικού και της τρέχουσας αξίας του ενεργητικού χρησιμοποιώντας το υπόδειγμα του Merton. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται ιστορικά δεδομένα από το αρχείο της KMV για να εκτιμηθεί η κατανομή της ζημίας.

4.1 Περιγραφή της προσέγγισης

Η πιθανότητα αθέτησης της επιχείρησης αυξάνει καθώς η αξία του ενεργητικού προσεγγίζει τη λογιστική αξία των υποχρεώσεων, μέχρι του σημείου στο οποίο η αξία του ενεργητικού δεν επαρκεί για την αποπληρωμή τους. Σε μελέτες που έχει διεξάγει η εταιρία έχει βρει πως σε γενικές γραμμές οι επιχειρήσεις δεν αθετούν τις υποχρεώσεις τους όταν η αξία του ενεργητικού γίνει ίση με τη λογιστική αξία του συνολικού χρέους τους. Πολλές επιχειρήσεις λόγω της μακροπρόθεσμης διάρθρωσης του χρέους του εξακολουθούν να το διαπραγματεύονται και να το εξυπηρετούν και πέρα από αυτό το σημείο. Για παράδειγμα, όρια πιστοδότησης (lines of credit) που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί ακόμη συνήθως χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις οικονομικής δυσπραγίας με αποτέλεσμα αφενός μεν να αυξάνουν το επίπεδο του συνολικού δανεισμού, αφετέρου να παρέχουν την αναγκαία ρευστότητα για την κάλυψη των υποχρεώσεων και άρα αναστολή της κατάστασης αθέτησης. Επομένως, το κομμάτι της κατανομής της αξίας του ενεργητικού που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο του συνολικού δανεισμού δεν απεικονίζει ακριβώς την πιθανότητα αθέτησης, αλλά την υπερεκτιμά.

Η KMV βασισμένη σε εμπειρικές παρατηρήσεις κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η κατάσταση αθέτησης επέρχεται όταν η αγοραία αξία του ενεργητικού πέσει κάτω από ένα κρίσιμο σημείο το οποίο βρίσκεται:

- κάτω από τη λογιστική αξία των συνολικών υποχρεώσεων και
- πάνω από τη λογιστική αξία των τρεχουσών υποχρεώσεων

Με βάση αυτό η KMV θέτει το παραπάνω σημείο αθέτησης (*default point*) να είναι το άθροισμα:

- της ονομαστικής αξίας όλων των βραχυπρόθεσμων υποχρεώσεων (<1 έτος) και

- του 50% της ονομαστικής αξίας όλων των μακροπρόθεσμων υποχρεώσεων

Αν και η επιλογή του συγκεκριμένου σημείου είναι αυθαίρετη, φαίνεται να απεικονίζει σε μεγάλο βαθμό την πραγματικότητα. Η καθαρή αξία (*net worth*) της επιχείρησης επομένως είναι ίση με την αγοραία αξία του ενεργητικού μείον το σημείο αθέτησης:

$$(Καθαρή\ αξία) = (Αγοραία\ αξία\ ενεργητικού) - (Σημείο\ αθέτησης)$$

Η επιχείρηση περιέρχεται σε κατάσταση αθέτησης όταν η καθαρή αξία της γίνει μηδενική.

Είναι προφανές ότι όπως η αγοραία αξία του ενεργητικού, έτσι και η καθαρή αξία θα πρέπει πάντοτε να λαμβάνεται υπόψη στα πλαίσια του επιχειρηματικού κινδύνου που αντιμετωπίζει η επιχείρηση. Για παράδειγμα, οι εταιρίες τροφίμων και ποτών μπορούν να έχουν μεγαλύτερη αναλογία ξένων προς ίδια κεφάλαια (χρηματοοικονομική μόχλευση) από τις εταιρίες υψηλής τεχνολογίας γιατί τα μεγέθη τους εμφανίζουν σχετική σταθερότητα στην εξέλιξή τους. Έτσι αν υπολογιστούν οι πιθανότητες αθέτησης δύο επιχειρήσεων που ανήκουν στους παραπάνω κλάδους με παρόμοιο επίπεδο ενεργητικού και μόχλευσης, η επιχείρηση τροφίμων θα έχει σε γενικές γραμμές μικρότερη πιθανότητα γιατί έχει μικρότερη μεταβλητότητα ενεργητικού (*asset volatility*), μέγεθος που αποτυπώνει τον επιχειρηματικό κίνδυνο.

Η μεταβλητότητα του ενεργητικού σχετίζεται με το μέγεθος και τη φύση της επιχείρησης. Επειδή η χρηματοοικονομική μόχλευση λειτουργεί αυξητικά στη μεταβλητότητα του ενεργητικού, επιχειρήσεις με μικρή μεταβλητότητα αυξάνουν τη μόχλευσή τους (π.χ. τράπεζες), ενώ αντίθετα επιχειρήσεις με μεγαλύτερη μεταβλητότητα (π.χ. εταιρίες λογισμικού) προτιμούν μικρότερη μόχλευση.

Οι τρεις παραπάνω βασικοί παράγοντες πιστωτικού κινδύνου, η αξία του ενεργητικού, η μεταβλητότητά του και η χρηματοοικονομική μόχλευση συνδυάζονται σε ένα μέτρο κινδύνου, το οποίο μετρά την αγοραία καθαρή αξία της επιχείρησης με μονάδα την τυπική απόκλιση της αξίας του ενεργητικού. Το μέτρο αυτό ονομάζεται απόσταση από την αθέτηση (*Distance to Default – DD*) και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$(Απόσταση\ από\ αθέτηση) = (Καθαρή\ αξία) / [(Αξία\ ενεργητικού) \times (Τυπική\ απόκλιση)]$$

Για παράδειγμα, όταν για μια επιχείρηση η απόσταση από την αθέτηση είναι ίση με 2, αυτό σημαίνει πως χρειάζεται μεταβολή της αξίας του ενεργητικού ίση με δύο τυπικές αποκλίσεις για να αθετήσει η επιχείρηση τις υποχρεώσεις της. Το μέτρο αυτό ουσιαστικά υπολογίζει πόσο μεγάλη πτώση της αξίας της επιχείρησης απαιτείται

προκειμένου αυτή να μη μπορεί να καλύψει τις υποχρεώσεις της. Το γεγονός ότι εκφράζεται σε τυπικές αποκλίσεις βοηθά ώστε να μπορούν να γίνουν συγκρίσεις μεταξύ επιχειρήσεων, γεγονός που δεν θα είχε νόημα αν το μέτρο εκφραζόταν σε ποσοστά της αξίας του εκάστοτε ενεργητικού. Εκτός από τους τρεις παραπάνω παράγοντες το μέτρο εμπεριέχει την επίδραση του κλάδου, της γεωγραφικής θέσης και του μεγέθους της επιχείρησης όπως αυτά αποτυπώνονται στην αξία του ενεργητικού και τη μεταβλητότητάς της.

Η KMV χρησιμοποιεί ένα υπόδειγμα εκτίμησης της πιθανότητας αθέτησης που ανέπτυξαν δύο από τα ιδρυτικά μέλη της, οι Oldrich Vasicek και Stephen Kealhofer και το οποίο αποτελεί γενίκευση του γνωστού υποδείγματος αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης Black-Scholes. Σύμφωνα με αυτό η μετοχή είναι ένα perpetual option και το σημείο αθέτησης ένα επίπεδο απορρόφησης (absorbing barrier) για την αξία του ενεργητικού. Όταν η αξία του ενεργητικού φτάσει στο σημείο αθέτησης, η επιχείρηση θεωρείται ότι αδυνατεί να καλύψει τις υποχρεώσεις της και τις αθετεί. Το υπόδειγμα προβλέπει την ύπαρξη διαφόρων μορφών υποχρεώσεων, όπως βραχυπρόθεσμοι, μακροπρόθεσμοι και μετατρέψιμοι χρέους, κοινών και προνομιούχων μετοχών. Όταν το ενεργητικό της επιχείρησης γίνει πολύ μεγάλο, οι μετατρέψιμοι τίτλοι θεωρείται ότι μετατρέπονται σε μετοχές. Το υπόδειγμα προβλέπει επίσης εκροές όπως η διανομή μερίσματος. Για την δημιουργία μια εμπειρικής κατανομής η οποία θα αντιστοιχίζει την εκάστοτε DD σε μία πιθανότητα αθέτησης, χρησιμοποιείται μια βάση δεδομένων επιχειρήσεων που έχουν αθετήσει τις υποχρεώσεις τους. Με αυτόν τον τρόπο η KMV υπολογίζει την EDF, την πιθανότητα δηλαδή να αθετήσει τις υποχρεώσεις της τον επόμενο χρόνο ή τα επόμενα χρόνια μια εισηγμένη επιχείρηση. Ο υπολογισμός της απαιτεί τη γνώση της τιμής της μετοχής καθώς και ορισμένων άλλων στοιχείων από τις λογιστικές καταστάσεις της επιχείρησης. Υπολογίζεται και αναλύεται με τη χρήση του λογισμικού πακέτου Credit Monitor™.

Τα στάδια που ακολουθούνται για τον υπολογισμό της πιθανότητας αθέτησης είναι τρία (Crosbie et al):

- Εκτίμηση της αξίας του ενεργητικού και της μεταβλητότητάς του
- Υπολογισμός της απόστασης από την αθέτηση (distance-to-default)
- Υπολογισμός της πιθανότητας αθέτησης

4.1.1 Εκτίμηση της αξίας του ενεργητικού και της μεταβλητότητάς της απόδοσής του.

Η αξία του ενεργητικού της επιχείρησης και η μεταβλητότητά της στο χρόνο T εκτιμώνται από την αγοραία αξία και μεταβλητότητα των μετοχών και τη λογιστική αξία του χρέους της επιχείρησης. Η μεταβλητότητα των αποδόσεων του ενεργητικού θεωρείται ότι παραμένει σταθερή στο χρόνο. Χρησιμοποιείται, όπως και στο CreditMetrics, η θεωρία του Merton για την αποτίμηση του εταιρικού χρέους. Η μετοχή της επιχείρησης θεωρείται δικαίωμα προαίρεσης αγοράς με υποκείμενο μέσο τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης, τιμή εξάσκησης τη λογιστική αξία του χρέους και λήξη T . Η αξία και η μεταβλητότητα του ενεργητικού που υπονοείται (implied) από την τρέχουσα αξία και μεταβλητότητα των μετοχών βρίσκεται λύνοντας ένα σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \text{Equity} \\ \text{Value} \end{bmatrix} &= \text{Option Function} \left(\begin{bmatrix} \text{Asset} \\ \text{Value} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{Asset} \\ \text{Volatility} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{Capital} \\ \text{Structure} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{Interest} \\ \text{Rate} \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \text{Equity} \\ \text{Volatility} \end{bmatrix} &= \text{Option Function} \left(\begin{bmatrix} \text{Asset} \\ \text{Value} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{Asset} \\ \text{Volatility} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{Capital} \\ \text{Structure} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{Interest} \\ \text{Rate} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Στην απλή του μορφή, όταν δηλαδή η κεφαλαιακή δομή της επιχείρησης αποτελείται μόνο από ένα είδος αντίστοιχα μετοχών και εξωτερικού χρέους, το σύστημα παίρνει τη μορφή των γνωστών εξισώσεων του υποδείγματος Black-Scholes:

$$V_E = V_{A(t)} \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} F \Phi(d_2) \quad (7)$$

όπου V_E η αγοραία αξία των μετοχών της επιχείρησης,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_{A(t)}}{F}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_A \sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T-t},$$

και r το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

Οι μεταβλητότητες των αποδόσεων των μετοχών και του ενεργητικού συνδέονται με τη σχέση:

$$\sigma_E = \frac{V_A}{V_E} \Delta \sigma_A \quad (8)$$

όπου Δ ο συντελεστής αντιστάθμισης $N(d_1)$ από την (7)

Στο υπόδειγμα Vasicek-Kealhofer λαμβάνονται υπόψη πιο σύνθετες κεφαλαιακές δομές. Συγκεκριμένα επιτρέπει την ύπαρξη βραχυπρόθεσμου, μακροπρόθεσμου και μετατρέψιμου χρέους, προνομιούχων και κοινών μετοχών. Η KMV θεωρεί ότι η εξίσωση (8) δεν μπορεί να δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα γιατί ισχύει για στιγμιαίες μεταβολές και η χρηματοοικονομική μόχλευση V_A/V_E παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις. Ως εκ τούτου, η KMV θεωρεί ότι το υπόδειγμα Black-Scholes υπερεκτιμά τη μεταβλητότητα του ενεργητικού όταν η χρηματοοικονομική μόχλευση ελαττώνεται απότομα και συνεπώς υπερεκτιμά και την πιθανότητα αθέτησης. Αντί λοιπόν της στιγμιαίας σχέσης (8) η σε υπολογίζεται χρησιμοποιώντας μια σύνθετη επαναληπτική διαδικασία. Η διαδικασία αυτή υποθέτει μια αρχική τιμή μεταβλητότητας από την οποία υπολογίζει την αξία του ενεργητικού και την απόδοσή του. Από τις αποδόσεις που προκύπτουν κατ' αυτόν τον τρόπο υπολογίζεται νέα μεταβλητότητα, η οποία χρησιμοποιείται στην επόμενη επανάληψη για τον προσδιορισμό νέας αξίας ενεργητικού. Μετά από ένα μικρό αριθμό επαναλήψεων οι τιμές της μεταβλητότητας που υπολογίζονται με τους δύο τρόπους συγκλίνουν στην πραγματική τιμή.

4.1.2 Υπολογισμός της απόστασης από την αθέτηση

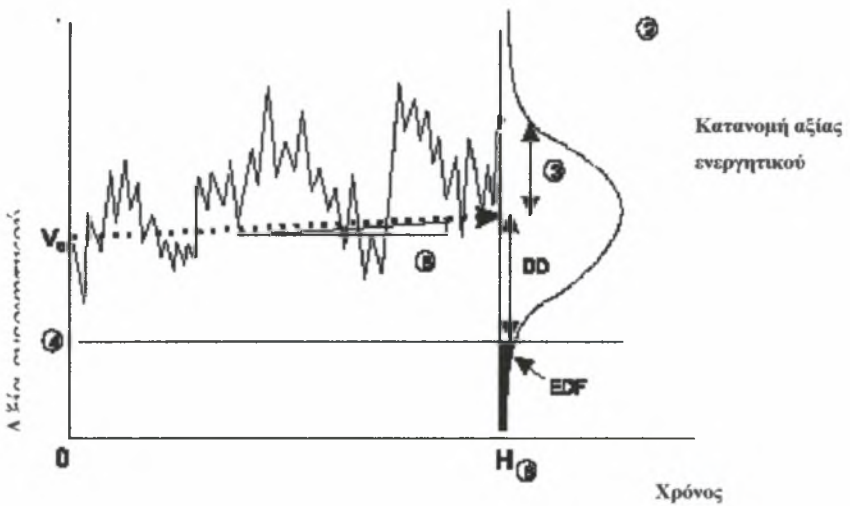
Προκειμένου να υπολογιστεί η πιθανότητα αθέτησης μιας επιχείρησης σε ένα χρονικό ορίζοντα T χρειάζεται να υπολογιστούν ή να εκτιμηθούν οι παρακάτω έξι μεταβλητές:

- 1) Η τρέχουσα αξία του ενεργητικού (V_0)
- 2) Η κατανομή της αξίας του ενεργητικού (V_t) στο χρονικό ορίζοντα T
- 3) Η μεταβλητότητα σ_A των μελλοντικών τιμών του ενεργητικού στο χρόνο T
- 4) Το σημείο αθέτησης DPT_T
- 5) Ο αναμενόμενος ρυθμός ανάπτυξης του ενεργητικού στο χρόνο T
- 6) Το βάθος του χρονικού ορίζοντα T

Από αυτές οι τέσσερις πρώτες μεταβλητές είναι οι πλέον καθοριστικές για τον υπολογισμό της πιθανότητας αθέτησης. Ο αναμενόμενος ρυθμός ανάπτυξης του ενεργητικού δεν παίζει τόσο καθοριστικό ρόλο ενώ το βάθος του χρονικού ορίζοντα καθορίζεται αυθαίρετα από τον αναλυτή. Όπως ειπώθηκε η επιχείρηση αδυνατεί να καλύψει τις υποχρεώσεις της όταν η αξία του ενεργητικού της πέσει κάτω από το σημείο αθέτησης. Επομένως η πιθανότητα αθέτησης είναι η πιθανότητα η αξία του

ενεργητικού να πέσει κάτω από το σημείο αθέτησης. Η πιθανότητα αυτή δίνεται στη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια του παρακάτω σχήματος:

Σχήμα 7. Κατανομή της αξίας του ενεργητικού



Είναι φανερό πως αν ήταν γνωστή η μελλοντική κατανομή της DD, τότε η πιθανότητα αθέτησης (EDF) θα ήταν απλά η πιθανότητα η τελική αξία του ενεργητικού να είναι κάτω από τη DD (γραμμοσκιασμένη επιφάνεια στο παραπάνω σχήμα). Στην πράξη όμως είναι πολύ δύσκολο να εκτιμηθεί η κατανομή της DD. Ένας λόγος είναι ότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κανονική ή η λογαριθμική κατανομή. Επίσης, μεταβολές στην αξία του ενεργητικού της επιχείρησης ή στην κεφαλαιακή της δομή μπορεί να προκαλέσουν απότομη μεταβολή της σχέσης του ενεργητικού προς το σημείο αθέτησης. Εξάλλου οι μεταβολές της αξίας του ενεργητικού και οι μεταβολές της χρηματοοικονομικής μόχλευσης παρουσιάζουν ισχυρή συσχέτιση. Ως εκ τούτου, η KMV υπολογίζει πρώτα την DD σαν τον αριθμό των τυπικών αποκλίσεων που η αξία του ενεργητικού είναι μακριά από την αθέτηση και κατόπιν χρησιμοποιεί εμπειρικά δεδομένα για να προσδιορίσει την πιθανότητα αθέτησης.

Αναλυτικά ο προσδιορισμός της απόστασης από την αθέτηση αναφέρεται αμέσως παρακάτω (Crosbie και Bohn, 2001). Από τον ορισμό της DD προκύπτει η σχέση:

$$P[V_{A(t)} < F] = \Phi(-DD)$$

Από τη θεωρία του Merton είναι γνωστό πως η μεταβολή της αξίας του ενεργητικού δίνεται από τη σχέση:

$$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dz \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \frac{dV_A}{V_A} = \mu dt + \sigma_A dz$$

της οποίας η μοναδική λύση είναι:

$$V_{A(t)} = V_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t + \sigma_A \sqrt{t}z_t} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \ln V_{A(t)} = \ln V_0 + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t + \sigma_A \sqrt{t}z_t \quad (9)$$

Η σχέση (9) περιγράφει το μονοπάτι που ακολουθεί η αξία του ενεργητικού στο σχήμα 7. Η πιθανότητα αθέτησης είναι η πιθανότητα η αγοραία αξία του ενεργητικού της επιχείρησης να είναι μικρότερη από τη λογιστική αξία του χρέους όταν αυτό λήξει. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} P_{Def} &= P[V_T < F] = P\left[V_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t + \sigma_A \sqrt{t}z_t} < F\right] \\ &= P\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t + \sigma_A \sqrt{t}z_t \leq \ln \frac{F}{V_0}\right] \\ &= P\left[z_t < \frac{\ln\left(\frac{F}{V_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t}{\sigma_A \sqrt{t}}\right] \\ &= \Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{F}{V_0}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t}{\sigma_A \sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

αφού $z_t \sim N(0,1)$. Θεωρώντας όμως την τελευταία σχέση και την DD, η οποία εξ ορισμού είναι ο αριθμός των τυπικών αποκλίσεων κατά τον οποίο η αξία του ενεργητικού της επιχείρησης απέχει από την αθέτηση, προκύπτει η σχέση:

$$DD = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{F}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t}{\sigma_A \sqrt{t}}$$

Στην πράξη η DD χρειάζεται να προσαρμοστεί έτσι ώστε εκτός από τις μεταβολές του ενεργητικού να περιλαμβάνει και εκροές που αφορούν την αποπληρωμή του χρέους, μερίσματα κ.α.

4.1.3 Υπολογισμός της πιθανότητας αθέτησης.

Το τελευταίο αυτό στάδιο αντιστοιχίζει ουσιαστικά την απόσταση από αθέτηση με την πιθανότητα αθέτησης στο χρονικό ορίζοντα T. Έχοντας ιστορικά στοιχεία από ένα μεγάλο δείγμα επιχειρήσεων, μπορεί κάποιος να υπολογίσει για

κάθε χρονικό ορίζοντα, την αναλογία των επιχειρήσεων μιας ορισμένης κατηγορίας π.χ. με απόσταση από αθέτηση 4 οι οποίες αθέτησαν τις υποχρεώσεις τους μέσα σε ένα χρόνο. Το ποσοστό αυτό είναι η αναμενόμενη συχνότητα αθέτησης της επιχείρησης. Οι κύριοι παράγοντες μεταβολής της EDF είναι οι διακυμάνσεις της τιμής της μετοχής, η κεφαλαιακή δομή και η μεταβλητότητα του ενεργητικού όπως αυτή προκύπτει από την αβεβαιότητα για την αξία της επιχείρησης.

Ο δείκτης EDF έχει αποδειχθεί χρήσιμος εκτιμητής της πιθανότητας υποβάθμισης της πιστοληπτικής ικανότητας μιας επιχείρησης. Όπως έχει παρατηρηθεί σε μελέτες που έχει διεξάγει η KMV σε μία μεγάλη βάση δεδομένων που της παρείχε η Compustat όταν η χρηματοοικονομική κατάσταση μιας επιχείρησης επιδεινώνεται η EDF αυξάνεται δραματικά ώσπου η επιχείρηση αθετεί τις υποχρεώσεις της. Επίσης η αλλαγή στην EDF παρατηρείται τουλάχιστον 1 χρόνο πριν η επιχείρηση υποβιβαστεί από τους οίκους αξιολόγησης. Επειδή μάλιστα οι οίκοι αξιολόγησης παίρνουν πολύ χρόνο μέχρι να υποβιβάσουν μια επιχείρηση οι ιστορικές πιθανότητες να μείνει μια επιχείρηση στην ίδια κατηγορία είναι μεγαλύτερες από τις πραγματικές. Ένα άλλο μειονέκτημα των πινάκων που δημοσιεύουν οι οίκοι αξιολόγησης είναι ότι δίνουν την ίδια πιθανότητα αθέτησης σε μια ευρεία κατηγορία επιχειρήσεων από τις οποίες κάποιες πρέπει οπωσδήποτε να υποβιβαστούν και κάποιες να αναβαθμιστούν. Για τις μεν πρώτες οι εταιρίες αξιολόγησης δίνουν μικρότερη πιθανότητα αθέτησης από την πραγματική ενώ για τις δεύτερες μεγαλύτερη. Κάτι τέτοιο μπορεί όμως να αντίκειται στη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου πιστοδοτήσεων ενός πιστωτικού ιδρύματος. Αντίθετα η KMV θεωρεί τον κάθε εκδότη τίτλου ξεχωριστό, ο οποίος χαρακτηρίζεται από την ιδιαίτερη κατανομή της απόδοσης του ενεργητικού, την ιδιαίτερη κεφαλαιακή δομή και την ιδιαίτερη πιθανότητα αθέτησης. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη υπολογίζει για την κάθε επιχείρηση την EDF της και την κατατάσσει ανάλογα σε κατηγορίες πιστωτικού κινδύνου. Συγκεκριμένα κατατάσσει τις επιχειρήσεις σε κατηγορίες με βάση μη αλληλοκαλυπτόμενα διαστήματα πιθανοτήτων αθέτησης χαρακτηριστικά για την κάθε κατηγορία. Λόγου χάρι όλες οι επιχειρήσεις που έχουν πιθανότητα αθέτησης μικρότερη από 0,02% κατατάσσονται στην κατηγορία AAA, αυτές με πιθανότητα αθέτησης από 0,03% έως 0,06% στην κατηγορία AA, από 0,07% έως 0,15% στην A κοκ. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας ιστορικές μεταβολές των πιθανοτήτων αθέτησης καταρτίζει πίνακες μετάβασης όπως ο παρακάτω:

Πίνακας 10. Ετήσιος πίνακας μετάβασης βασισμένος σε μη αλληλοκαλυπτόμενα διαστήματα EDF

Αρχική κατάταξη	Κατάταξη στο τέλος του έτους							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Αθέτηση
AAA	66,26	22,22	7,37	2,45	0,86	0,67	0,14	0,02
AA	21,66	43,04	25,83	6,56	1,99	0,68	0,20	0,04
A	2,76	20,34	44,19	22,94	7,42	1,97	0,28	0,10
BBB	0,30	2,80	22,63	42,54	23,52	6,95	1,00	0,26
BB	0,08	0,24	3,69	22,93	44,41	24,53	3,41	0,71
B	0,01	0,05	0,39	3,48	20,47	53,00	20,58	2,01
CCC	0,00	0,01	0,09	0,26	1,79	17,77	69,94	10,13

Πηγή: KMV

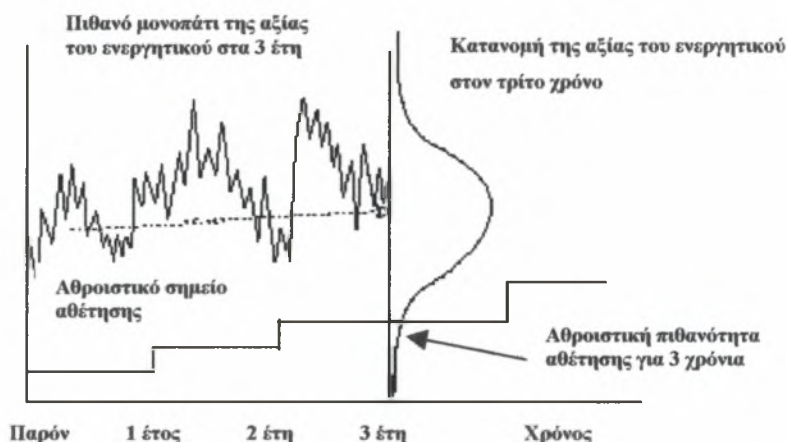
Στους πίνακες μετάβασης που καταρτίζει κατ' αυτόν τον τρόπο η KMV η πιθανότητα να παραμείνει μια επιχείρηση στην ίδια κατηγορία είναι όπως φαίνεται πολύ μικρότερη από αυτή που δημοσιεύουν οι οίκοι αξιολόγησης (π.χ. πίνακας 1). Η πιθανότητα αθέτησης που δίνει η KMV είναι μικρότερη από αυτή που δίνουν οι οίκοι αξιολόγησης ενώ η πιθανότητα μετάβασης σε άλλη κατηγορία είναι μεγαλύτερη.

Η KMV δεν χρησιμοποιεί τη σχέση (10) προκειμένου να υπολογίσει την πιθανότητα αθέτησης γιατί θεωρεί πως η κανονική κατανομή δεν είναι επαρκής, αφού και ο χρόνος που θα προκύψει η αθέτηση είναι μια τυχαία μεταβλητή, δεν καθορίζεται δηλαδή μόνο από το ύψος του δανείου και τους όρους αποπληρωμής. Οι επιχειρήσεις συχνά προσαρμόζουν τις υποχρεώσεις τους όταν πλησιάζουν στην κατάσταση αθέτησης. Για παράδειγμα, παρατηρείται αύξηση των υποχρεώσεων των εμπορικών ή βιομηχανικών επιχειρήσεων πριν αθετήσουν τις υποχρεώσεις τους ενώ αντίθετα παρατηρείται μείωση των υποχρεώσεων των τραπεζών σε παρόμοια περίπτωση. Η διαφορά οφείλεται στην ευκολία με την οποία ρευστοποιούνται τα περιουσιακά στοιχεία κάθε επιχείρησης και συνεπώς στην ικανότητά της να προσαρμόζει τη μόχλευσή της όταν παρουσιαστούν δυσκολίες. Αφού λοιπόν δεν μπορεί να προβλεφθεί η εξέλιξη των υποχρεώσεων, η έλλειψη της κανονικότητας ενσωματώνεται στην αντιστοίχιση DD και EDF. Έτσι μια DD ίση με 4 (4 τυπικές αποκλίσεις) αντιστοιχίζεται σύμφωνα με τα εμπειρικά δεδομένα σε EDF ίση με 1%, ενώ σύμφωνα με την κανονική κατανομή θα έπρεπε να είναι ίση με 0.

Τέλος το υπόδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εκτίμηση της EDF για χρονικό ορίζοντα μεγαλύτερο του έτους. Υπολογίζεται η αξία του ενεργητικού με βάση το ρυθμό ανάπτυξης του και η μεταβλητότητα σαν γραμμική συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας του χρόνου (η διασπορά σ_A^2 προστίθεται και άρα αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο). Το σημείο αθέτησης θεωρείται ότι αυξάνεται με το χρόνο,

καθώς αυξάνεται η εξυπηρέτηση του μακροπρόθεσμου χρέους, αφού κατά κανόνα αυτό δεν ελαττώνεται αλλά γίνεται αναχρηματοδότησή του κατά το ποσό της αποπληρωμής. Και σ' αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται η βάση δεδομένων της KMV προκειμένου να γίνει αντιστοίχιση της πολυετούς DD με την αθροιστική EDF, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:

Σχήμα 8. Πολυετής κατανομή αξίας ενεργητικού



Κατόπιν η EDF για n έτη υπολογίζεται από την αθροιστική EDF για n έτη σύμφωνα με τη σχέση:

$$1 - \text{CEDF}_n = (1 - \text{EDF}_n)^n$$

4.2 Υπολογισμός της κατανομής ζημίας

Η προσέγγιση της KMV για την αποτίμηση της αξίας ενός ομολόγου βασίζεται στο υπόδειγμα αποτίμησης χρεογράφων Martingale. Η αναμενόμενη τιμή υπολογίζεται με βάση τις risk-neutral πιθανότητες αθέτησης και όχι αυτές που προκύπτουν από τα ιστορικά στοιχεία ή τις EDF. Συγκεκριμένα, η παρούσα αξία των χρηματοροών C_i , $i=1, \dots, n$ δίνεται από τη σχέση (Crouhy et al., 2000):

$$PV = (1 - LGD) \sum_{i=1}^n C_i e^{-\bar{r}_i t_i} + LGD \sum_{i=1}^n (1 - Q_i) C_i e^{-\bar{r}_i t_i}$$

όπου LGD είναι η ζημία σε περίπτωση αθέτησης, Q_i οι risk-neutral πιθανότητες αθέτησης στο χρονικό ορίζοντα t_i και $\bar{r}_i = \ln(1 + r_i)$.

Σύμφωνα με τον ορισμό της risk-neutral πιθανότητας η αναμενόμενη απόδοση όλων των χρεογράφων είναι η απόδοση χωρίς κίνδυνο r για κάθε χρονικό ορίζοντα T . Η KMV υπολογίζει τις risk-neutral πιθανότητες αθέτησης από τη σχέση (Crouhy et al., 2000):

$$Q_T = N \left[N^{-1}(EDF_T) + Rho \frac{\pi}{\sigma_M} \sqrt{T} \right]$$

όπου Rho είναι η συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων του ενεργητικού και των αποδόσεων της αγοράς, π είναι ασφάλιστρο κινδύνου αγοράς ($\pi = \mu_M - r$) και σ_M η διακύμανση του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Να σημειωθεί ότι αφού $\mu \geq r$, έπεται ότι η risk-neutral πιθανότητα αθέτησης είναι μεγαλύτερη από την πραγματική.

Στη συνέχεια γίνεται προσομοίωση όλων των δυνατών τελικών τιμών των τίτλων σε συνδυασμό με τις συσχετίσεις αθέτησης. Η KMV δεν προσομοιώνει την πλήρη μελλοντική κατανομή της αξίας του χαρτοφυλακίου στο χρονικό ορίζοντα H στον οποίο εξετάζεται ο πιστωτικός κίνδυνος (Crouhy et al.), αλλά υπολογίζει την κατανομή της ζημίας (*loss distribution*) του χαρτοφυλακίου σ' αυτόν τον ορίζοντα. Για λόγους απλούστευσης υποτίθεται ότι όλες οι ομολογίες του χαρτοφυλακίου λήγουν σε χρόνο T μεγαλύτερο από τον H . Η αξία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο H ορίζεται ως $V_{H/ND}$ όταν δεν υπάρχει κίνδυνος αθέτησης του εκδότη και V_H στην αντίθετη περίπτωση, όπως λόγω χάρη υπολογίστηκε με τη μέθοδο CreditMetrics. Η ζημία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο H ορίζεται ως η διαφορά ανάμεσα στην αξία του χαρτοφυλακίου χωρίς κίνδυνο και την αγοραία αξία του στο χρόνο αυτό:

$$L = V_{H/ND} - V_H$$

Η αξία V_H είναι άγνωστη στο χρόνο 0, και μόνο η πιθανότητά της μπορεί να εκτιμηθεί. Επομένως η L είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις μπορεί ναδειχθεί ότι η κατανομή της ζημίας όταν το χαρτοφυλάκιο είναι καλά διαφοροποιημένο είναι αντίστροφη κανονική, για την οποία είναι εύκολο να υπολογιστούν τα εκατοστημόρια. Η αντίστροφη κανονική κατανομή είναι πολύ ασύμμετρη και λεπτόκυρτη. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται ορισμένες τιμές των α -εκατοστημορίων, L_α , εκφρασμένα σε τυπικές αποκλίσεις από τη μέση τιμή, για κάποιες τιμές παραμέτρων. Δίνονται επίσης και τα αντίστοιχα α -εκατοστημόρια της τυπικής κανονικής κατανομής για σύγκριση:

Πίνακας 12. Τιμές της $(L_\alpha - p)/s$ για την αντίστροφη κανονική κατανομή

p	ρ	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,001$	$\alpha=0,0001$
0,01	0,1	1,19	3,8	7	10,7
0,01	0,4	0,55	4,5	11	18,2
0,0001	0,1	0,98	4,1	8,8	15,4
0,0001	0,4	0,12	3,2	13,2	31,7
Κανονική		1,28	2,3	3,1	3,7

όπου:

p είναι η πιθανότητα αθέτησης ενός ομολόγου του χαρτοφυλακίου (όλα τα ομόλογα υποτίθεται ότι έχουν την ίδια πιθανότητα αθέτησης),

ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης, ίδιος για όλα τα ζεύγη των εκδοτών και

a το διάστημα εμπιστοσύνης. Η αναμενόμενη ζημία του χαρτοφυλακίου είναι $EL=p$ και η τυπική απόκλιση της s .

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται πόσο απέχουν οι τιμές της L από τις τιμές της κανονικής κατανομής και επίσης πόσο μεγαλύτερη γίνεται αυτή η διαφορά στα άκρα της κατανομής.

4.3 Υπολογισμός του συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων του ενεργητικού

Η KMV θεωρεί όπως και το CreditMetrics τις συσχετίσεις των αποδόσεων του ενεργητικού σαν προσέγγιση των συσχετίσεων αθέτησης. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί ένα υπόδειγμα που υπολογίζει τις συσχετίσεις των αποδόσεων του ενεργητικού των επιχειρήσεων με βάση κάποιους παράγοντες κινδύνου, συστηματικούς και μη συστηματικούς (Crouhy et al.). Οι συσχετίσεις των αποδόσεων εξαρτώνται μόνο από τους κοινούς παράγοντες. Για να οριστεί αυτή η σχέση η KMV δημιουργεί ένα υπόδειγμα που βασίζεται σε παράγοντες τριών επιπέδων.

Στο πρώτο επίπεδο γίνεται διαχωρισμός ανάμεσα στους συστηματικούς κινδύνους και τους διαφοροποιήσιμους. Από αυτούς ο συστηματικός κίνδυνος περιγράφεται από έναν σύνθετο δείκτη r_k , ξεχωριστό για κάθε επιχείρηση, ο οποίος είναι ένας σταθμικός μέσος όρος του μεγέθους της έκθεσης της επιχείρησης σε εθνικούς και κλαδικούς παράγοντες κινδύνου, οι οποίοι καθορίζονται στο δεύτερο επίπεδο:

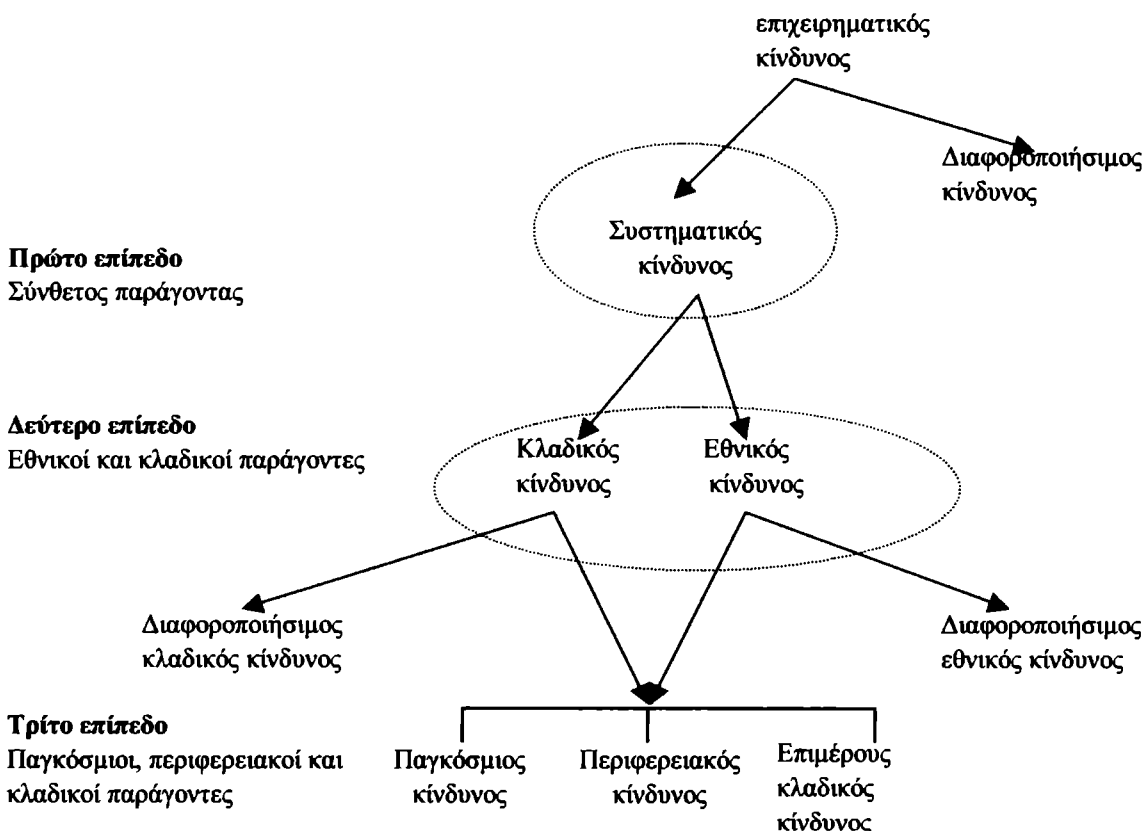
$$r_k = \beta_k CF_k + \varepsilon_k \quad \text{για όλες τις επιχειρήσεις } k=1, \dots, N,$$

όπου r_k είναι η απόδοση του ενεργητικού της επιχείρησης, CF_k ο σύνθετος παράγοντας της επιχείρησης k , β_k η αντίδραση της απόδοσης της επιχείρησης στη μεταβολή του σύνθετου παράγοντα CF_k και ε_k ο μη συστηματικός παράγοντας κινδύνου της k .

Ο σύνθετος παράγοντας είναι το σταθμικό άθροισμα των εθνικών και κλαδικών παραγόντων που προσδιορίστηκαν στο δεύτερο επίπεδο:

$$CF_k = \sum_m \alpha_{km} C_m + \sum_n \alpha_{kn} I_n$$

όπου C_m είναι ο ρυθμός μεταβολής του εθνικού παράγοντα κινδύνου m , I_n ο ρυθμός μεταβολής του κλαδικού παράγοντα κινδύνου n , α_{km} η συμμετοχή της επιχείρησης k στη χώρα m , με τον περιορισμό $\sum_m \alpha_{km} = 1$, α_{kn} η συμμετοχή της επιχείρησης k στον κλάδο n , με τον περιορισμό $\sum_n \alpha_{kn} = 1$. Στο τρίτο στάδιο ο εθνικός και ο κλαδικός δείκτης διασπώνται περαιτέρω για να αποτυπώσουν τους παγκόσμιους, περιφερειακούς και επιμέρους κλαδικούς κινδύνους. Το υπόδειγμα απεικονίζεται σχηματικά με το παρακάτω διάγραμμα:



5. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: CREDITRISK+

Πρόκειται για ένα στατιστικό υπόδειγμα, το οποίο βασίζεται στην πιθανότητα αθέτησης των πιστούχων χωρίς να υπεισέρχεται στα αίτια που την προκαλούν. Οι ρυθμοί αθέτησης ακολουθούν στοχαστική διαδικασία εξέλιξης και είναι αυτοί που δημιουργούν τον κίνδυνο. Η προσέγγιση είναι παρόμοια με αυτή που ακολουθείται στη διαχείριση του κινδύνου αγοράς, όπου δεν επιχειρείται να δημιουργηθούν υποδείγματα των κινήσεων των τιμών της αγοράς. Το υπόδειγμα δεν απαιτεί ως δεδομένα συσχετίσεις αθέτησης, η επίδραση των οποίων ενσωματώνεται με τη χρήση της μεταβλητότητας της πιθανότητας αθέτησης και της *ανάλυσης οικονομικού τομέα (sector analysis)*. Είναι εξαιρετικά εύκολο στη χρήση αφού υπολογίζει την κατανομή της ζημίας του χαρτοφυλακίου με τη βοήθεια συγκεκριμένης αναδρομικής σχέσης με ελάχιστες απαιτήσεις σε δεδομένα.

6.1 Περιγραφή της προσέγγισης

Η προσέγγιση που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της κατανομής της πιθανότητας αθέτησης βασίζεται σε μαθηματικές τεχνικές ευρύτατα γνωστές στο χώρο των ασφαλειών. Ο λόγος που δεν χρησιμοποιούνται οι συνήθεις τεχνικές της χρηματοοικονομίας είναι ότι η τελευταία ενδιαφέρεται για συνεχείς μεταβολές τιμών και όχι αιφνίδιων γεγονότων, όπως είναι η κατάσταση αθέτησης. Χρησιμοποιώντας τις τεχνικές των ασφαλιστικών εταιριών, το CreditRisk+ αποτυπώνει τα βασικά χαρακτηριστικά των πιστωτικών γεγονότων και επιτρέπει τον υπολογισμό της πλήρους κατανομής της ζημίας ενός χαρτοφυλακίου πιστωτικών τίτλων. Οι απαιτήσεις σε δεδομένα είναι σχετικά λίγες, οπότε περιορίζεται η αβεβαιότητα σε σχέση με τις παραμέτρους και η συνακόλουθη ανάγκη ανάλυσης ευαισθησίας τους. Όπου αυτό χρειάζεται, γίνεται ανάλυση σεναρίων για να ποσοτικοποιηθούν οι ενδεχόμενες επιδράσεις ακραίων καταστάσεων, οι οποίες δεν είναι δυνατό να εντοπιστούν από ένα στατιστικό υπόδειγμα. Για παράδειγμα, με αύξηση των πιθανοτήτων αθέτησης ή της μεταβλητότητάς τους μπορούν να προσομοιωθούν αρνητικές τάσεις στην οικονομία.

Το CreditRisk+ είναι ένα υπόδειγμα που αναφέρεται σε χαρτοφυλάκια πιστωτικών τίτλων και ενσωματώνει το μέγεθος και τη λήξη των τίτλων, την πιστοληπτική ικανότητα των πιστούχων και το συστηματικό κίνδυνο σε ένα μόνο μέτρο κινδύνου. Ο πιστωτικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου θεωρείται ανάλογος με

αυτόν ενός χαρτοφυλακίου ασφαλιστικών κινδύνων: και στις δύο περιπτώσεις ζημιές μπορούν να προκύψουν σε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο περιέχει ένα μεγάλο αριθμό επιμέρους κινδύνων, ο καθένας εκ των οποίων έχει μικρή πιθανότητα να συμβεί. Ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου πρέπει να εκτιμήσει τη συχνότητα απρόσμενων γεγονότων καθώς και τη σοβαρότητα των ζημιών. Για την κατασκευή ενός υποδείγματος που θα περιγράφει την ζημία από πιστωτικό κίνδυνο σημασία έχουν τα ξαφνικά γεγονότα και όχι οι ενδιάμεσες συνεχείς μεταβολές. Τα δεδομένα που απαιτείται να εισαχθούν στο υπόδειγμα είναι:

Ποσά που είναι εκτεθειμένα σε κίνδυνο (credit exposures)

Το CreditRisk+ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλων των τύπων τους πιστωτικούς τίτλους όπως δάνεια, ομόλογα, ενέγγυες πιστώσεις και χρηματοοικονομικά παράγωγα. Για κάποιους από αυτούς τους τίτλους θα πρέπει να καθοριστεί το μέγεθος της έκθεσης, όπως λόγου χάρη για τις ενέγγυες πιστώσεις για τις οποίες θεωρείται ότι θα χρησιμοποιηθούν στο ακέραιο πριν η επιχείρηση αθετήσει τις υποχρεώσεις της. Επίσης είναι δυνατόν να εισαχθούν μεταβολές του οφειλόμενου ποσού στη διάρκεια του χρόνου όταν ο χρονικός ορίζοντας είναι μακροχρόνιος.

Ρυθμοί αθέτησης πιστούχων (Obligor default rates)

Ο ρυθμός αθέτησης υπολογίζεται χωριστά για κάθε πιστούχο είτε από το περιθώριο επιτοκίων των τίτλων του που διαπραγματεύονται στην αγορά είτε από την κατηγορία της πιστοληπτικής ικανότητας στην οποία ανήκει. Οι παρατηρούμενοι ρυθμοί αθέτησης διαφέρουν από χρόνο σε χρόνο και επηρεάζονται από την οικονομική κατάσταση.

Μεταβλητότητες ρυθμών αθέτησης πιστούχων (Obligor default rate volatilities)

Οι μεταβλητότητες (τυπικές αποκλίσεις) υπολογίζονται από τη διαφορά των μέσων δημοσιευμένων εκτιμήσεων των ρυθμών αθέτησης από τους πραγματικούς. Οι μεταβλητότητες μπορεί να είναι σημαντικές σε σχέση με τους ίδιους του ρυθμούς, εξαιτίας των μεγάλων διακυμάνσεων που παρατηρούνται στη διάρκεια των οικονομικών κύκλων. Όπως αναμένεται οι διακυμάνσεις είναι μεγαλύτερες για τις επιχειρήσεις υψηλού κινδύνου, γεγονός που αποτυπώνεται και στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 13. Ρυθμοί αθέτησης ανά κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας και μεταβλητότητες

Ταξινόμηση	Ετήσιος ρυθμός αθέτησης (%)	
	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση
AAA	0,00	0,0
AA	0,03	0,1
A	0,01	0,0
BAA	0,12	0,3
BA	1,36	1,3
B	7,27	5,1

Πηγή: Carty & Lieberman, 1996, Moody's Investors Service Global Credit Research

Ποσοστά ανάκτησης (recovery rates)

Τα ποσοστά ανάκτησης λαμβάνονται από δημοσιευμένα στοιχεία, γίνεται όμως έλεγχος ακραίων καταστάσεων έτσι ώστε να μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της κατανομής της ζημίας κάτω από διαφορετικά σενάρια.

6.2 Συσχετίσεις και επιδράσεις εξωτερικών παραγόντων

Το CreditRisk+ ενσωματώνει την επίδραση των συσχετίσεων χρησιμοποιώντας μεταβλητότητες των πιθανοτήτων αθέτησης και ανάλυση οικονομικών τομέων. Το υπόδειγμα δέχεται ότι η ύπαρξη ορισμένων μακροοικονομικών παραγόντων μπορεί να είναι η αιτία κάποια πιστωτικά γεγονότα να εμφανίζουν συσχέτιση. Για παράδειγμα, σε περιόδους οικονομικής κρίσης ο αριθμός των περιπτώσεων αθέτησης μπορεί να αυξηθεί κατά τη διάρκεια ενός μήνα. Μπορεί επίσης να είναι αυξημένος και τους επόμενους μήνες. Προφανώς οι περιπτώσεις αυτές αθέτησης εμφανίζουν συσχέτιση μεταξύ τους, δεν προκαλούν όμως η μία την άλλη – η συσχέτιση οφείλεται σε εξωτερικό παράγοντα, την κατάσταση της οικονομίας, ο οποίος αυξάνει την πιθανότητα αθέτησης.

Οι μακροοικονομικοί παράγοντες προκαλούν εν γένει σημαντική απόκλιση στην τιμή της πιθανότητας αθέτησης μιας επιχείρησης. Το μέγεθος της απόκλισης εξαρτάται από την ευαισθησία των κερδών της επιχείρησης στις μεταβολές των μακροοικονομικών παραγόντων, όπως λόγου χάρη των επιτοκίων, του ρυθμού ανάπτυξης κλπ. Το CreditRisk+ παρόλα αυτά δεν χρησιμοποιεί υποδείγματα που να περιγράφουν σχέσεις ανάμεσα στους μακροοικονομικούς παράγοντες και την πιθανότητα αθέτησης γιατί η Credit Suisse First Boston θεωρεί πως υπάρχει πολύ περιορισμένος αριθμός στοιχείων για να μπορέσει να ελεγχθεί η αξιοπιστία ενός τέτοιου υποδείγματος. Επιπλέον πιστεύει πως ακόμη και αν υπήρχε μια σχέση

ανάμεσα σε οικονομικές μεταβλητές και στην πιθανότητα αθέτησης, είναι αμφίβολο κατά πόσο αυτή η σχέση θα διατηρούνταν στο χρόνο. Για τους λόγους αυτούς το CreditRisk+ ενσωματώνει την επίδραση των εξωτερικών παραγόντων στον υπολογισμό της πιθανότητας αθέτησης, ορίζοντάς τη έτσι ώστε να ακολουθεί μια κατανομή, της οποίας τη μεταβλητότητα χρησιμοποιεί ως δεδομένο. Οι αυξημένες τιμές της πιθανότητας που προκύπτουν κατ' αυτόν τον τρόπο έχουν σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μεγάλης συγκέντρωσης τιμών στα άκρα της κατανομής της ζημίας, κάτι αντίστοιχο με αυτό που συμβαίνει σε άλλα υποδείγματα όταν ληφθούν υπόψη συσχετίσεις.

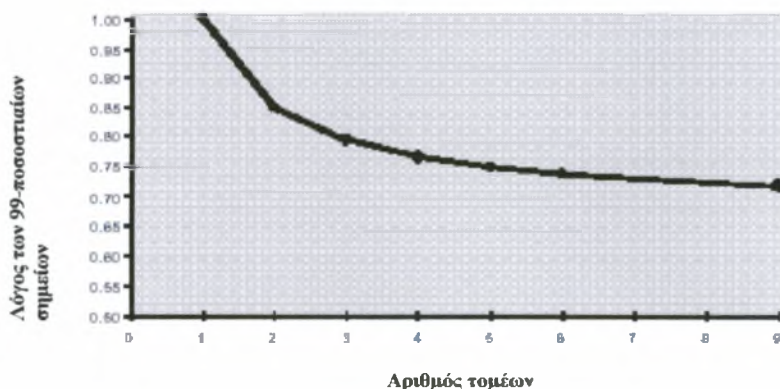
Το CreditRisk+ μετράει τα οφέλη από τη διαφοροποίηση και τις επιπτώσεις από τη συγκέντρωση συναφών κινδύνων χρησιμοποιώντας την ανάλυση οικονομικών τομέων. Δέχεται ότι η αβεβαιότητα μπορεί να προκύψει από ένα μικρό αριθμό εξωτερικών παραγόντων που είναι δυνατό να επηρεάσουν πολλούς από τους πιστούχους κατά τον ίδιο τρόπο. Προκειμένου να μετρηθεί η επίδραση αυτών των παραγόντων χρειάζεται να καθοριστεί σε ποιο βαθμό ο κάθε παράγοντας επηρεάζει το χαρτοφυλάκιο. Για παράδειγμα η οικονομία μιας συγκεκριμένης χώρας θεωρείται ότι επηρεάζει ομοιόμορφα τους πιστούχους που δραστηριοποιούνται σ' αυτή και δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου τους πιστούχους ενός πολυεθνικού χαρτοφυλακίου.

Η αποτύπωση της επίδρασης των εξωτερικών παραγόντων γίνεται κατανέμοντας τους πιστούχους σε διάφορους οικονομικούς τομείς. Ο κάθε οικονομικός τομέας αποτελείται από πιστούχους των οποίων η μεταβλητότητα του ρυθμού αθέτησης εξαρτάται από ένα βασικό εξωτερικό παράγοντα. Επομένως, από τη στιγμή που θα καθοριστεί σε ποιον τομέα ανήκει ένας πιστούχος, είναι γνωστά τόσο η πιθανότητα αθέτησης του όσο και η μεταβλητότητά της. Η απλούστερη περίπτωση είναι να ανήκουν όλοι οι πιστούχοι σε ένα μόνο οικονομικό τομέα. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητότητα της πιθανότητας αθέτησης των πιστούχων οφείλεται σε ένα μόνο εξωτερικό παράγοντα. Για παράδειγμα, όλοι οι πιστούχοι μπορεί να έχουν την έδρα τους σε μία συγκεκριμένη περιοχή, οπότε ο παράγοντας αυτός είναι η γεωγραφική θέση. Η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου εξετάζεται από τον αριθμό των συστηματικών παραγόντων που επηρεάζουν την συμπεριφορά των πιστούχων. Το χαρτοφυλάκιο εμφανίζει τη μεγαλύτερη διαφοροποίηση όταν ο κάθε πιστούχος επηρεάζεται από ένα μόνο εξωτερικό συστηματικό παράγοντα, ο οποίος είναι υπεύθυνος για όλη την αβεβαιότητα στην πιθανότητα αθέτησης του πιστούχου.

Στην πραγματικότητα αυτό που συμβαίνει είναι να επηρεάζεται ο κάθε πιστούχος από έναν αριθμό συστηματικών παραγόντων. Το CreditRisk+ αντιμετωπίζει αυτή την περίπτωση κατανέμοντας τον κάθε πιστούχο σε διάφορους τομείς ανάλογα με το βαθμό επιρροής του από τον εκάστοτε εξωτερικό παράγοντα. Επιπλέον προβλέπεται και ένας τομέας, ο τομέας μη συστηματικού κινδύνου – specific risk sector - στον οποίο κατανέμεται το ποσοστό του κινδύνου του πιστούχου που οφείλεται στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι όσο αυξάνει ο αριθμός των τομέων τόσο ελαττώνεται η επίδραση της συγκέντρωσης κινδύνων. Το χαρτοφυλάκιο εμφανίζει τη μέγιστη συγκέντρωση όταν οι πιστούχοι ανήκουν σε ένα μόνο τομέα. ενώ εμφανίζει τη μέγιστη διαφοροποίηση όταν κάθε πιστούχος ανήκει σε διαφορετικό τομέα. Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα όπου αντιστοιχίζεται το 99^ο εκατοστημόριο της κατανομής της ζημίας για ένα ορισμένο αριθμό τομέων στο 99^ο εκατοστημόριο της κατανομής της ζημίας ενός χαρτοφυλακίου που κατανέμεται εξ ολοκλήρου σε ένα μόνο τομέα.

Σχήμα 9. Επίδραση των τομέων στην κατανομή της ζημίας



Πηγή: Credit Suisse First Boston

6.3 Ανάλυση οικονομικών τομέων (Sector analysis)

Όπως προαναφέρθηκε το CreditRisk+ θεωρεί κάθε τομέα S_k , $1 \leq k \leq n$, σαν ένα υποσύνολο των πιστούχων που υπόκειται στην επίδραση ενός μόνο παράγοντα, ο οποίος εξηγεί τη μεταβλητότητα στο χρόνο του μέσου ρυθμού αθέτησης που μετράται σ' αυτό τον τομέα. Ο συγκεκριμένος παράγοντας επηρεάζει τον τομέα μέσω του συνολικού αναμενόμενου ρυθμού αθέτησης των πιστούχων του τομέα, ο οποίος ρυθμός στη συνέχεια καθορίζεται σαν τυχαία μεταβλητή x_k με μέση τιμή μ_k και τυπική απόκλιση σ_k . Προκειμένου να υπολογιστεί η κατανομή της ζημίας του

χαρτοφυλακίου οι τίτλοι κατανέμονται σε ζώνες (bands) μεγέθους με αποτέλεσμα να μειωθεί ο αριθμός των στοιχείων που χρειάζονται για τους υπολογισμούς. Κάθε ζώνη περιλαμβάνει πιστούχους των οποίων το οφειλόμενο ποσό είναι κατά προσέγγιση ακέραιο πολλαπλάσιο μιας αυθαίρετα επιλεγμένης μονάδας L (λόγου χάρη 100.000 ευρώ). Το οφειλόμενο ποσό καθώς και η αναμενόμενη ζημία σε περίπτωση αθέτησης του πιστούχου A συμβολίζεται αντίστοιχα με:

$$L_A = L \times v_A \quad \text{και} \quad \lambda_A = L \times \varepsilon_A$$

όπου v_A και ε_A το οφειλόμενο ποσό (προσαρμοσμένο κατά το ποσοστό ανάκτησης) και η αναμενόμενη ζημία από τον πιστούχο A , όταν εκφράζονται σαν πολλαπλάσια της μονάδας L . Το χαρτοφυλάκιο χωρίζεται σε m ζώνες που συμβολίζονται με το δείκτη j , όπου $1 \leq j \leq m$, και περιλαμβάνουν πιστούχους με κοινό οφειλόμενο ποσό και αναμενόμενη ζημία v_j και ε_j σε μονάδες L . Αν μ_j είναι ο αναμενόμενος αριθμός περιπτώσεων αθέτησης στη ζώνη j , τότε η αναμενόμενη ζημία για τη ζώνη j θα είναι $\varepsilon_j = v_j \times \mu_j$, οπότε:

$$\mu_j = \frac{\varepsilon_j}{v_j} = \sum_{A: v_A = v_j} \frac{\varepsilon_A}{v_A}$$

Επεκτείνοντας τους προηγούμενους συμβολισμούς, το οφειλόμενο ποσό και η αναμενόμενη ζημία σε μονάδες L του κάθε τομέα θα είναι αντίστοιχα $L v_j^{(k)}$ και $L \varepsilon_j^{(k)}$ ενώ η μέση τιμή μ_k δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} = \sum_A \frac{\varepsilon_A}{v_A}$$

όπου το τελευταίο άθροισμα αναφέρεται σε όλους τους πιστούχους A του τομέα k και η σχέση:

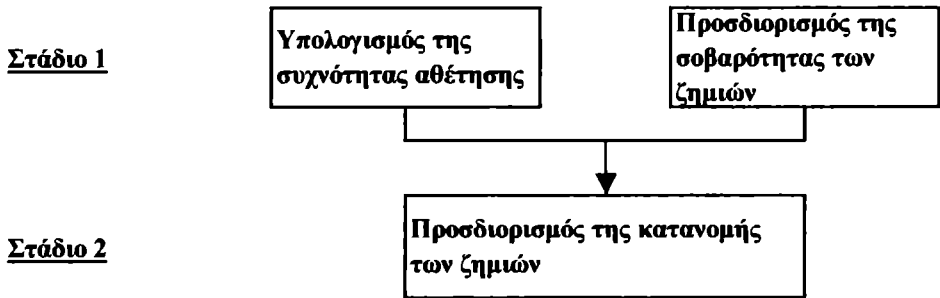
$$\frac{\varepsilon_A}{v_A} = p_A$$

εκφράζει τη μέση πιθανότητα αθέτησης του πιστούχου στη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα. Αν σ_A είναι η τυπική απόκλιση του ρυθμού αθέτησης του κάθε πιστούχου τότε αποδεικνύεται (Credit Suisse, 1997) ότι:

$$\sigma_k = \frac{\sum_A p_A \left(\frac{\sigma_A}{p_A} \right)}{\sum_A p_A} \mu_k$$

6.4 Υπολογισμός της συχνότητας αθέτησης

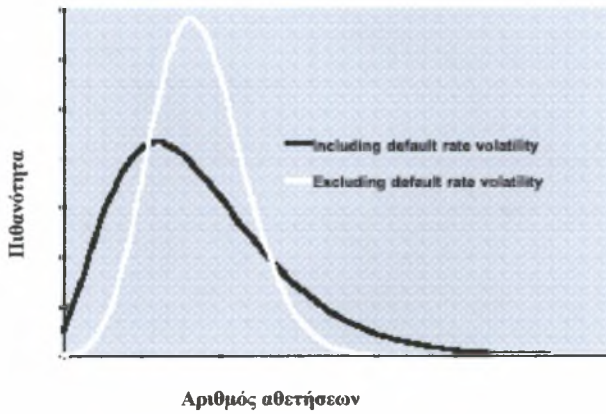
Η διαδικασία εκτίμησης του πιστωτικού κινδύνου με τη βοήθεια του CreditRisk+ χωρίζεται σε δύο στάδια, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Στο πρώτο στάδιο υπολογίζεται η κατανομή των πιστωτικών γεγονότων, έτσι ώστε ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου να μπορεί να εκτιμήσει αν η γενική πιστοληπτική ικανότητα του χαρτοφυλακίου βελτιώνεται ή χειροτερεύει. Παράλληλα στο πρώτο στάδιο εκτιμάται και η σοβαρότητα των ζημιών που μπορεί να προκύψουν από τα πιστωτικά γεγονότα προκειμένου να υπολογιστεί στο δεύτερο στάδιο η κατανομή της ζημίας. Στο δεύτερο στάδιο ο διαχειριστής εκτιμά την κατανομή της ζημίας, έτσι ώστε να μπορέσει να προσδιορίσει τη χρηματοοικονομική επίδρασή της καθώς και να μετρήσει το μέγεθος της συγκέντρωσης και της διαφοροποίησης στο χαρτοφυλάκιο.

Το CreditRisk+ δεν θέτει καμία προϋπόθεση σχετικά με την αιτία της περίπτωσης αθέτησης. Αυτή επέρχεται σαν μια ακολουθία γεγονότων κατά τέτοιο τρόπο ώστε δεν είναι δυνατό κανείς να προβλέψει ούτε τη στιγμή που θα επέλθει ούτε τον ακριβή αριθμό των περιπτώσεων. Υπάρχει έκθεση σε κίνδυνο ζημίας από ένα μεγάλο αριθμό πιστούχων και η πιθανότητα αθέτησης του καθενός από αυτούς είναι μικρή. Η περίπτωση αυτή περιγράφεται καλά από την κατανομή Poisson. Λαμβάνεται πρώτα η κατανομή του αριθμού των περιπτώσεων αθέτησης σε ένα χρονικό ορίζοντα π.χ. 1 έτος, μέσα σε ένα χαρτοφυλάκιο πιστούχων που ο καθένας έχει μία διαφορετική πιθανότητα αθέτησης. Κατόπιν εισάγεται η μεταβλητότητα της πιθανότητας αθέτησης, η οποία έχει σαν αποτέλεσμα να αυξάνουν οι ακραίες συχνότητες των πιστωτικών γεγονότων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Σχήμα 10. Κατανομή αριθμού πιστωτικών γεγονότων



Πηγή: Credit Suisse First Boston

6.4.1 Πιστωτικά γεγονότα με σταθερούς ρυθμούς αθέτησης

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από πιστωτικούς τίτλους N πιστούχων. Δεν υπάρχει καμιά αιτιώδης σχέση μεταξύ των καταστάσεων αθέτησης των πιστούχων, δηλαδή οι περιπτώσεις αυτές είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Οι πιθανότητες αθέτησης είναι ομοιόμορφα μικρές και δεδομένες για κάθε πιστούχο. Οι αν p_A είναι η ετήσια πιθανότητα αθέτησης του πιστούχου A , τότε για να υπολογιστεί η κατανομή των ζημιών που προκύπτουν από το χαρτοφυλάκιο, ορίζεται η πιθανογεννήτρια (probability generating function) $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n$, όπου $p(n)$ η πιθανότητα να προκύψουν n περιπτώσεις αθέτησης σε 1 έτος. Αν $\mu = \sum_A p_A$ ο αναμενόμενος αριθμός των περιπτώσεων αθέτησης για όλο το χαρτοφυλάκιο σε 1 έτος τότε αποδεικνύεται ότι (Credit Suisse, 1997):

$$F(z) = e^{\sum_A p_A(z-1)} = e^{\mu(z-1)}$$

Αναπτύσσοντας την παραπάνω σχέση σε σειρά Taylor προκύπτει η σχέση:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} z^n$$

Επομένως, η πιθανότητα εμφάνισης n περιπτώσεων αθέτησης στο χαρτοφυλάκιο σε ένα χρόνο δίνεται από τη σχέση:

$$P(n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$$

Η κατανομή δεν εξαρτάται από τον αριθμό των πιστούχων ή την πιθανότητα αθέτησης του καθενός, με την προϋπόθεση ότι αυτές είναι ομοιόμορφα μικρές. Επίσης οι πιθανότητες αθέτησης των πιστούχων δεν χρειάζεται να είναι ίσες.

6.4.2 Πιστωτικά γεγονότα με μεταβλητούς ρυθμούς αθέτησης

Η παραπάνω ανάλυση ισχύει όταν ο ρυθμός αθέτησης των πιστούχων είναι σταθερός. Το υπόδειγμα όμως θεωρεί ότι ο ρυθμός αθέτησης κάθε τομέα είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ_k και τυπική απόκλιση σ_k . Όπως και στην περίπτωση των σταθερών ρυθμών αθέτησης η πιθανογεννήτρια της κατανομής των πιστωτικών γεγονότων θα είναι:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n$$

Επειδή οι οικονομικοί τομείς είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι η $F(z)$ γράφεται σαν γινόμενο των πιθανογεννητριών των τομέων:

$$F(z) = \prod_{k=1}^n F_k(z)$$

Με δεδομένο ότι τόσο η μέση τιμή της πιθανότητας αθέτησης όσο και η μεταβλητότητά της είναι γνωστές για κάθε τομέα, η πιθανογεννήτρια των πιστωτικών γεγονότων του κάθε τομέα υπολογίζεται για κάθε τιμή x της τυχαίας μεταβλητής x_k , από τη σχέση (1):

$$F_k(z)[x_k = x] = e^{x(z-1)}$$

Αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της x_k είναι $f_k(x)$, τέτοια ώστε:

$$P(x \leq x_k \leq x + dx) = f_k(x)dx$$

τότε η πιθανογεννήτρια θα γράφεται:

$$F_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{x=0}^{\infty} p(n|x)f(x)dx = \int_{x=0}^{\infty} e^{x(z-1)} f(x)dx$$

όπου το μόνο που χρειάζεται είναι η κατανομή της x_k . Το CreditRisk+ θεωρεί ότι η κατανομή Γάμα είναι μία καλή προσέγγιση της x_k , δηλαδή για κάθε τομέα k ισχύει:

$$P(x \leq X \leq x + dx) = f(x)dx = \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} e^{-\frac{x}{\beta_k}} x^{\alpha_k-1} dx$$

όπου $\Gamma(\alpha_k) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} x^{\alpha_k-1} dx$ η συνάρτηση Γάμα και $\alpha_k = \mu_k^2 / \sigma_k^2$ και $\beta_k = \sigma_k^2 / \mu_k$.

Επομένως μετά από πράξεις θα είναι:

$$F_k(z) = \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k z} \right)^{\alpha_k}, \text{ με } p_k = \frac{\beta_k}{1 + \beta_k}$$

Από την παραπάνω πιθανογεννήτρια εξάγεται η συνάρτηση της πιθανότητας των πιστωτικών γεγονότων του χαρτοφυλακίου:

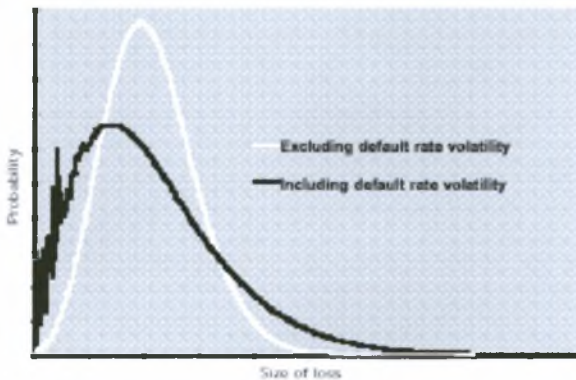
$$P(n) = (1 - p_k)^{\alpha_k} \binom{n + \alpha_k - 1}{n} p_k^n$$

η οποία είναι αρνητική διωνυμική κατανομή.

6.5 Προσδιορισμός της κατανομής της ζημίας

Η κατανομή της ζημίας διαφέρει από την κατανομή του αριθμού των πιστωτικών γεγονότων γιατί το ποσό που χάνεται εξαρτάται από το ύψος του ανεξόφλητου δανείου κάθε πιστούχου. Ενώ δηλαδή οι αποκλίσεις των πιθανοτήτων αθέτησης των διαφόρων πιστούχων δεν επηρεάζουν την κατανομή του αριθμού των πιστωτικών γεγονότων, οι αποκλίσεις στο ύψος του οφειλόμενου ποσού έχουν σαν αποτέλεσμα η κατανομή της ζημίας να μην είναι εν γένει Poisson. Για την εκτίμηση της κατανομής της συνολικής ζημίας απαιτούνται στοιχεία της κατανομής των επιμέρους ποσών. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κατανομή της ζημίας του χαρτοφυλακίου:

Σχήμα 11. Κατανομή της ζημίας



Πηγή: Credit Suisse First Boston

6.5.1 Ζημίες με σταθερούς ρυθμούς αθέτησης

Έστω ότι οι συνολικές ζημίες για το χαρτοφυλάκιο είναι $n \times L$ και τα συνολικά ποσά που είναι εκτεθειμένα σε κίνδυνο από κάθε ζώνη είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, οπότε η κάθε ζώνη μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων. Η πιθανογεννήτρια για κάθε ζώνη j θα είναι σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^{nv_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!} z^{nv_j} = e^{-\mu_j + \mu_j z^{v_j}}$$

Επειδή οι κίνδυνοι των διαφόρων ζωνών είναι ανεξάρτητοι θα είναι τελικά:

$$G(z) = \prod_{j=1}^m e^{-\mu_j + \mu_j z^{v_j}} = e^{-\sum_{j=1}^m \mu_j + \sum_{j=1}^m \mu_j z^{v_j}}$$

Αυτή λοιπόν είναι η πιθανογεννήτρια για τις ζημίες από όλο το χαρτοφυλάκιο. Η εξίσωση μπορεί να μετασχηματιστεί με τη βοήθεια του πολυωνύμου:

$$P(z) = \frac{\sum_{j=1}^m \mu_j z^{v_j}}{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon_j}{v_j} \right) z^{v_j}}{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\varepsilon_j}{v_j} \right)}$$

οπότε γίνεται:

$$G(z) = e^{\mu(P(z)-1)} = F(P(z))$$

Η σχέση αυτή αποτυπώνει το συνδυασμό των δύο πηγών αβεβαιότητας, όπως προκύπτουν από την κατά Poisson τυχαία εμφάνιση της αθέτησης και τη μεταβλητότητα των οφειλόμενων ποσών μέσα στο χαρτοφυλάκιο.

Να σημειωθεί ότι η $G(z)$ εξαρτάται μόνο από δύο σύνολα παραμέτρων, τις ε_j και v_j , οι οποίες μόνο είναι τα μεγέθη που χρειάζεται να είναι γνωστά για τον υπολογισμό της κατανομής της ζημίας ακόμη και ενός μεγάλου χαρτοφυλακίου πιστωτικών τίτλων.

Αφού είναι γνωστή η πιθανογεννήτρια της κατανομής, μπορεί να υπολογιστεί και η κατανομή της ζημίας του χαρτοφυλακίου από τη σχέση:

$$P(n \times L) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0} = A_n$$

Έτσι αν A_n είναι η πιθανότητα ζημίας n μονάδων L του χαρτοφυλακίου σε ένα χρόνο, αποδεικνύεται (Credit Suisse, 1997) ότι η A_n δίνεται από την αναδρομική σχέση:

$$A_n = \sum_{j: v_j \leq n} \frac{\varepsilon_j}{n} A_{n-v_j} \quad \text{με} \quad A_0 = G(0) = F(P(0)) = e^{-\mu} = e^{-\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{v_j}}$$

όπου ο πρώτος όρος A_0 εκφράζει την πιθανότητα να μην εμφανίσει ζημία στον επόμενο χρόνο το χαρτοφυλάκιο. Τα μεγέθη που υπολογίζονται από τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω ενέχουν και ένα βαθμό προσέγγισης που οφείλεται στις στρογγυλοποιήσεις που γίνονται για τη δημιουργία των ζωνών. Η Credit Suisse

υποστηρίζει ότι το σφάλμα που προκύπτει δεν είναι σημαντικά. Συγκεκριμένα, η αναμενόμενη ζημία του χαρτοφυλακίου δεν επηρεάζεται από τις στρογγυλοποιήσεις ενώ η τυπική απόκλιση είναι ελαφρά υπερεκτιμημένη.

6.5.2 Ζημίες με μεταβλητούς ρυθμούς αθέτησης

Προκειμένου να γενικευθεί η διαδικασία έτσι ώστε να συμπεριλάβει τη μεταβλητότητα των ρυθμών αθέτησης, υπολογίζεται εκ νέου η πιθανογεννήτρια της κατανομής των συνολικών ζημιών του χαρτοφυλακίου:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n \times L) z^n ,$$

η οποία λόγω της ανεξαρτησίας των τομέων διασπάται σε γινόμενο παραγόντων:

$$G(z) = \prod_{k=1}^n G_k(z) .$$

Ορίζεται εκ νέου ένα πολυώνυμο $P_k(z)$ για κάθε τομέα k :

$$P_k(z) = \frac{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right) z^{\nu_j^{(k)}}}{\sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right)} = \frac{1}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \left(\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} \right) z^{\nu_j^{(k)}}$$

το οποίο συνδέει τα πιστωτικά γεγονότα με τις ζημίες αφού ισχύει:

$$G_k(z) = F(P_k(z)) .$$

Το πολυώνυμο επεκτείνεται σαν άθροισμα των οφειλόμενων ποσών των πιστούχων A του τομέα k :

$$P_k(z) = \frac{\sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} z^{\nu_A}}{\sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}} = \frac{1}{\mu_k} \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} z^{\nu_A}$$

Τελικά η πιθανογεννήτρια $G(z)$ αποδεικνύεται (Credit Suisse, 1997) ότι είναι:

$$G(z) = \prod_{k=1}^n G_k(z) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 - p_k}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}} \right)^{\alpha_k}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η συνάρτηση της πιθανότητας των ζημιών, η οποία και πάλι δίνεται από αναδρομική σχέση:

$$A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)} \left(\sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{\min(s-1,n-1)} b_{j+1} (n-j) A_{n-j} \right)$$

όπου a_i και b_j είναι συντελεστές των πολυωνύμων:

$$A(z) = a_0 + \dots + a_r z^r \text{ και}$$

$$B(z) = b_0 + \dots + b_s z^s$$

τα οποία ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{d}{dz} (\log G(z)) = \frac{1}{G(z)} \frac{dG(z)}{dz} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Η παραπάνω ανάλυση προϋποθέτει ότι ο κάθε πιστούχος ανήκει σε έναν τομέα S_k γιατί επηρεάζεται μόνο από έναν εξωτερικό παράγοντα. Στην πραγματικότητα όμως η μεταβολή του ρυθμού αθέτησης του πιστούχου μπορεί να οφείλεται σε περισσότερους από ένα παράγοντες. Στην περίπτωση αυτή ο κάθε πιστούχος A κατανέμεται σε περισσότερους τομείς ανάλογα με το βαθμό θ_{Ak} κατά τον οποίο επηρεάζεται από τον βασικό παράγοντα του τομέα k . Είναι επομένως

$\sum_{k=1}^n \theta_{Ak} = 1$ και το πολυώνυμο $P_k(z) = \frac{1}{\mu_k} \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} z^{\nu_A}$ μπορεί να γραφτεί:

$$P_k(z) = \frac{1}{\mu_k} \sum_A \theta_{Ak} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} z^{\nu_A} \text{ όπου } \mu_k = \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}.$$

Στη συνέχεια με δεδομένο πως από την πιστοληπτική ικανότητα του πιστούχου είναι γνωστά η μέση τιμή μ_A και η τυπική απόκλιση σ_A του ρυθμού αθέτησης, υπολογίζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του ρυθμού αθέτησης του τομέα:

$$\mu_k = \sum_A \theta_{Ak} \mu_A \text{ και } \sigma_k = \sum_A \theta_{Ak} \sigma_A$$

Το υπόδειγμα προβλέπει ότι οι μη συστηματικοί παράγοντες δεν καθορίζουν ισάριθμους τομείς, αλλά περιλαμβάνονται όλοι σε έναν τομέα. Στον τομέα αυτό η τυπική απόκλιση θεωρείται ότι είναι μηδενική, ενώ η σ που υπολογίζεται από την παραπάνω σχέση είναι το όφελος από την παρουσία μη συστηματικών παραγόντων στο χαρτοφυλάκιο.

6.6 Κατανομή πολυετούς ζημίας

Το CreditRisk+ επιτρέπει την εκτίμηση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου σε πολυετή χρονικό ορίζοντα μέχρι τη λήξη όλων των πιστωτικών τίτλων. Με τη βοήθειά του μπορεί ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου να συγκρίνει τίτλους με διαφορετικό ονομαστικό ποσό, πιστοληπτική ικανότητα και λήξη. Η κατανομή της

ζημίας που προκύπτει παρέχει, για κάθε διάστημα εμπιστοσύνης, μια ένδειξη της πιθανής σωρευτικής ζημίας που θα μπορούσε να προκύψει μέχρι τη λήξη των τίτλων. Τα πλεονεκτήματα αυτής της προσέγγισης είναι:

- Λαμβάνεται υπόψη η μελλοντική εξέλιξη της πιθανότητας αθέτησης
- Αποτυπώνεται όλη η αβεβαιότητα της ζημίας καθ' όλη τη διάρκεια της ύπαρξης του χαρτοφυλακίου.

Για παράδειγμα, οι μέσες ετήσιες πιθανότητες αθέτησης πιστούχων που ανήκουν σε επενδυτικές κατηγορίες, εκδίδουν δηλαδή τίτλους που προσφέρονται για επένδυση και όχι για κερδοσκοπία, είναι μικρές ενώ τα επενδεδυμένα ποσά είναι συνήθως μεγάλα. Στις περιπτώσεις αυτές ο ετήσιος χρονικός ορίζοντας δεν ενδείκνυται για ενεργό διαχείριση (active management) του χαρτοφυλακίου, γιατί δεν συμπεριλαμβάνει την σταδιακή υποβάθμιση της πιστοληπτικής ικανότητας των τίτλων.

Το CreditRisk+ υπολογίζει πολυετείς κατανομές ζημίας αναλύοντας τον κίνδυνο στη διάρκεια του χρόνου σε ξεχωριστά τμήματα που αφορούν διακριτά χρονικά διαστήματα, με την παρούσα αξία του υπολοίπου κινδύνου για κάθε χρονικό διάστημα να αντιστοιχίζεται σε οριακή πιθανότητα αθέτησης που προκύπτει από τη λήξη και την πιστοληπτική ικανότητα. Τα επιμέρους αυτά τμήματα του κινδύνου χρησιμοποιούνται από το CreditRisk+ για τη δημιουργία της αθροιστικής κατανομής της ζημίας σε πολυετή βάση. Στην περίπτωση αυτή το μέλλον του χαρτοφυλακίου θεωρείται ότι χωρίζεται σε έτη. Τα οφειλόμενα ποσά επιτρέπεται να μεταβάλλονται από χρόνο σε χρόνο. Υπολογίζονται οριακές πιθανότητες αθέτησης (marginal default rates) για καθένα από τα επόμενα έτη για κάθε πιστόχο χωριστά. Συγκεντρωτικά, οι οριακές αυτές πιθανότητες αθέτησης δίνουν τη μελλοντική εξέλιξη της αθέτησης (term structure of default) για το χαρτοφυλάκιο. Συνεπώς, αν $p_j^{(t)}$, $L_j^{(t)} = L v_j^{(t)}$ και $\lambda_j^{(t)} = L E_j^{(t)}$ είναι η πιθανότητα αθέτησης, το μέγεθος και η αναμενόμενη ζημία του οφειλόμενου ποσού j στο χρόνο t , τότε η πιθανογεννήτρια της κατανομής πολυετών ζημιών ενός οφειλόμενου ποσού είναι:

$$G_j(z) = 1 - \sum_{t=0}^T p_j^{(t)} + \sum_{t=0}^T p_j^{(t)} z^{v_j^{(t)}} = 1 + \sum_{t=0}^T p_j^{(t)} (z^{v_j^{(t)}} - 1)$$

ενώ η πιθανογεννήτρια για την κατανομή των συνολικών ζημιών δίνεται από τη σχέση:

$$G(z) = e^{\sum_{j,t} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{v_j^{(t)}} (z^{v_j^{(t)}} - 1)}$$

Αυτή έχει την ίδια μορφή με την πιθανογεννήτρια της κατανομής των ζημιών για ένα χρόνο, οπότε η συνάρτηση της κατανομής της συνολικής ζημίας A_n σε χρονικό ορίζοντα μεγαλύτερο από ένα χρόνο δίνεται από την αναδρομική σχέση:

$$A_n = \sum_{j,t: v_j^{(t)} \leq n} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{n} A_{n-v_j^{(t)}}$$

6. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ: CREDITPORTFOLIOVIEW

Πρόκειται για ένα οικονομετρικό υπόδειγμα πολλών παραγόντων (multi-factor model) το οποίο χρησιμοποιείται για να προσομοιώσει την κοινή δεσμευμένη κατανομή της πιθανότητας αθέτησης καθώς και της πιθανότητας μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας για πιστούχους που δραστηριοποιούνται σε διάφορους οικονομικούς κλάδους και χώρες με βάση την τιμή μακροοικονομικών παραγόντων όπως το ποσοστό ανεργίας, ο ρυθμός αύξησης του ΑΕΠ, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες κλπ. Το υπόδειγμα έχει καλύτερη εφαρμογή σε τίτλους υψηλού κινδύνου (που αποκτώνται με σκοπό την κερδοσκοπία) καθώς είναι πιο ευαίσθητοι στις μεταβολές του οικονομικού κύκλου από τους τίτλους μηδενικής ή πολύ χαμηλής επικινδυνότητας.

Η προσέγγιση που ακολουθείται εκτιμά την πραγματική διακριτή κατανομή της ζημίας του χαρτοφυλακίου χωρίς να προϋποθέτει κανονική κατανομή ή την προσέγγιση mean-variance. Ως εκ τούτου το υπόδειγμα μπορεί να αποτυπώσει την επίδραση ενός ιδιαίτερα μεγάλου κινδύνου σε χαρτοφυλάκια που δεν είναι διαφοροποιημένα. Επίσης γίνεται διάκριση ανάμεσα σε πιστωτικούς τίτλους που δεν μπορούν να ρευστοποιηθούν πριν τη λήξη τους όπως είναι τα στεγαστικά και καταναλωτικά δάνεια και τίτλους που μπορούν να ρευστοποιηθούν οποιαδήποτε στιγμή όπως είναι οι διαπραγματεύσιμες εταιρικές ομολογίες. Στους πρώτους η μέτρηση του κινδύνου γίνεται με βάση την προεξόφληση του τελικού ποσού όταν η επιχείρηση θα αθετήσει τις υποχρεώσεις της ενώ στους δεύτερους με βάση την αγοραία αξία του ποσού που θα προκύψει τόσο από την αθέτηση όσο και από ενδεχόμενη μεταβολή της πιστοληπτικής ικανότητας του πιστούχου. Ακόμη το υπόδειγμα είναι κατάλληλο και για τη μέτρηση του κινδύνου χαρτοφυλακίων λιανικής τραπεζικής όπως στεγαστικών και καταναλωτικών δανείων και πιστωτικών καρτών. Συγκεκριμένα το υπόδειγμα μπορεί να χειριστεί (Wilson 1997b):

- χαρτοφυλάκια με μεγάλες μη διαφοροποιημένες θέσεις και / ή διαφοροποιημένες θέσεις
- χαρτοφυλάκια με μεταβλητό οφειλόμενο ποσό (όπως λόγου χάρη θέσεις σε παράγωγα) και / ή σταθερό οφειλόμενο ποσό (επιχειρηματικά δάνεια) και
- χαρτοφυλάκια που περιέχουν ρευστοποιήσιμες θέσεις (όπως διαπραγματεύσιμες ομολογίες) και / ή μη ρευστοποιήσιμες θέσεις που πρέπει να κρατηθούν μέχρι τη λήξη τους (όπως ορισμένα επιχειρηματικά δάνεια και

εμπορικές πιστώσεις) και / ή πιστώσεις λιανικής τραπεζικής όπως στεγαστικά δάνεια, όρια υπερανάληψης και πιστωτικές κάρτες.

Τέλος η κατανομή της ζημίας υπολογίζεται με βάση την επικρατούσα οικονομική κατάσταση και όχι ιστορικούς μέσους όρους, οι οποίοι δεν μπορούν να αποτυπώσουν τον πραγματικό κίνδυνο. Λαμβάνοντας υπόψη την οικονομική κατάσταση, η πιθανότητα αθέτησης κάθε πιστούχου εκτιμάται σε σχέση με ένα κλαδικό δείκτη ο οποίος εξαρτάται από μακροοικονομικές μεταβλητές. Συνεπώς οι πιθανότητες αθέτησης που υπολογίζονται δεν είναι σταθερές αλλά μεταβαλλόμενες, εμπεριέχοντας την επίδραση των οικονομικών κύκλων, η οποία αποτελεί τη μεγαλύτερη ίσως πηγή κινδύνου για τα διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια. Οι επιδράσεις από εθνικούς και κλαδικούς παράγοντες κινδύνου υπολογίζονται με βάση εμπειρικά δεδομένα και έτσι δεν χρειάζεται το υπόδειγμα να καταφύγει σε σταθερές συσχετίσεις ή σε συσχετίσεις που υπολογίζονται με βάση τις μετοχικές αποδόσεις.

6.1 Υπόδειγμα υπολογισμού συστηματικού κινδύνου

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων αθέτησης και μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας κατασκευάζεται ένα υπόδειγμα εκτίμησης του συστηματικού κινδύνου πολλών μεταβλητών σε τρία στάδια: την αποτύπωση της οικονομικής κατάστασης, τον υπολογισμό κλαδικών πιθανοτήτων αθέτησης και τον υπολογισμό των αθροιστικών κατανομών μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας

6.1.1 Αποτύπωση της οικονομικής κατάστασης

Στην αρχή κάθε περιόδου t καθορίζεται η οικονομική κατάσταση με βάση μακροοικονομικές μεταβλητές X_i που επηρεάζουν την πιθανότητα αθέτησης τίτλων του εθνικού ή κλαδικού οικονομικού τομέα (segment) j (Wilson, 1997a). Οι μεταβλητές αυτές μπορεί να είναι λόγου χάρη η ανεργία, η εξέλιξη του ΑΕΠ, οι αυξήσεις στις αντικειμενικές αξίες των ακινήτων κ.ά. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται αυτοπαλινδρούμενες διαδικασίες δεύτερης τάξης μιας μεταβλητής, οι οποίες περιγράφουν την εξέλιξη των μακροοικονομικών μεταβλητών στο χρόνο:

$$X_{j,i,t} = k_{i,0} + k_{i,1}X_{j,i,t-1} + k_{i,2}X_{j,i,t-2} + \varepsilon_{j,i,t}$$

όπου $X_{j,i,t}$ είναι η τιμή της i μεταβλητής στον τομέα j στο χρόνο t , $k_{i,j}$ είναι τρεις σταθερές που εκτιμώνται από ιστορικά δεδομένα και $\varepsilon_{i,j}$ είναι το τυχαίο λάθος, το οποίο θεωρείται ότι ακολουθεί κανονική κατανομή $N(0,\sigma_i)$. Αφού εκτιμηθούν οι σταθερές παράμετροι, οι συντελεστές $\varepsilon_{i,j}$, που μπορεί να θεωρηθούν σαν τα λάθη της

πρόβλεψης ή αλλιώς οι "εκπλήξεις", εκτιμώνται με προσομοίωση. Επειδή είναι λογικό οι "εκπλήξεις" αυτές να παρουσιάζουν συσχέτιση (για παράδειγμα μια ιδιαίτερα κακή εξέλιξη του ΑΕΠ συνοδεύεται συνήθως και από δυσάρεστες "εκπλήξεις" στο ποσοστό ανεργίας), χρειάζεται να υπολογιστεί και ο πίνακας συνδιακύμανσης των λαθών πρόβλεψης, έτσι ώστε να μπορεί να προσομοιωθεί η ταυτόχρονη εξέλιξη των μακροοικονομικών μεταβλητών. Συγκεκριμένα ισχύει $\varepsilon \sim N(0, \Sigma_\varepsilon)$, όπου ε είναι το διάνυσμα των λαθών των παραπάνω εξισώσεων και Σ_ε ο πίνακας συνδιακύμανσης.

6.1.2 Υπολογισμός των κλαδικών πιθανοτήτων αθέτησης

Αφού καθοριστούν οι παραπάνω μακροοικονομικές μεταβλητές, υπολογίζεται ένας μακροοικονομικός δείκτης $y_{j,t}$, ο οποίος μετράει την οικονομική κατάσταση της χώρας με βάση αυτές (Wilson, 1997a). Συγκεκριμένα ο δείκτης αυτός έχει τη μορφή:

$$y_{j,t} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1}X_{j,1,t} + \beta_{j,2}X_{j,2,t} + \beta_{j,3}X_{j,3,t} + v_{j,t}$$

όπου $y_{j,t}$ είναι η τιμή του δείκτη ειδικά για τον j τομέα στο χρόνο t , β_j είναι συντελεστές παλινδρόμησης που πρέπει να εκτιμηθούν για τον j τομέα, $X_{j,t}$ είναι οι μεταβλητές που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο βήμα και επηρεάζουν τις πιθανότητες αθέτησης του τομέα; και $v_{j,t}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, η οποία θεωρείται ότι είναι ανεξάρτητη και ακολουθεί κανονική κατανομή:

$$v_{j,t} \sim N(0, \sigma_j) \text{ ή } v_t \sim N(0, \Sigma_v)$$

όπου v το διάνυσμα των μεταβολών του δείκτη και Σ_v ο πίνακας συνδιακύμανσης των μεταβολών αυτών.

Στη συνέχεια για τον υπολογισμό της πιθανότητας αθέτησης ενός συγκεκριμένου τομέα j χρησιμοποιείται η logit συνάρτηση:

$$p_{j,t} = \frac{1}{1 + \exp(y_{j,t})}$$

όπου $p_{j,t}$ είναι η πιθανότητα αθέτησης για ένα κερδοσκοπικό πιστωτικό τίτλο στον τομέα j , στο χρόνο t και $y_{j,t}$ είναι ο μακροοικονομικός δείκτης του τομέα. Η παραπάνω μορφή επιλέχθηκε για δύο κυρίως λόγους: γιατί δίνει καλύτερες εκτιμήσεις (όπως μετρώνται με το R^2) και γιατί δίνει πάντοτε τιμές πιθανότητας που ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$. Το γεγονός αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς οι παραπάνω τιμές προσομοιώνονται με τη μέθοδο Monte Carlo για πολυετείς χρονικούς ορίζοντες και ακραίες οικονομικές καταστάσεις, οπότε έπρεπε οπωσδήποτε

να κυμαίνονται ανάμεσα σε αυτά τα όρια. Για να προσομοιωθεί η κοινή πιθανότητα αθέτησης για όλους τους τομείς σε ένα χρονικό ορίζοντα T χρειάζονται ακόμη το διάνυσμα:

$$E = \begin{pmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma) \text{ και ο πίνακας: } \Sigma \equiv \begin{bmatrix} \Sigma_{\nu} & \Sigma_{\nu, \varepsilon} \\ \Sigma_{\varepsilon, \nu} & \Sigma_{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

όπου E είναι το $(i + j) \times 1$ διάνυσμα των μεταβολών (innovations) που επηρεάζουν το σύστημα των εξισώσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω και Σ είναι ο $(j + i) \times (j + i)$ πίνακας συνδιακύμανσης των λαθών εκτίμησης των μακροοικονομικών δεικτών (ν) και των μακροοικονομικών μεταβλητών (ε) του κάθε τομέα.

Δημιουργείται κατ' αυτόν τον τρόπο το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$P_{j,t} = \frac{1}{1 + \exp(y_{j,t})} \quad (1)$$

$$y_{j,t} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1}X_{j,1,t} + \beta_{j,2}X_{j,2,t} + \beta_{j,3}X_{j,3,t} + \nu_{j,t} \quad (2)$$

$$X_{j,i,t} = k_{i,0} + k_{i,1}X_{j,i,t-1} + k_{i,2}X_{j,i,t-2} + \varepsilon_{j,i,t} \quad (3)$$

$$E = \begin{pmatrix} \nu \\ \varepsilon \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma), \quad \Sigma \equiv \begin{bmatrix} \Sigma_{\nu} & \Sigma_{\nu, \varepsilon} \\ \Sigma_{\varepsilon, \nu} & \Sigma_{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Στη συνέχεια, αφού οριστεί ο πίνακας A τέτοιος ώστε $\Sigma = AA'$ (Cholesky decomposition), υπολογίζονται με προσομοίωση οι κοινές πιθανότητες αθέτησης για όλους του τομείς για τα χρονικά διαστήματα μέχρι T , ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- δημιουργείται μια σειρά τυχαίων $(j + i) \times (j + i)$ διανυσμάτων τέτοιων ώστε $z_t \sim N(0, I)$, $t=1$ έως T , όπου I είναι ο $(j + i) \times (j + i)$ μοναδιαίος πίνακας
- υπολογίζονται τα διανύσματα E_t , ενσωματώνοντας τις συσχετίσεις ανάμεσα στις μακροοικονομικές και κλαδικές μεταβολές, από τη σχέση $E_t = A * z_t$,
- υπολογίζονται οι πιθανότητες $P(t)$ χρησιμοποιώντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων.

Από τη σχέση (2) υπολογίζονται κλαδικοί δείκτες, οι οποίοι εμπεριέχουν τον συστηματικό κίνδυνο όπως αποτυπώνεται στο σταθμικό μέσο όρο των μακροοικονομικών μεταβλητών και τις ενδεχόμενες ιδιαίτερες "εκπλήξεις" του τομέα όπως αυτές αποτυπώνονται στον όρο ν . Μπορεί να χρησιμοποιηθεί δε για τον υπολογισμό δεικτών τόσο σε εθνικό όσο και σε κλαδικό επίπεδο. Σε έρευνες που

έχουν γίνει στη Γερμανία λόγω χάρη έχει παρατηρηθεί ότι η παραπάνω σχέση δίνει γενικό δείκτη οικονομίας της χώρας και κλαδικούς που κινούνται σχεδόν παράλληλα, με κάποιους δείκτες όπως π.χ. τον κατασκευαστικό να παρουσιάζουν εντονότερες διακυμάνσεις και κάποιους όπως των ορυχείων μικρότερες.

6.1.3 Υπολογισμός των αθροιστικών κατανομών μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας

Έχει παρατηρηθεί πως οι μεταβολές της πιστοληπτικής ικανότητας συνδέονται με τη γενικότερη κατάσταση της οικονομίας. Έτσι σε καταστάσεις ύφεσης οι πιθανότητες υποβιβασμού ή αθέτησης αυξάνονται ενώ το αντίθετο συμβαίνει σε καταστάσεις ανάπτυξης. Για το λόγο αυτό το υπόδειγμα αντί για τον κλασικό πίνακα μετάβασης που δημοσιεύουν οι διάφοροι οίκοι αξιολόγησης χρησιμοποιεί έναν προσαρμοσμένο πίνακα με βάση τις δεσμευμένες πιθανότητες αθέτησης για κάθε οικονομική συγκυρία. Το σημείο εκκίνησης είναι ένας δημοσιευμένος πίνακας μετάβασης π.χ. της Standard & Poor's ή της Moody's, ο οποίος συμβολίζεται με $\emptyset M$. Οι πιθανότητες μετάβασης που περιέχονται σε αυτόν τον πίνακα δεν εξαρτώνται από τις μακροοικονομικές συνθήκες που επηρεάζουν τον κάθε τομέα σε κάθε στιγμή γιατί είναι ιστορικοί μέσοι όροι που βασίζονται σε στοιχεία τουλάχιστο 20 ετών και καλύπτουν αρκετούς οικονομικούς κύκλους και διάφορους κλάδους.

Όπως προαναφέρθηκε οι πιθανότητες υποβιβασμού και αθέτησης μεταβάλλονται ανάλογα με την οικονομική συγκυρία. Ισχύει δηλαδή:

$$\frac{SDP_t}{\emptyset SDP} > 1 \text{ σε οικονομική ύφεση}$$

$$\frac{SDP_t}{\emptyset SDP} < 1 \text{ σε οικονομική ανάπτυξη}$$

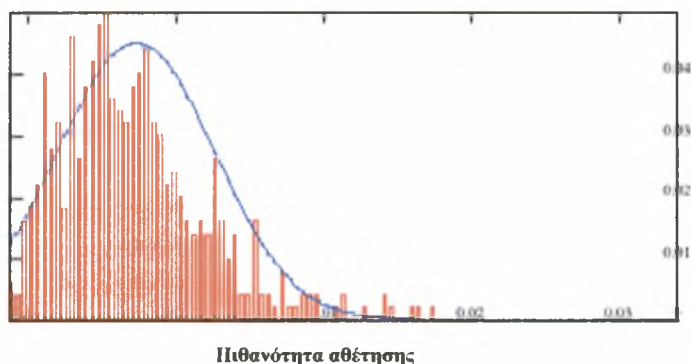
όπου SDP_t είναι η προσομοιωμένη δεσμευμένη πιθανότητα αθέτησης (simulated default probability) για κερδοσκοπικό πιστωτικό τίτλο και $\emptyset SDP$ ιστορική μέση τιμή της πιθανότητας αθέτησης. Το CreditPortfolioView χρησιμοποιεί τους παραπάνω λόγους προκειμένου να προσαρμόσει τους δημοσιευμένους πίνακες μετάβασης $\emptyset M$ έτσι ώστε να κατασκευάσει νέους πίνακες μετάβασης M_t , οι οποίοι θα εξαρτώνται από την οικονομική κατάσταση:

$$M_t = M(P_{j,i} / \emptyset SDP)$$

όπου η προσαρμογή περιλαμβάνει τη μετατόπιση των επιχειρήσεων προς υποβαθμισμένες κατηγορίες ή την κατηγορία αθέτησης όταν ο λόγος $P_{j,t}/\emptyset SDP$ είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα και στην αντίθετη κατεύθυνση όταν είναι μικρότερος. Καθώς το υπόδειγμα μπορεί να προσομοιώσει τις τιμές της $P_{j,t}$ για οποιοδήποτε χρονικό ορίζοντα $t=1, \dots, T$, η προσέγγιση αυτή μπορεί να δημιουργήσει και πίνακες μετάβασης για πάνω από ένα έτος:

$$M_T = \prod_{t=1, \dots, T} M(P_{j,t}/\emptyset SDP)$$

Με προσομοίωση του παραπάνω πίνακα μπορεί να εξαχθεί η αθροιστική δεσμευμένη πιθανότητα αθέτησης καθώς και η αθροιστική δεσμευμένη πιθανότητα μετάβασης για τίτλους επιχειρήσεων οποιασδήποτε λήξης, ταξινόμησης, χώρας ή κλάδου. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα των προσομοιώσεων των αθροιστικών πιθανοτήτων αθέτησης για 5 χρόνια μιας γερμανικής επιχείρησης πιστοληπτικής ικανότητας A, βασισμένο σε 500 προσομοιώσεις.



Πηγή: McKinsey & Co

Το ιστόγραμμα δεν είναι "κανονικό" αλλά ασύμμετρο και μάλιστα με μεγάλη συγκεντρωση τιμών στο δεξί άκρο. Το φαινόμενο αυτό είναι σύνηθες κυρίως με τίτλους υψηλής πιστοληπτικής ικανότητας και μικρής διάρκειας σε αντίθεση με τους χαμηλότερης πιστοληπτικής ικανότητας και μεγαλύτερης διάρκειας τίτλους, οι οποίοι εμφανίζουν πιο συμμετρικά ιστογράμματα καθώς η μέση τιμή είναι αρκετά μεγαλύτερη. Στον παρακάτω πίνακα χάρη φαίνονται οι δεσμευμένες αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης για ένα χαρτοφυλάκιο γραμμένο στο γερμανικό γενικό δείκτη για τίτλους λήξης μέχρι 10 χρόνων και αρχικής κατάταξης από κατηγορία AAA έως κατηγορία αθέτησης, με δεδομένο το μακροοικονομικό περιβάλλον της Γερμανίας το 1995:

Πίνακας 14. Αθροιστική δεσμευμένη πιθανότητα αθέτησης

Λήξη										Κατηγορία
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0,000	0,008	0,035	0,093	0,193	0,345	0,562	0,863	1,252	1,741	AAA
0,000	0,055	0,178	0,382	0,684	1,094	1,628	2,315	3,143	4,122	AA
0,121	0,364	0,780	1,385	2,206	3,241	4,493	5,999	7,697	9,579	A
0,575	1,610	3,153	5,121	7,483	10,135	13,013	16,148	19,367	22,633	BBB
0,282	7,087	12,160	17,510	22,941	28,209	33,227	38,094	42,599	46,750	BB
11,798	22,170	31,473	39,438	46,340	52,253	57,333	61,858	65,755	69,120	B
29,999	44,020	55,545	63,445	69,169	73,446	76,760	79,494	81,726	83,582	CCC
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	D

Πηγή: McKinsey & Co

Ο πίνακας αυτός θα μπορούσε να παρίστανε τη δεσμευμένη μέση πιθανότητα ζημίας του χαρτοφυλακίου αν και μόνο αν ίσχυαν οι παρακάτω προϋποθέσεις: το χαρτοφυλάκιο ήταν τόσο διαφοροποιημένο έτσι ώστε οι διακυμάνσεις του να παρακολουθούσαν το γερμανικό γενικό δείκτη χαρτοφυλακίων (περιείχε δηλαδή ένα μεγάλο αριθμό γερμανικών τίτλων από όλους του κλάδους), τα ποσοστά ανάκτησης ήταν μηδενικά, τα οφειλόμενα ποσά παρέμεναν σταθερά μέχρι τη λήξη των τίτλων και οι ζημίες δεν υπολογίζονταν σε τρέχουσες τιμές με προεξόφληση. Όταν επομένως αρθούν οι παραπάνω περιορισμοί ο πίνακας θα δίνει την κατανομή της πιθανότητας της ζημίας του χαρτοφυλακίου. Η αναλυτική περιγραφή γίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

6.2 Υπολογισμός της κατανομής της ζημίας του χαρτοφυλακίου

Για την κατανόηση του υπόδειγματος παρατίθεται ένα παράδειγμα (Wilson, 1997b). Ο χρόνος χωρίζεται σε διακριτές περιόδους t . Στο παράδειγμα θεωρείται μόνο μία περίοδος και δύο οικονομικοί τομείς με τα παρακάτω στοιχεία:

1. Προσδιορισμός οικονομικής κατάστασης	Κατάσταση	ΑΕΠ	Πιθ/τητα
	Ανάπτυξη	+1	33,33%
	Μέση	0	33,33%
	Υφεση	-1	33,33%
2. Προσδιορισμός πιθανότητας αδυναμίας πληρωμών τομέα	Κατάσταση	"Χαμηλό β"	"Υψηλό β"
		Πιθ. Α	Πιθ. Β
	Ανάπτυξη	2,50%	0,75%
	Μέση	2,97%	3,45%
	Υφεση	4,71%	5,25%

3. Προσδιορισμός κατανομών ζημίας

Πηγή: McKinsey & Co

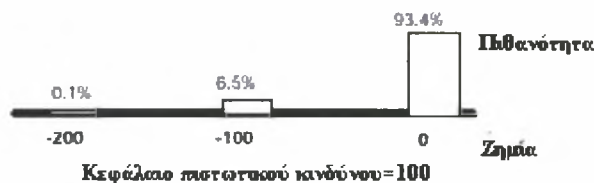
Τα στάδια που ακολουθούνται είναι:

- Προσδιορισμός της οικονομικής κατάστασης. Στο παράδειγμα υπάρχουν τρεις δυνατές οικονομικές καταστάσεις: η ανάπτυξη με αύξηση του ΑΕΠ κατά 1%, η μέση κατάσταση χωρίς αύξηση του ΑΕΠ και η ύφεση με μείωση του ΑΕΠ κατά 1%. Η καθεμία έχει πιθανότητα 33,33% να εμφανιστεί.
- Προσδιορισμός της πιθανότητας αθέτησης του τομέα. Το δεύτερο στάδιο περιλαμβάνει την μετατροπή της οικονομικής κατάστασης σε δεσμευμένη πιθανότητα μετάβασης και αθέτησης για κάθε τομέα. Στο παράδειγμα υπάρχουν δύο τομείς, ένας με χαμηλό β , όπου ως β λογίζεται η ευαισθησία της πιθανότητας αθέτησης του τομέα προς τις μεταβολές του οικονομικού κύκλου και ένας με υψηλό. Οι πιθανότητες αυτές υπολογίζονται σύμφωνα με το υπόδειγμα που περιγράφηκε παραπάνω.
- Προσδιορισμός της κατανομής της ζημίας. Στο παράδειγμα υπάρχουν τρεις δυνατές οικονομικές καταστάσεις και δοθείσης καθεμιάς από αυτές τέσσερα δυνατά σενάρια αθέτησης: μόνο η επιχείρηση Α, μόνο η επιχείρησης Β, και η Α και η Β, ούτε η Α ούτε η Β αθετούν τις υποχρεώσεις τους, όπως φαίνεται παρακάτω:

- ① Προσδιορισμός οικον. κατάστασης ② Προσδιορισμός πθ. αθέτησης τομέα
-
- ③ Προσδιορισμός κατανομής ζημίας

Κατανομή ζημίας	Ανάπτυξη				Μέση				Ύφεση			
	A	B	A+B	Πθθ.	A	B	A+B	Πθθ.	A	B	A+B	Πθθ.
	-100	-100	-200	0.01%	-100	-100	-200	0.03%	-100	-100	-200	0.08%
	-100	0	-100	0.83%	-100	0	-100	0.96%	-100	0	-100	1.49%
	0	-100	-100	0.24%	0	-100	-100	1.12%	0	-100	-100	1.67%
	0	0	0	32.26%	0	0	0	31.23%	0	0	0	30.10%
	Corr(A,B) = 0%				Corr(A,B) = 0%				Corr(A,B) = 0%			

Δεσμευμένη Corr(A,B)=1%



Πηγή: Wilson, 1997b

Η δεσμευμένη πιθανότητα των παραπάνω τεσσάρων πιστωτικών γεγονότων για κάθε οικονομική κατάσταση υπολογίζεται με βάση τις οριακές κατανομές ζημίας της κάθε θέσης με δεδομένη την ανεξαρτησία των οικονομικών καταστάσεων. Έτσι, η δεσμευμένη πιθανότητα ζημίας \$200 σε περίοδο ανάπτυξης είναι 0,01% (όση η

δεσμευμένη πιθανότητα αθέτησης και των δύο πιστούχων), ενώ η πιθανότητα ίδιας ζημίας χωρίς δεδομένη οικονομική κατάσταση είναι περίπου 0,1% (όσο το άθροισμα των πιθανοτήτων των σεναρίων με ζημία \$100, αφού τα σενάρια είναι ανεξάρτητα). Η μέση ζημία του χαρτοφυλακίου είναι \$6,5 ενώ η μέγιστη δυνατή ζημία με διάστημα εμπιστοσύνης 99% είναι \$100, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις οικονομικές καταστάσεις.

Σύμφωνα επομένως με αυτή την προσέγγιση για να βρεθεί η κατανομή της ζημίας, πρέπει πρώτα να βρεθεί η δεσμευμένη κατανομή ζημίας για κάθε οικονομική κατάσταση με δεδομένο ότι οι πιθανότητες αθέτησης και μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας είναι ανεξάρτητες και κατόπιν να βρεθεί η συνολική κατανομή της ζημίας με δεδομένο ότι οι οικονομικές καταστάσεις είναι ανεξάρτητες. Επίσης η προσέγγιση αυτή δέχεται ότι όλες οι συσχετίσεις των πιθανοτήτων αθέτησης και μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας ενσωματώνονται στις παραπάνω πιθανότητες μέσω του υπόδειγματος υπολογισμού του συστηματικού κινδύνου. Δηλαδή, καμιά άλλη πληροφορία εκτός από τη χώρα, τον κλάδο, την κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας και τη μακροοικονομική κατάσταση δεν χρειάζεται προκειμένου να προσδιοριστεί η συσχέτιση αθέτησης δύο οποιωνδήποτε πιστούχων. Για το λόγο αυτό οι πιθανότητες αθέτησης που δίνει το υπόδειγμα υπολογισμού του συστηματικού κινδύνου είναι μεγαλύτερες σε περίοδο ύφεσης από αυτές τις περιόδους ανάπτυξης, καθώς οι οικονομικοί κύκλοι προκαλούνται από μακροοικονομικούς κύκλους με αποτέλεσμα συσχετισμένες καταστάσεις αθέτησης. Έτσι, σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση όταν υπολογίζεται κατανομή ζημίας σε μία περίοδο ύφεσης, οι επιμέρους πιθανότητες αθέτησης θεωρούνται ανεξάρτητες αφού ήδη έχουν ενσωματωμένες τις συσχετίσεις.

Στην περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο είναι πλήρως διαφοροποιημένο, αποτελείται δηλαδή από ένα μεγάλο αριθμό τίτλων του κάθε τομέα, όλος ο μη συστηματικός κίνδυνος του τομέα εξαλείφεται και μένει μόνο ο συστηματικός. Η πραγματική κατανομή ζημίας του χαρτοφυλακίου θα συγκλίνει προς την μέση ζημία για κάθε οικονομική κατάσταση, θα μπορεί να πάρει δηλαδή τρεις διαφορετικές τιμές ανάλογα με την οικονομική κατάσταση. Η κάθε οικονομική κατάσταση έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης και η ζημία ανά τομέα εξαρτάται από τη δεσμευμένη πιθανότητα ζημίας αυτού του τομέα με δεδομένη την οικονομική κατάσταση. Αν και η αναμενόμενη ζημία του χαρτοφυλακίου παραμένει σταθερή, ο συστηματικός κίνδυνος δημιουργεί ένα κεφάλαιο πιστωτικού κινδύνου \$9,96 για τα \$200 του

χαρτοφυλακίου, αποδεικνύοντας τα οφέλη που μπορούν να προκύψουν από τη διαφοροποίηση αλλά και το γεγονός ότι ο συστηματικός κίνδυνος δε μπορεί να εξαλειφθεί. Αναλυτικά οι ζημίες και οι πιθανότητες έχουν ως εξής:

Πλήρως διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο

	Ζημία			
	A	B	A+B	Πιθ/τα
Ανάπτυξη	-2,50	-0,75	-3,25	33,33%
Μέση	-2,97	-3,45	-6,42	33,33%
Υφεση	-4,71	-5,25	-9,96	33,33%
Μη δεσμευμένη Corr(A,B)				91%
Κεφάλαιο πιστωτικού κινδύνου \$9,96				

Στη δεύτερη περίπτωση, το χαρτοφυλάκιο είναι διαφοροποιημένο ως προς τον τομέα B, στον οποίο υπάρχει μόνο ο συστηματικός κίνδυνος ενώ όσον αφορά τον τομέα A, υπάρχει μόνο μια θέση, η οποία εκτός από το συστηματικό κίνδυνο περιέχει και διαφοροποιήσιμο κίνδυνο. Έτσι σε κάθε οικονομική κατάσταση υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: να αθετήσει ο πιστούχος του τομέα A τις υποχρεώσεις του ή όχι. Η πιθανότητα αθέτησης του A σε περίοδο ανάπτυξης είναι 0,83% (33,33% να υπάρξει περίοδος ανάπτυξης επί την πιθανότητα 2,5% να αθετήσει ο A τις υποχρεώσεις του, δοθείσης της κατάστασης). Ανεξάρτητα από την πορεία του A, οι ζημίες από τις θέσεις του τομέα B είναι γνωστές (δοθείσης της οικονομικής κατάστασης), γιατί όλος ο μη συστηματικός κίνδυνος έχει εξαλειφθεί. Αναλυτικά τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

Μερικώς διαφοροποιήσιμο χαρτοφυλάκιο

	Ζημία			
	A	B	A+B	Πιθ/τητα
Ανάπτυξη	-100	-0,75	-100,75	0,83%
	0	-0,75	-0,75	32,50%
Μέση	-100	-3,45	-103,45	0,99%
	0	-3,45	-3,45	32,30%
Υφεση	-100	-5,25	-105,25	1,57%
	0	-5,25	-5,25	31,80%
Κεφάλαιο πιστωτικού κινδύνου \$105,25				

Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν προσομοιωθεί η κατανομή της ζημίας του χαρτοφυλακίου, αυτή εμφανίζει δύο επικρατούσες τιμές, αποτυπώνοντας το γεγονός ότι για κάθε οικονομική κατάσταση δύο ενδεχόμενα μπορεί να συμβούν: είτε να αθετήσει ο πιστούχος του τομέα A τις υποχρεώσεις του, δημιουργώντας ένα νέφος από ζημίες γύρω από μία μέση τιμή είτε να μην περιέλθει σε παρόμοια κατάσταση, δημιουργώντας ένα άλλο νέφος γύρω από μια μικρότερη μέση τιμή με μεγαλύτερη όμως πιθανότητα.

Το υπόδειγμα επίσης προβλέπει μεταβολές του ύψους των ποσών που είναι εκτεθειμένα σε κίνδυνο κατά τη διάρκεια του χρόνου T καθώς και προεξόφληση των ζημιών με σταθερό προεξοφλητικό επιτόκιο, έτσι ώστε να ενσωματωθεί η διαχρονική αξία του χρήματος. Για την αντιμετώπιση των δύο παραπάνω προβλημάτων το υπόδειγμα χρησιμοποιεί οριακές (marginal) αντί για αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης. Ενώ η αθροιστική πιθανότητα είναι η πιθανότητα να αθετήσει η επιχείρηση τις υποχρεώσεις της σε οποιοδήποτε από τα προηγούμενα χρόνια, η οριακή πιθανότητα είναι η πιθανότητα αθέτησης στο συγκεκριμένο χρόνο (με την προϋπόθεση ότι δεν έχει συμβεί σε προηγούμενο). Η οριακή πιθανότητα υπολογίζεται εύκολα αφού προσομοιωθεί πρώτα η αθροιστική. Η βασική διαφορά ανάμεσα στο CreditPortfolioView και στα άλλα μοντέλα είναι ότι αυτό θεωρεί πως η κατανομή της ζημίας όταν τα οφειλόμενα ποσά είναι μεταβλητά παίρνει πολλές τιμές (multinomial loss distribution), οι οποίες εξαρτώνται από το χρόνο στον οποίο η επιχείρηση θα αθετήσει τις υποχρεώσεις της.

Το υπόδειγμα προβλέπει επίσης την περίπτωση να ρευστοποιηθούν κάποιες θέσεις πριν από τη λήξη τους. Για την περίπτωση αυτή εκτός από την αθροιστική πιθανότητα αθέτησης χρησιμοποιεί και τις πιθανότητες μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας. Από τις τελευταίες, με τη βοήθεια περιθωρίων επιτοκίων και ποσοστών ανάκτησης, βασισμένων στη λήξη και στην πιστοληπτική ικανότητα, υπολογίζεται η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου σε τιμές αγοράς και από αυτή προσομοιώνεται η κατανομή της ζημίας.

Αφού προσομοιωθεί η κατανομή της ζημίας του χαρτοφυλακίου είναι εύκολο να υπολογιστούν τα κρίσιμα σημεία της όπως λόγου χάρη τα ποσοστιαία σημεία και η VaR.

7. ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ (VALIDATION)

Ο έλεγχος της εγκυρότητας ενός υποδείγματος εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου γίνεται με τέσσερις τρόπους: α) με εκ των υστέρων έλεγχο των αποτελεσμάτων (Backtesting), αποδεικνύοντας ότι τόσο οι αναμενόμενες όσο και οι μη αναμενόμενες ζημίες που προβλέπει το υπόδειγμα συμφωνούν με την εκ των υστέρων εξέλιξη του χαρτοφυλακίου β) με έλεγχο ακραίων καταστάσεων (Stress testing), αναλύοντας τα αποτελέσματα του υποδείγματος σε ακραία οικονομικά σενάρια γ) εκτιμώντας την ευαισθησία των εκτιμηθέντων μέτρων πιστωτικού κινδύνου στις μεταβολές των υποκείμενων παραμέτρων και προϋποθέσεων και δ) εξασφαλίζοντας έλεγχο και εποπτεία της απόδοσης του υποδείγματος από ανεξάρτητη αρχή. Μέχρι στιγμής πολύ λίγες τράπεζες έχουν κατορθώσει να καλύψουν και τους τέσσερις τομείς και να αντιμετωπίσουν κάθε στοιχείο αβεβαιότητας των υποδειγμάτων που χρησιμοποιούν. Επομένως ο έλεγχος της εγκυρότητας ενός υποδείγματος θα αποτελέσει μεγάλη πρόκληση για το προσεχές μέλλον (Basle Committee on Banking Supervision, 1999).

Ο εκ των υστέρων έλεγχος των αποτελεσμάτων των υποδειγμάτων εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου δυσχεραίνεται πρώτον λόγω της έλλειψης στοιχείων αφού τα πιστωτικά γεγονότα είναι σπάνια και δεύτερον λόγω του μεγάλου χρονικού ορίζοντα που συνήθως χρησιμοποιείται δηλαδή του ενός έτους. Επομένως για την εκ των υστέρων επαλήθευση της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων ενός υποδείγματος πιστωτικού κινδύνου, ουσιαστικά της μη αναμενόμενης ζημίας, χρειάζονται δεδομένα πάρα πολλών ετών, καθιστώντας τα υπάρχοντα συστήματα πρακτικά ανεφάρμοστα.

Ο έλεγχος της ευαισθησίας των αποτελεσμάτων του υποδείγματος στις μεταβολές των παραμέτρων αφορά κυρίως τους παρακάτω παράγοντες: α) την πιθανότητα αθέτησης και τη μεταβλητότητά της, β) τη ζημία σε περίπτωση αθέτησης, γ) την εσωτερική διαβάθμιση του κινδύνου. Το σημαντικότερο πρόβλημα είναι ότι αν και οι παράμετροι επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό το εκτιμώμενο μέτρο κινδύνου, αρκετές φορές επειδή αυτές δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες, εκτιμώνται κατά προσέγγιση με όποιες επιπτώσεις αυτό μπορεί να έχει στο αποτέλεσμα.

Μέχρι στιγμής πολύ λίγες μελέτες έχουν αναλύσει τα εμπειρικά αποτελέσματα των υποδειγμάτων εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου. Η μόνη εργασία η οποία τα εξετάζει συγκρίνοντας εκτιμώμενα μέτρα κινδύνου με ζημίες που θα

μπορούσαν να είχαν υποστεί πραγματικά χαρτοφυλάκια είναι αυτή των Nickell et al. (1998). Οι συγγραφείς εξετάζουν το βαθμό στον οποίο δύο τυπικά υποδείγματα εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου (το ένα παρεμφερές με το CreditMetrics και το άλλο με το KMV) εκτιμούν με ακρίβεια την Αξία σε Κίνδυνο για χαρτοφυλάκια διεθνών ομολόγων σε δολάρια ΗΠΑ, για κυλιόμενα δωδεκάμηνα από το 1988 έως το 1998. Η μελέτη τους δείχνει ότι τα δύο παραπάνω υποδείγματα δεν μετρούν πάντα με ακρίβεια τον πιστωτικό κίνδυνο.

Ενώ τα παραπάνω υποδείγματα φαίνεται να δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν χρησιμοποιούνται για χαρτοφυλάκια ομολόγων αμερικανικών βιομηχανιών, υποτιμούν τον κίνδυνο των μη αμερικανικών οφειλετών καθώς και αυτόν των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων. Μέρος του προβλήματος έγκειται στο ότι πολλά από τα δεδομένα αυτών των υποδειγμάτων προέρχονται από τον κλάδο της αμερικανικής βιομηχανίας, η οποία μέχρι πρότινος αποτελούσε και την πλειοψηφία των αξιολογημένων επιχειρήσεων. Οι συγγραφείς καταλήγουν ότι τα υποδείγματα πρέπει να χρησιμοποιούνται με ιδιαίτερη προσοχή και με όσο το δυνατό λιγότερες παραμέτρους όταν πρόκειται για μη αμερικανικές επιχειρήσεις.

8. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μετά τις αλληπάλληλες οικονομικές καταστροφές των αρχών της δεκαετίας του '90, η διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου αναδεικνύεται σε φλέγον ζήτημα για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Είναι πλέον αναγκαία η ποσοτικοποίηση του κινδύνου που αναλαμβάνουν και αυτό είναι εφικτό μόνο στα πλαίσια του χαρτοφυλακίου. Η πιο πρόσφατη εξέλιξη στον τομέα αυτό είναι η μέθοδος Value at Risk, η οποία αποτυπώνει το αναμενόμενο μέγεθος της ζημίας καθώς και η πιθανότητα εμφάνισής της σε δεδομένο χρονικό διάστημα. Τέσσερα ευρύτατα διαδεδομένα υποδείγματα εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου βασίζονται στην παραπάνω μέθοδο και είναι: το CreditMetrics της JP Morgan, το Portfolio Manager της KMV, το CreditRisk+ της Credit Suisse First Boston και το CreditPortfolioView της McKinsey.

Το CreditMetrics στηρίζεται στην ανάλυση της μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας των πιστούχων, την οποία θεωρεί ως μοναδικό παράγοντα πιστωτικού κινδύνου. Όλοι οι οφειλέτες επομένως που ανήκουν στην ίδια κατηγορία πιστοληπτικής ικανότητας έχουν την ίδια πιθανότητα αθέτησης, που είναι μάλιστα ίση με μία ιστορική μέση τιμή που δημοσιεύουν οι αξιολογικοί οίκοι. Το υπόδειγμα επομένως εκτιμά πιστωτικό κίνδυνο από αξιολογημένες επιχειρήσεις, με βάση την πιστοληπτική τους ικανότητα. Εκτιμά την πλήρη μελλοντική κατανομή της αξίας του χαρτοφυλακίου, η οποία υπολογίζεται με βάση τη μελλοντική ταξινόμηση του κάθε τίτλου, τη συσχέτιση των μεταβολών της πιστοληπτικής ικανότητας των διαφόρων πιστούχων και δεδομένη εξέλιξη των επιτοκίων για κάθε ταξινόμηση. Το ποσοστό ανάκτησης θεωρείται επίσης ότι ακολουθεί κατανομή Βήτα με δεδομένη μέση τιμή και τυπική απόκλιση. Οι συσχέτιση των μεταβολών της πιστοληπτικής ικανότητας και κατ' επέκταση των αθετήσεων προσεγγίζονται από τις συσχέτιση των αποδόσεων των μετοχών και αποδίδονται σε κοινούς παράγοντες συστηματικού κινδύνου όπως η χώρα και ο κλάδος οικονομικής δραστηριοποίησης καθώς και σε ιδιαίτερους για κάθε τίτλο παράγοντες μη συστηματικού ή διαφοροποιήσιμου κινδύνου. Η μελλοντική αξία κάθε τίτλου προσομοιώνεται με χρήση διαφόρων σεναρίων στα οποία εισάγονται οι παραπάνω παράμετροι και για κάθε σενάριο υπολογίζεται η αξία του χαρτοφυλακίου. Η κατανομή της ζημίας βρίσκεται με χιλιάδες διαδοχικές προσομοιώσεις. Η ακρίβεια των υπολογισμών επομένως βασίζεται στην ακρίβεια των τιμών των παραμέτρων.

Το υπόδειγμα KMV Portfolio Manager εκτιμά την πιθανότητα αθέτησης και την κατανομή της ζημίας για κάθε τίτλο χωριστά, χρησιμοποιώντας ένα ενδιάμεσο μέτρο το οποίο ονομάζει "Απόσταση από την αθέτηση". Το σημείο αθέτησης είναι το σημείο εκείνο της αξίας του ενεργητικού στο οποίο η επιχείρηση αδυνατεί να καλύψει τις υποχρεώσεις της και ορίζεται αυθαίρετα ως το άθροισμα των συνολικών βραχυπρόθεσμων υποχρεώσεων και του 50% των μακροπρόθεσμων υποχρεώσεων. Η απόσταση από την αθέτηση ορίζεται ως η απόσταση της αναμενόμενης τιμής του ενεργητικού από το σημείο αθέτησης, μετρημένη σε τυπικές αποκλίσεις του ενεργητικού. Η πιθανότητα αθέτησης εξαρτάται από την κεφαλαιακή δομή της επιχείρησης, τη μεταβλητότητα του ενεργητικού της και την τρέχουσα αξία του. Η μέση τιμή και η μεταβλητότητα του ενεργητικού εκτιμώνται από την τρέχουσα τιμή και τη μεταβλητότητα της μετοχής της επιχείρησης με βάση τη θεωρία του Merton ότι τα ίδια κεφάλαια της επιχείρησης μπορούν να θεωρηθούν ως δικαίωμα προαίρεσης πάνω στα περιουσιακά της στοιχεία με τιμή εξάσκησης την αξία του χρέους της. Η μεταβλητότητα του ενεργητικού θεωρείται ότι δε μεταβάλλεται με το χρόνο. Η αντιστοίχιση της εκάστοτε απόστασης από την αθέτηση σε μία συγκεκριμένη πιθανότητα αθέτησης γίνεται με βάση ιστορικά δεδομένα που διαθέτει η εταιρία KMV, γεγονός που προϋποθέτει τη σωπηρή παραδοχή ότι οι τάσεις του παρελθόντος θα συνεχιστούν και στο μέλλον. Η κατανομή της ζημίας του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται από τη risk-neutral πιθανότητα αθέτησης κάθε πιστούχου, τη μελλοντική εξέλιξη των επιτοκίων, η οποία θεωρείται δεδομένη, και τις συσχετίσεις αθέτησης, οι οποίες εκτιμώνται με βάση παράγοντες συστηματικού και μη συστηματικού κινδύνου.

Το CreditRisk+ είναι ένα υπόδειγμα το οποίο εκτιμά τον πιστωτικό κίνδυνο σε συνάρτηση μόνο με την πιθανότητα αθέτησης των πιστούχων, την οποία θεωρεί τυχαίο γεγονός, του οποίου τα όποια αίτια δεν έχουν καμμία σημασία. Έτσι για ένα μεγάλο χαρτοφυλάκιο N ομοειδών και ανεξάρτητων τίτλων με το ίδιο ύψος ποσού και τον ίδιο πολύ μικρό ρυθμό αθέτησης, η πιθανότητα $P(n)$ ότι θα υπάρξουν ακριβώς n αθετήσεις ακολουθεί κατά προσέγγιση κατανομή Poisson με παράμετρο την αναμενόμενη τιμή αθετήσεων. Προκειμένου να απωτυπωθεί η συσχέτιση των αθετήσεων, οι πιστούχοι κατανέμονται σε διάφορους οικονομικούς τομείς, οι οποίοι χαρακτηρίζονται από ένα συγκεκριμένο ρυθμό αθέτησης, αφού επηρεάζονται από συγκεκριμένους μακροοικονομικούς παράγοντες. Ο ρυθμός αθέτησης κάθε τομέα θεωρείται ότι ακολουθεί κατανομή Γάμα και έχει ενσωματωμένη τη συσχέτιση των

αθετήσεων. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση εκτιμώνται από ιστορικά δεδομένα. Επομένως για να προσδιοριστεί η κατανομή του αριθμού των αθετήσεων κάθε τομέα, συνδυάζεται η ανεξάρτητη κατανομή Poisson με την χαρακτηριστική κατανομή Γάμα του τομέα και το αποτέλεσμα είναι μια αρνητική διωνυμική κατανομή. Η τελευταία μαζί με την κατανομή του ύψους των οφειλόμενων ποσών του τομέα δίνει την αναλυτική κατανομή της ζημίας του τομέα. Τα αδύνατα σημεία του υποδείγματος έχουν και πάλι να κάνουν με τις παραδοχές στις οποίες βασίζεται και τις παραμέτρους που χρησιμοποιεί. Τα ποσοστά ανάκτησης λόγου χάρη δεν μπορούν σε καμμία περίπτωση να θεωρηθούν σταθερά αλλά θα πρέπει να ακολουθούν στοχαστική διαδικασία. Έτσι όμως δεν θα μπορεί πλέον να χρησιμοποιηθεί αναλυτική μέθοδος αλλά θα πρέπει να γίνει προσομοίωση, οπότε η προσέγγιση θα πάψει να είναι τόσο απλή. Όμοια, τα αποτελέσματα του υποδείγματος φαίνεται να δείχνουν ιδιαίτερη ευαισθησία ως προς τις παραδοχές της Γάμα κατανομής για το ρυθμό αθέτησης κάθε τομέα και Poisson για τον αριθμό αθετήσεων. Τέλος οι συσχετίσεις που παρατηρούνται στα εμπειρικά δεδομένα δεν φαίνεται να συμφωνούν με αυτές που υπονοούνται από τη μεταβλητότητα της πιθανότητας αθέτησης.

Το CreditPortfolioView εκτιμά την κατανομή της ζημίας του χαρτοφυλακίου με βάση την πιθανότητα αθέτησης και μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας του κάθε πιστούχου. Οι πιθανότητα αθέτησης κάθε κλάδου οικονομικής δραστηριότητας καθορίζεται από την επικρατούσα οικονομική κατάσταση, όπως αυτή περιγράφεται από έναν αριθμό μακροοικονομικών μεταβλητών, οι οποίες συνθέτουν ένα κλαδικό ή εθνικό δείκτη. Τόσο για την επιλογή και τον υπολογισμό των μακροοικονομικών μεταβλητών όσο και για τη σύνθεση του κλαδικού δείκτη γίνεται παλινδρόμηση, καθιστώντας την ορθότητα των εκτιμώμενων συντελεστών καθοριστικής σημασίας για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Το υπόδειγμα αποφεύγει τον υπολογισμό συσχετίσεων αθέτησης με τη χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας αθέτησης δοθείσης της οικονομικής κατάστασης, αφού οι διακυμάνσεις τους εξηγούνται στο μεγαλύτερο μέρος τους από μακροοικονομικούς παράγοντες και είναι επομένως ενσωματωμένες στις δεσμευμένες πιθανότητες αθέτησης. Εμπειρικές έρευνες όμως έδειξαν ότι οι συσχετίσεις αθέτησης των τίτλων χαμηλού κινδύνου δεν επηρεάζονται από τον οικονομικό κύκλο και συνεπώς είναι αμφίβολο κατά πόσο οι δεσμευμένες πιθανότητες ενσωματώνουν τις εν λόγω συσχετίσεις. Εκτός αυτού, το υπόδειγμα χρειάζεται μια πλειάδα ιστορικών δεδομένων για τη δημιουργία του δείκτη που χαρακτηρίζει τον κάθε οικονομικό κλάδο, καθιστώντας την προσέγγιση σχετικά

πολύπλοκη. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων εξαρτάται κι εδώ από τη σωστή επιλογή των παραμέτρων (μακροοικονομικών μεταβλητών) και το βάθος των χρονοσειρών. Το υπόδειγμα χρειάζεται επίσης την εισαγωγή πινάκων μετάβασης για την εκτίμηση των πιθανοτήτων αθέτησης και μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας των πιστούχων του εκάστοτε κλάδου. Οι ιστορικές πιθανότητες των πινάκων μετάβασης προσαρμόζονται ανάλογα με την οικονομική κατάσταση, έτσι ώστε να δίνουν μεγαλύτερες πιθανότητες αθέτησης σε περιόδους κρίσεων και μικρότερες σε περιόδους ανάπτυξης. Η κατανομή της ζημίας υπολογίζεται με προσομοίωση Monte Carlo με μεταβαλλόμενα οφειλόμενα ποσά που εκτιμώνται με προκαθορισμένα προεξοφλητικά επιτόκια και διάφορα ποσοστά ανάκτησης. Επομένως η ακρίβεια των αποτελεσμάτων εξαρτάται εκτός των άλλων παραμέτρων και από τον αριθμό των επαναλήψεων.

Η ανάπτυξη των υποδειγμάτων εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου βρίσκεται ακόμη σε αρχικό στάδιο, με αποτέλεσμα την ύπαρξη αρκετών προβλημάτων. Ένα από τα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν είναι η έλλειψη ιστορικών δεδομένων, που να καλύπτουν μάλιστα περισσότερους από έναν οικονομικούς κύκλους. Επίσης, η ανάπτυξη των υποδειγμάτων γίνεται συνήθως από τρίτους και η χρήση τους έχει σοβαρές απαιτήσεις τόσο σε γνωστικό υπόβαθρο του προσωπικού όσο και σε υποδομές, με αποτέλεσμα να μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά μόνο από ένα σχετικά μικρό αριθμό τραπεζών.

Ένα άλλο πολύ σημαντικό θέμα είναι η επιλογή του χρονικού ορίζοντα για την εκτίμηση του κινδύνου καθώς μεγαλύτεροι χρονικοί ορίζοντες συνεπάγονται και μεγαλύτερες πιθανές ζημίες. Ο συχνότερα χρησιμοποιούμενος χρονικός ορίζοντας είναι το ένα έτος γιατί τα δεδομένα μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας αφορούν κυρίως αυτό το διάστημα. Ο ορίζοντας αυτός μπορεί να είναι κατάλληλος σε κάποιες περιπτώσεις, αλλά μπορεί να είναι πολύ μικρός για άλλες. Αυτό που πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη πριν την επιλογή του χρονικού ορίζοντα στον οποίο το υπόδειγμα εκτιμά τον κίνδυνο είναι αν το υπόδειγμα πρέπει να αποτυπώνει μόνο την πιθανότητα αθέτησης ή και την πιθανότητα μιας ενδιάμεσης μεταβολής της πιστοληπτικής ικανότητας.

Ο τρόπος σχεδιασμού των υποδειγμάτων και τα δεδομένα που χρησιμοποιούν θέτουν επίσης σε αμφισβήτηση την αποτελεσματικότητά τους. Τα υποδείγματα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη την έλλειψη των δεδομένων, κυρίως της αξίας των πιστοδοτήσεων σε τιμές αγοράς. Η πλειονότητα των χρησιμοποιούμενων

υποδειγμάτων αντιμετωπίζει το πρόβλημα με το να υπολογίζει προσεγγίσεις των τιμών αυτών χρησιμοποιώντας άλλου είδους πληροφόρηση σχετική με τον πιστούχο. Για παράδειγμα, άλλα χρησιμοποιούν τις ταξινομήσεις των ομολόγων ή τα εσωτερικά συστήματα διαβάθμισης των τραπεζών, ενώ άλλα χρησιμοποιούν την χρηματιστηριακή αξία των ιδίων κεφαλαίων των οφειλετών. Η ακρίβεια επομένως των αποτελεσμάτων του υποδείγματος εξαρτάται από το βαθμό στον οποίο οι προσεγγίσεις αυτές είναι ικανοποιητικές. Εμπειρικές μελέτες έχουν δείξει λόγω χάρη ότι μετοχικές αποδόσεις δεν είναι αρκετές όταν πρόκειται για τίτλους υψηλού κινδύνου και μάλιστα όταν το ενεργητικό της επιχείρησης φθίνει και πλησιάζει το σημείο αθέτησης (Zeng και Zhang, 2001 και Lopez, 2002).

Όλα τα υποδείγματα εκτίμησης πιστωτικού κινδύνου εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την ποιότητα των δεδομένων που εισάγονται σε αυτά. Έτσι είναι απαραίτητο στα υποδείγματα που βασίζονται σε αξιολογήσεις πιστοληπτικής ικανότητας, οι ταξινομήσεις να είναι ακριβείς και συνεπείς σε διάρκεια ενδείξεις της αξιοπιστίας του πιστούχου. Το σοβαρότερο πρόβλημα με τις αξιολογήσεις είναι ότι οι αξιολογικοί οίκοι παίρνουν πολύ χρόνο πριν υποβαθμίσουν τον εκδότη ενός τίτλου, του οποίου έχει χειροτερεύσει η πιστοληπτική ικανότητα. Αν και αυτό το χαρακτηριστικό των αξιολογήσεων είναι ευρέως γνωστό, το μέγεθος των καθυστερήσεων (μέχρι και 18 μήνες σε ορισμένες περιπτώσεις) περιορίζει σαφώς τη χρησιμότητά τους ως δεδομένο των υποδειγμάτων. Ένας άλλος περιορισμός είναι η χρήση μόνο ιστορικών μέσων όρων για τη δημιουργία των πινάκων μετάβασης. Πιστεύεται ότι ο διαχωρισμός των πιστούχων ανάλογα με τη χώρα και τον κλάδο δραστηριοποίησης και η ενσωμάτωση των επιπτώσεων του οικονομικού κύκλου θα ήταν καταλληλότερη προσέγγιση του θέματος. Τέλος, επειδή οι αξιολογήσεις αφορούν ομολογίες των πιστούχων χωρίς εξασφάλιση, αμφισβητείται κατά πόσο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διαβάθμιση του κινδύνου άλλης μορφής πιστοδοτήσεων.

Τέλος χρειάζεται να καταβληθεί περισσότερη προσπάθεια για τη συνολική εκτίμηση του κινδύνου μέσα στην επιχείρηση. Στα πλαίσια αυτά πρέπει τα υποδείγματα να προβλέπουν ενσωμάτωση του λειτουργικού κινδύνου καθώς και των συσχετίσεων του πιστωτικού, του αγοραίου και του λειτουργικού κινδύνου. Πρέπει επίσης να μπορούν να καλύψουν με ομοιόμορφο τρόπο το σύνολο του χαρτοφυλακίου του πιστωτικού ιδρύματος, σε αντίθεση με την τρέχουσα πραγματικότητα όπου χρησιμοποιούνται διαφορετικά υποδείγματα για την διαχείριση

του πιστωτικού κινδύνου από μεγάλες εταιρικές πιστοδοτήσεις και διαφορετικά για τις πιστοδοτήσεις λιανικής τραπεζικής πχ. καταναλωτικά δάνεια.

Παρ' όλες τις ατέλειές τους τα παραπάνω υποδείγματα είναι ένα ισχυρό εργαλείο για τη διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου. Παρέχουν σημαντική βοήθεια τόσο στις διοικήσεις των τραπεζών όσο και στους ελεγκτικούς φορείς, ώστε να κατανοήσουν τη φύση του αναλαμβανόμενου κινδύνου.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Basle Committee on Banking Supervision, 1999. Credit risk modeling: current practices and applications.
- Bohn, J. R., 2000. A Survey of Contingent-Claims Approaches to Risky Debt Valuation. *The Journal of Risk Finance* 1, 53-71
- Black, F., Scholes, M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy* 81, 637-654.
- Credit Suisse First Boston, 1997. CreditRisk⁺: A credit risk management framework. London, Credit Suisse Financial Products
- Crosbie, P. J., Bohn, J. R., 2002. Modeling Default Risk. San Francisco, KMV, LLC
- Crouhy, M., Galai, D., Mark, R., 2000. A comparative analysis of credit risk models. *Journal of Banking and Finance* 24, 59-117.
- Dowd, K., 1998. Beyond Value at risk: the new science of risk management. Chichester, John Wiley and Sons.
- Duffie, D., Singleton, K. J., 1999. Modeling term structures of defaultable bonds. *Review of Financial Studies* 12, 687-720.
- Giesecke, K., 2002. Credit risk modeling and valuation: an introduction. Working paper No 2002/54. Berlin, Humboldt- Universität zu Berlin.
- Gupton, G.M., Finger, C.C., Bhatia, M., 1997. CreditMetrics: Technical Document. New York, J.P. Morgan.
- Jackson, P., Nickell, P., Perraudin, W., 1999. Credit risk modeling. *Financial stability review*, June, 94-121. London, Bank of England.
- Jackson, P., Perraudin, W., 1999. The nature of credit risk: the effect of maturity, type of obligor, and country of domicile. *Financial stability review*, November, 122-150. London, Bank of England.
- Jarrow, R. A., Lando, D., Turnbull, S. M., 1997. A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of financial studies* 10, 481-523.
- Jarrow, R. A., Turnbull, S.M., 1995. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *Journal of Finance* 50, 53-85.
- Jorion, P., 2001. Value at risk: the new benchmark for managing financial risk, 2nd ed. New York, McGraw-Hill.
- Kern, M., Rudolph, B., 2001. Comparative analysis of alternative credit risk models – an application on German middle market loan portfolios. Working paper No 2001/03. Frankfurt am Main, Johann Wolfgang Goethe-Universität.
- Lopez, J., A., 2002. The empirical relationship between average asset correlation, firm probability of default and asset size. Working paper No 2002/05. San Francisco, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Merton, R. C., 1973. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.

- Merton, R. C., 1974. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance* 29, 449-470.
- Nickell, P., Perraudin, W., Varotto, S., 2001. Ratings versus equity-based credit risk modeling: an empirical analysis. Working paper No 132. Bank of England, London.
- Sundaram, R. K., 2001. The Merton/KMV approach to pricing credit risk. *Extra credit*, January / February
- Wilson, T., C., 1997a. Portfolio credit risk (I). *Risk* 10, 111-117
- Wilson, T., C., 1997b. Portfolio credit risk (II). *Risk* 10, 56-61
- Zeng, B., Zhang, J., 2001. Measuring credit correlations: equity correlations are not enough! San Francisco, KMV, LLC