

Bakalářská práce

Řetězové zlomky – historie, vlastnosti, možnosti použití

Studijní program:

B0541A170015 Matematika

Autor práce:

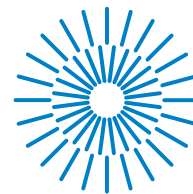
Michal Antoš

Vedoucí práce:

Mgr. Roman Knobloch, Ph.D.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Liberec 2023



Zadání bakalářské práce

Řetězové zlomky – historie, vlastnosti, možnosti použití

Jméno a příjmení:

Michal Antoš

Osobní číslo:

P20000723

Studijní program:

B0541A170015 Matematika

Zadávající katedra:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Akademický rok:

2021/2022

Zásady pro vypracování:

Bakalářská práce je zaměřena na téma řetězových zlomků a jeho vztahu k současné matematice. V první části práce student zavede potřebné pojmy a označení a stručně se zaměří na historii řetězových zlomků.

Práce se bude soustředit na použití řetězových zlomků k nalezení nejlepších aproximací reálných čísel, otázky konvergence a teoretické a praktické použití řetězových zlomků při přibližných výpočtech.

Dále se bude věnovat vztahu řetězových zlomků k jiným pojmům a dalším oblastem matematiky, např. souvislost s Euklidovým algoritmem, vztah ryze periodických řetězových zlomků a kvadratických iracionalit (Lagrangeova věta), atd.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování práce:

elektronická

Jazyk práce:

Čeština

Seznam odborné literatury:

G. H. Hardy, E. M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press, 2005

D. M. Burton: Elementary Number Theory, McGraw Hill, 2002

D. Shanks: Solved and Unsolved Problems in Number Theory, Chelsea Publishing Company, 1985

Vedoucí práce:

Mgr. Roman Knobloch, Ph.D.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání práce:

1. září 2022

Předpokládaný termín odevzdání: 26. dubna 2023

L.S.

Mgr. Roman Knobloch, Ph.D.
vedoucí bakalářské práce

doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 9. září 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Jsem si vědom toho, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má bakalářská práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědom následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

ANOTACE

Bakalářská práce se zabývá řetězovými zlomky. Dělí se na tři hlavní části. První z nich je historie, poté úvod do teorie, kde se čtenář seznámí s vlastnostmi řetězových zlomků. Další část se zabývá využitím z hlediska aproximací, řešení algebraických a diofantických rovnic a tím, jak byly řetězové zlomky využity k navržení gregoriánského kalendáře a jak by bylo možné kalendář případně ještě zpřesnit.

Klíčová slova:

řetězový zlomek, sblížený zlomek, vsunutý zlomek, aproximace, algebraická rovnice, diofantická rovnice, výpočet logaritmu, gregoriánský kalendář

ANNOTATION

The bachelor thesis deals with continued fractions. It is divided into three main parts. The first part describes in brief the history of the topic. Then an introduction to the theory follows, where the reader gets familiar to the properties of continued fractions. The next part discusses the uses in terms of approximations, solving algebraic and Diophantine equations, and how continued fractions were used to design the Gregorian calendar and how the calendar could possibly be made more accurate.

Keywords:

continued fraction, convergent, intermediate fraction, approximation, algebraic equation, Diophantine equation, calculation of logarithm, Gregorian calendar

PODĚKOVÁNÍ

Chtěl bych zde poděkovat vedoucímu bakalářské práce Mgr. Romanu Knoblochovi, Ph.D. za jeho čas, rady a připomínky, které mi poskytoval při tvorbě této práce.

OBSAH

Anotace	1
Annotation	2
Seznam obrázků	6
Seznam tabulek	7
Použité značení a zkratky	8
Úvod	9
1 Historie	11
2 Zavedení řetězového zlomku	15
3 Eukleidův algoritmus	17
4 Jednoznačnost	19
5 Sblížené zlomky	21
6 Iracionální čísla	28
7 Aproximace Ludolfova čísla	31
8 Vsunuté zlomky	33
9 Transcendentní čísla	37
10 Výpočet logaritmu	40
11 Navrhování kalendáře	42
12 Diofantické rovnice	45
13 Řešení algebraických rovnic	50

Závěr	53
Reference	55

SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Znázornění ozubených kol Huygensova planetária	13
5.1	Přibližování sbližovaných zlomků k číslu α	26
8.1	Znázornění konstrukce vsunutých zlomků	34

SEZNAM TABULEK

5.1	Schéma pro výpočet sblížených zlomků	23
5.2	Sblížené zlomky $[2, 1, 5]$	24
5.3	Sblížené zlomky $[1, 1, 1, 1, 1]$	24
10.1	Sblížené zlomky $\ln 3$	41

POUŽITÉ ZNAČENÍ A ZKRATKY

Značení	Význam
$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$	prvky řetězového zlomku
$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$	konečný řetězový zlomek
$[a_0, a_1, a_2, \dots]$	nekonečný řetězový zlomek
$[a_0, \overline{a_1, a_2}]$	periodický nekonečný řetězový zlomek
α	přesná hodnota řetězového zlomku
c_i	i -tý sblížený zlomek
p_i	i -tý čitatel sblíženého zlomku
q_i	i -tý jmenovatel sblíženého zlomku
$[x]$	celá část reálného čísla x
$\gcd(a, b)$	největší společný dělitel čísel a a b
m_k	k -tá medianta u vsunutých zlomků
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{I}$	množina iracionálních čísel

ÚVOD

Téma mojí bakalářské práce je Řetězové zlomky - historie, vlastnosti, možnosti použití. Práce shrnuje základy z teorie řetězových zlomků. Poté se zaměříme na historii řetězových zlomků, kde jsou popsány některé z důležitých rysů. Věnuje se v ní poté i prostor využití řetězových zlomků. Ty mají různé aplikace díky svým dobrým aproximačním vlastnostem. To však není jediná jejich aplikace. Lze například hledat kořeny algebraických rovnic pomocí řetězových zlomků.

První kapitola se věnuje historii, kde se mluví o výskytech řetězových zlomků v průběhu historie (konkrétní výpočty) a následně o vybudování teorie. Jsou zde kromě historických událostí uvedena i některá konkrétní využití.

Další tři kapitoly jsou zaměřené na zavedení řetězového zlomku a jeho konstrukci. V kapitole 2 si představíme, co je řetězový zlomek a s jakým typem řetězových zlomků budeme pracovat. Poté se v kapitole 3 zabýváme převodem racionálního čísla na řetězový zlomek. K tomu se používá Eukleidův algoritmus. To je jeden z nejstarších známých algoritmů. Slouží ke zjišťování největšího společného dělitele dvou čísel. Jednoduchou transformací se dá převést na algoritmus pro převádění racionálních čísel na řetězový zlomek. Kapitola 4 pojednává o jednoznačnosti řetězových zlomků. Ukáže se, že jsou převážně jednoznačné a že za určitých okolností se hodí jednoznačnost narušit.

Kapitola 5 se věnuje tématu nezbytnému pro zjišťování aproximací pomocí řetězových zlomků. Jedná se o sblížené zlomky. K těm se navíc váže řada vět o jejich vlastnostech.

V kapitole 6 se budeme zabývat iracionálními čísly. Ty chceme aproximovat a budeme to provádět právě pomocí sblížených zlomků. Kapitola 7 se zaměří na matematickou konstantu π . Představíme si ji a budeme hledat vhodné aproximace.

Kapitola 8 se zaměřuje na alternativní výpočet sblížených zlomků pomocí vsunutých zlomků. To je posloupnost zlomků sestavená pomocí medianty dvou zlomků.

Dostaneme se také k hlubšímu tématu týkajícímu se iracionálních čísel. Budeme se totiž bavit o transcendentních číslech. V kapitole 9 jsou představeny spolu s tím, jakou mají souvislost s řetězovými zlomky.

Následující kapitoly se týkají využití řetězových zlomků. V kapitole 10 je představen způsob, jak lze řešit logaritmy pomocí řetězových zlomků. Jsou zde ukázány výhody této metody a jeden konkrétní příklad.

V kapitole 11 se podrobně zabýváme možnostmi navrhování kalendáře pomocí řetězových zlomků. Rozebírá se zde, jak byl navržený gregoriánský kalendář a jak by bylo možné vytvořit přesnější kalendář.

Kapitola 12 se věnuje výpočtu diofantických rovnic pomocí řetězových zlomků. Jedná se o rovnice s celočíselnými koeficienty a u těchto rovnic hledáme celočíselná řešení. Odvodíme si tu metodu a předvedeme její použití na příkladu.

Poté se v kapitole 13 zabýváme tím, jak lze hledat kořeny algebraických rovnic pomocí řetězových zlomků.

Téma řetězových zlomků je zajímavé nejen z hlediska historických souvislostí, ale má značný potenciál i v současnosti vzhledem k aproximačním vlastnostem řetězových zlomků. Rovněž jde o téma, které lze využít při rozšířeném vyučování matematiky na střední škole.

1 HISTORIE

Tato kapitola se zaměřuje na bohatou historii řetězových zlomků. Povíme si o prvních použitích řetězových zlomků, o vytvoření teorie řetězových zlomků, jakou dnes známe, a o konkrétních praktických aplikacích. Budeme vycházet z [1], [2], [3] a [4].

Za posledních 2000 let můžeme zaznamenat spoustu výskytů řetězových zlomků, ale teoretický výzkum těchto zlomků započal až někdy ke konci 17. století. Za úplný počátek vzniku řetězových zlomků se často považuje objevení Eukleidova algoritmu. To je algoritmus pro zjišťování největšího společného dělitele dvou čísel. Jedná se o jeden z nejstarších algoritmů. Je pojmenovaný po starověkém matematikovi Eukleidovi, který jej uvedl ve svém díle Základy (cca 300 př. n. l.). Eukleidův algoritmus je považován za počátek řetězových zlomků, jelikož se z tohoto algoritmu dá jednoduše odvodit postup pro převedení racionálního čísla na řetězový zlomek.

V řeckých a arabských matematických spisech se příklady použití řetězových zlomků vyskytovaly často. Vždy se však jednalo pouze o konkrétní výpočty. Za zmínku stojí dva italští matematici z 16. století. Jsou to Rafael Bombelli a Pietro Cataldi. Ti totiž vyjádřili řetězové zlomky dvou iracionálních čísel. Bombelli vyjádřil $\sqrt{13}$ jako periodický řetězový zlomek a Cataldi provedl to samé pro $\sqrt{18}$. Kromě těchto příkladů, nikdo nezkoumal vlastnosti řetězových zlomků z teoretického hlediska.

Anglický matematik John Wallis uvedl vyjádření π v knize Arithmetica Infinitorum (1655) ve tvaru:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \dots}.$$

Matematik William Brouncker toto vyjádření převedl na řetězový zlomek:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{\ddots}}}}}$$

William Brouncker se poté už řetězovými zlomky dále nezabýval. John Wallis se toho chopil a zahájil první kroky ke vzniku teorie řetězových zlomků. Tu představil v díle *Opera Mathematica* (1695), kde popsal sbližené zlomky a některé jejich vlastnosti. Jedná se o dílo, v němž poprvé zazněl pojem řetězový zlomek.

Do teorie řetězových zlomků pak značně přispěli i Leonhard Euler, Johann Heinrich Lambert a Joseph-Louis Lagrange. Euler zjistil, že každé racionální číslo lze vyjádřit jako jednoduchý konečný řetězový zlomek. Navíc ještě objevil vyjádření Eulerova čísla e ve tvaru řetězového zlomku.

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

Použil toto vyjádření k tomu, aby dokázal, že e a e^2 jsou iracionální. Lambert využil Eulerovo vyjádření e k dokázání toho, že e^x a $\tan x$ jsou iracionální, pokud je x racionální. Lagrange objevil, jak pomocí řetězových zlomků najít hodnotu iracionálních kořenů a navíc dokázal i to, že kvadratické iracionality jsou vždy periodické řetězové zlomky.

Huygensovo planetárium

Christiaan Huygens byl významný nizozemský fyzik, matematik a astronom. Využil řetězové zlomky při návrhu jeho planetária. To obsahuje planety Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter a Saturn. Planetárium sloužilo k demonstraci pohybu planet. Huygens využil řetězové zlomky k tomu, aby určil počet zubů pro ozubená kola. Vycházel z toho, že oběžná doba Saturnu kolem

Slunce v rocích je přibližně

$$\frac{77708431}{2640858} \approx 29.425448. \quad (1.1)$$

Potřeboval vyjádřit aproximaci tohoto poměru s malým čitatelem a jmenovatelem. Tyto hodnoty by poté byly počty zubů. Navíc bylo třeba, aby tento poměr byl stále dost blízko k hodnotě (1.1).

Provedl to tak, že zlomek (1.1) převedl na řetězový zlomek:

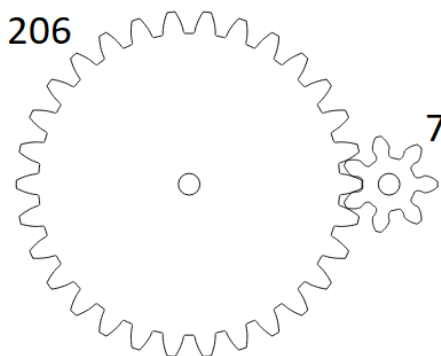
$$\frac{77708431}{2640858} = 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

Poté vypočítal sblížené zlomky. To jsou aproximace řetězového zlomku, kterým je v této práci věnována celá kapitola. Sblížené zlomky vycházejí:

$$c_0 = 29, \quad c_1 = \frac{59}{2}, \quad c_2 = \frac{147}{5}, \quad c_3 = \frac{206}{7}, \quad c_4 = \frac{1177}{40}, \quad \dots$$

Z těchto sblížených zlomků se jako nejlepší možnost jevílo $\frac{206}{7}$. Takže použil ozubená kola s 206 a 7 zuby. To je přijatelný počet zubů s dostatečně přesným poměrem. Znázorníme si ta ozubená kola obrázkem vygenerovaným z [5].

$$\frac{206}{7} \approx 29,428571$$



Obrázek 1.1: Znázornění ozubených kol Huygensova planetária

Kalendář

Řetězové zlomky byly využity i při navrhování gregoriánského kalendáře, který zpřesnil juliánský kalendář. Můžeme se dokonce dopočítat přesnějších kalendářů, než je gregoriánský. Toto téma bude důkladně probráno v samostatné kapitole.

Význam řetězových zlomků jako nástroje aproximace čísel poklesl s rozvojem výpočetní techniky. Kalkulačky a počítače velmi usnadnili numerické výpočty. Proto se řetězové zlomky už většinou neobjevují v učebních osnovách.

2 ZAVEDENÍ ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU

V této kapitole si zavedeme pojem řetězového zlomku. Ukážeme si, jakými řetězovými zlomky se budeme zabývat a jaké budeme používat značení. Toto zavedení vychází z [6] a [7].

Řetězový zlomek je výraz ve tvaru

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{\ddots + \frac{b_n}{a_n}}}},$$

kde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ a $a_n \neq 0$.

Zde se však budeme zabývat hlavně řetězovými zlomky, u kterých $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n = 1$ s podmínkami: $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ a $a_n \neq 0$. Těmto řetězovým zlomkům se říká jednoduché řetězové zlomky. Jsou to tedy řetězové zlomky ve tvaru

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Budeme je značit $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$. Číslům $a_0, a_1, \dots, a_n$ budeme říkat prvky řetězového zlomku.

Řetězové zlomky s konečným počtem prvků budeme nazývat konečné řetězové zlomky a řetězové zlomky s nekonečným počtem prvků budou nekonečné řetězové zlomky.

Každý konečný řetězový zlomek lze převést do tvaru racionálního čísla

$\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) postupným sčítáním od nejnižšího jmenovatele. Například u $[a_0, a_1, a_2]$ by se výpočet provedl takto:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}.$$

Nyní si to ukážeme na konkrétním příkladu. Stačí jen postupně sčítat zlomky.

Příklad 1. Vypočtete hodnotu řetězového zlomku $[5, 2, 3]$.

$$[5, 2, 3] = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = 5 + \frac{1}{\frac{6}{3} + \frac{1}{3}} = 5 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 5 + \frac{3}{7} = \frac{35}{7} + \frac{3}{7} = \frac{38}{7}$$

Zkusíme si spočítat ještě jeden příklad. Tentokrát se bude jednat o záporný řetězový zlomek, který se vytváří tak, že první prvek bude záporný. Postup výpočtu je pak totožný jako pro kladné řetězové zlomky.

Příklad 2. Vypočtete hodnotu řetězového zlomku $[-6, 1, 1, 3]$.

$$[-6, 1, 1, 3] = -6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = -6 + \frac{4}{7} = -\frac{42}{7} + \frac{4}{7} = -\frac{38}{7}$$

3 EUKLEIDŮV ALGORITMUS

V této kapitole si ukážeme, jak převést racionální číslo na řetězový zlomek. Převod budeme provádět pomocí Eukleidova algoritmu, což je algoritmus pro určení největšího společného dělitele. Ukážeme si postup výpočtu a poté si spočítáme příklad. Budeme vycházet z [9], ale použijeme zápis ve zlomkovém tvaru, který je lépe pochopitelný a více intuitivní.

Věta 1. *Každé racionální číslo lze vyjádřit jako konečný řetězový zlomek a každý konečný řetězový zlomek vyjadřuje nějaké racionální číslo.*

Důkaz. Necht' $\frac{p}{q}$ ($q > 0$) je racionální číslo. Použijeme Eukleidův algoritmus, tedy určíme největší celou část daného čísla a zbytek. Například pro $\frac{5}{2}$ by se to provedlo takto: $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$. To budeme opakovat, dokud nebude zbytek roven nule.

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} \\ \frac{q}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \\ \frac{r_1}{r_2} &= a_2 + \frac{r_3}{r_2} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}} \\ &\vdots \\ \frac{r_{n-1}}{r_n} &= a_n\end{aligned}$$

A nyní postupně dosadíme.

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_2}}$$

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}$$

$\vdots$

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Tímto je důkaz první části věty dokončen.

Důkaz toho, že každý konečný řetězový zlomek lze vyjádřit jako racionální číslo, je triviální. S použitím operací sčítání a dělení získáme vždy z konečného řetězce racionální číslo (viz předchozí kapitola).

Právě jsme si vysvětlili, jak převést racionální číslo na řetězový zlomek pomocí Eukleidova algoritmu a nyní si to zkusíme na nějakém příkladu.

Příklad 3. Převeďte $\frac{37}{13}$ na řetězový zlomek.

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{11}{13} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{11}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{11}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}} = [2, 1, 5, 2]$$

Ve větě 1 jsme si ukázali, že každé racionální číslo vyjadřuje konečný řetězový zlomek a naopak. Z toho bychom mohli usoudit, že každý nekonečný řetězový zlomek vyjadřuje iracionální číslo. Později si ukážeme, že to je skutečně pravda.

4 JEDNOZNAČNOST

V této kapitole se podíváme na to, zda jsou řetězové zlomky jednoznačné. Ukážeme si, že jednoznačné nejsou, ale pro práci s řetězovými zlomky ji vyžadujeme. Při konstrukci řetězových zlomků pomocí Eukleidova algoritmu platí jednoznačnost. Někdy se nám však bude hodit ji narušit. Vyjdeme z [9], kde se tvrdí, že při reprezentaci racionálního čísla konečným řetězovým zlomkem, není zachována jednoznačnost.

Pro $a_n > 1$ platí, že

$$a_n = (a_n - 1) + 1 = (a_n - 1) + \frac{1}{1}$$

pro všechny konečné řetězce, kde $a_n - 1$ je kladné celé číslo. Takže platí:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1].$$

Naopak pokud $a_n = 1$, tak pak

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + \frac{1}{1} = a_{n-1} + 1.$$

Tedy platí:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1].$$

Podle toho co jsem zde právě uvedl, tak si nyní spočítáme příklad. Budeme převádět řetězové zlomky $[2, 3, 4]$ a $[2, 3, 3, 1]$ na zlomky. Vidíme, že mají odlišné prvky, dle výše uvedeného ale vyjadřují totéž racionální číslo.

Příklad 4. Převeďte $[2, 3, 4]$ a $[2, 3, 3, 1]$ na řetězové zlomky.

$$[2, 3, 4] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{4}} = 2 + \frac{4}{13} = \frac{30}{13}$$

$$[2, 3, 3, 1] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} = \frac{30}{13}$$

Z toho plyne rovnost:

$$[2, 3, 4] = [2, 3, 3, 1].$$

Tím je jednoznačnost narušena.

To, co jsme si v této kapitole ukázali, je vlastně celkem zřejmé. Pouze se jedná o to, že můžeme zvýšit počet prvků řetězového zlomku o jeden prvek tím, že od posledního prvku odečtemu jedničku a přidáme další prvek, který bude roven jedné. To je užitečná vlastnost, kterou můžeme využít například u některých důkazů, protože tímto způsobem můžeme změnit paritu počtu prvků řetězového zlomku.

Řetězové zlomky tedy obecně nejsou jednoznačné, ale při výpočtu řetězových zlomků pomocí Eukleidova algoritmu, nám nemůže vyjít jednička jako poslední prvek. To je jasné, protože bychom museli chybně zapsat výsledek rozkladu zlomku na celou část a zbytek (např. $\frac{6}{2} = 2 + \frac{2}{2} = 2 + \frac{1}{1}$). Správně bychom napsali $\frac{6}{2} = 3$. Pro racionální čísla Eukleidův algoritmus poskytuje jednoznačné vyjádření čísla ve tvaru řetězového zlomku.

5 SBLÍŽENÉ ZLOMKY

V této kapitole si zavedeme pojem sblížený zlomek. Ten bude následně podstatný pro aproximace iracionálních čísel. Odvodíme vzorec pro snazší výpočet sblížených zlomků a spočítáme si příklady. Se sblíženými zlomky navíc přichází i řada zajímavých vět, které si v této kapitole také ukážeme. Ty budou podstatné v nadcházejících kapitolách. Při zavedení sblížených zlomků budeme vycházet z [6] a poté si ukážeme pár vět a lemma, které budeme čerpat z [9].

Sblíženými zlomky c_i řetězového zlomku $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ rozumíme zlomky $\frac{p_i}{q_i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$), které vytvoříme takto:

$$c_0 = \frac{a_0}{1}, \quad c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad c_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad \dots, \quad c_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Nazýváme je nultý sblížený zlomek, první sblížený zlomek, druhý sblížený zlomek, ..., n -tý sblížený zlomek. Poslední je roven hodnotě daného řetězového zlomku $[a_0, a_1, \dots, a_n]$. Výpočtem sblížených zlomků s vyšším indexem, než byl předchozí, se přibližujeme k přesné hodnotě řetězového zlomku.

výpočet:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0} \\ c_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1} \\ c_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_2 a_1 + 1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_0 + a_2}{a_2 a_1 + 1} = \frac{p_2}{q_2} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Tento výpočet není příliš praktický a sblížené zlomky $c_3, c_4, \dots, c_n$ by už byly

náročné na spočítání. Proto si odvodíme vhodnější rekurentní vzorce.

Věta 2. Pro čitatele p_i a jmenovatele q_i sblíženého zlomku c_i pro řetězový zlomek $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ platí pro $i = 2, 3, 4, \dots, n$ vzorce

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}, \quad (5.2)$$

$$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \quad (5.3)$$

a pro $i = 0, 1$ podle vztahů (5.1) platí

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & q_0 &= 1, \\ p_1 &= a_1 a_0 + 1, & q_1 &= a_1. \end{aligned}$$

Důkaz. Vztahy (5.2) a (5.3) budeme dokazovat matematickou indukcí.

$$c_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$$

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}$$

$$c_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1}$$

Předpokládejme, že věta platí pro n .

$$c_n = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Pak dokážeme, že platí pro $n + 1$.

$$c_{n+1} = [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

Použijeme vlastnost, že část řetězového zlomku s posledními dvěma prvky, zapíšeme jako jeden prvek.

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}]$$

Poté dosadíme do (5.2) a (5.3):

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}] = \frac{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})q_{n-1} + q_{n-2}} = \\ &= \frac{(a_n a_{n+1} + 1)p_{n-1} + p_{n-2}a_{n+1}}{(a_n a_{n+1} + 1)q_{n-1} + q_{n-2}a_{n+1}} = \frac{a_n a_{n+1} p_{n-1} + p_{n-1} + p_{n-2} a_{n+1}}{a_n a_{n+1} q_{n-1} + q_{n-1} + q_{n-2} a_{n+1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

Dokázali jsme tedy vztahy (5.2) a (5.3).

Zbývají nám však pro $i = 0, 1$ nedefinované výrazy $p_{-1}, p_{-2}, q_{-1}, q_{-2}$. Hodnoty těchto výrazů lze vhodně dodefinovat jako

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, & q_{-1} &= 0, \\ p_{-2} &= 0, & q_{-2} &= 1. \end{aligned}$$

Ty vyplývají z toho, že jsme si už spočítali v (5.1) sblížené zlomky c_0 a c_1 a pokud dosadíme do (5.2) a (5.3), vyjde nám, že to platí.

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0 p_{-1} + p_{-2}}{a_0 q_{-1} + q_{-2}} = \frac{a_0 \cdot 1 + 0}{a_0 \cdot 0 + 1} = \frac{a_0}{1} \\ c_1 &= \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1 \cdot 1 + 0} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} \end{aligned}$$

Poznámka. $\frac{p_{-1}}{q_{-1}}$ a $\frac{p_{-2}}{q_{-2}}$ nejsou sblížené zlomky. Pouze to využíváme při výpočtu sblížených zlomků.

Pro usnadnění výpočtu sblížených zlomků je vhodné použít nějaký schématický postup. K tomu se využívá zápis do následující tabulky.

i	-2	-1	0	1	$\dots$	$k-2$	$k-1$	k	$\dots$	n
a_i								a_k		
p_i	0	1				p_{k-2}	p_{k-1}	$a_k p_{k-1} + p_{k-2}$		
q_i	1	0				q_{k-2}	q_{k-1}	$a_k q_{k-1} + q_{k-2}$		

Tabulka 5.1: Schéma pro výpočet sblížených zlomků

Příklad 5. Vypočítejte sblížené zlomky c_0, c_1, c_2 řetězového zlomku $[2, 1, 5]$.

$$p_0 = a_0 = 2, \quad q_0 = 1$$

$$p_1 = a_1 a_0 + 1 = 1 \cdot 2 + 1 = 3 \quad q_1 = a_1 = 1$$

$$p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 5 \cdot 3 + 2 = 17 \quad q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 5 \cdot 1 + 1 = 6$$

$$c_0 = \frac{2}{1} = 2, \quad c_1 = \frac{3}{1} = 3, \quad c_2 = \frac{17}{6}$$

Pomocí tabulky by se to provedlo takto:

i	-2	-1	0	1	2
a_i			2	1	5
p_i	0	1	2	3	17
q_i	1	0	1	1	6

Tabulka 5.2: Sblížené zlomky $[2, 1, 5]$

Příklad 6. Vypočítejte sblížené zlomky c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 řetězového zlomku $[1, 1, 1, 1, 1]$.

i	-2	-1	0	1	2	3	4
a_i			1	1	1	1	1
p_i	0	1	1	2	3	5	8
q_i	1	0	1	1	2	3	5

Tabulka 5.3: Sblížené zlomky $[1, 1, 1, 1, 1]$

U příkladu 6 si můžeme všimnout jedné zajímavosti. Čitatele i jmenovatele tvoří Fibonacciho posloupnost. To je posloupnost, ve které je každý prvek počínaje třetím roven součtu předchozích dvou prvků $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$.

Nyní si ukážeme tři věty a jedno lemma uvedené v [9] týkající se sblížených zlomků.

Věta 3. Necht' $c_k = \frac{p_k}{q_k}$ je k -tým sblíženým zlomkem konečného řetězového zlomku $[a_0, a_1, \dots, a_n]$. Pak platí vztah

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1} \quad 1 \leq k \leq n. \quad (5.4)$$

Důkaz. Budeme dokazovat matematickou indukci.

Ukážeme, že vztah platí pro $k = 1$.

$$p_1 q_0 - q_1 p_0 = (a_1 a_0 + 1) \cdot 1 - a_1 a_0 = (-1)^{1-1}$$

Nyní budeme předpokládat, že vztah platí pro k a dokážeme, že platí pro $k+1$ s použitím vztahů (5.2) a (5.3).

$$\begin{aligned} p_{k+1} q_k - q_{k+1} p_k &= (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) p_k = \\ &= -(p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}) = -(-1)^{k-1} = (-1)^k \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána pro všechna k ($1 \leq k \leq n$).

Důsledek 3.1. Věta 3 poskytuje užitečný odhad pro vzdálenost mezi dvěma po sobě jdoucími sblíženými zlomky. To je vidět, pokud rovnost (5.4) podělíme $q_k q_{k-1}$. Po vydělení dostaneme

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}.$$

V následující větě si ukážeme, jak vypadá řetězový zlomek čitatele (jmenovatele) sblíženého zlomku poděleného čitatelem (jmenovatelem) předchozího sblíženého zlomku.

Věta 4. Pro čitatele a jmenovatele sblížených zlomků platí:

$$\begin{aligned}\frac{p_k}{p_{k-1}} &= [a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0], \\ \frac{q_k}{q_{k-1}} &= [a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1].\end{aligned}$$

Důkaz. Pokud $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ podělíme p_{k-1} , vyjde nám

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a_k + \frac{p_{k-2}}{p_{k-1}} = a_k + \frac{1}{\frac{p_{k-1}}{p_{k-2}}}.$$

To samé provedeme pro $p_{k-1} = a_{k-1} p_{k-2} + p_{k-3}$.

$$\frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} = a_{k-1} + \frac{p_{k-3}}{p_{k-2}} = a_{k-1} + \frac{1}{\frac{p_{k-2}}{p_{k-3}}}$$

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a_k + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{a_{k-3}}{a_{k-2}}}$$

To budeme opakovat, dokud nám nevyjde $\frac{p_k}{p_{k-1}} = [a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0]$.

Pro q_k se to dokáže obdobně.

Za chvíli si ukážeme větu o tom, jak se chovají sudé a liché sblížené zlomky, ale nejdříve je potřeba zmínit lemma o tom, že jmenovatelé sblížených zlomků tvoří rostoucí posloupnost.

Lemma 1. Pokud $c_k = \frac{p_k}{q_k}$ je k -tým sblíženým zlomkem řetězového zlomku $[a_0, a_1, \dots, a_n]$, pak pro k -tý jmenovatel q_k platí, že $q_{k-1} \leq q_k$ pro $1 \leq k \leq n$.

Důkaz. Dokážeme matematickou indukcí. Pro $k = 1$ nerovnost platí.

$$q_0 = 1 \leq a_1 = q_1$$

Nyní budeme předpokládat, že platí pro k a dokážeme, že platí pro $k + 1$.

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} \geq a_{k+1}q_k \geq q_k$$

Tím je lemma dokázáno.

Růst jmenovatelů sblížených zlomků je zřejmý, jelikož to přímo vyplývá z rekurentního vzorce. Totéž tedy platí i pro čitatele.

Nyní si ukážeme velmi důležitou větu, kterou budeme často využívat v příštích kapitolách. Je to věta o tom, že všechny sudé sblížené zlomky tvoří rostoucí posloupnost a všechny liché tvoří klesající posloupnost. Při tom navíc platí, že všechny sudé sblížené zlomky jsou menší než přesná hodnota řetězového zlomku a všechny liché jsou větší.

Věta 5. Chování sudých a lichých sblížených zlomků:

(a) Sblížené zlomky se sudým indexem tvoří rostoucí posloupnost.

$$c_0 < c_2 < c_4 < \dots$$

(b) Sblížené zlomky s lichým indexem tvoří klesající posloupnost.

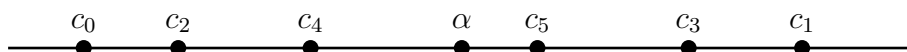
$$c_1 > c_3 > c_5 > \dots$$

(c) Každý sblížený zlomek s lichým indexem je větší než jakýkoli sblížený zlomek se sudým indexem.

$$c_0 < c_2 < c_4 < \dots < \alpha < \dots < c_5 < c_3 < c_1$$

α je přesná hodnota řetězového zlomku ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Tuto větu si můžeme dobře znázornit obrázkem.



Obrázek 5.1: Přibližování sblížených zlomků k číslu α

Důkaz. Použijeme větu 3.

$$\begin{aligned} c_{k+2} - c_k &= (c_{k+2} - c_{k+1}) + (c_{k+1} - c_k) = \left(\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right) + \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right) = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k+2}q_{k+1}} + \frac{(-1)^k}{q_{k+1}q_k} = \frac{(-1)^k(q_{k+2} - q_k)}{q_k q_{k+1} q_{k+2}} \end{aligned}$$

Platí, že $q_i > 0$ pro všechna $i \geq 0$ a z lemmatu 1 víme, že $q_{k+2} - q_k > 0$. Z toho vyplývá, že rozdíl $q_{k+2} - q_k > 0$ bude mít stejné znaménko jako $(-1)^k$.

(a) Pokud k je sudé číslo $k = 2m$, tak platí $c_{2m+2} > c_{2m}$. Což tedy znamená, že

$$c_0 < c_2 < c_4 < \dots$$

(b) Pokud k je liché číslo $k = 2m - 1$, tak platí $c_{2m+1} < c_{2m-1}$. To znamená, že

$$c_1 > c_3 > c_5 > \dots$$

(c) Zbývá dokázat, že každý lichý sblížený zlomek c_{2j-1} je větší než jakýkoli sudý c_{2j} . Rovnici $p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}$ z věty 3 podělíme $q_k q_{k-1}$. Potom platí

$$c_k - c_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}.$$

To znamená, že $c_{2m} < c_{2m-1}$ a tím je (c) dokázané.

6 IRACIONÁLNÍ ČÍSLA

V této kapitole se budeme zabývat nekonečnými řetězovými zlomky. Ukážeme si, že iracionální číslo lze reprezentovat nekonečným řetězovým zlomkem a jak pomocí sblížených zlomků aproximovat iracionální čísla. Nejprve si nekonečné řetězové zlomky představíme na příkladu. Poté si ukážeme postup výpočtu prvků nekonečného řetězového zlomku. Budeme vycházet z [6] a [8].

Nekonečný řetězový zlomek je řetězový zlomek, který má nekonečno prvků. Je to tedy výraz ve tvaru $[a_0, a_1, a_2, \dots]$, který má hodnotu $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$. Na začátek si uvedeme příklad, díky kterému si ukážeme, jak to funguje, a uvidíme vznik nekonečného rozvoje.

Příklad 7. Řešíme kvadratickou rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0. \quad (6.1)$$

Upravíme rovnici do tvaru

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Máme vyjádřené x a to dosadíme do jmenovatele.

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

To můžeme neustále opakovat a vznikne nám nekonečný řetězový zlomek.

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}} = [1, 1, 1, \dots]$$

Přesnou hodnotu tohoto nekonečného řetězového zlomku zjistíme tím, že spočítáme kvadratickou rovnici (6.1).

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Zde si můžeme všimnout, že $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ je hodnota zlatého řezu. V příkladu 6 jsme se zabývali řetězovým zlomkem $[1, 1, 1, 1, 1]$, což je právě racionální aproximace čísla $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tohle vysvětluje to, že nám vyšla Fibonacciho posloupnost v čitatelích a jmenovatelích sblížených zlomků. Sblížené zlomky řetězového zlomku $[1, 1, 1, \dots]$ jsou: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \dots$

Konstrukce nekonečného řetězového zlomku

Nyní si ukážeme, jak vyjádřit iracionální číslo ve tvaru nekonečného řetězového zlomku. Celou část čísla budeme značit pomocí hranatých závorek. Necht' x je iracionální číslo a zjišťujeme prvky $a_0, a_1, a_2, \dots$ a $a_0 = [x]$. Napíšeme x jako

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} \quad 0 < \frac{1}{x_1} < 1. \quad (6.2)$$

Z (6.2) vyjádříme

$$x_1 = \frac{1}{x - a_0} > 1$$

a jelikož je x iracionální, tak je jisté, že $\frac{1}{x - a_0}$ je také iracionální.

Ted' pokračujeme opět vypočítáním celé části iracionálního čísla $a_1 = [\frac{1}{x - a_0}]$.

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} \quad 0 < \frac{1}{x_2} < 1 \quad a_1 \geq 1$$

Vyjádříme $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} > 1$ a dále pokračujeme stejným způsobem. Postupně budeme získávat:

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} = \dots$$

Tak bychom mohli pokračovat do nekonečna.

Nyní si na to zkusíme spočítat příklad.

Příklad 8. Vytvořte řetězový zlomek pro $\sqrt{23}$.

$$x = \sqrt{23} = 4 + (\sqrt{23} - 4) \quad a_0 = 4$$

$$x_1 = \frac{1}{x - a_0} = \frac{1}{\sqrt{23} - 4} = \frac{\sqrt{23} + 4}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23} - 3}{7} \quad a_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} = \frac{7}{\sqrt{23} - 3} = \frac{\sqrt{23} + 3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{23} - 3}{2} \quad a_2 = 3$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} = \frac{2}{\sqrt{23} - 3} = \frac{\sqrt{23} + 3}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23} - 4}{7} \quad a_3 = 1$$

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3} = \frac{7}{\sqrt{23} - 4} = \sqrt{23} + 4 = 8 + (\sqrt{23} - 4) \quad a_4 = 8$$

Jelikož nám tady na konci vyšlo $\sqrt{23} - 4$, tak $x_5 = x_1$ a další prvky se budou opakovat. V nekonečném řetězovém zlomku se nám budou periodicky opakovat prvky 1, 3, 1, 8. Výsledek je tedy $\sqrt{23} = [4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, \dots]$.

To, že nám v předchozím příkladu vyšel periodický nekonečný řetězový zlomek, tak není náhoda. Kvadratické iracionality mají totiž vždy nekonečné řetězové zlomky s periodickým rozvojem. Kvadratická iracionalita je výraz tvaru $\frac{P \pm \sqrt{N}}{Q}$ ($P, Q \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}, \sqrt{N} \in \mathbb{I}$), kde $\mathbb{I}$ je množina iracionálních čísel. Kvadratické iracionality a jejich rozvoj popisuje Lagrangeova věta. Tu si zde nyní uvedeme.

Věta 6. Každou kvadratickou iracionalitu lze vyjádřit periodickým řetězovým zlomkem. Každý periodický řetězový zlomek je hodnotou nějaké kvadratické iracionality.

Podle této věty se u řetězového zlomku kvadratické iracionality od nějakého prvku začne opakovat následující prvek nebo soubor prvků. Tomu se říká periodický řetězový zlomek. Důkaz je složitější a lze ho nalézt např. v [8] nebo [11].

Periodickým řetězovým zlomkem tedy nazýváme

$$[a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_{k+1}, \dots]$$

a používáme značení

$$[a_0, a_1, \dots, a_k, \overline{a_{k+1}, \dots, a_n}].$$

Nadále se užívá ještě pojem ryze periodický řetězový zlomek. Tím se myslí periodický řetězový zlomek ve tvaru

$$[\overline{a_0, a_1, \dots, a_k}].$$

7 APROXIMACE LUDOLFOVA ČÍSLA

V této kapitole se budeme zabývat racionálními aproximacemi iracionálního čísla π pomocí řetězových zlomků. Podíváme se, jak lze π aproximovat pomocí řetězových zlomků a jak přesné jsou jednotlivé aproximace. Poté si ještě ukážeme pár zajímavostí ohledně řetězového zlomku π . Budeme vycházet z [8] a [10].

Ludolfovo číslo neboli π je matematická konstanta, která je rovna poměru obvodu kruhu k jeho průměru. Jeden ze způsobů určení hodnoty π , je za pomoci Machinova vzorce:

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}.$$

Tento vzorec objevil John Machin v roce 1706. V té době se jednalo o nejpřesnější vyjádření π . Vzorec je vhodný pro numerické výpočty díky svojí rychlé konvergenci.

Nyní si ukážeme, jak π aproximovat pomocí řetězových zlomků. Podle postupu z kapitoly 6 vypočítáme $a_0, a_1, a_2, \dots$ a zjistíme, že se rovná nekonečnému řetězovému zlomku $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \dots]$. Ten není periodický a nemáme zde žádný vzor, podle kterého bychom poznali další prvky. Sblížené zlomky tohoto řetězového zlomku jsou: $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \dots$. Takto můžeme aproximovat π na racionální číslo. Nyní si spočítáme chyby těchto aproximací.

$$\pi - 3 = +0,14159265359$$

$$\pi - \frac{22}{7} = -0,00126448926$$

$$\pi - \frac{333}{106} = +0,00008321962$$

$$\pi - \frac{355}{113} = -0,00000026676$$

$$\pi - \frac{103993}{33102} = +0,00000000058$$

Vidíme, že $\frac{355}{113}$ je už relativně přesná aproximace. Pokud se vrátíme k příkladu 7, tak si můžeme všimnout, že se sblížené zlomky $[1, 1, 1, \dots]$ blíží k přesné hodnotě o dost pomaleji. Sblížené zlomky čísla $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se přibližují k přesné hodnotě nejpomaleji ze všech čísel. Je to způsobeno tím, že prvky jsou pouze 1. Kvůli tomu při řešení sblíženého zlomku nám vždycky vychází zlomek, který se od předchozího značně liší. U π lze vidět, že prvky rovny 1 zpomalují konvergenci. Řetězový zlomek $\frac{103993}{33102}$ pak zase konverguje rychleji, protože díky výskytu $a_4 = 292$ se chyba značně sníží.

Uvedl jsem, že u π nevidíme žádný vzor toho, jaké by mohly být další prvky nekonečného řetězového zlomku. Lze však najít i jiné nekonečné řetězové zlomky vyjadřující π , u kterých už nějaký vzor dokážeme vypořádat. Jedná se o řetězové zlomky, které nejsou jednoduché. Existuje například vyjádření:

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \frac{9^2}{6 + \ddots}}}}}$$

8 VSUNUTÉ ZLOMKY

V této kapitole si představíme vsunuté zlomky, mediantu zlomků a souvislost mezi nimi. Také se podíváme na to, jak lze pomocí vsunutých zlomků nahradit Eukleidův algoritmus a jak z těchto poznatků přijdeme na omezení v konvergenci sblížených zlomků k přesné hodnotě řetězového zlomku. Budeme vycházet z [11].

Nejprve si ukážeme, co je medianta. Mějme zlomky $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ s kladnými jmenovateli. Mediantou nazýváme výraz

$$\frac{a+c}{b+d}.$$

Lemma 2. Medianta $\frac{a+c}{b+d}$ leží mezi zlomky $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$.

Důkaz. To je možné jednoduše dokázat tím, že stanovíme jeden ze zlomků jako menší nebo roven než druhý $\left(\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}\right)$. Využijeme v důkazu toho, že $bc - ad \geq 0$. Pokud zlomky od medianty odečteme, tak uvidíme, že medianta skutečně leží mezi nimi.

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} \geq 0$$

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{b(b+d)} \leq 0$$

Tím je důkaz dokončen a nyní si už můžeme ukázat vsunuté zlomky.

Vsunutými zlomky rozumíme posloupnost zlomků:

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \quad \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}, \quad \frac{p_{k-2} + 2p_{k-1}}{q_{k-2} + 2q_{k-1}}, \quad \dots, \quad \frac{p_{k-2} + a_k p_{k-1}}{q_{k-2} + a_k q_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k}. \quad (8.1)$$

Jedná se o posloupnost zlomků, ve které od $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ děláme postupně medianty se zlomkem $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Z (8.1) vidíme, že můžeme pomocí toho zjišťovat sblížené

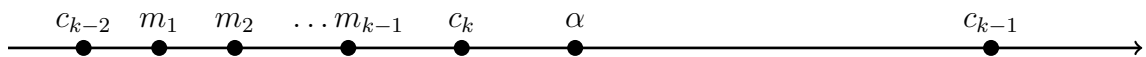
zlomky vytvářením mediant z předchozích dvou sblížených zlomků. Jedná se tedy o alternativní způsob výpočtu sblížených zlomků a prvků řetězového zlomku. Vsunuté zlomky tvoří rostoucí nebo klesající posloupnost. Zda je rostoucí či klesající, závisí na paritě indexu sblíženého zlomku. To plyne z věty 5. Z té věty navíc víme, že $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ leží každý na opačné straně od přesné hodnoty řetězového zlomku. Přesnou hodnotu opět značíme jako α . Posloupnost mediant se tedy vždy tvoří buď na levé straně nebo pravé straně od α . To plyne z toho, že pro libovolné i a $k \geq 2$ platí

$$\frac{p_{k-1}(i+1) + p_{k-2}}{q_{k-1}(i+1) + q_{k-2}} - \frac{p_{k-1}i + p_{k-2}}{q_{k-1}i + q_{k-2}} = \frac{(-1)^k}{[q_{k-1}(i+1) + q_{k-2}][q_{k-1}i + q_{k-2}]}.$$

Zde vidíme, že vsunuté zlomky, podle parity k , jsou všechny na stejné straně bez ohledu na i . V (8.1) vidíme, že posloupnost skončila u $\frac{p_k}{q_k}$. Kdybychom pokračovali, tak další zlomek by se již nacházel na opačné straně od α . Zlomky $\frac{p_k}{q_k}$ je poslední stále na té dané straně jako celá posloupnost (8.1). $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$ mají index stejné parity a všechny ty utvořené medianty se nacházejí mezi nimi. Z těchto poznatků jsme schopni sestavit nerovnost

$$\left| \alpha - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} \right| > \left| \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} \right| = \frac{1}{q_{k-2}(q_{k-2} + q_{k-1})}. \quad (8.2)$$

Pro lepší představu je vhodné si výše uvedené úvahy znázornit obrázkem.



Obrázek 8.1: Znázornění konstrukce vsunutých zlomků

Na obrázku značíme medianty: $m_1 = \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}$, $m_2 = \frac{p_{k-2} + 2p_{k-1}}{q_{k-2} + 2q_{k-1}}$, $\dots$, $m_{k-1} = \frac{p_{k-2} + (k-1)p_{k-1}}{q_{k-2} + (k-1)q_{k-1}}$ a k -tá medianta m_k je rovna c_k .

S přeznačením indexů v nerovnosti (8.2) a s pomocí věty 5 jsme nyní schopni formulovat následující důležitou větu. Ta nám říká, jak sblížené zlomky konvergují k α , ale také, že podle (8.2) má tato konvergence i své omezení.

Věta 7. Pro všechna $k \geq 0$ platí

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Důkaz. Nerovnost $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}$ je zřejmá, jelikož věta 3 nám říká, že vzdálenost mezi sblíženými zlomky $\frac{p_k}{q_k}$ a $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ je $\frac{1}{q_k q_{k+1}}$ a z věty 5 víme, že α se nachází mezi $\frac{p_k}{q_k}$ a $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$. Nerovnost $\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|$ známe z (8.2).

Nyní si ukážeme, jak by se dal napsat program na výpočet prvků a sblížených zlomků pomocí vsunutých zlomků. Vstupem jsou v programu hodnoty α a n . Číslo α je libovolné reálné číslo, které chceme vyjádřit jako řetězový zlomek a zjistit jeho sblížené zlomky. Druhá vstupní hodnota n je počet prvků a počet sblížených zlomků, které chceme vypočítat. Výstupem jsou vektorové veličiny a a c , kde a představuje prvky řetězového zlomku a c jsou jeho sblížené zlomky. Celý funkční program napsaný v Matlabu lze nalézt v příloze.

Vstup: α, n

Výpočet prvních dvou prvků $a(1), a(2)$ řetězového zlomku;

Pokud je $a(1) = \alpha$

$c(1) = a(1);$ % Případ, kdy je α celé číslo

Konec programu

Výpočet prvních dvou p, q a následně prvních dvou sblížených zlomků $c(1), c(2)$;
Deklarace vektorů p_v, q_v o n prvcích;

Pro j **od** 1 **do** $n - 2$:

Pokud je j dělitelné dvěma

$z = -1;$

Pokud není j dělitelné dvěma

$z = 1;$

Konec

Pokud $c(j + 1) = \alpha$ % Pokud cyklus dojde k tomu, že aktuální

Ukončení cyklu **Pro**; % sblížený zlomek je roven alfa, program skončí

Konec % (to je zde pro případ, že $\alpha \in \mathbb{Q}$)

Pro i **od** 1 **do** ∞ :

Výpočet čitateľů $p_v(i)$ a jmenovatelů $q_v(i)$ vsunutých zlomků;

Pokud $z * (p_v(i)/q_v(i) - \alpha) > 0$ % Vsunutý zlomek překročí α

$p(j + 2) = p_v(i - 1);$

$q(j + 2) = q_v(i - 1);$

$c(j + 2) = p_v(i - 1)/q_v(i - 1);$

$a(j + 2) = (p(j + 2) - p(j))/p(j + 1);$ % a vyjádřené z rekurentního

Ukončení cyklu **Pro**; % vzorce

Konec
Konec

Konec programu

Výstup: a, c

9 TRANSCENDENTNÍ ČÍSLA

V této kapitole si ukážeme, že se iracionální čísla dělí na algebraická a transcendentní. Vysvětlíme si důkaz existence transcendentních čísel. Ten souvisí s Liouvilleovou větou, kterou si zde také představíme a podíváme se, jak nalézat transcendentní čísla pomocí řetězových zlomků. Budeme v této kapitole vycházet z [11].

Uvažujme výraz

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (9.1)$$

jako polynom n -tého stupně s celočíselnými koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Potom kořen α tohoto polynomu nazýváme algebraické číslo. Dále budeme potřebovat zavést pojem stupeň algebraického čísla. Jedná se o polynom nejmenšího stupně, jehož kořenem je α . Jinými slovy to znamená, že pokud α je kořen polynomu stupně n a neexistuje již polynom stupně $n - 1$, který by měl α jako svůj kořen, tak potom je α algebraické číslo stupně n . Takže například všechna racionální čísla jsou algebraická čísla prvního stupně,

jelikož $\alpha = \frac{a}{b}$ je kořenem polynomu $bx - a = 0$. Všechna ostatní iracionální čísla nazýváme transcendentní čísla. Jsou to tedy iracionální čísla, která nejsou kořeny polynomu. Transcendentní čísla jsou například π a e . Nyní se podíváme na Liouvilleovu větu, která bude podstatná pro dokázání existence transcendentních čísel a jejich nalézání.

Věta 8. *Ke každému iracionálnímu algebraickému číslu α stupně n existuje $C > 0$ takové, že pro libovolná celá čísla p a q ($q > 0$) platí*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^n}.$$

Důkaz. Předpokládejme, že α je kořen polynomu (9.1) a je to algebraické číslo n -tého stupně. Můžeme napsat

$$f(x) = (x - \alpha)f_1(x), \quad (9.2)$$

kde $f_1(x)$ je polynom stupně $n - 1$ a platí, že $f_1(\alpha) \neq 0$. Jelikož platí $f_1(\alpha) \neq 0$, tak lze najít kladné δ takové, že v intervalu $(\alpha - \delta; \alpha + \delta)$ se nachází x , pro které platí $f_1(x) \neq 0$. Víme tedy, že platí $|\alpha - x| \leq \delta$. Za x si dosadíme zlomek $\frac{p}{q}$, kde

p a q jsou libovolná celá čísla a $q > 0$. Takže máme $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \delta$ a $f_1\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$.

Nyní si z (9.2) vyjádříme $(x - \alpha)$ a za x dosadíme $\frac{p}{q}$. Dostáváme

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{a_0 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + \cdots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_np^n}{q^n f_1\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Čitatel $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_np^n$ je celé číslo a navíc je nenulový, protože kdyby byl roven nule, tak by $\alpha = \frac{p}{q}$. Jenže α má být iracionální. Díky tomu, že tohle víme, můžeme napsat

$$|a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_np^n| \geq 1.$$

Pokud tohle použijeme a navíc si označíme nejmenší horní mez funkce $f_1(x)$ z intervalu $(\alpha - \delta; \alpha + \delta)$ písmenem M , tak získáme nerovnost

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{Mq^n}.$$

V jiném případě je to

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \delta.$$

A jelikož $\delta \geq \frac{\delta}{q^n}$, tak můžeme napsat

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{\delta}{q^n}.$$

Pokud si písmenem C označíme kladné číslo menší než δ a $\frac{1}{M}$, tak v obou případech získáváme

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^n},$$

a tím je věta dokázána.

Liouvilleova věta nám říká, že aproximace algebraických čísel je omezená a ta omezenost závisí na stupni algebraického čísla. Tato věta nám navíc pomůže dokázat existenci transcendentních čísel.

Z věty 8 plyne, že pro libovolné $C > 0$ a libovolné $n \in \mathbb{N}$ existují celá čísla p a q ($q > 0$) a platí

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{C}{q^n}. \quad (9.3)$$

Pokud je toto splněno, tak α je transcendentní.

S použitím řetězových zlomků, nyní můžeme hledat transcendentní čísla.

Mějme prvky $a_0, a_1, \dots, a_k$. Spočítáme sblížený zlomek $\frac{p_k}{q_k}$ a zvolíme

$$a_{k+1} > q_k^{k-1}.$$

Pak platí

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}} < \frac{1}{q_k^{k+1}}.$$

Nerovnost (9.3) je splněna pro velká k bez ohledu na to, čemu se rovná C a n , což dokazuje existenci transcendentních čísel.

10 VÝPOČET LOGARITMU

V této kapitole si ukážeme počítání logaritmů pomocí řetězových zlomků. Algoritmus, který si zde uvedeme, stojí za zmínku díky svojí vysoké výpočetní rychlosti. Budeme vycházet z [6] a [12]. Navíc si v této kapitole ukážeme na příkladu, jak dobré aproximace tato metoda nabízí.

Budeme řešit $x = \log_b a$ neboli

$$a = b^x \quad (10.1)$$

a to tak, že budeme hledat celá čísla $n_0, n_1, n_2, \dots$ taková, aby $x = [n_0, n_1, n_2, \dots]$.

Začneme tím, že určíme celé číslo $n_0 \geq 0$, pro které platí:

$$b^{n_0} < a < b^{n_0+1}.$$

Z toho plyne, že

$$a = b^{n_0 + \frac{1}{x_1}}, \quad (10.2)$$

kde $\frac{1}{x_1} < 1$. Z (10.1) a (10.2) víme, že $x = n_0 + \frac{1}{x_1}$ a nyní hledáme x_1 .

(10.2) podělíme b^{n_0} a označíme jako b_1 .

$$\frac{a}{b^{n_0}} = b^{\frac{1}{x_1}} = b_1$$

Tak získáme $b = b_1^{x_1}$. Z toho plyne, že $x_1 = \log_{b_1} b$ a nyní budeme hledat $n_1 \geq 0$, pro které platí:

$$b_1^{n_1} < b < b_1^{n_1+1}.$$

Z toho plyne, že

$$b = b_1^{n_1 + \frac{1}{x_2}},$$

kde $\frac{1}{x_2} < 1$ a zjistíme, že $x_1 = n_1 + \frac{1}{x_2}$.

Dále stejným způsobem určíme

$$x_2 = n_2 + \frac{1}{x_3}, \quad x_3 = n_3 + \frac{1}{x_4}, \quad \dots$$

Tím jsme zjistili

$$x = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \ddots}}},$$

a vidíme tedy, že

$$\log_b a = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \ddots}}}.$$

Lze vidět, že se jedná o poměrně elegantní způsob výpočtu logaritmu. Logaritmy se dají řešit různými způsoby. Velice známý je například Taylorův polynom. U toho musíme navíc stanovit nějaký bod blízký hodnotě daného logaritmu a musíme během toho počítat derivace logaritmu. Metoda s řetězovými zlomky je rychlejší.

Nyní si ukážeme, jak dobré aproximace nabízí výpočet logaritmu pomocí řetězových zlomků. Budeme pracovat s přirozeným logaritmem 3. Ten je, se zaokrouhlením na 12 desetinných míst, přibližně roven $\ln 3 \approx 1,098612288668$. Sestavíme tabulku se sblíženými zlomky.

sblížený zlomek	zlomek	desetinné číslo
c_0	1	1
c_1	11/10	1,1
c_2	78/71	1,098 591549296
c_3	713/649	1,09861 3251156
c_4	1504/1369	1,098612 125639
c_5	3721/3387	1,0986123 41305
c_6	5225/4756	1,0986122 79226
c_7	19396/17655	1,09861229 1136
c_8	24621/22411	1,0986122886 08

Tabulka 10.1: Sblížené zlomky $\ln 3$

Z tabulky vidíme, že třetí sblížený zlomek je už velmi dobrá aproximace. Vychází s přesností na 5 desetinných míst. Osmý sblížený zlomek má dokonce přesnost na 10 desetinných míst.

11 NAVRHOVÁNÍ KALENDÁŘE

V kapitole o historii byla zmíněna tvorba kalendáře pomocí řetězových zlomků. Tato kapitola se bude věnovat tomu, jak byl navržen gregoriánský kalendář a jak by se dal tento kalendář ještě zpřesnit. Budeme vycházet z [2].

Celosvětově se dnes užívá gregoriánský kalendář. Ten vychází z juliánského kalendáře, který zavedl Julius Caesar. Rok v juliánském kalendáři měl 365,25 dnů. Přestupný rok byl jednou ze 4 roky. Jednalo se o poměrně praktický kalendář, kdy docházelo k nahromadění chyby jednoho dne po přibližně sto letech. Ke korekci tohoto problému došlo někdy ke konci 16. století. Papež Řehoř XIII. sestavil komisi pro návrh nového přesnějšího kalendářního systému. Díky tomu byl zaveden takový kalendář, ve kterém každý rok končící číslicemi 00 není přestupný, s výjimkou let dělitelných 400. To je náš gregoriánský kalendář a znamená to, že tedy každých 100 let, kromě čtyřsetletého roku, není přestupný rok. Takže během jednoho čtyřsetletého cyklu se vyskytne 97 přestupných roků, jelikož

$$\frac{400}{4} - 3 = 97.$$

Nyní se zkusíme podívat na to, zda by se nedal navrhnout nějaký lepší kalendář. Jeden rok má přibližně 365,24219878 dnů. Hodnotu 0.24219878 si převedeme na řetězový zlomek.

$$0.24219878 = \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\ddots}}}}}}$$

Z toho získáme následující sblížené zlomky:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{7}{29}, \quad c_3 = \frac{8}{33}, \quad c_4 = \frac{31}{128}, \quad c_5 = \frac{163}{673}, \quad \dots$$

První sblížený zlomek odpovídá juliánskému 4letému cyklu. Vhodnější by byl například třetí sblížený zlomek, který nabízí trochu přesnější kalendář. Jedná se o takový kalendář, kdy by nastalo 8 přestupných roků během 33 let.

Nyní si převedeme hodnotu 0.24219878×100 na řetězový zlomek. Z toho už rovnou uvidíme jednotlivé cykly i s počtem přestupných roků.

$$0.24219878 \times 100 = 24 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

Získáme sblížené zlomky:

$$c_0 = 24, \quad c_1 = \frac{97}{4}, \quad c_2 = \frac{121}{5}, \quad c_3 = \frac{218}{9}, \quad c_4 = \frac{993}{41}, \quad \dots$$

Zde vidíme pár návrhů na nový kalendářní model. První sblížený zlomek odpovídá gregoriánskému kalendáři. Říká, že máme 97 přestupných roků během 400letého cyklu. Druhý sblížený zlomek odpovídá kalendáři s 500letým cyklem a 121 přestupnými roky v každém cyklu. U tohoto kalendáře bychom měli přestupný rok každé 4 roky s tím, že každých 100 let nebude přestupný rok, kromě pětistého roku. Tento kalendář je stejně jednoduchý a praktický jako gregoriánský a poskytuje lepší přesnost. Gregoriánský rok je o 26 sekund delší než sluneční rok, což má za následek chybu 1 dne každých 3320 let. Kalendář s 500letým cyklem je o 17 sekund kratší než sluneční rok, což má za následek chybu 1 dne každých 5031 let. Další volba kalendáře je 900letý cyklus s 218 přestupnými roky. Ten, kromě přestupných roků každé 4 roky, vyžaduje ještě zavést 7 výjimek. To vychází z výpočtu:

$$218 = \frac{900}{4} - 7.$$

Takto bychom vytvořili příliš složitý kalendář, který je navíc nepraktický, protože 900 let je už dost dlouhé časové období.

Nakonec tedy byl zaveden 400letý cyklus, i přestože se zdá, že výhodnější by byl 500letý. Není známo proč k tomu došlo. Je možné, že o této možnosti papež nevěděl a nebo neměli v té době dostatečně přesná astronomická data k ospravedlnění 500letého cyklu.

Nyní je třeba se ještě zamyslet nad tím, jak vyřešit u gregoriánského kalendáře chybu 1 dne, která nastane každých 3320 let. Nabízí se zachovat starý

model a v něm provést pár úprav. K tomu lze opět použít řetězové zlomky. Tentokrát si na řetězový zlomek převedeme 0.24219878×400 .

$$0.24219878 \times 400 = 96 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

Spočítáme sblížené zlomky:

$$c_0 = 96, \quad c_1 = 97, \quad c_2 = \frac{775}{8}, \quad c_3 = \frac{2422}{25}, \quad c_4 = \frac{5619}{58}, \quad \dots$$

Druhý sblížený zlomek nám předkládá cyklus dlouhý $8 \times 400 = 3200$ roků, který má celkem 775 přestupných roků. Gregoriánský kalendář má 97 přestupných roků během 400letého cyklu. Takže během 8 takových cyklů bychom měli $8 \times 97 = 776$ přestupných roků. To znamená, že zrušení přestupného roku každých 3200 let by nám dovolilo zachovat gregoriánský kalendář a navíc by se zpřesnil. Tento nový systém by nahromadil chybu 1 dne za 88652 let. To je už tak dlouhá doba, že se tato korekce jeví jako dostatečná.

Ještě by nás mohlo zajímat, jak by to dopadlo v případě, že by papež schválil 500letý cyklus. Opět si spočítáme řetězový zlomek a jeho sblížené zlomky.

$$0.24219878 \times 500 = 121 + \frac{1}{10 + \frac{1}{16 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

$$c_0 = 121, \quad c_1 = \frac{1211}{10}, \quad c_2 = \frac{19497}{161}, \quad c_3 = \frac{59702}{493}, \quad c_4 = \frac{138901}{1147}, \quad \dots$$

Sblížený zlomek $\frac{1211}{10}$ navrhuje cyklus dlouhý 5000 let s 1211 přestupnými roky. Předtím jsme si již spočítali, že 500letý cyklus by měl 121 přestupných roků. To znamená, že za 5000 let by to bylo 1210 přestupných roků. Abychom mohli použít kalendář s 1211 přestupnými roky, bylo by třeba zavést 30. únor každých 5000 let. Nyní jsme dokončili sestavení kalendáře s 500letým cyklem, který nahromadí chybu 1 dne až za 833333 let.

12 DIOFANTICKÉ ROVNICE

V této kapitole se budeme zabývat diofantickými rovnicemi. To jsou rovnice s celočíselnými koeficienty, u kterých hledáme celočíselná řešení. Jednou z možností, jak tyto rovnice řešit, je za pomoci řetězových zlomků. Na to se zde zaměříme. Budeme čerpat z [6].

Uvedeme si jednoduchý příklad na užití diofantických rovnic:

Farmář si nakoupil prasata a krávy. Prase stálo 5000 Kč a kráva stála 8000 Kč. Dohromady utratil 185000 Kč. Kolik nakoupil prasat a kolik nakoupil krav?

Sestavíme rovnici:

$$5000x + 8000y = 185000.$$

Jedná se tedy o rovnici, kde hledáme celočíselná a zde navíc i nezáporná řešení, protože nebereme v potaz, že by si farmář koupil například půlku zvířete a nebo záporný počet zvířat.

Nyní si odvodíme, jak lze diofantické rovnice řešit pomocí řetězových zlomků a poté si spočítáme úlohu s farmářem.

Začneme tím, že si ukážeme, jak vyřešit $ax - by = \pm 1$.

Jako první budeme řešit $ax - by = 1$, kde $\gcd(a, b) = 1$. To znamená, že největší společný dělitel a a b je 1. Tato rovnice má nekonečno celočíselných řešení.

Vytvoříme řetězový zlomek $\frac{a}{b} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ a vypočítáme sblížené zlomky.

Důležité budou $c_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ a $c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$, protože

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n,$$

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^n.$$

Pokud je n sudé, tak

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = 1$$

a když to srovnáme s $ax - by = 1$, vidíme, že řešení rovnice je

$$x_0 = q_{n-1} \quad y_0 = p_{n-1}.$$

To je částečné řešení. Potřebujeme zjistit obecné řešení.

Pokud je n liché, upravíme řetězový zlomek tak, aby měl sudý počet prvků.

$$\text{Pro } a_n > 1: \quad \frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}} \quad [a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1],$$

$$\text{pro } a_n = 1: \quad \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{a_{n-1} + 1} \quad [a_0, a_1, \dots, a_{n-1} + 1]$$

Nyní máme n sudé. Pokud se jedná o případ, kde jsme si museli upravit zlomky, aby měli sudý počet prvků, budeme muset znovu vypočítat $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ a $\frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$.
Nyní hledáme obecné řešení.

Odečteme od sebe rovnice:

$$ax - by = 1$$

$$ax_0 - by_0 = 1.$$

$$a(x - x_0) = b(y - y_0)$$

To nám říká, že b dělí $x - x_0$. Tedy $x - x_0$ je násobek b .

$$x - x_0 = tb$$

$$x = x_0 + tb,$$

kde $t \in \mathbb{Z}$. Z toho víme, že

$$atb = b(y - y_0)$$

$$at = y - y_0$$

$$y = y_0 + at.$$

Takže jsme zjistili, že rovnice $ax - by = 1$ má řešení:

$$x = x_0 + tb,$$

$$y = y_0 + ta$$

$$t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Diofantická rovnice $ax - by = -1$ se řeší stejně, ale s tím rozdílem, že nyní požadujeme, aby n bylo liché, jelikož máme na pravé straně rovnice -1 .

Nyní si ukážeme, jak vyřešit diofantickou rovnici

$$ax - by = c \quad \gcd(a, b) = 1.$$

Budeme řešit $ax - by = 1$ a dostaneme se opět k $ax_0 - by_0 = 1$. To vynásobíme hodnotou c .

$$a(cx_0) - b(cy_0) = c$$

Z toho vidíme, že zde bude částečným řešením cx_0, cy_0 a obecným řešením bude

$$x = cx_0 + tb,$$

$$y = cy_0 + ta$$

$$t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Nyní si ukážeme jak vyřešit diofantickou rovnici

$$ax + by = c \quad \gcd(a, b) = 1.$$

Řeší se podobně jako $ax - by = c$, ale s malými změnami. Nejprve budeme hledat částečné řešení diofantické rovnice $ax + by = 1$. Vypočítáme opět $aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1$ a provedeme trik, že přepíšeme $ax + by = c$ na

$$ax + by = c \cdot 1 = c(aq_{n-1} - bp_{n-1})$$

a provedeme úpravu

$$a(cq_{n-1} - x) = b(y + cp_{n-1}).$$

Číslo b je dělitelem $cq_{n-1} - x$ a víme tedy, že

$$cq_{n-1} - x = tb$$

$$x = cq_{n-1} - tb.$$

Dopočítáme

$$a(tb) = b(y + cp_{n-1})$$

$$y = at - cp_{n-1}.$$

Obecné řešení se tedy dá napsat ve tvaru

$$x = cq_{n-1} - tb,$$

$$y = at - cp_{n-1} \quad (12.1)$$

$$t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Další varianty řešíme obdobně.

Nyní zvládneme vyřešit všechny diofantické rovnice typu $ax \pm by = \pm c$, kde $\gcd(a, b)$ je dělitelem hodnoty c .

Ted' jsme již schopni si spočítat úlohu s farmářem, kterou jsme si uvedli na začátku této kapitoly.

Příklad 9. Řešíme diofantickou rovnici $5000x + 8000y = 185000$.

Vidíme, že $\gcd(5000, 8000) \neq 1$. Musíme nejprve rovnici podělit 1000. Tím získáme rovnici ve tvaru

$$5x + 8y = 185.$$

Nyní platí $\gcd(5, 8) = 1$ a můžeme si spočítat řetězový zlomek. Pokud bude mít lichý počet prvků, tak ho ještě navíc upravíme na řetězový zlomek se sudým počtem prvků.

$$\frac{5}{8} = [0, 1, 1, 1, 2] = [0, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Sblížené zlomky jsou:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{2}{3}, \quad c_4 = \frac{3}{5}, \quad c_5 = \frac{5}{8}.$$

Odvodili jsme si předtím, jak se řeší $ax + by = c$. Takže stačí jen dosadit do vzorců (12.1). Pro řešení dostáváme vyjádření

$$x = cq_4 - tb = 185 \cdot 5 - 8t = 925 - 8t,$$

$$y = at - cp_4 = 5t - 185 \cdot 3 = 5t - 555.$$

Vidíme, že pro řadu hodnot t bude y záporné. To nechceme, protože nemůžeme mít záporný počet krav. Lze si snadno dopočítat, že t musí být alespoň 111 ($5 \cdot 111 - 555 = 0$). To je případ, kdy by farmář nakoupil 37 prasat a 0 krav. Pro $t \in \mathbb{Z}$ větší než 115 by zas počet prasat vycházel záporný. Tím se nám počet možných řešení omezuje. Tato úloha má tedy 5 různých řešení pro $t = 111, 112, 113, 114, 115$:

$$t = 111 : \quad x_1 = 37, \quad y_1 = 0$$

$$t = 112 : \quad x_2 = 29, \quad y_2 = 5$$

$$t = 113 : \quad x_3 = 21, \quad y_3 = 10$$

$$t = 114 : \quad x_4 = 13, \quad y_4 = 15$$

$$t = 115 : \quad x_5 = 5, \quad y_5 = 20.$$

13 ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

Tato kapitola se zaměří na využití řetězových zlomků při výpočtu algebraických rovnic. Ukážeme si, že díky řetězovým zlomkům můžeme vypočítat kořen rovnice libovolného stupně. Popíšeme tuto metodu a pak ji vyzkoušíme na příkladu. Budeme v této kapitole vycházet z [13].

Mějme algebraickou rovnici n -tého stupně

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = 0. \quad (13.1)$$

Řetězový zlomek konstruujeme tak, že budeme hledat celá čísla $a_0, a_1, a_2, \dots$. Začneme tím, že zjistíme interval $(a_0, a_0 + 1]$, ve kterém se nachází jediný kořen rovnice (13.1). Tento kořen značíme α . Mírná komplikace je stanovení tohoto intervalu. Ten můžeme stanovit například postupným dosazováním prvků z množiny celých čísel do rovnice (13.1). Hledaný interval najdeme, jakmile narazíme na dvě po sobě jdoucí čísla, pro která platí, že výrazy $f(x)$ mají navzájem opačná znaménka. Tak jsme našli interval, ve kterém se nachází kořen α . Kořen vyjádříme ve tvaru

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{x_0}.$$

Poté dosadíme α do rovnice (13.1).

$$b_0 + b_1\left(a_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b_2\left(a_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 + \dots + b_n\left(a_0 + \frac{1}{x_0}\right)^n = 0 \quad (13.2)$$

Rovnici (13.2) potom převedeme to tvaru

$$c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \dots + c_nx_0^n = 0, \quad c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}. \quad (13.3)$$

Tato rovnice má reálný kořen $x_0 \geq 1$. Pro rovnici (13.3) opět stejným způsobem zjistíme interval $(a_1; a_1 + 1]$. V něm se nachází $x_0 = a_1 + \frac{1}{x_1}$. Takže už hledáme

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_1}}.$$

Stejným způsobem bychom mohli pokračovat libovolně dlouho. Nakonec se nám podaří vypočítat $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$.

Nyní si tuto metodu vyzkoušíme na příkladu.

Příklad 10. Vypočtěte rovnici

$$5x^4 + 3x^3 - 7x^2 + x - 17 = 0.$$

Nejprve zjistíme, že kořen α se nachází v intervalu $(1; 2]$, protože

$$\begin{aligned} 5 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 1 - 17 &= -15 < 0, \\ 5 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 2 - 17 &= 61 > 0. \end{aligned}$$

Takže $a_0 = 1$ a teď do rovnice za x dosadíme $1 + \frac{1}{x_0}$ a poté rovnici upravíme.

$$\begin{aligned} 5\left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^4 + 3\left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^3 - 7\left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{x_0}\right) - 17 &= 0 \\ 15x_0^4 - 16x_0^3 - 32x_0^2 - 23x_0 - 5 &= 0 \end{aligned} \quad (13.4)$$

Teď budeme hledat x_1 v intervalu $(2; 3]$. $a_1 = 2$ a po dosazení $x_0 = 2 + \frac{1}{x_1}$ do (13.4), získáme

$$67x_1^4 - 137x_1^3 - 232x_1^2 - 104x_1 - 15 = 0.$$

Nyní hledáme x_2 v intervalu $(3; 4]$. Vidíme, že $a_2 = 3$ a dosazujeme $x_1 = 3 + \frac{1}{x_2}$.

$$687x_2^4 - 2041x_2^3 - 2153x_2^2 - 667x_2 - 67 = 0$$

Další interval, ve kterém budeme pracovat, je $(3; 4]$. Tím jsme právě zjistili prvek $a_3 = 3$. Už jsme zjistili první 4 prvky a můžeme se podívat, jak přesné řešení to je.

Zjistili jsme, že kořen je roven řetězovému zlomku $[1, 2, 3, 3, \dots]$.

Sblížené zlomky jsou:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = \frac{10}{7}, \quad c_3 = \frac{33}{23}, \quad \dots$$

Získali jsme tedy řešení c_3 . Díky větě 7 můžeme zjistit, jak je přesná tato aproximace. Využijeme toho, že

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2} \quad (13.5)$$

a vypočítáme chybu pro c_3 .

$$\left| \alpha - \frac{p_3}{q_3} \right| < \frac{1}{23^2} < 0,0019$$

Sblížený zlomek c_3 má tedy chybu menší než 0,0019. To je poměrně blízko přesné hodnotě.

Kromě tohoto kořenu, existuje ještě další kořen, který se nachází v intervalu $(-2; -1]$. Výpočet by se pak provedl stejným způsobem jako pro kladný kořen.

Metoda je výhodná v tom, že můžeme při výpočtu sledovat přibližování se k přesné hodnotě kořenu pomocí (13.5). Pokud bychom řešili rovnici s racionálním kořenem, dopočítali bychom se konečného počtu prvků řetězového zlomku a dostali bychom tedy přesné řešení s nulovou chybou.

ZÁVĚR

Bakalářská práce shrnuje základní poznatky týkající se řetězových zlomků. Je zde probrána historie, teoretický základ a některé jednoduché aplikace řetězových zlomků.

Dozvěděli jsme se, že řetězové zlomky mají své výhody a nevýhody. Řetězové zlomky jsou jednoznačné na rozdíl od desetinných čísel, která nesplňují jednoznačnost (např. $1 = 0,9$). Pak také víme, že některá racionální čísla mohou být vyjádřena jako periodické desetinné číslo a u iracionálních čísel tohle už není možné. Můžeme tedy považovat za výhodné, že u řetězových zlomků lze periodicky vyjádřit i iracionální čísla, konkrétně kvadratické iracionality. Velkou slabinou je provádění matematických operací s řetězovými zlomky. To je problém především u nekonečných řetězových zlomků. Ty je alespoň možné aproximovat pomocí sblížených zlomků. Podstatnou částí teorie řetězových zlomků jsou právě sblížené zlomky, protože díky nim a jejich vlastnostem jsou řetězové zlomky vhodným aproximačním nástrojem. Jsou to vlastnosti o jejich přibližování k přesné hodnotě, chování sudých a lichých sblížených zlomků, postupné narůstání číselů i jmenovatelů a tak dále. Navíc lze počítat pomocí rekurentních vzorců, což je velkou výhodou. Díky sblíženým zlomkům můžeme aproximovat iracionální čísla na požadovanou přesnost.

Ukázali jsme si, že konečný řetězový zlomek vyjadřuje racionální číslo a nekonečný řetězový zlomek vyjadřuje iracionální číslo. Viděli jsme také, že kvadratické iracionality mají vždy periodický řetězový zlomek. Potom jsme se zabývali také vsunutými zlomky. Jedná se o alternativu výpočtu sblížených zlomků využívající pojmu medianty. Vsunuté zlomky možná nejsou příliš efektivní, ale díky nim jsme byli schopni přijít na větu 7. Ta nám říká, že konvergence řetězových zlomků závisí na jmenovateli sblížených zlomků. Můžeme pozorovat, jak se chyba zmenšuje, ale zároveň právě díky vsunutým zlomkům jsme zjistili, že přibližování je omezené a to také podle jmenovatelů sblížených zlomků. Poslední částí teorie, které jsme se věnovali, jsou transcendentní čísla. Ta jsou podstatnou součástí množiny iracionálních čísel a díky řetězovým zlomkům, jsme schopni nalézat tato čísla.

Zabývali jsme se také využitím řetězových zlomků. Viděli jsme, že lze využít k výpočtu logaritmu. Ukázalo se, že se jedná o poměrně rychlý a efektivní al-

goritmus. V kapitole 12 jsme se také věnovali diofantickým rovnicím, které se dají řešit pomocí řetězových zlomků. Zajímavou aplikací je navrhování kalendáře. Tam se řetězové zlomky ukázaly jako velmi vhodný nástroj poskytující dobré možnosti aproximace délky astronomického roku. Mohli jsme pozorovat to, že gregoriánský kalendář je velmi přesným kalendářním modelem, ale i přesto by bylo možné využít modely, které by byly lepším přiblížením.

Cílem práce bylo prozkoumat pojem jednoduchý řetězový zlomek. Probrali jsme řadu vlastností a našli nějaká uplatnitelná využití. Přesto stále existuje spousta látky, která se do této práce nedostala. Dalo by se dohledat více využití a dokonce i v jiných oblastech. Například ve fyzice, informatice nebo v kryptografii. Jedná se o téma s velkým potenciálem, ke kterému je možno se vrátit a věnovat se mu do větší hloubky.

LITERATURA

- [1] Adam L. Van Tuyl: *An Introduction to the Theory and Applications of Continued Fractions*, Calvin College, 1996.
- [2] Yury Grabovsky: *Modern calendar and continued fractions*, Temple University.
- [3] Michel Waldschmidt: *Continued fractions: an introduction*, Institut de mathématiques de Jussieu, 2019.
- [4] <https://www.math.ru.nl/~bosma/Students/CF.pdf>
- [5] <https://evolventdesign.com/pages/spur-gear-generator>
- [6] C. D. Olds: *Continued Fractions*, Random House and The L. W. Singer Company, Stanford, 1978.
- [7] G. H. Hardy, E. M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 2005.
- [8] Pavel Vít: *Řetězové zlomky*, Mladá fronta, Praha, 1982.
- [9] D. M. Burton: *Elementary Number Theory* McGraw Hill, 2002.
- [10] <http://personalpages.to.infn.it/~zaninett/pdf/machin.pdf>
- [11] A. Ya. Khinchin: *Continued Fractions*, University of Chicago Press, 1964.
- [12] <https://exstrom.com/blog/abrazolica/posts/logarithm.html>
- [13] <https://is.muni.cz/th/mglkd/bakalarpredelane.pdf>

PŘÍLOHA

Program na vsunuté zlomky v Matlabu:

```
function [a,c] = Vsunute_zlomky(alfa,n)
% Vypocet pozadovaneho poctu sblizenych zlomku a prvku
% retezoveho zlomku pomoci vsunutych zlomku
% alfa ... realne cislo
% n ... pocet sblizenych zlomku a prvku retezoveho zlomku
% a ... prvky retezoveho zlomku
% c ... sblizene zlomky
% p ... citatele sblizenych zlomku
% q ... jmenovatele sblizenych zlomku
% pv ... citatele vsunutych zlomku
% qv ... jmenovatele vsunutych zlomku

syms c
syms v

a(1)=floor(alfa);
if a(1)==alfa
    c(1)=a(1);
    return;
end
p(1)=a(1);
q(1)=1;
c(1)=p(1)/q(1);
a(2)=floor(1/(alfa-p(1)));
p(2)=a(2)*p(1)+1;
q(2)=a(2)*q(1)+0;
c(2)=p(2)/q(2);

pv=zeros(1,n);
qv=zeros(1,n);

for j=1:n-2
    if mod(j,2)==0
        z=-1;
```

```

else
    z=1;
end

if c(j+1)==alfa
    break;
end
for i=1:inf
    pv(i)=p(j)+i*p(j+1);
    qv(i)=q(j)+i*q(j+1);
    if z*(pv(i)/qv(i)-alfa) > 0
        p(j+2)=pv(i-1);
        q(j+2)=qv(i-1);
        c(j+2)=pv(i-1)/qv(i-1);
        a(j+2)=(p(j+2)-p(j))/p(j+1);
        break;
    end
end
end
end
end

```