



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultat de Ciències

Memòria del Treball de Fi de Grau

Aplicaciones de sistemas estocásticos interaccionantes a modelos de mercados financieros

Antonio Fernández Peralta

Grau de Física

Any acadèmic 2013-14

DNI de l'alumne: 43217003A

Treball tutelat per Raül Toral Garcés
Departament de Física

S'autoritza la Universitat a incloure el meu treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació

Paraules clau del treball:
mercados financieros, procesos estocásticos, parámetro de volatilidad

Índice

1. Descripción general	3
2. Introducción	4
2.1. Camino aleatorio	4
2.2. Propiedades estadísticas de los índices de mercado	5
2.3. Métodos matemáticos	8
2.3.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas	8
2.3.2. El método de Gillespie	11
3. El modelo de Kirman	12
3.1. Resultados generales	13
3.2. Momentos de la distribución de los retornos	15
3.3. Funciones de autocorrelación	16
4. Parámetro de volatilidad	17
4.1. Resultados generales	19
4.2. Interpretación del mercado	25
5. Conclusiones	29

1. Descripción general

Las series temporales de los diversos índices de los mercados financieros siguen propiedades estadísticas que, siendo universales y por lo tanto aplicables a muchos casos, son no triviales y no explicables en término de la ley de los grandes números. Ha habido muchos intentos de explicar estas propiedades y uno de los modelos más sencillos es el presentado por A.Kirman quien, inspirado en la conducta de las hormigas buscando comida, introduce un modelo estocástico para la interacción entre agentes financieros. El ingrediente principal del modelo es la existencia de una conducta gregaria o tendencia a seguir a la multitud.

En el estudio de otros modelos de sociedades basados en agentes, utilizados para determinar la evolución del número de hablantes de una determinada lengua, se ha propuesto introducir un parámetro, llamado parámetro de volatilidad. Este caracteriza la forma funcional de la interacción entre la población. Los resultados de ajustar estos modelos en los procesos de muerte de algunas lenguas, muestran que el parámetro de volatilidad es necesario para caracterizar la interacción entre seres humanos.

Inspirándonos en este resultado estudiaremos, en este trabajo, como cambia el modelo de Kirman cuando implementamos este nuevo parámetro.

2. Introducción

2.1. Camino aleatorio

Louis Bachelier fue un pionero en el estudio de los procesos estocásticos y el primero en modelar lo que hoy conocemos como “el movimiento browniano” en 1900, aunque lo hizo en el contexto de modelización de los mercados financieros. En su tesis “*Théorie de la Spéculation*” estudió la evolución de los precios de mercado como un proceso de cambios aleatorios. Para definir el concepto de *camino aleatorio* usamos el suceso aleatorio u , definido como el resultado de lanzar una moneda un número determinado de veces. A cada posible secuencia de caras y cruces le asignaremos una función $x_u(t)$, definida como

$$x_u(t) = \sum_{i=1}^k \delta x_i, \quad t = k\delta t, \quad (1)$$

siendo $\delta x_i = +a$ si el lanzamiento i -ésimo fue cara y $\delta x_i = -a$ si fue cruz. La trayectoria descrita por $x_u(t)$ se conoce como camino aleatorio. En la Figura 1 se puede ver dos resultados típicos del proceso.

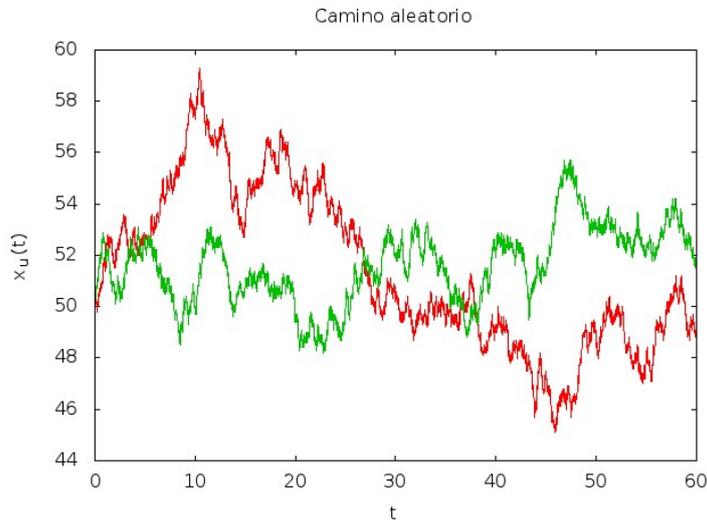


Figura 1: Ejemplo de dos trayectorias distintas de tipo camino aleatorio, con $a = 0,1$ y $\delta t = 0,01$.

La probabilidad de que salgan r caras en n tiradas viene dada por la distribución binomial

$$P(x(n\delta t) = ra) = \binom{n}{\frac{n+r}{2}} 2^{-n}. \quad (2)$$

En el límite $n \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ y $a^2/\delta t = 1$ la distribución binomial tiende a una gaussiana

$$p(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3)$$

con $\sigma^2 = t$ y aquí $n\delta t \rightarrow t$, $ra \rightarrow x$ pasan a ser variables continuas. Esta es una distribución gaussiana que se va ensanchando con el tiempo. Es importante notar que este resultado es más general de lo que parece, ya que según el teorema central del límite casi cualquier distribución que hubiéramos escogido para δx_i con media cero y misma varianza tiende a la misma distribución gaussiana, hemos escogido $\rho(\delta x_i)$ como el lanzamiento de una moneda por simplicidad.

Llamaremos a este límite *proceso de Wiener* y lo denotamos como $W(t)$ en lugar de $x(t)$. La simplicidad del proceso nos permite determinar el valor medio y la correlación a dos tiempos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\langle W(t) \rangle &= 0, \\
\langle W(t_1)W(t_2) \rangle &= \langle W(t_1)(W(t_2) - W(t_1) + W(t_1)) \rangle = \langle W(t_1)(W(t_2) - W(t_1)) \rangle + \langle W(t_1)^2 \rangle = \\
&= \langle W(t_1) \rangle \langle W(t_2) - W(t_1) \rangle + \langle W(t_1)^2 \rangle = \langle W(t_1)^2 \rangle = t_1, \quad t_2 > t_1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Hemos aplicado el carácter gaussiano descrito por (3) y las propiedades fundamentales del camino aleatorio, $W(t_1)$ es independiente de $W(t_2) - W(t_1)$ y por eso podemos separar el valor esperado. Es importante entender estas propiedades de $W(t)$ ya que constituyen los fundamentos de los *procesos de Markov* que estudiaremos más adelante.

Es de utilidad definir el proceso estocástico asociado a la derivada de $W(t)$, conocido como *ruido blanco* $\xi(t)$

$$\frac{dW(t)}{dt} = \xi(t). \tag{5}$$

Mediante las propiedades (4), es posible demostrar que las correlaciones son

$$\begin{aligned}
\langle \xi(t) \rangle &= 0, \\
\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle &= \delta(t_1 - t_2).
\end{aligned} \tag{6}$$

Esto pone de manifiesto que los cambios de $W(t)$ son independientes y actuando en una escala temporal muy corta. Por otro lado, el proceso de Wiener no es derivable y por esta razón hay que ser cuidadoso con la definición de $\xi(t)$, más adelante veremos como interpretar este ruido blanco.

El objetivo fundamental de este trabajo y del estudio realizado por Bachelier es el de explicar cómo evolucionan los precios dentro de los mercados financieros. Por lo tanto, la pregunta que nos debemos hacer es, ¿Qué relación existe entre $W(t)$ y las series temporales de precios $p(t)$? y ¿El proceso camino aleatorio explica las propiedades reales de estas series temporales?. Para contestar a la primera pregunta introducimos dos posibles opciones

$$p(t + \Delta t) - p(t) = W(t + \Delta t) - W(t), \tag{7}$$

$$r(t, \Delta t) \equiv \ln \left(\frac{p(t + \Delta t)}{p(t)} \right) = W(t + \Delta t) - W(t). \tag{8}$$

Los r 's son los retornos logarítmicos, y no es más que el logaritmo del cambio relativo de los precios. La primera es la aproximación que hizo Bachelier y la segunda es lo que se conoce como movimiento browniano geométrico. Esta última es más adecuada ya que intuitivamente no puede ser que el cambio del precio sea independiente del nivel en el que este se encuentra, por esta razón se considera el cambio relativo como una mejor opción. Una manera de visualizar esto, es pensar que si comparamos precios de dos mercados distintos estos pueden ser completamente diferentes, sin embargo los retornos pueden ser parecidos.

A la segunda pregunta contestaremos en el apartado siguiente.

2.2. Propiedades estadísticas de los índices de mercado

Se habla de las propiedades generales de los retornos cuando estas se pueden observar con regularidad en los datos empíricos y en casi todos los mercados. Se distinguen dos tipos de rasgos dependiendo de si nos referimos a la distribución de probabilidad, (3) es un ejemplo, o a las correlaciones de los retornos (lineales o de cualquier otra clase).

Empezando por la distribución de probabilidad (pdf, por sus siglas en inglés), en la Figura 2 se puede ver un ejemplo donde se ve claramente que la hipótesis gaussiana vista en el apartado anterior no se ajusta a los datos reales. La razón es que los eventos fuera del intervalo $\pm 3\sigma$ son más probables y hacen que la distribución tenga una forma más puntiaguda en el centro y faldones anchos en la cola. Una manera de

cuantificar la disimilitud de una distribución respecto a la distribución normal es lo que se llama curtosis, definida en función de los momentos de orden superior

$$\kappa = \frac{\langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle}{\sigma^4} - 3. \quad (9)$$

Si $\kappa = 0$, la forma de la pdf es mesocúrtica, si $\kappa > 0$ leptocúrtica (forma puntiaguda) y $\kappa < 0$ platicúrtica. Por lo tanto, la primera propiedad general, observable en los datos de la Figura 2, es la forma leptocúrtica de la distribución.

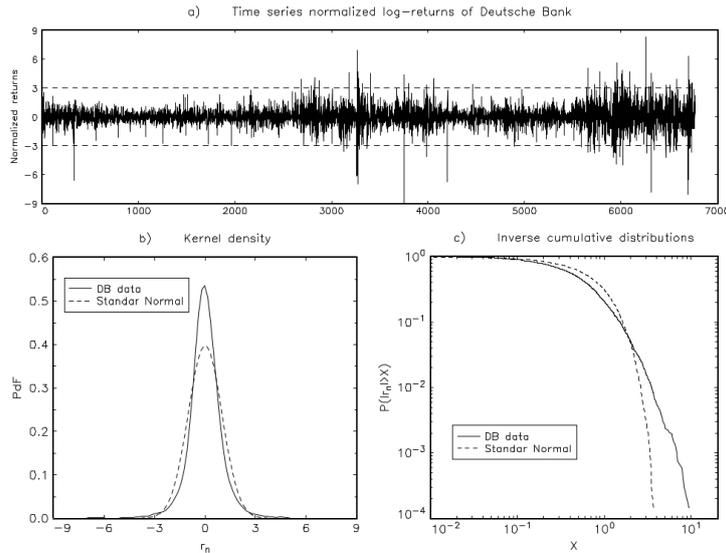


Figura 2: Serie temporal de retornos logarítmicos diarios del Deutsche Bank, junto a su distribución de probabilidad y la distribución acumulada. La línea discontinua en el panel (a) es el intervalo $\pm 3\sigma$ y en el panel (b) y (c) corresponde a la hipótesis gaussiana. Figura tomada de [1].

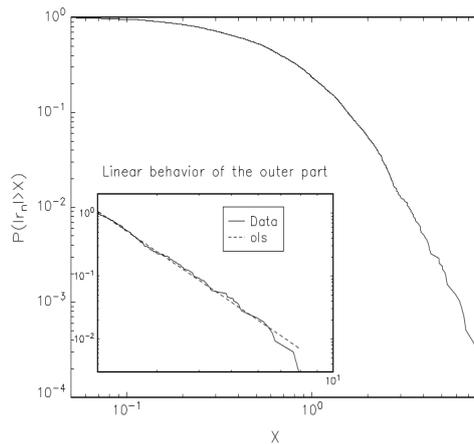


Figura 3: Distribución acumulada de los retornos absolutos normalizados, extraída de datos empíricos de stocks cogidos al azar de la bolsa de Tokio. Se aprecia el comportamiento lineal de la cola, indicando un decaimiento de tipo ley de potencias. Figura tomada de [1].

En ocasiones, el único uso de la curtosis (9) no es la mejor forma de clasificar una distribución ya que

es usual encontrar divergencias en los momentos de ordenes altos. Se llama *índice de cola* al momento más alto convergente α , e indica cómo decrece la distribución en zonas lejanas a la media.

Esta propiedad, divergencias en los momentos altos, que se denomina en inglés *fat tail phenomenon*, es otra característica que se repite en los mercados y que refleja la diferencia con el comportamiento gaussiano. Una manera de percatarse de la presencia de este fenómeno es mediante un ajuste lineal de la distribución acumulada de los retornos absolutos $|r|$ en escala log-log. La idea básica es que si la distribución de los retornos cumple $p(r \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{1}{r^{\alpha-1}}$, entonces para r suficientemente grande tendríamos $P(x > r) = \int_r^\infty p(x)dx \propto \frac{1}{r^\alpha}$, la pendiente en escala log-log sería el índice de cola, en la Figura 3 tenemos un ejemplo de esto.

Veamos ahora que ocurre con las correlaciones y las propiedades dinámicas. Una manera de estudiar las correlaciones es mediante la función de autocorrelación que se define como

$$C(\tau) = \frac{\langle (x(t) - \bar{x})(x(t + \tau) - \bar{x}) \rangle}{\sigma^2}, \quad (10)$$

\bar{x} es la media de $x(t)$ y σ la desviación cuadrática media. En la Figura 4 se muestran resultados empíricos de la autocorrelación. Se observa que: (i) los retornos aparecen descorrelacionados (ii) los retornos absolutos y los cuadrados tienen un correlación alta que decrece lentamente (iii) la autocorrelacion de los retornos absolutos es mayor que la de los cuadrados.

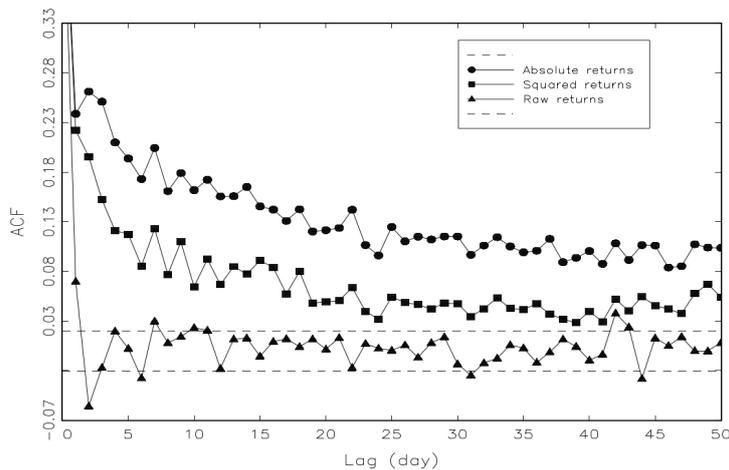


Figura 4: Correlogramas (estimación de la correlación a partir de una serie temporal) de los retornos, los retornos absolutos y los retornos al cuadrado de las series temporales de DAX (Deutscher Aktien-Index). Figura tomada de [1].

Por lo tanto, el proceso camino aleatorio predice correctamente la ausencia de correlación en los retornos. Por otro lado, cambios aleatorios implica que los retornos absolutos y los retornos cuadrados también están descorrelacionados, y esto no se observa en los datos reales.

Las funciones no lineales de los retornos muestran correlaciones de largo alcance con decrecimientos en forma de potencias. A este fenómeno se lo conoce en inglés como *volatility clustering*, y tiene una explicación intuitiva. Significa que las grandes variaciones de los precios tienden a estar seguidas por grandes variaciones y las pequeñas variaciones por pequeñas.

Finalmente, concluimos que el modelo más sencillo posible introducido por Bachelier no explica la mayoría de los fenómenos observados en los datos empíricos. Sin embargo, desde el punto de vista teórico es importante ya que refleja lo impredecibles que son los precios y nos proporciona una herramienta matemática para explicar los procesos estocásticos.

En el capítulo siguiente, veremos que con un modelo sencillo, conocido como el modelo de Kirman, se puede explicar estos rasgos observado como propiedades emergentes de las interacciones entre agentes dentro del mercado.

2.3. Métodos matemáticos

Para entender el resto de este trabajo, es necesario introducir las herramientas matemáticas básicas para el estudio de los procesos estocásticos.

Un proceso estocástico viene determinado por el conjunto de distribuciones de probabilidad

$$f(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1), \quad (11)$$

para cualquier valor de n . La definición concreta es que $f(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1)dx_1dx_2\dots dx_n$ es la probabilidad de que la función $x(t)$ tome valores entre x_1 y x_1+dx_1 en el instante t_1 , entre x_2 y x_2+dx_2 en el instante t_2 , etc. Aquí hay que entender $x(t)$ como una función que proviene de la realización de un proceso estocástico, un ejemplo es (1). Normalmente, no es posible determinar este conjunto infinito y es suficiente con las pdf a un tiempo y a dos tiempos $f(x_1, t_1)$ y $f(x_2, t_2; x_1, t_1)$, ya que nos permite caracterizar todas las propiedades estadísticas explicadas en el apartado anterior (pdf estacionaria y correlaciones temporales).

En concreto, nosotros nos restringiremos a un conjunto menos general de procesos llamados de Markov, para los cuales se cumple que la probabilidad condicionada satisface

$$f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}), \quad t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n. \quad (12)$$

Esta característica, que básicamente refleja una pérdida de la memoria de los valores pasados de la función f , implica que un proceso de Markov queda completamente determinado por $f(x_1, t_1)$ y $f(x_2, t_2 | x_1, t_1)$. Vemos que la probabilidad de pasar de $x_1 \rightarrow x_2$ es independiente de tiempos posteriores a t_1 , reflejando así la memoria limitada de este tipo de procesos.

Usando las relaciones usuales de probabilidad condicionada podemos deducir las ecuaciones que determinan los procesos de Markov

$$f(x_2, t_2) = \int dx_1 f(x_2, t_2 | x_1, t_1) f(x_1, t_1), \quad (13)$$

y

$$f(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int dx_2 f(x_3, t_3 | x_2, t_2) f(x_2, t_2 | x_1, t_1), \quad t_1 \leq t_2 \leq t_3. \quad (14)$$

La ecuación (14) se conoce como ecuación de Chapman-Kolmogorov.

Es posible, deducir una versión diferencial de esta ecuación conocida como ecuación maestra y de gran importancia para el estudio de todo tipo de procesos, ya que es fácilmente generalizable para procesos no markovianos.

En lugar de deducirla de la ecuación (14), la obtendremos directamente como una ecuación de balance y para el caso de una variable estocástica discreta n , posteriormente veremos el límite al continuo.

2.3.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Un caso particular de los procesos de Markov son los procesos *one-step* o procesos de un paso. Imaginemos que la variable que determina el estado del sistema puede tomar los valores $n = 0, 1, 2, \dots, N$, cuando hablamos de procesos a un paso nos referimos a que sólo son posibles transiciones $n \rightarrow n \pm 1$ en un intervalo de tiempo elemental.

Para caracterizar nuestro sistema, es necesario conocer cierta información de como este evoluciona con el tiempo. Por esta razón se definen las tasas $\pi(n \rightarrow n')$, como la probabilidad por unidad de tiempo de que exista un cambio de $n \rightarrow n'$. Supondremos que estas tasas son conocidas por observación o deducción del comportamiento microscópico de un determinada población (ya sea de humanos, partículas, ...).

Planteemos ahora la ecuación de continuidad que ha de cumplir la función de probabilidad $P(n, t)$ (probabilidad de encontrar el sistema en n en un tiempo t), tal y como es usual en otros campos de la física y en forma gráfica

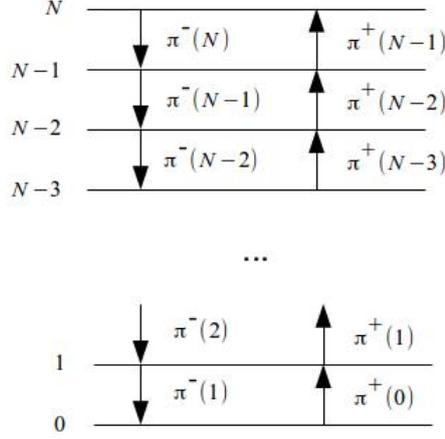


Figura 5: Esquema de la ecuación maestra para un proceso de un paso con un número finito de estados N .

$$\frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = \pi^+(n-1)P(n-1, t) + \pi^-(n+1)P(n+1, t) - [\pi^+(n) + \pi^-(n)]P(n, t). \quad (15)$$

Hemos usado la notación $\pi^\pm(n) = \pi(n \rightarrow n \pm 1)$. Una manera más compacta de escribir esta ecuación es mediante los operadores escalera definidos como, $\mathbf{E}^\pm[f(n)] = f(n \pm 1)$

$$\frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = (\mathbf{E} - 1) [\pi^-(n)P(n, t)] + (\mathbf{E}^{-1} - 1) [\pi^+(n)P(n, t)]. \quad (16)$$

Hay que tener en cuenta que estas ecuaciones requerirán condiciones de contorno debido a que como vemos en la Figura 5, el proceso tiene un número finito de estados. Para simplificar, supondremos que $\pi^+(N) = \pi^-(0) = 0$ y entonces ya no es necesario imponer condiciones extra.

Veamos ahora una solución de (15) para el caso estacionario, $P_{st}(n)$. Imponiendo $\frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = 0$ obtenemos

$$\pi^+(n-1)P_{st}(n-1) + \pi^-(n+1)P_{st}(n+1) - [\pi^+(n) + \pi^-(n)]P_{st}(n) = 0, \quad (17)$$

equivalentemente

$$\pi^-(n)P_{st}(n) - \pi^+(n-1)P_{st}(n-1) = \pi^-(n+1)P_{st}(n+1) - \pi^+(n)P_{st}(n). \quad (18)$$

En concreto, aplicando esta relación para $n = 0$ y usando las propiedades comentadas, que han de tener las tasas en los contornos, obtenemos $\pi^-(1)P_{st}(1) - \pi^+(0)P_{st}(0) = 0$ y por lo tanto, retomando la relación (18) válida para todo n , vemos que se ha de cumplir

$$\pi^-(n+1)P_{st}(n+1) - \pi^+(n)P_{st}(n) = 0. \quad (19)$$

Esta es una relación de recurrencia que se resuelve fácilmente de forma iterativa

$$P_{st}(n) = P_{st}(0) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\pi^+(k)}{\pi^-(k+1)}. \quad (20)$$

Finalmente imponiendo la condición de normalización $\sum_i P_{st}(i) = 1$

$$P_{st}(n) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\pi^+(k)}{\pi^-(k+1)}}{1 + \sum_{n=1}^N \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\pi^+(k)}{\pi^-(k+1)}}. \quad (21)$$

Esta expresión es muy rápida y fácil de computar, y por lo tanto útil. Ya sabemos como obtener una descripción de la función de probabilidad, que es la primera propiedad que nos interesará estudiar de los índices de mercados. La segunda son las características dinámicas, como la evolución temporal de la media $\langle n \rangle(t)$ y las correlaciones $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle$, para ello podemos recurrir directamente a la ecuación Maestra (16).

En lugar de esto vamos a pasar a una descripción continua de los procesos a un paso. Para que esto sea posible es imprescindible suponer que el parámetro N es suficientemente grande como para considerar nuestra nueva variable intensiva $x = 2\frac{n}{N} - 1 \in [-1, +1]$ continua. Esta nueva variable suele llamarse magnetización por la analogía con modelos que describen el ferromagnetismo, o índice de opinión que tiene un sentido más directo para los procesos donde la población es de personas y no de átomos o moléculas.

La función de probabilidad $P(n, t)$ pasa a ser una distribución de probabilidad $P(n, t) = \frac{2}{N}\rho(x, t)$ y el operador escalera se puede desarrollar en potencias negativas de N , mediante un desarrollo de Taylor

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^\pm - 1) &= (\exp[\pm \frac{\partial}{\partial n}] - 1) = (\exp[\pm \frac{2}{N} \frac{\partial}{\partial x}] - 1) = \\ &= \left(\pm \frac{2}{N} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + O\left(\frac{1}{N^3}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Introduciendo esto en la ecuación maestra (16) obtenemos

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x)\rho(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x)\rho(x, t)], \quad (23)$$

con

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{2}{N} \left(\pi^+ \left[\frac{N}{2}(1+x) \right] - \pi^- \left[\frac{N}{2}(1+x) \right] \right), \\ D(x) &= \frac{4}{N^2} \left(\pi^+ \left[\frac{N}{2}(1+x) \right] + \pi^- \left[\frac{N}{2}(1+x) \right] \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Esta ecuación en derivadas parciales se conoce como ecuación de Fokker-Planck, la función $\mu(x)$ es el término de deriva y $D(x)$ es el coeficiente de difusión.

Es posible encontrar una solución para el estado estacionario, equivalente a (21), para la ecuación (23). Simplemente imponemos nuevamente $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [D(x)\rho_{st}(x)] - \mu(x)\rho_{st}(x) = 0. \quad (25)$$

Notar aquí, que además hemos supuesto que la constante de integración que se obtiene al integrar (24) respecto de x es cero también. Esta condición es necesaria debido a que x esta acotada, que es equivalente al desarrollo hecho en (17), (18) y (19).

La ecuación (25) es lineal, de primer orden y homogénea y se puede integrar de forma usual, obteniendo

$$\rho_{st}(x) = A \exp \left[\int^x \frac{2\mu(z) - D'(z)}{D(z)} dz \right]. \quad (26)$$

A desempeña el papel de $P_{st}(0)$ en (20) y se determina también con la condición de normalización de $\int \rho_{st}(x) dx = 1$.

Tanto la ecuación maestra como la Fokker-Planck plantean una descripción del proceso mediante su distribución de probabilidad, no obstante otra perspectiva es posible. Langevin (1908) consideró caracterizar un proceso estocástico (en concreto el movimiento browniano) describiendo la ecuación diferencial

que debería cumplir la trayectoria $x(t)$ en lugar de fijarse en la pdf $\rho(x, t)$. Esta ecuación se llama ecuación de Langevin

$$\dot{x} = \mu(x) + \sqrt{D(x)}\xi(t). \quad (27)$$

Es posible demostrar que un proceso que cumple (23) también cumple (27), dónde $\mu(x)$ y $D(x)$ son los mismos en los dos casos. Por otro lado, $\xi(t)$ es el ruido blanco introducido en (5) y con las correlaciones (6). Ahora bien, hay que ser cuidadosos cuando se habla de ruido blanco ya que $\xi(t)$ no es una función bien comportada ya que el proceso camino aleatorio a tiempo continuo (o proceso de Wiener) no viene descrito por una función derivable. Por esta razón, hay varias interpretaciones del ruido blanco. Las dos más usadas son la de Itô y la de Stratonovich. Se diferencian en como actúa $\xi(t)$ cuando es integrada. En la interpretación de Itô para $\Delta t \rightarrow 0$

$$\int_t^{t+\Delta t} f(x(s))\xi(s)ds = f(x(t))[W(t+h) - W(t)], \quad (28)$$

donde $W(t)$ es el proceso de Wiener, representado por $x(t)$ en (3) y (5).

En la interpretación de Stratonovich

$$\int_t^{t+\Delta t} f(x(s))\xi(s)ds = f\left(\frac{x(t) + x(t+\Delta t)}{2}\right)[W(t+h) - W(t)]. \quad (29)$$

La ecuación (27) esta escrita en el convenio de Itô. En la representación de Stratonovich la ecuación de Langevin es

$$\dot{x} = \mu(x) - \frac{1}{4}D'(x) + \sqrt{D(x)}\xi(t). \quad (30)$$

Desde el punto de vista práctico la ecuación (27) nos será útil para estudiar propiedades tales como la función de autocorrelación, ya que si la integramos obtendremos los retornos (8). Si asumimos un Δt finito pero muy próximo a cero, podemos aproximar a primer orden (usando la interpretación de Itô)

$$\begin{aligned} r(t, \Delta t) &= x(t + \Delta t) - x(t) = \int_t^{t+\Delta t} \mu(x(s))ds + \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{D(x(s))}\xi(s)ds \simeq \\ &\simeq \Delta t \mu(x(t)) + \sqrt{D(x(t))}[W(t + \Delta t) - W(t)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Si recordamos el proceso de Wiener es gaussiano (3) y con desviación $\sigma^2 = t$. Por lo tanto podemos escribir

$$r(t, \Delta t) = x(t + \Delta t) - x(t) \simeq \Delta t \mu(x(t)) + \sqrt{D(x(t))}\Delta t \eta, \quad (32)$$

donde η es una variable normalmente distribuida con media cero y varianza uno, tal que $\rho(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)$.

Aquí hemos interpolado de tal forma que en el intervalo $(t, t + \Delta t)$, el cambio de x sólo depende de las $\mu(x(t))$, $D(x(t))$ del paso temporal anterior. Esto no es cierto para un Δt finito, sin embargo con desarrollos más exhaustivos de (31) se puede demostrar que en la ecuación (32) se comete un error de $O(\Delta t^{3/2})$ por paso temporal.

2.3.2. El método de Gillespie

Como ya hemos dicho, uno normalmente describe un proceso estocástico introduciendo las tasas $\pi^\pm(n)$ y desea conocer cómo se comporta n con el tiempo. Existen técnicas para simular las trayectorias $n(t)$, en este trabajo se usará el método de Gillespie.

El método consiste en computar en qué instante se producirá la siguiente transición y después calcular qué transición ocurre ($n \rightarrow n + 1$ ó $n \rightarrow n - 1$).

El sistema se encuentra en n para t_0 . La probabilidad de que el sistema permanezca en el estado n en un tiempo t , y después salte al estado n' en el intervalo $(t, t + dt)$ la denominaremos $f_{n \rightarrow n'}(t)dt$ y se puede demostrar que viene dada por una distribución exponencial

$$f_{n \rightarrow n'}(t) = e^{-\pi(n \rightarrow n')t} \pi(n \rightarrow n'). \quad (33)$$

Si el sistema puede saltar a un abanico de estados $\{n'\}$, tendremos

$$f_{n \rightarrow \{n'\}}(t) = e^{-\Pi(n)t} \Pi(n), \quad (34)$$

siendo $\Pi(n) = \sum_{n' \neq n} \pi(n \rightarrow n')$. Por lo tanto, el intervalo de tiempo t_1 en el que se producirá la siguiente transición se puede calcular generando un número aleatorio u_0 uniformemente distribuido entre $(0, 1)$ y resolviendo la ecuación

$$u_0 = \int_0^{t_1} f_{n \rightarrow \{n'\}}(t) dt = 1 - e^{-\Pi(n)t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{-\ln(1 - u_0)}{\Pi(n)} = \frac{-\ln(u_0)}{\Pi(n)}. \quad (35)$$

La última igualdad es cierta debido a que la probabilidad de obtener $1 - u_0$ es la misma que u_0 . Por otro lado la probabilidad $p_{n \rightarrow n'}$ de alcanzar el estado $n \neq n'$ es proporcional a su tasa

$$p_{n \rightarrow n'} = \frac{\pi(n \rightarrow n')}{\Pi(n)}. \quad (36)$$

Finalmente determinaremos a qué estado n' ha saltado el sistema generando otro número aleatorio v_0 y encontrado el valor más bajo n' que cumple $\sum_{j=1}^{n'} p_{n \rightarrow j} > v_0$.

Una vez que sabemos generar trayectorias, es posible determinar tanto la distribución $P(n, t)$, como las correlaciones $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle$, etc.

3. El modelo de Kirman

Alan Kirman en [2], introdujo un modelo parecido al camino aleatorio, que a diferencia de este sí es capaz de reproducir las propiedades globales de los mercados. Para entender la novedad de su aproximación, es de utilidad describir el modelo tal y como lo hizo Kirman en su artículo.

La idea básica es explicar un fenómeno colectivo que se observa en las colonias de hormigas cuando estas deben decidir qué fuente de comida explotar habiendo más de una fuente cercana. Imaginemos que forzamos a las hormigas a decidir entre dos fuentes de comida, la fuente A y la fuente B (en el proceso camino aleatorio, elegir la fuente A correspondería a tirar cara y elegir la fuente B cruz). Estas dos fuentes son equivalentes, en el sentido de que no existe preferencia aparente para las hormigas a la hora de decidir a cual de ellas dirigirse (misma distancia fuente-hormiguero, misma cantidad de comida, etc). Se observa que después de cierto tiempo la mayoría de las hormigas tiende a decantarse por una sola fuente de comida. Es posible que las hormigas hagan un cambio de fuente pero la mayoría de ellas están explotando una de ellas, no las dos a la vez.

Este curioso fenómeno se puede entender, pensando que las hormigas interaccionan entre ellas de alguna forma, de tal manera que aquellas que han elegido una fuente convencen a las demás para que las sigan. La explicación que dan los entomólogos, es que esta interacción se debe a que las hormigas dejan un rastro de feromonas a su paso, que las demás son capaces de captar.

Es interesante comprobar como podemos explicar el comportamiento de las hormigas y la estadística de los índices de mercado con un mismo modelo. La interpretación desde el punto de vista de los mercados corresponde a sustituir hormigas por agentes financieros, y las fuentes de comida por posibles conductas de compra/venta. En este trabajo utilizaremos la interpretación que propone Alfarano en [3], que consiste básicamente en relacionar los retornos logarítmicos con el proceso estocástico tal y como hemos explicado en la sección 1.1, usando la ecuación (8).

Una vez analizado cómo se comporta una hormiga cuando ha de decidir entre los dos estados, fuente A o fuente B , podemos introducir las tasas de cambio entre estos dos estados basándonos en la interacción entre hormigas.

Llamaremos n al número de agentes/hormigas en el estado 1/fuente A. Y N al número de agentes totales. Un agente puede cambiar de estado mediante dos factores: (i) de forma aleatoria con probabilidad a , (hay que entender este mecanismo como un desconocimiento de la naturaleza de las decisiones de un agente, ya que nos es imposible saber como piensan todos los constituyentes de una colectividad) y (ii) debido a la interacción y al intercambio de información entre agentes con probabilidad $\bar{h}\frac{n}{N}$.

a y \bar{h} reflejan lo intensa que es cada tipo de conducta.

Por lo tanto, la tasa de cambio para un agente es

$$\begin{aligned}\pi(B \rightarrow A) &= a + \bar{h}\frac{n}{N}, \\ \pi(A \rightarrow B) &= a + \bar{h}\frac{N-n}{N}.\end{aligned}\tag{37}$$

Y las tasas totales para el conjunto de agentes es

$$\begin{aligned}\pi^+(n) &= (N-n)\left(a + \bar{h}\frac{n}{N}\right), \\ \pi^-(n) &= n\left(a + \bar{h}\frac{N-n}{N}\right).\end{aligned}\tag{38}$$

Si establecemos $\bar{h} = 0$ recuperamos el proceso camino aleatorio, ya que eliminamos la interacción y los cambios son puramente aleatorios. Es importante notar que en las expresiones (37) y (38), la probabilidad de cambio por interacción depende linealmente con la densidad de agentes en el estado contrario. Esto significa que un agente observa la configuración de la población y toma una decisión en base a la proporción de agentes en cada estado.

Es posible introducir otra perspectiva pensando que un agente en el estado B no interactúa debido a la proporción $\left(\frac{n}{N}\right)$, sino con el número total n , cambiando las tasas de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\pi^+(n) &= (N-n)(a + hn), \\ \pi^-(n) &= n(a + h(N-n)),\end{aligned}\tag{39}$$

siendo $h = \frac{\bar{h}}{N}$. Una propiedad esencial de (38) es la extensividad, ya que podemos escribir $\pi^\pm(n) = Nf^\pm\left(\frac{n}{N}\right)$. Por otra lado, las tasas (39) no cumplen esta propiedad y por eso se llaman no extensivas.

La diferencia entre estos dos formalismos es la naturaleza de las interacciones. Si incrementamos N vemos inmediatamente lo que ocurre, si usamos el formalismo extensivo la interacción queda invariante, en cambio con el formalismo no extensivo se incrementa la probabilidad de interacción y el intercambio de información. Por esta razón cuando se usa (38) se suele interpretar como una interacción local, y por otro lado (39) se usa para modelar por ejemplo la presión de grupo o la interacción mediante medios de comunicación. Esto será fundamental cuando estudiemos el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$.

3.1. Resultados generales

Una vez introducido el modelo mediante las tasas de transición, es sencillo obtener algunas conclusiones consultando la sección 1.3 de este trabajo.

Empecemos por obtener una solución analítica para la distribución de probabilidad estacionaria. Para ello supondremos que N es suficientemente grande y podemos usar la ecuación de Fokker-Planck (23) y (24), con las tasas no extensivas (39) obtenemos las siguientes expresiones para el término de deriva $\mu(x)$ y el coeficiente de difusión $D(x)$

$$\begin{aligned}\mu(x) &= -2ax, \\ D(x) &= \frac{4a}{N} + 2h(1-x^2).\end{aligned}\tag{40}$$

Si despreciamos $\frac{4a}{N}$ frente de $2h(1-x^2)$, vemos que en el término $\mu(x)$ solo depende del parámetro a y $D(x)$ de h . Esto tiene una explicación intuitiva desde el punto de vista de las trayectorias $x(t)$ y la ecuación de Langevin (27), interpretando $\mu(x)$ como una fuerza que tiende a llevar el sistema al centro ($x = 0$) y $D(x)$ tiende a llevarlo a los extremos $x = \pm 1$. Podemos predecir que el resultado va a coincidir con el fenómeno observado en la hormigas si h es superior al término a , ya que predominarán las fuerzas que hacen tender x a los extremos.

Usando (26) obtenemos

$$\rho_{st}(x) = A \exp \left[\int^x (1-\varepsilon) \frac{2z}{1-z^2} dz \right] = A(1-x^2)^{\varepsilon-1}, \quad (41)$$

siendo $\varepsilon = \frac{a}{h}$. Imponiendo la condición de normalización obtenemos A

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\varepsilon-1} dx = 2^{2\varepsilon-1} B(\varepsilon, \varepsilon) \equiv 2^{2\varepsilon-1} \frac{\Gamma(\varepsilon)^2}{\Gamma(2\varepsilon)} \Rightarrow A = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{2^{2\varepsilon-1} \Gamma(\varepsilon)^2}, \quad (42)$$

finalmente

$$\rho_{st}(x) = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{2^{2\varepsilon-1} \Gamma(\varepsilon)^2} (1-x^2)^{\varepsilon-1}. \quad (43)$$

Vemos como en el límite termodinámico la distribución sólo depende del cociente $\frac{a}{h}$, esto indica que la formulación no extensiva conserva las propiedades estadísticas del proceso cuando varía N , sin embargo para las tasas extensivas $h \rightarrow \frac{\tilde{h}}{N}$, y en el límite $N \rightarrow \infty$ tenemos $\varepsilon \rightarrow \infty$ y por lo tanto

$$\rho_{st}(x) = A \exp [(\varepsilon - 1) \ln(1 - x^2)] \rightarrow \exp[-\varepsilon x^2], \quad (44)$$

recordar que x sigue estando acotada entre $(-1, 1)$. Deducimos entonces, que si las interacciones son locales en el límite de N grande recuperamos el carácter gaussiano del camino aleatorio.

En la Figura 6 y 7 podemos observar estos resultados comparados con las simulaciones. Se aprecian 3 casos distintos $\varepsilon > 1$, $\varepsilon < 1$ y $\varepsilon = 1$, que corresponden a los paneles 1, 2 y 3 de estas figuras, respectivamente. Es interesante notar como en la situación $\varepsilon < 1$ la mayoría de la población está en uno de los estados durante largos periodos de tiempo, tal y como describían los entomólogos. Pero, ¿cuál de estos tres casos es el que se da entre la población de agentes dentro de los mercados financieros? Ya hemos demostrado que para $\varepsilon \gg 1$ se reproduce una distribución gaussiana (tal y como se observa en el panel 3 de la Figura 7). Sin embargo ya comprobamos que un proceso puramente gaussiano no reproduce completamente las propiedades estadísticas de los retornos, por lo tanto podemos esperar una situación intermedia $\varepsilon > 1$ pero no excesivamente grande.

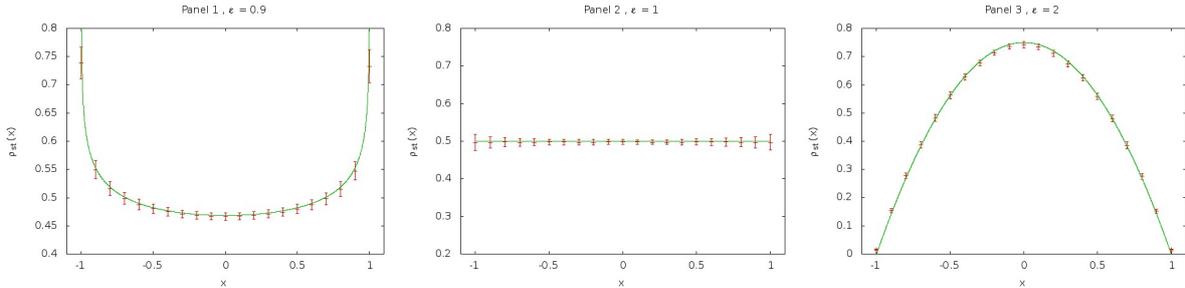


Figura 6: Ejemplos de la distribución de probabilidad estacionaria del índice de opinión para $N = 200$. La línea continua es la solución analítica obtenida en (43) y los puntos corresponden a el resultado de las simulaciones de la trayectorias $n(t)$. Las barras de error de los puntos provienen de hacer estadística sobre 200 trayectorias distintas.

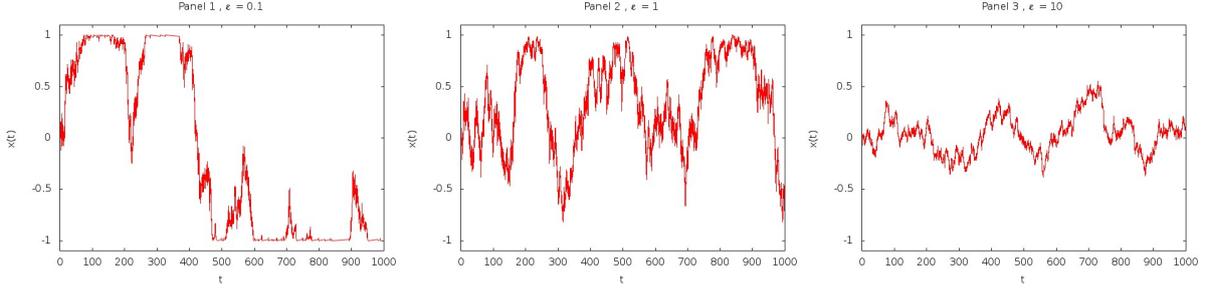


Figura 7: Ejemplos de las trayectorias del índice de opinión respecto al tiempo, obtenidos de las simulaciones, para los tres casos relevantes del modelo con $N = 200$.

3.2. Momentos de la distribución de los retornos

Debido a la simplicidad del modelo de Kirman, la distribución (43) tiene una expresión sencilla que nos permitirá estudiar los retornos en detalle. Usando la relación (32)

$$r(t, \Delta t) = -2ax\Delta t + \sqrt{2h\Delta t(1-x^2)}\eta, \quad (45)$$

podemos calcular los momentos de los retornos de cualquier orden par como

$$\langle r^{2k} \rangle = (2h\Delta t)^k \langle (1-x^2)^k \eta^{2k} \rangle + O(\Delta t^{k+1}). \quad (46)$$

Al ser x y η variables independientes, podemos separar el valor medio de (46) y usar los momentos de la distribución gaussiana

$$\langle \eta^{2k} \rangle = \frac{(2k)!}{2^k k!}. \quad (47)$$

Para obtener $\langle (1-x^2)^k \rangle$, podemos utilizar la definición de la función beta de Euler

$$B(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{1}{2^{2\varepsilon-1}} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\varepsilon-1} dx = \frac{\Gamma(\varepsilon)^2}{\Gamma(2\varepsilon)}, \quad (48)$$

de donde

$$\langle (1-x^2)^k \rangle = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{2^{2\varepsilon-1}\Gamma(\varepsilon)^2} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\varepsilon+k-1} dx = 2^{2k} \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon+2k)} \left[\frac{\Gamma(\varepsilon+k)}{\Gamma(\varepsilon)} \right]^2. \quad (49)$$

De aquí podemos extraer los momentos $\langle r^2 \rangle$ y $\langle r^4 \rangle$ con los que nos es posible calcular la curtosis (9)

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4a\Delta t}{2\varepsilon+1}, \quad \langle r^4 \rangle = \frac{48h^2\Delta t^2\varepsilon(\varepsilon+1)}{(2\varepsilon+3)(2\varepsilon+1)}, \quad (50)$$

$$\kappa = \frac{\langle r^4 \rangle}{\langle r^2 \rangle^2} - 3 = \frac{3}{\varepsilon(2\varepsilon+3)}. \quad (51)$$

Esta expresión indica que la curtosis es siempre positiva. Esto significa que las interacciones y el intercambio de información entre agentes es un posible causante de las formas leptocúrticas que se observan en los datos empíricos de los retornos en los mercados financieros. Para $\varepsilon \rightarrow \infty$, es decir $h \rightarrow 0$, vemos como $\kappa \rightarrow 0$, reflejando que a medida que decrece la interacción, más nos aproximamos al resultados gaussiano. Por otro lado, este desarrollo implica que todos los momentos pares de la distribución de retornos convergen indicando un decaimiento de tipo exponencial para $r \rightarrow \infty$, cuando en la Figura 3 vimos que una de las propiedades generales de los retornos era el decaimiento de tipo ley de potencias. En el capítulo siguiente, usaremos otra relación entre el proceso estocástico y los retornos financieros introducida por Alfarano en [4], más complicada que (9), que a diferencia de esta si es capaz de explicar el decaimiento de tipo ley de potencias.

3.3. Funciones de autocorrelación

Para estudiar las propiedades dinámicas y las correlaciones de los retornos utilizaremos nuevamente la ecuación de Langevin integrada (45). La idea es usarla como una ecuación recursiva de la siguiente forma

$$x_{n+1} = (1 - 2a\Delta t)x_n + \sqrt{2h\Delta t(1 - x_n^2)}\eta_n, \quad (52)$$

siendo $t = n\Delta t$ y η_n es la variable gaussiana asociada a la transición $x_n \rightarrow x_{n+1}$. Empezaremos por calcular la correlación de los retornos y después los retornos cuadrados. Llamemos $F_n = \langle x_n x_0 \rangle$ con $F_0 = \langle x_0^2 \rangle$, reescribiendo (52) para F_n tenemos

$$F_n = (1 - 2a\Delta t)F_{n-1}. \quad (53)$$

Esta relación de recurrencia tiene la solución

$$F_n = F_0(1 - 2a\Delta t)^n. \quad (54)$$

Podemos determinar la función de correlación de los retornos como

$$C_r(t) = \frac{\langle r_n r_0 \rangle}{\langle r_0^2 \rangle} = \frac{\langle (x_{n+1} - x_n)(x_1 - x_0) \rangle}{\langle (x_1 - x_0)^2 \rangle} = \frac{2F_n - F_{n+1} - F_{n-1}}{2(F_0 - F_1)}, \quad (55)$$

introduciendo la expresión (54) obtenemos

$$C_r(t) = -a\Delta t(1 - 2a\Delta t)^{n-1} \simeq -a\Delta t \exp(-2at), \quad (56)$$

el último límite es para $\Delta t \rightarrow 0$.

Continuemos con los retornos cuadrados

$$C_{r^2}(t) = \frac{\langle r_n^2 r_0^2 \rangle - \langle r_0^2 \rangle^2}{\langle r_0^4 \rangle - \langle r_0^2 \rangle^2}, \quad (57)$$

los momentos de los retornos los calculamos en el apartado anterior, nos queda determinar $\langle r_n^2 r_0^2 \rangle$. Utilizando nuevamente (52) calculamos a primer orden con Δt

$$\langle r_n^2 r_0^2 \rangle = \langle (x_{n+1} - x_n)^2 (x_1 - x_0)^2 \rangle = 4h^2 \Delta t^2 \langle 1 - x_n^2 x_0^2 \eta_0^2 - x_n^2 \eta_0^2 - x_0^2 \rangle + O(\Delta t^4). \quad (58)$$

Definimos $H_n = \langle x_n^2 \eta_0^2 \rangle$ con $H_0 = \langle x_0^2 \rangle = \frac{1}{2\varepsilon+1}$, y usamos (53) para obtener la relación de recurrencia de H_n

$$\begin{aligned} H_n &= (1 - 2h\Delta t(2\varepsilon + 1))H_{n-1} + 2h\Delta t + O(\Delta t^2), \quad n \geq 2, \\ H_1 &= (1 - 2h\Delta t(2\varepsilon + 3))H_0 + 6h\Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (59)$$

Resolviendo la ecuación de recurrencia de forma usual, despreciando los términos de orden Δt^2

$$H_n = H_0 + 8aH_0\Delta t(1 - 2h\Delta t(2\varepsilon + 1))^{n-1} + O(\Delta t^2) \quad (60)$$

Definimos $G_n = \langle x_n^2 x_0^2 \eta_0^2 \rangle$ con $G_0 = \langle x_0^4 \rangle = \frac{3}{(2\varepsilon+1)(2\varepsilon+3)}$, y usamos (53) para obtener la relación de recurrencia de G_n

$$\begin{aligned} G_n &= (1 - 2h\Delta t(2\varepsilon + 1))G_{n-1} + 2h\Delta tH_0 + O(\Delta t^2), \quad n \geq 2, \\ G_1 &= (1 - 2h\Delta t(2\varepsilon + 3))G_0 + 6h\Delta tH_0 + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (61)$$

Resolviendo de forma equivalente al anterior

$$G_n = H_0^2 + (G_0 - H_0^2)(1 - 2h\Delta t(2\varepsilon + 1))^{n-1} + O(\Delta t^2). \quad (62)$$

Finalmente, introduciendo todos estos resultados en (57) y aproximando $(1 - 2h\Delta t(2\varepsilon + 1))^{n-1} \simeq \exp(-2ht(2\varepsilon + 1))$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos

$$C_{r,2}(t) \simeq \frac{1}{4\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 3} \exp(-2ht(2\varepsilon + 1)). \quad (63)$$

El resultado obtenido es una correlación de orden $O(\Delta t)$ para los retornos y de $O(1)$ para los retornos cuadrados. Esto concuerda con las observaciones empíricas descritas para intervalos $\Delta t \sim 1$ día, para intervalos más cortos de mercados de alta frecuencia, del orden de $\Delta t \sim 1$ min deja de ser cierto, ya que se observan correlaciones positivas considerables.

Si nos fijamos en la Figura 4 veremos la concordancia, al menos desde un punto de vista cualitativo, con los datos reales. En la ecuación (56) vemos que no aparece el parámetro de interacción h , por esta razón el proceso camino aleatorio explica correctamente la falta de correlación en los retornos, ya que la interacción no juega ningún papel. Por otro lado en la relación (63) se puede ver que cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$ la correlación tiende a cero, es decir que los fenómenos denominados *volatility clustering* y *fat tail phenomenon* son ambas consecuencia natural de la interacción entre agentes. Por esta razón, concluimos que el estudio del intercambio de información, ya sea a través de los medios de comunicación o de cualquier otra naturaleza es fundamental para entender la evolución de los precios. Este hecho motiva las dos secciones restantes de este trabajo, dónde estudiaremos como enfrentarnos a un estudio más detallado de esta interacción.

4. Parámetro de volatilidad

Los modelos socioeconómicos basados en agentes, nos permiten estudiar cómo ciertos patrones de conducta de un sólo agente o individuo inducen fenómenos colectivos, siempre que haya una regularidad de este patrón dentro de la población. Por ejemplo, el modelo de Kirman nos muestra que un patrón de comportamiento gregario de los agentes, puede explicar algunas de las propiedades estadísticas macroscópicas de los precios de mercado.

Cuando hemos estudiado este modelo, hemos supuesto que la probabilidad de que un agente cambie su opinión es lineal con la fracción de agentes en el estado contrario. Es decir, si la cantidad de personas que piensan diferente a uno se dobla, la probabilidad de cambiar de opinión se dobla también. Este punto de vista, está bastante alejado de la realidad y constituye una simplificación demasiado fuerte para modelar el comportamiento humano.

Una perspectiva más radical es pensar que las personas no cambian de estado, si no existe una cantidad mínima umbral de personas que están en el estado contrario, a partir de este umbral la probabilidad de cambio es constante y toma su valor máximo.

En ese caso, cambiaríamos (37) por

$$\pi(B \rightarrow A) = a + \bar{h} \theta \left(\frac{n}{N} - x_{umbral} \right), \quad (64)$$

siendo θ la función escalón o función de Heaviside, y x_{umbral} un número real comprendido entre $(0, 1)$. Nosotros, estudiaremos una situación intermedia entre la anterior y la lineal, introducida en el modelo de Abrams-Strogatz (ASM), utilizado para explicar la competición entre lenguas y la muerte de estas. La idea básica es añadir un exponente α llamado parámetro de volatilidad, tal que $\pi(B \rightarrow A) \propto \left(\frac{n}{N} \right)^\alpha$.

Cuando $\alpha = 1$ el comportamiento es lineal o neutral y se recupera el modelo de Kirman. Para $\alpha > 1$, los agentes son más reacios a cambiar de opinión y por ende, cambian menos frecuentemente de estado. Esto es parecido al comportamiento donde, si no existe una fracción umbral de la población en un estado, no existe posibilidad de cambiar de opinión por interacción (sobre todo para valores altos de α). A medida que α aumenta, la fracción de población en un estado mayoritario, ha de ser más grande de tal forma que la interacción tenga un papel importante. Por otro lado, $\alpha < 1$ corresponde a una situación donde la probabilidad de copiar un estado es mayor que en el caso neutral, pero ahora, a medida que α se acerca a cero la probabilidad de interacción es aproximadamente constante en un rango amplio de valores de $\frac{n}{N}$. Por lo tanto, deducimos que el caso $\alpha \gg 1$ corresponde a una situación similar a (64) con $x_{umbral} > 1/2$, y $1/\alpha \gg 1$ con $x_{umbral} < 1/2$. Una manera simple de determinar x_{umbral} , de tal forma que la función escalón se ajuste a estas dos situaciones, es igualando el valor medio de las funciones siguientes

$$\int_0^1 \theta(x - x_{umbra}) dx = \int_0^1 x^\alpha dx, \rightarrow x_{umbra} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}. \quad (65)$$

Se pueden ver los resultados de esta aproximación en el Panel 2 de la Figura 8.

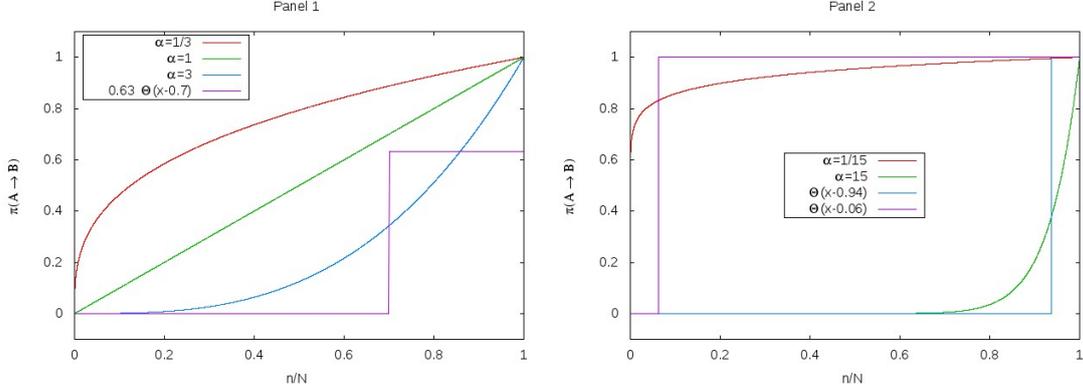


Figura 8: Distintas posibilidades de modelar la interacción mediante el parámetro de volatilidad y la función escalón.

En el artículo original [5], en el que se introdujo inicialmente el modelo ASM, los autores lo ajustaron a datos reales del número de hablantes de diferentes lenguas y se dieron cuenta de que el parámetro de volatilidad era parecido para las distintas comunidades con un valor próximo a $\alpha \sim 1,3$. La diferencia esencial entre el modelo de Abrams-Strogatz y el modelo que aquí aplicaremos, reside en la importancia de las fluctuaciones en la trayectorias $x(t)$. Para el modelo de lenguas, las tasas se escriben como

$$\begin{aligned} \pi(B \rightarrow A) &= \bar{h}_1 \left(\frac{n}{N}\right)^\alpha, \\ \pi(A \rightarrow B) &= \bar{h}_2 \left(\frac{N-n}{N}\right)^\alpha, \end{aligned} \quad (66)$$

y para el modelo de Kirman añadiendo el parámetro de volatilidad

$$\begin{aligned} \pi(B \rightarrow A) &= a + \bar{h} \left(\frac{n}{N}\right)^\alpha, \\ \pi(A \rightarrow B) &= a + \bar{h} \left(\frac{N-n}{N}\right)^\alpha. \end{aligned} \quad (67)$$

Cuando una persona toma una lengua para comunicarse no lo hace de manera aleatoria, sino que se adapta a su entorno y utiliza aquella que le permite hablar de forma natural con sus compañeros, familiares, etc. Por esta razón, junto al hecho de que ciertas lenguas tienen más prestigio que otras, en (66), a diferencia de (67), no aparece el parámetro a y además $\bar{h}_1 \neq \bar{h}_2$, reflejando la asimetría del modelo.

La ausencia de a , justifica que una aproximación de campo medio a la ecuación de Langevin sea suficiente para determinar la evolución de el número de hablantes de una determinada lengua

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle \mu(x) \rangle \simeq \mu(\langle x \rangle). \quad (68)$$

La soluciones de la ecuación (68) pueden tender a un punto fijo o diverger hacia $\pm\infty$. Como en este caso tenemos condiciones de contorno $|x| \leq 1$, deducimos que el resultado del modelo ASM predice que una lengua muere, o se llega a una situación de compromiso entre el prestigio de la lengua y el número de hablantes. Lo que nunca podrá ocurrir es una situación periódica, ver Figura 7, donde una lengua fluctúa entre ser mayoritaria o minoritaria. Para una discusión más detallada, consultar [6].

Por otro lado, sabemos que las fluctuaciones de los precios dentro del mercado son grandes y de vital importancia, ver el Panel 2 y 3 de la Figura 7 o la Figura 2. Por esta razón, la descripción del proceso demanda un tratamiento probabilístico.

En el análisis que hicimos del modelo de Kirman en el apartado anterior, demostramos que las tasas no extensivas (39) eran las más adecuadas para explicar una situación dónde la distribución $\rho_{st}(x)$ no cambiaba su forma cuando $N \rightarrow \infty$. Sin embargo, si aumentaba N en la formulación extensiva (38), podíamos pasar de una distribución bimodal a una unimodal. Por otro lado, cuando introducimos el parámetro α es imprescindible aplicarlo a (38), de tal forma que no se rompa la extensividad de las tasas. Más adelante, discutiremos la repercusión que tendría un aumento de N en la nueva distribución de probabilidad.

4.1. Resultados generales

Para analizar cuáles son los efectos de este nuevo parámetro α , haremos un análisis de la distribución de probabilidad estacionaria $\rho_{st}(x)$. Hacemos la suposición habitual, N suficientemente grande para tomar $x = 2n/N - 1$ como un variable continua, y poder usar la solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Planck (26).

Con las tasas (67) introducidas, el término de deriva $\mu(x)$ y el coeficiente de difusión $D(x)$ quedan

$$\begin{aligned}\mu(x) &= -2ax + 2^{-\alpha}\bar{h}(1-x^2) [(1+x)^{\alpha-1} - (1-x)^{\alpha-1}], \\ D(x) &= \frac{4a}{N} + \frac{2^{-\alpha+1}\bar{h}}{N}(1-x^2) [(1+x)^{\alpha-1} + (1-x)^{\alpha-1}].\end{aligned}\quad (69)$$

Si comparamos con (40), vemos que la diferencia de dificultad es abismal. Esto implica que obtener una expresión sencilla de $\rho_{st}(x)$ será tarea imposible. Por esta razón, tendremos que utilizar la expresión

$$\rho_{st}(x) = A \exp \left[\int^x \frac{2\mu(z) - D'(z)}{D(z)} dz \right] \equiv A \exp \left[\int^x f(z) dz \right], \quad (70)$$

como una integral numérica.

Por otro lado, sí podemos analizar qué forma tiene la distribución de probabilidad, dependiendo del valor de los parámetros (a, \bar{h}, α, N) . Por ejemplo, en el modelo de Kirman sabemos que para $\varepsilon < 1$ la distribución es bimodal, $\varepsilon > 1$ unimodal y $\varepsilon = 1$ uniforme. Es de esperar entonces, una situación similar donde para distintos valores de $\varepsilon = \frac{Na}{\bar{h}}$ obtengamos uno o varios máximos/mínimos de la distribución. Para hacer un estudio de los extremos de $\rho_{st}(x)$, podemos derivar la expresión (70)

$$\begin{aligned}\rho'_{st}(x) &= \rho_{st}(x)f(x), \\ \rho''_{st}(x) &= \rho_{st}(x)(f'(x) + f(x)^2).\end{aligned}\quad (71)$$

Los valores de x que cumplan la ecuación $f(x) = 0$, o equivalentemente $D(x)f(x) = 0$, son un extremo de la distribución, si $f'(x) > 0$ es un mínimo y si $f'(x) < 0$ un máximo.

Debido a la simetría del proceso, $f(0) = 0$ y $f(-x) = f(x)$. Entonces, en $x = 0$ siempre hay un extremo, evaluando $f'(0)$ podremos saber si es un máximo o un mínimo

$$f'(0) = -N + \frac{\alpha\bar{h}(3 - \alpha + N)}{2^\alpha a + \bar{h}}. \quad (72)$$

Para saber si existen extremos intermedios en el intervalo $(0, 1)$, calcularemos $f(1 - 2/N)$. De esta manera, si $f'(0) > 0$ y $f(1 - 2/N) < 0$, o $f'(0) < 0$ y $f(1 - 2/N) > 0$, significaría que $f(x)$ corta el origen al menos una vez. Evaluamos la función en el límite del intervalo, pero no en $x = 1$, debido a que $D(x)f(x)$ tiene un asíntota para este valor. Escogemos $x = 1 - 2/N$, porque si pensamos en x como un variable discreta, este sería el punto más próximo al $x = 1$ dónde la función esta definida.

$$D\left(1 - \frac{2}{N}\right) f\left(1 - \frac{2}{N}\right) = -4a + \frac{2\bar{h}}{N} ((\alpha - 2)N^{1-\alpha} + 3) + O\left(\frac{1}{N^{1+\alpha}}\right). \quad (73)$$

Con este criterio, y suponiendo primero que no puede haber más de un extremo en el intervalo $(0, 1)$, tenemos el siguiente resultado

■ **Caso 1** , $\alpha > 1$

- 1.1) $\varepsilon < \varepsilon_1$ $x = 0$ min
- 1.2) $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ $x = 0$ min , $x = \pm x_\alpha$ max
- 1.3) $\varepsilon > \varepsilon_2$ $x = 0$ max

■ **Caso 2** , $\alpha < 1$

- 2.1) $\varepsilon < \varepsilon_2$ $x = 0$ min
- 2.2) $\varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_1$ $x = 0$ max , $x = \pm x_\alpha$ min
- 2.3) $\varepsilon > \varepsilon_1$ $x = 0$ max

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\alpha-2}{2} N^{1-\alpha} + \frac{3}{2}, \\ \varepsilon_2 &= 2^{-\alpha} (N(\alpha-1) + (3-\alpha)\alpha), \end{aligned} \tag{74}$$

y x_α es la localización de un punto entre $(0, 1)$. En la Figura 11 se representa la transición entre los subcasos 1.2 y 1.3 .

Notar que, cuando $\alpha > 1$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ y para $\alpha < 1$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. También tenemos que $\alpha = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 1$, que es el resultado del modelo de Kirman, donde sólo puede haber un máximo o un mínimo, ambos localizados en $x = 0$, y la transición se produce cuando $\varepsilon = 1$.

Por otro lado, si establecemos $\varepsilon \rightarrow 0$ todos los subcasos se reducen a dos posibles resultados: (i) Para $\alpha > 1$, $\rho_{st}(x)$ es muy abrupta en los extremos y muy pequeña en $x = 0$, de manera que es casi imposible encontrar trayectorias que partan de $x = +1$ y alcancen $x = -1$, o viceversa, llamamos a esto dominación. (ii) Para $\alpha < 1$, la distribución está muy concentrada en el centro y es casi imposible llegar a uno de los extremos $x = \pm 1$, llamamos a este caso coexistencia. Este resultado es equivalente al modelo ASM y la aproximación de campo medio que hemos discutido previamente.

Cabe preguntarse, si todos los subcasos descritos por los parámetros (74), son posibles o relevantes. La respuesta es que no, y este hecho se puede apreciar rápidamente en la Figura 9.

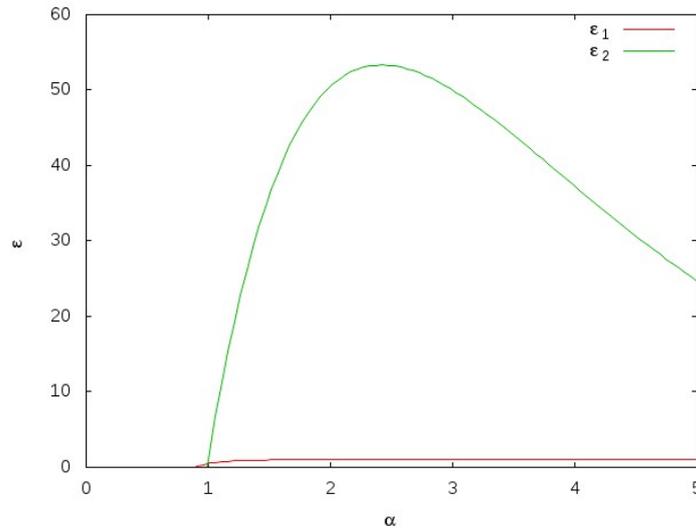


Figura 9: Valores de ε_1 y ε_2 en función del parámetro de volatilidad α , para $N = 200$.

Para $\alpha < 1$ (Caso 2), vemos que en realidad el único subcaso relevante es el 2.3, donde la distribución es unimodal. La razón, es que si no se cumple

$$1 - \alpha < \frac{\ln 3}{\ln N}, \quad (75)$$

entonces $\varepsilon_1 < 0$, y si no se cumple

$$1 - \alpha < \frac{2}{N}, \quad (76)$$

entonces $\varepsilon_2 < 0$. Esto significa que para valores de α en un rango de orden 1, tanto ε_1 , como ε_2 toman valores negativos. Por ejemplo, para $N = 1000$, $1 - \alpha$ tendría que ser menor que 0,002 para que el subcaso 2.1 fuera posible, y $1 - \alpha$ debería ser menor que 0,159 para que el subcaso 2.2 fuera posible. Ambos valores de α extremadamente pequeños.

Para entender el modelo, es de vital importancia estudiar el límite termodinámico y la dependencia de las propiedades estadísticas con el número de agentes. Cuando $N \rightarrow \infty$, la forma de la distribución de probabilidad se reduce a los siguiente casos

■ **Caso 1** , $\alpha > 1$

- 2.1) $\varepsilon < \varepsilon_1$ $x = 0$ min
- 2.2) $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ $x = 0$ min , $x = \pm x_\alpha$ max
- 2.3) $\varepsilon > \varepsilon_2$ $x = 0$ max

■ **Caso 2** , $\alpha < 1$

- $\forall \varepsilon$ $x = 0$ max

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{3}{2}, \\ \varepsilon_2 &= 2^{-\alpha}(\alpha - 1)N. \end{aligned} \quad (77)$$

Una diferencia notable con el modelo de Kirman, es que el parámetro ε_2 escala con N . Por lo tanto, la definición $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{h}$ es más adecuada para localizar los máximos y mínimos de la distribución. Sin embargo, si mantenemos ε , o $\bar{\varepsilon}$ constantes, y cambiamos N , la distribución cambia de forma en ambos casos. Pero existe una diferencia fundamental que se puede ver en la Figura 10.

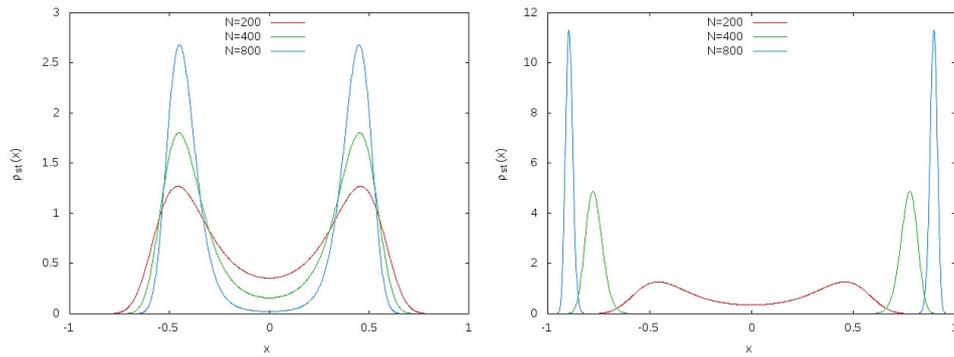


Figura 10: Resultados de la integración numérica de (70), para distintos valores de N , $\alpha = 2$, manteniendo $\bar{\varepsilon} = 40/200$ constante para el panel de la izquierda y manteniendo $\varepsilon = 40$ constante para el panel de la derecha.

Si mantenemos $\bar{\varepsilon}$ constante y aumentamos N , la fluctuaciones se reducen pero la distribución de los máximos queda invariante. Por otro lado, si mantenemos ε constante, a medida que crece N la distribución se acumula en los extremos ya que el valor de ε se aleja de ε_2 en proporción al aumento de N .

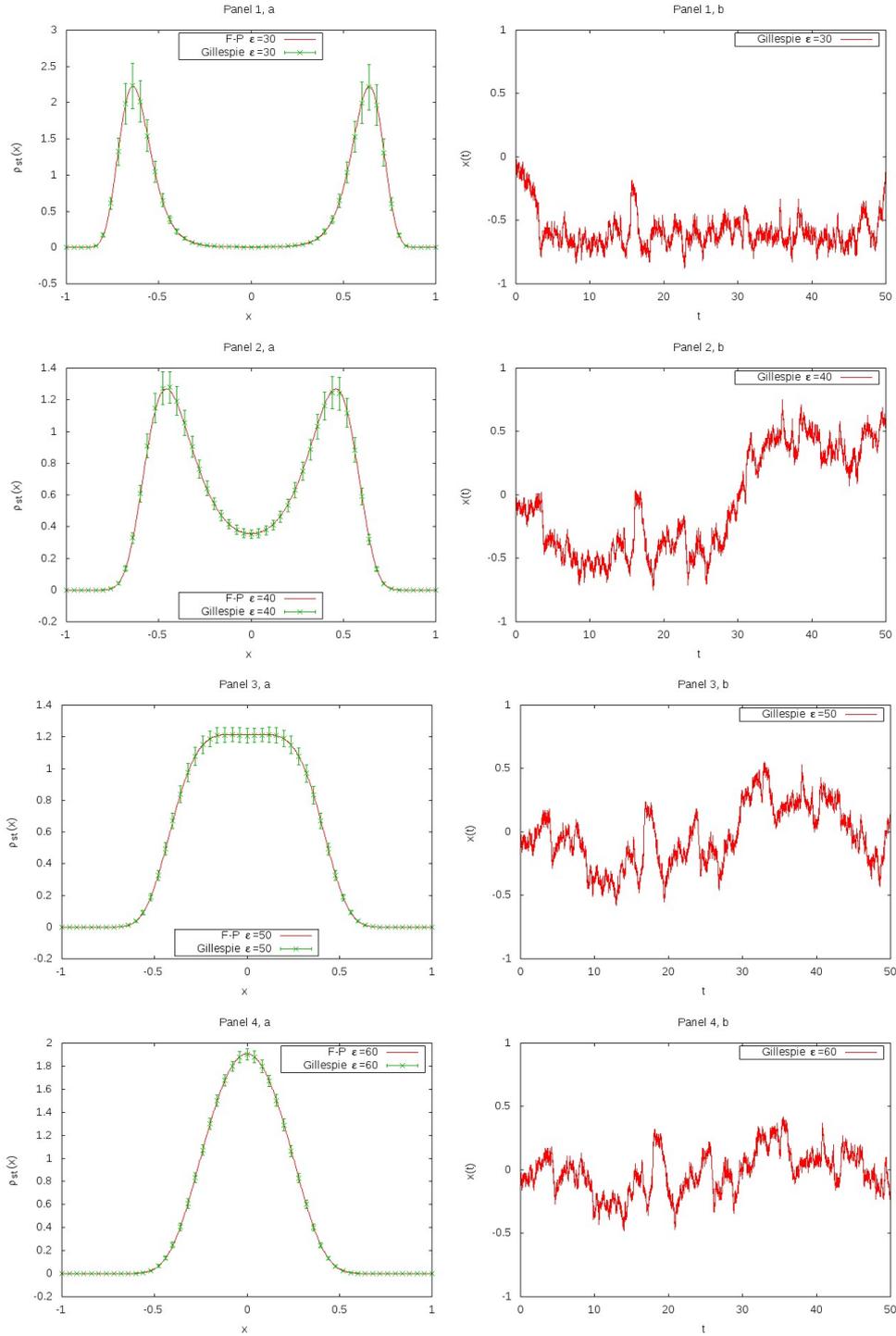


Figura 11: En los paneles de la izquierda, se muestran los resultados de la distribución de probabilidad $\rho_{st}(x)$. Los puntos, con su barra de error asociada, son el resultado de las simulaciones mediante el método de Gillespie, para 200 trayectorias distintas $n(t)$, con tiempo final $t_f = 5 \cdot 10^5$. La línea continua corresponde al resultado de integrar (70) numéricamente. En los paneles de la derecha, se muestra un ejemplo de trayectoria $x(t)$ para cada caso. Los parámetros comunes son $\alpha = 2$, $a = 1$ y $N = 200$.

Para el estudio hecho hasta ahora, hemos supuesto que no podía existir más de un máximo/mínimo en el intervalo $(0, 1)$. Pero ahora veremos que en el caso $\alpha > 5$, en la transición $\varepsilon < \varepsilon_2$ a $\varepsilon > \varepsilon_2$ pueden aparecer 3 picos en la distribución, en lugar de 2 picos para $\varepsilon < \varepsilon_2$ y un pico para $\varepsilon > \varepsilon_2$, como podíamos ver en la Figura 11, donde $1 < \alpha < 5$.

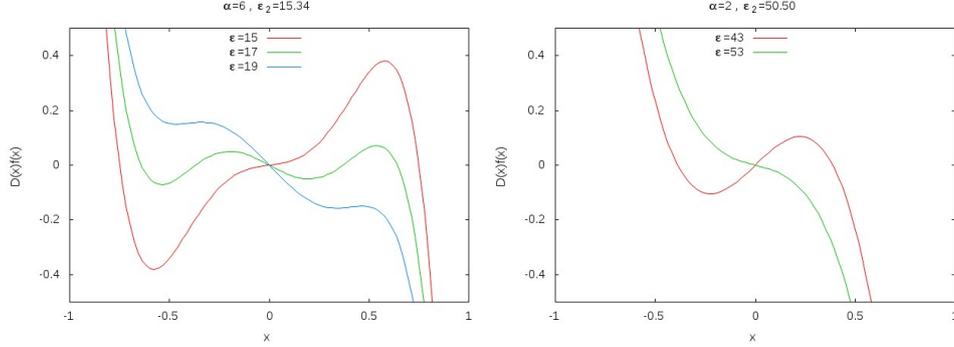


Figura 12: Representación de la función $D(x)f(x)$, en la que se pueden identificar las raíces de esta para dos casos distintos. El panel de la derecha muestra el caso $\alpha = 2 < 5$ y el panel de la izquierda $\alpha = 6 > 5$. Parámetros comunes $a = 1$ y $N = 200$.

En la Figura 12, se puede distinguir la aparición de 2 raíces en la ecuación $D(x)f(x) = 0$ en el intervalo $(0, 1)$, para un caso $\alpha = 6$ y $\varepsilon > \varepsilon_2$. A diferencia del caso $\alpha = 2$, vemos que $(D(0)f(0))''' > 0$, y por lo tanto podemos identificar este fenómeno mediante el signo de la tercera derivada en el origen

$$\begin{aligned} (D(0)f(0))''' &= -\frac{2^{2-\alpha}(\alpha-1)\alpha(\alpha^2-9\alpha+14+N(5-\alpha))}{N} \simeq \\ &\simeq 2^{2-\alpha}(\alpha-5)(\alpha-1)\alpha\bar{h}. \end{aligned} \quad (78)$$

Para $\alpha < 5$, $(D(0)f(0))''' < 0$ y en consecuencia, cuando $\varepsilon < \varepsilon_2$ encontramos dos máximos localizados aproximadamente en

$$D(x)f(x) \simeq [-4a + 2^{2-\alpha}(\alpha-1)\bar{h}]x + \frac{1}{3}2^{1-\alpha}(\alpha-5)(\alpha-1)\alpha\bar{h}x^3 + O(x^5) = 0, \quad (79)$$

$$x_\alpha \simeq \pm \sqrt{\frac{6}{\alpha(\alpha-5)} \left(\frac{2^\alpha}{\alpha-1} \bar{\varepsilon} - 1 \right)}. \quad (80)$$

Como habíamos demostrado en la Figura 10, la posición de los máximos no varía cuando $\bar{\varepsilon}$ permanece constante. Además, cuando $\varepsilon > 2^{-\alpha}(\alpha-1) = \varepsilon_2$ no existen estos máximos y las raíces de (80) son imaginarias.

Para $\alpha > 5$, $(D(0)f(0))''' > 0$ y como vemos en la Figura 12, necesitamos ir a un orden superior para encontrar una primera aproximación a las raíces de la ecuación $D(x)f(x) = 0$

$$\begin{aligned} D(x)f(x) &\simeq [-4a + 2^{2-\alpha}(\alpha-1)\bar{h}]x + \frac{1}{3}2^{1-\alpha}(\alpha-5)(\alpha-1)\alpha\bar{h}x^3 + \\ &+ \frac{1}{30}2^{-\alpha}(\alpha-9)(\alpha-3)(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha\bar{h}x^5 + O(x^7) = 0, \end{aligned} \quad (81)$$

La solución de esta ecuación bicuadrada es

$$x_{\alpha_{1,2}}^2 \simeq \frac{10(\alpha-5)}{(\alpha-9)(\alpha-3)(\alpha-2)} \left[\pm \sqrt{1 + \frac{6(\alpha-9)(\alpha-3)(\alpha-2)}{5(\alpha-5)^2\alpha} \left(\frac{2^\alpha}{\alpha-1} \bar{\varepsilon} - 1 \right)} - 1 \right]. \quad (82)$$

Nuevamente, la posición de los extremos depende de $\bar{\varepsilon}$ y α . De la solución anterior deducimos

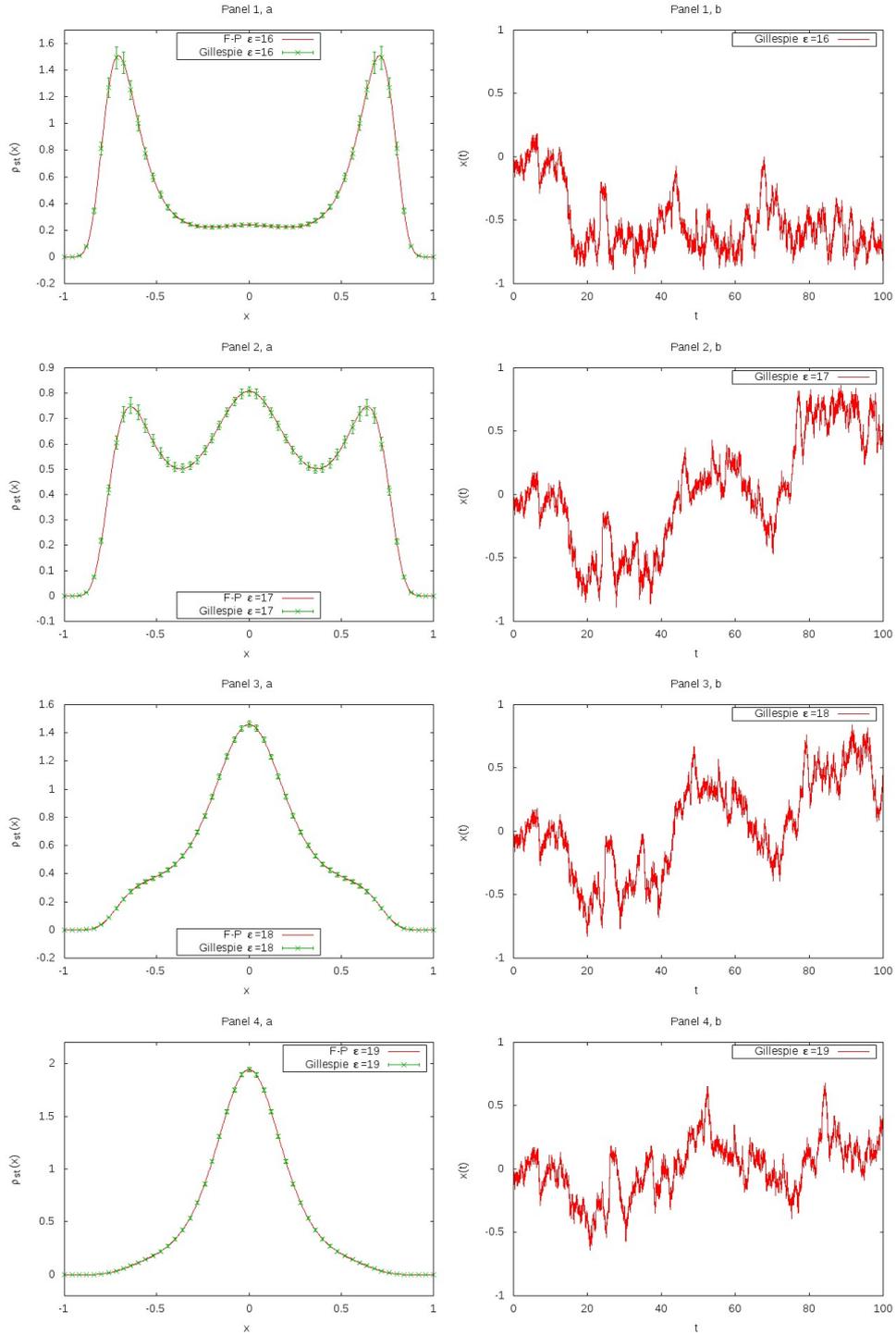


Figura 13: En los paneles de la izquierda, se muestran los resultados de la distribución de probabilidad $\rho_{st}(x)$. Los puntos, con su barra de error asociada, son el resultado de las simulaciones mediante el método de Gillespie, para 200 trayectorias distintas $n(t)$, con tiempo final $t_f = 5 \cdot 10^5$. La línea continua corresponde al resultado de integrar (70) numéricamente. En los paneles de la derecha, se muestra un ejemplo de trayectoria $x(t)$ para cada caso. Los parámetros comunes son $\alpha = 6$, $a = 1$ y $N = 200$.

■ **Caso 3**, $\alpha > 5$

- 3.1) $\varepsilon < \varepsilon_1$ $x = 0$ min
 3.2) $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ $x = 0$ min, $x = \pm x_{\alpha_1}$ max
 3.3) $\varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_3$ $x = 0$ max, $x = \pm x_{\alpha_1}$ min, $x = \pm x_{\alpha_2}$ max
 3.4) $\varepsilon > \varepsilon_3$ $x = 0$ max

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{3}{2}, \\ \varepsilon_2 &= 2^{-\alpha}(\alpha - 1)N, \\ \varepsilon_3 &\simeq \varepsilon_2 \left(1 + \frac{5(\alpha-5)^2\alpha}{6(9-\alpha)(\alpha-3)(\alpha-2)} \right). \end{aligned} \quad (83)$$

En la Figura 13 se muestran las transiciones entre los subcasos 3.2, 3.3 y 3.4.

La aproximación (80) funciona bastante bien para un amplio rango de valores de α y ε , debido a que el término de $O(x^5)$ de la ecuación (79) es pequeño o nulo. No obstante, (82) es válida para $\alpha > 5$ pero sólo para valores no superiores a $\alpha = 7$. Esto se debe a que las raíces se alejan demasiado de $x = 0$, y la aproximación (81) no da buenos resultados. Por otro lado, esto no significa que para $\alpha > 7$ la división en subcasos del Caso 3 sea incorrecta. Lo que ocurre es que el valor de ε_3 será distinto a la estimación de la ecuación (83).

4.2. Interpretación del mercado

Para estudiar los efectos que tendrían estos nuevos patrones de comportamiento de los agentes, usaremos la implementación del modelo de Kirman al mercado, que propuso Alfarano en [1] y [4].

Supondremos que en el mercado existen N agentes, clasificados en dos grupos según su aptitud a la hora de comprar o vender acciones, N_F “fundamentalistas” y N_C “ruidosos”. Los fundamentalistas compran cuando el precio p está por debajo del precio fundamental p_F y venden cuando esta por encima. Por otro lado, los agentes ruidosos siguen patrones impredecibles, ya sea basados en decisiones personales, siguiendo alguna moda o según su estado de ánimo, etc.

Las tasas (67) corresponden a la probabilidad de que un agente cambie, de una aptitud fundamentalista, a otra de tipo ruidosa. En nuestro caso, debido a la simetría de las tasas, no existe un comportamiento medio mayoritario. Sin embargo, Alfarano, estudió el modelo de Kirman (38) con un valor distinto de a para cada grupo $a_1 \neq a_2$. Esta asimetría, modela el hecho de que hay mercados dominados por los fundamentalistas, y otros por los agentes ruidosos.

Para determinar la evolución del precio $p(t)$, es necesario formular la ley de la oferta y la demanda para el conjunto de agentes. Cuando el precio actual está por debajo del precio fundamental, los fundamentalistas tienden a comprar y como consecuencia generan un exceso de demanda en el mercado. Por otro lado, cuando el precio esta por encima del fundamental éstos tienden a vender y por lo tanto les asignamos un exceso de demanda negativa. Basándonos en la diferencia relativa entre el precio p y p_F , en escala logarítmica, podemos determinar el exceso de demanda como

$$ED_F = N_F \ln \left(\frac{p_F}{p} \right). \quad (84)$$

Otra posibilidad es usar diferencias absolutas $(p_F - p)$, o relativas $\frac{p_F - p}{p}$, ambas conducen a un resultado parecido. La elección de la escala logarítmica, es debida a que en muchos aspectos los seres humanos percibimos el nivel de ciertas magnitudes, físicas o de cualquier otra naturaleza, de esta forma (por ejemplo la intensidad y la frecuencia sonora).

El exceso de demanda de los agentes ruidosos será

$$ED_C = -r_0 N_C \xi, \quad (85)$$

siendo ξ una variable aleatoria, que representa la tendencia media de estos agentes a comprar o vender ($\xi < 0$ o $\xi > 0$). El parámetro r_0 es un factor de escala y el signo negativo es por conveniencia.

En un escenario de tipo Walrasian (dónde el cambio relativo del precio depende del exceso de demanda total), supondremos que el mercado se encuentra siempre en un estado de equilibrio y que por lo tanto el exceso de demanda total de los agentes es cero $ED_F + ED_C = 0$. Esta suposición es válida para mercados de frecuencia diaria, pero no para mercados de alta frecuencia.

En este escenario, el precio vendrá dado por

$$\ln\left(\frac{p}{p_F}\right) = r_0 \frac{N_C}{N_F} \xi = r_0 \frac{1+x}{1-x} \xi, \quad (86)$$

y en consecuencia los retornos logarítmicos

$$r(t) = \ln\left(\frac{p(t+\Delta t)}{p(t)}\right) = r_0 \left(\frac{1+x(t+\Delta t)}{1-x(t+\Delta t)} \xi(t+\Delta t) - \frac{1+x(t)}{1-x(t)} \xi(t) \right). \quad (87)$$

Es posible obtener una expresión más sencilla para los retornos, si suponemos que la variable $\xi(t)$ cambia mucho más rápidamente que la configuración de la población $x(t)$, en ese caso

$$r(t) = r_0 \frac{1+x(t)}{1-x(t)} \eta(t), \quad (88)$$

siendo $\eta(t) = \xi(t+\Delta t) - \xi(t)$. Esta aproximación, implica la presencia de dos escalas de tiempo distintas, una para el cambio de actitud fundamentalista/ruidoso asociada a la variable $x(t)$, y otra para el cambio de moda o de tendencia, asociada a $\xi(t)$.

Hay varias opciones a la hora de escoger el tipo de distribución que sigue la variable η . Las más simples son, una distribución bimodal con dos posibles valores ± 1 , o una distribución uniforme en el intervalo $[-1, +1]$. El primero, se llama modelo de ruido espín, y al segundo modelo de ruido uniforme. La diferencia entre los dos modelos es de vital importancia, cuando queremos ajustar los parámetros a datos empíricos, ver [4]. Pero en nuestro caso, como veremos a continuación, la distribución de probabilidad que sigue η carece de importancia, siempre y cuando cumpla cierta condición de convergencia en sus momentos.

El objetivo de este apartado, es demostrar que este modelo de mercado reproduce el decaimiento en forma de ley de potencia, observado en la distribución de los retornos. Para determinar esta distribución, podemos utilizar la relación (88). Definimos una nueva variable $\sigma(t)$

$$\sigma(t) = r_0 \frac{1+x(t)}{1-x(t)}, \quad (89)$$

tal que

$$r(t) = \sigma(t) \cdot \eta(t). \quad (90)$$

Es decir, los retornos son el producto de dos variables independientes σ y η . La variable σ , está relacionada directamente con $x(t)$, de manera que su distribución de probabilidad se puede relacionar con la distribución estacionaria del proceso estocástico $\rho_{st}(x)$, mediante

$$\rho_u(\sigma) = \frac{dx}{d\sigma} \rho_{st}(x) = \frac{2r_0}{(r_0 + \sigma)^2} \rho_{st} \left[\frac{\sigma - r_0}{\sigma + r_0} \right]. \quad (91)$$

Por otro lado, sabiendo la distribución $\rho_\eta(\eta)$, que cumple el ruido η , y suponiendo que ésta es simétrica $\rho_\eta(-\eta) = \rho_\eta(\eta)$, podemos determinar la distribución de los retornos absolutos $\rho_v(|r|)$ de la siguiente forma

$$\rho_v(|r|) = 2 \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta} \rho_\eta(\eta) \rho_u \left(\frac{|r|}{\eta} \right), \quad (92)$$

expresión que se deduce directamente de la relación (90).

Para el modelo de ruido espín $p_\eta(\eta) = \frac{1}{2}(\delta(\eta - 1) + \delta(\eta + 1))$ y, además, se tiene $|r| = \sigma$, de manera que llegamos a $\rho_v(|r|) = \rho_u(\sigma)$.

Para el modelo de ruido uniforme, $\rho_\eta(\eta) = 1/2$ para $\eta \in (-1, 1)$ y por lo tanto

$$\rho_v(|r|) = \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \rho_u\left(\frac{|r|}{\eta}\right). \quad (93)$$

Para estudiar el decaimiento de $\rho_v(|r|)$, no es necesario calcular la integral (92), ya que si $\rho_u(\sigma) \sim \frac{1}{\sigma^\gamma}$, entonces $\rho_v(|r|) \sim \frac{1}{|r|^\gamma}$. Esto se puede demostrar utilizando la relación (92)

$$\lim_{|r| \rightarrow +\infty} \rho_v(|r|) |r|^\gamma = 2 \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta} \rho_\eta(\eta) \lim_{|r| \rightarrow +\infty} \rho_u\left(\frac{|r|}{\eta}\right) |r|^\gamma = 2 \int_0^\infty d\eta \rho_\eta(\eta) \eta^{\gamma-1}. \quad (94)$$

En este desarrollo, hemos intercambiado el límite de integración con el límite $|r| \rightarrow \infty$. Es lícito hacer esto, si el momento $\gamma - 1$ -ésimo existe.

Cuando estudiamos el proceso estocástico, vimos que obtener una expresión sencilla para $\rho_{st}(x)$ no era posible. Es de esperar entonces, que tampoco podamos para (91).

Para el caso $\alpha = 1$, es trivial deducir, usando (43)

$$\rho_u(\sigma) \propto \frac{2r_0}{(r_0 + \sigma)^2} \left[\frac{4r_0\sigma}{(r_0 + \sigma)^2} \right]^{\varepsilon-1} \rightarrow \frac{1}{\sigma^{\varepsilon+1}}. \quad (95)$$

Afirmando así, la ley de potencias para el modelo de Kirman.

Para $\alpha \neq 1$, nos vemos forzados a utilizar (91), junto a (70) de forma numérica. Podemos determinar el índice de cola de la distribución acumulada, con un ajuste lineal, tal y como se procede con los datos empíricos, ver Figura 3.

Si $\rho_u(\sigma) \rightarrow \frac{1}{\sigma^\gamma}$, entonces

$$1 - P_u(\sigma) \equiv \int_\sigma^\infty \rho_u(\sigma) d\sigma \rightarrow \frac{1}{\sigma^{\gamma+1}} \quad (96)$$

En la Figura 14, están representadas $\rho_u(\sigma)$ y $1 - P_u(\sigma)$, para los casos más relevantes del modelo con el parámetro de volatilidad, vistos en las Figuras 11 y 13.

Los resultados de los índices de cola de la Figura 14 son

Panel 1, b ($\alpha = 2$)

- $\varepsilon = 40$ $\gamma = -12,69 \pm 0,01$
- $\varepsilon = 50$ $\gamma = -14,77 \pm 0,01$
- $\varepsilon = 60$ $\gamma = -16,85 \pm 0,05$

Panel 2, b ($\alpha = 6$)

- $\varepsilon = 17$ $\gamma = -7,594 \pm 0,004$
- $\varepsilon = 18$ $\gamma = -8,038 \pm 0,003$
- $\varepsilon = 19$ $\gamma = -8,455 \pm 0,002$

Vemos que, el decaimiento en forma de ley de potencias, es un resultado robusto a la introducción del parámetro de volatilidad en el modelo.

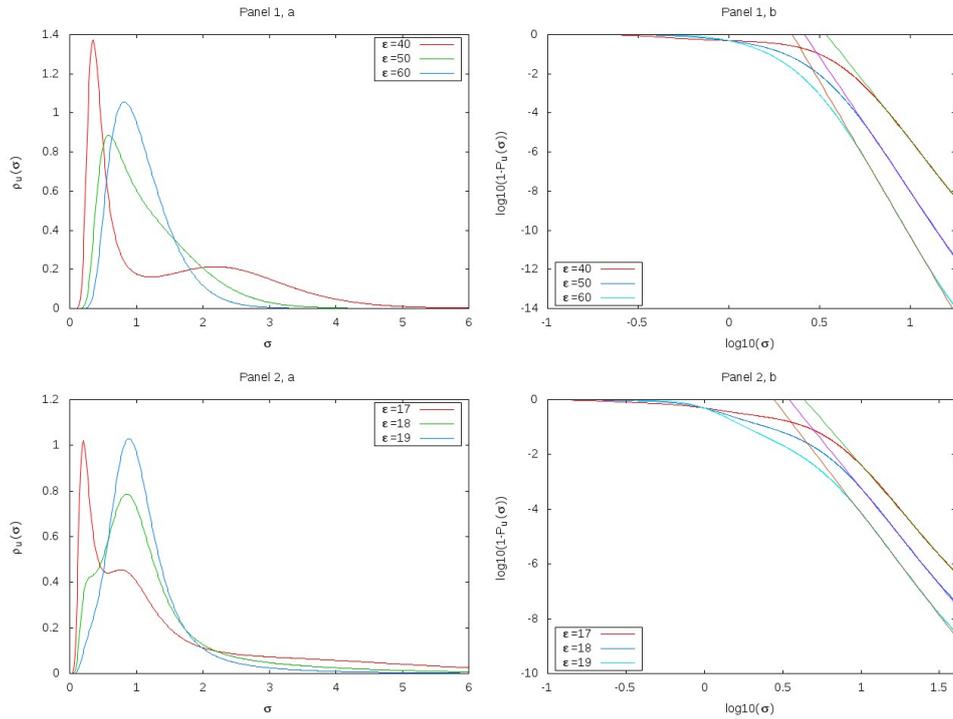


Figura 14: En el Panel 1a y 2a, se muestra el resultado de la integración numérica de $\rho_u(\sigma)$, para los casos $\epsilon = 40, 50$ y 60 de la Figura 11 y para $\epsilon = 17, 18$ y 19 de la Figura 13, respectivamente. En el Panel 1b y 2b, esta representada la distribución acumulada para estos mismos casos, en escala log-log. Las rectas representa un ajuste lineal de la cola de cada distribución. Se ha tomado un valor de $r_0 = 1$.

También se aprecia la aparición de máximos secundarios en la distribución de los retornos para alguno de los casos representados. Esto se debe a la formación de nuevos picos en la distribución $\rho_{st}(x)$.

Sería interesante ajustar el modelo a datos reales de distintos mercados, para determinar que valores de α modelan de forma más adecuada las interacciones entre agentes. Otra propuesta para un futuro proyecto, sería intentar identificar alguno de estos máximos que se pueden ver en la Figura 14, en los datos reales y estudiar si la causa real es debida al parámetro de volatilidad.

5. Conclusiones

En este trabajo, hemos visto los principios básicos del estudio de los procesos estocásticos. Tanto las herramientas matemáticas específicas, como los métodos de simulación de tipo Monte Carlo. En concreto, hemos aplicado estos principios en el estudio de un modelo sencillo, llamado modelo de Kirman que es capaz de reproducir algunas propiedades estadísticas de los índices de mercado.

Por otro lado, hemos estudiado que consecuencias tendría cambiar la linealidad de las tasas del modelo de Kirman introduciendo un nuevo parámetro. Como resultado, la dificultad del tratamiento matemático del modelo se incrementa considerablemente y obstaculiza el estudio analítico del efecto de este nuevo parámetro. No obstante, hemos podido caracterizar la forma de la distribución de probabilidad del índice de opinión. Aparecen nuevos patrones de comportamiento que se caracterizan por la presencia de varios máximos y mínimos en esta distribución. Hemos deducido varias expresiones aproximadas para localizar estos máximos y mínimos, y descrito cuando se producen las transiciones entre las distintas formas de la distribución. La dependencia del modelo con el tamaño de la población de agentes, indica que la formulación extensiva de las tasas conserva mejor las propiedades estadísticas que la formulación no extensiva, al contrario de lo que ocurría en el modelo inicial.

Para acabar, hemos investigado cómo podemos implementar el modelo para estudiar la distribución de los precios de mercado y los retornos logarítmicos. La distribución de los retornos muestra la aparición de formas más exóticas que las típicas observadas en los datos empíricos. Sin embargo, el decaimiento en forma de ley de potencias para los retornos es una solución recurrente para los diversos resultados del modelo, y por lo tanto robusto para distintos valores del parámetro de volatilidad.

Proponemos que en futuros proyectos, se ajuste este modelo a los datos empíricos de los retornos y se identifique que valores de α , son característicos de cada tipo de mercado. Esto ayudaría a entender cual es la naturaleza de las interacción entre agentes. También sería de interés estudiar la existencia de líderes o agentes principales, aplicando el modelo con una estructura de red que configura el intercambio de información entre la población.

Referencias

- [1] Alfarano, S., 2006. An agent-based stochastic volatility model. Ph.D. Thesis, Department of Economics, University of Kiel.
- [2] Alan Kirman. Ants, rationality, and recruitment. *The Quarterly Journal of Economics*, 108(1):137–56, February 1993.
- [3] Simone Alfarano, Thomas Lux, and Friedrich Wagner. Time variation of higher moments in a financial market with heterogeneous agents: An analytical approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(1):101 – 136, 2008. Applications of statistical physics in economics and finance.
- [4] Simone Alfarano, Thomas Lux, and Friedrich Wagner. Estimation of agent-based models: The case of an asymmetric herding model. *Computational Economics*, 26(1):19–49, 2005.
- [5] Daniel M. Abrams and Steven H. Strogatz. Modelling the dynamics of language death. *Nature*, 424:900, August 2003.
- [6] F Vazquez, X Castelló, and M San Miguel. Agent based models of language competition: macroscopic descriptions and order–disorder transitions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2010(04):P04007, 2010.
- [7] Alfi, V., 2006. Spectroscopy of Fat Tails. Ph.D. Thesis, University of Rome.
- [8] L. F. Lafuerza and R. Toral. On the effect of heterogeneity in stochastic interacting-particle systems. *Scientific Reports*, 3, February 2013.
- [9] Simone Alfarano and Mishael Milakovic. Network structure and n-dependence in agent-based herding models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33(1):78–92, January 2009.
- [10] Stochastic Processes in Physics and Chemistry, N.G. Van Kampen, 3rd ed. Elsevier (2011).
- [11] Stochastic Effects in Physical Systems, (review paper) M. San Miguel, R. Toral, Instabilities and Nonequilibrium Structures VI, eds. E. Tirapegui, J. Martínez and R. Tiemann, Kluwer Academic Publishers, 35-130 (2000).
- [12] Stochastic Numerical Methods: an Introduction for Students and Scientists, R. Toral, P. Colet, Wiley-VCH (2014).