ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

NEROVNOSTI A NEROVNICE NA ZŠ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Monika Anselmová

Učitelství pro 2. stupeň základní školy, obor Ma- Bi

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň 2019

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 23. června 2019

....

vlastnoruční podpis

Ráda bych poděkovala vedoucí své diplomové práce Mgr. Martině Kašparové za její pomoc, kterou mi poskytla při vypracovávání diplomové práce.

OBSAH

ÚVOD

Ve své diplomové práci se zaměřuji na nerovnosti a nerovnice v rámci učiva na základní škole.

Text své diplomové práce jsem zahájila vysvětlením pojmu nerovnost, zaměřila jsem se na nerovnost ostrou a neostrou, vlastnosti nerovnosti a na to, v jaké podobě je možné nerovnost v učivu základní školy najít. Dále se zaměřuji na nerovnice, na jejich podobu, řešení a na záležitosti, které se k tématu vztahují.

Zbytek diplomové práce je rozdělen na jednotlivé ročníky základní školy a na konkrétní formy nerovností a nerovnic v nich. Podkladem při tvorbě ukázkových příkladů mi byly úlohy zaměřené na nerovnosti a nerovnice z jednotlivých učebnic základní školy. Tyto úlohy jsou mnohdy součástí textu mé práce spolu s odkazem na konkrétní literaturu a to včetně strany.

V prvním ročníku se jedná o nejjednodušší nerovnosti, ve kterých si žáci postupně dělají představy o číslech a o jejich velikosti. V každém ročníku si žáci osvojují nové poznatky, které posunují jejich vědomosti o nerovnostech a nerovnicích na vyšší úroveň. Úlohy k řešení jsou těžší a těžší, což je možné vypozorovat právě v příkladech vztahujících se k jednotlivým ročníkům.

Téma *Nerovnosti a nerovnice na základní škole* mě při výběru zadání diplomové práce zaujalo. Je zajímavé a získané informace se mi pro mou budoucí práci učitelky na druhém stupni základní školy budou hodit.

NEROVNOST, NEROVNICE

V úvodní kapitole připomeneme pojem nerovnost a její konkrétní podobu ve školské matematice. Dále v této kapitole připomeneme pojem nerovnice a její řešitelnost.

1.1 NEROVNOST

S nerovnostmi se z různých hledisek potýkáme po celý život. Již jako děti musíme mít přehled o tom, co je větší a co menší, co se týče například zvířat a věcí. Při zápisu do první třídy se s takovým typem úlohy můžeme setkat. Na základní škole se s nerovnostmi a nerovnicemi setkáváme v různých podobách v každém ročníku od první do deváté třídy.
Definice (nerovnost): Jako nerovnost je označován zápis L < P (L ≤ P), popřípadě L > P (L ≥ P), kde L a P jsou hodnoty číselných výrazů. Jestliže zadaná podmínka vyhovuje, nerovnost je platná. V případě nepravdivého zápisu je nerovnost neplatná. [8], str. 66
Nerovnost chápeme většinou šířeji, než je uvedeno v definici. Za nerovnost považujeme také např.: 5 – 2 > 2 + 0, kde L a P nejsou hodnoty číselných výrazů, ale číselné výrazy. Také za nerovnost považujeme $x^2 + y^2 < (x + y)^2$, x, y > 0, kde L a P jsou výrazy s proměnnou.

Nerovnost ve školské matematice chápeme nejčastěji jako vztah mezi dvěma čísly vzhledem k jejich velikosti.

Pro dvě reálná čísla *a*, *b* platí:

- *a* ≠ *b* … nerovnost mezi dvěma reálnými čísly *a*, *b*, kde číslo *a* je různé od čísla *b*, proto se *a* nerovná *b*
- *a* > *b* … ostrá nerovnost mezi dvěma reálnými čísly *a*, *b*, kde číslo *a* je ostře větší než číslo *b*
- *a* ≥ *b* … neostrá nerovnost mezi dvěma reálnými čísly *a*, *b*, kde číslo *a* je větší nebo rovno číslu *b*
- *a* < *b* … ostrá nerovnost mezi dvěma reálnými čísly *a*, *b*, kde číslo *a* je ostře menší než číslo *b*
- *a* ≤ *b* … neostrá nerovnost mezi dvěma reálnými čísly *a*, *b*, kde číslo *a* je menší nebo rovno číslu *b*

Nerovnosti mezi libovolnými reálnými čísly a, b, c, d mají následující vlastnosti:

1) *trichotomie* nerovnosti < … pro dvojici libovolných reálných čísel a, b platí právě

   jeden z výroků $a < b$, $a = b$, $a < b$

2) *tranzitivnost* nerovnosti < … $(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$

3) *monotonie sčítání reálných čísel* … $(a < b \wedge c \in \mathrm{R}) \Rightarrow a + c < b + c$

4) *monotonie násobení reálných čísel* … $(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow ac < bc$

   $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$

5) *sčítání nerovností* … $(a < b \wedge c < d) \Rightarrow a + \mathrm{c} < b + d$

6) násobení nerovností … $(0 < a < b \wedge 0 < c < d) \Rightarrow ac < bd$

$$a < b \Leftrightarrow b > a \Leftrightarrow b - a > 0$$

[34], str. 20

1.2 Nerovnice

Nerovnice patří do základních pojmů matematiky, stejně jako rovnice. Z hlediska logiky ji můžeme chápat jako výrokovou formu. Úkol řešit nerovnici pak odpovídá úloze najít obor pravdivosti příslušné výrokové formy.

Každá nerovnice má pravou a levou stranu, které jsou odděleny znaménkem nerovnosti. Během studia základní školy se v rámci základního učiva typově řeší lineární nerovnice a jejich soustavy.

V učebnicích můžeme nalézt různé formy definice nerovnice jako takové, záleží na tom, na jaké úrovni vzdělávání je daná látka probírána.

- Na základní škole je nerovnice definována jako zápis nerovnosti dvou výrazů, ve kterém se má určit neznámé číslo (*x)* tak, aby daná nerovnost platila.
  V několika učebnicích samotná definice nerovnice chybí a učební látka je žákům uvedena nejčastěji čtyřmi konkrétními příklady nerovnic, ve kterých se jednotlivě objevují obě znaménka pro nerovnost ostrou $<$, $>$ a obě znaménka pro nerovnost neostrou $\leq$, $\geq$. Například $4u - 2 < 2u + 6$, $x + 8 \leq 11 - 2x$, $5z - 3 > 7$, $6v \geq v - 10$.
  Můžeme se setkat i s uvedením příkladů lineární nerovnice obecného tvaru $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, kde a je libovolné nenulové reálné číslo a b je libovolné reálné číslo.
- Na střední škole jako nerovnici nazýváme matematický zápis nerovnosti dvou výrazů, ve kterých se může nacházet písmeno označující neznámou (*x*). [35], str. 13

Nerovnice se na množině reálných čísel řeší obdobně jako rovnice. Postup, jak pomocí ekvivalentních úprav dojít k výsledku, znají žáci z předchozího učiva. Ekvivalentními úpravami se nazývají úpravy, které nezmění řešení dané nerovnice. Množina řešení dané nerovnice zůstává stejná.

V textu na další stránce najdeme ekvivalentní úpravy, které postačí k řešení jednoduchých nerovnic, s nimiž se lze setkat v úlohách na 2. stupni základní školy.

Ekvivalentní úpravy nerovnic:

a) Řešení nerovnice se nezmění, jestliže k oběma stranám nerovnice přičteme stejné číslo.

$$x - 2 < 0 \quad / + 2$$
$$x < 2$$

b) Řešení nerovnice se nezmění, jestliže k oběma stranám nerovnice přičteme stejný výraz.

$$2x + 7 \geq 10 - x \quad / + (x - 7)$$
$$3x \geq 3$$

c) Řešení nerovnice se nezmění, jestliže od obou stran nerovnice odečteme stejné číslo.

$$5x + 3 > 13 \quad / - 3$$
$$5x > 10$$

d) Řešení nerovnice se nezmění, jestliže od obou stran nerovnice odečteme stejný výraz.

$$7x \leq 3x + 2 \quad / - 3x$$
$$4x \leq 2$$

e) Řešení nerovnice se nezmění, jestliže vynásobíme obě strany nerovnice stejným kladným číslem.

$$\frac{1}{2}x > 3 \quad / \,.\, 2$$
$$x > 6$$

f) Řešení nerovnice se nezmění, jestliže vydělíme obě strany nerovnice stejným kladným číslem.

$$3x > 9 \quad / : 3$$
$$x > 3$$

g) Řešení nerovnice se nezmění, jestliže obě strany nerovnice vynásobíme stejným záporným číslem a zároveň změníme znak nerovnosti v opačný.

$$-\frac{1}{5}x > 2 \quad / \,.\, (-5)$$
$$x < -10$$

h) Řešení nerovnice se nezmění, jestliže obě strany nerovnice vydělíme stejným záporným číslem a zároveň změníme znak nerovnosti v opačný.

$$-2x \leq 4 \quad / : (-2)$$

$$x \geq -2$$

i) Řešení nerovnice se nezmění, jestliže zaměníme pravou a levou stranu nerovnice a zároveň obrátíme znaménko nerovnosti v dané nerovnici. [35]

$$3 > 2x$$

$$2x < 3$$

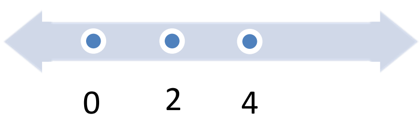
<u>Obecný popis řešení lineární nerovnice, který zahrnuje ekvivalentní úpravy:</u>

Nerovnici převedeme na tvar, který se skládá z konstanty a neznámé s daným koeficientem, $ax + b < 0$ $(<; >; \leq; \geq)$ $a; b \in R$. Následně je konstanta převedena na druhou stranu nerovnice. Posledním krokem je vydělení celé nerovnice koeficientem před neznámou, abychom neznámou osamostatnili a dospěli k výsledku.

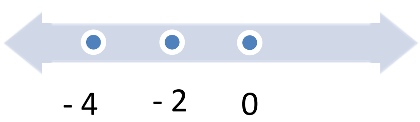
Jestliže je koeficient kladné číslo, znaménko nerovnosti zůstává stejné. Pokud je ale koeficient číslo záporné, při dělení musíme znaménko nerovnosti změnit v opačné.
A proč se znaménko nerovnosti mění v opačné? K vysvětlení je možné použít číselnou osu, na které je důvod změny znaménka nerovnosti v opačné snadno zpozorovatelný. Na číselnou osu vyznačíme číslo 0 a dvě různá čísla větší než 0, například čísla 2 a 4.

$0 < 2$, $0 < 4$

$2 < 4$



Vynásobením čísel 2 a 4 číslem (– 1) dostáváme čísla – 2 a – 4, která znovu vyznačíme na číselnou osu.



Jak je vidět, – 4 leží více vlevo od 0 než – 2, proto je menší a dostáváme tedy nerovnost – 4 < – 2. Užitím ekvivalentní úpravy i) získáme nerovnost – 2 > – 4.
Kdybychom po vynásobení záporným číslem znaménko nerovnosti nezměnili v opačné, dostali bychom nerovnost ve tvaru – 2 < – 4, což by neplatilo.

Důvod změny znaku nerovnosti v opačný při násobení (dělení) nerovnice záporným číslem je možné vypozorovat i z následujícího výpočtu, kde a,b jsou libovolná reálná čísla [35]:

$a < b \quad / - \ (a + b)$ … od obou stran nerovnice odečteme součet čísel a, b

$a - a - b < b - b - a$

$-b < -a$ … ekvivalentní úprava i)

$-\ a > -b$

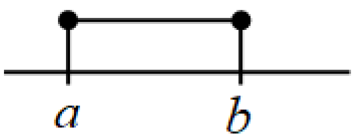
Řešením nerovnice je interval odpovídající vypočítané nerovnosti, konečná množina čísel nebo prázdná množina. Prázdná množina je řešením tehdy, pokud výsledná nerovnost neplatí nebo nevyhovuje zadaným podmínkám.

<u>Znázornění intervalů a jejich zápis:</u>

OMEZENÉ INTERVALY:

a) UZAVŘENÝ INTERVAL

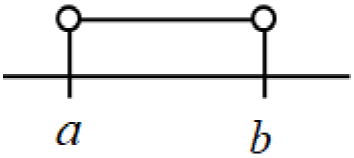
$a \leq x \leq b$, $a < b$ … a, b jsou krajní body intervalu a do intervalu patří (plné kolečko)



$x \in \langle a, b \rangle$

b) OTEVŘENÝ INTERVAL

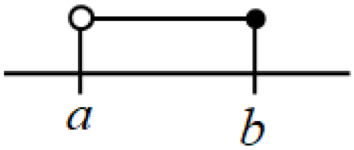
$a < x < b$, $a < b$ … a, b jsou krajní body intervalu a do intervalu nepatří (prázdné kolečko)



$x \in (a, b)$

c) POLOOTEVŘENÝ (POLOUZAVŘENÝ) INTERVAL

$a < x \leq b$, $a < b$ … a, b jsou krajní body intervalu, a do intervalu nepatří (prázdné kolečko), b do intervalu patří (plné kolečko)



$x \in (a, b\rangle$ Pokud $a \leq x < b$, $x \in \langle a, b)$.

NEOMEZENÉ INTERVALY:

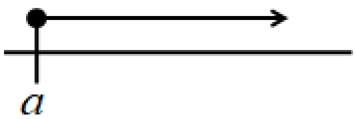
d) ZLEVA (ZPRAVA) NEOMEZENÝ OTEVŘENÝ INTERVAL

$x < a$

$x \in (-\infty, a)$

e) ZPRAVA (ZPRAVA) NEOMEZENÝ POLOOTEVŘENÝ (POLOUZAVŘENÝ) INTERVAL

$x \geq a$



$x \in \langle a, +\infty)$

f) NEOMEZENÝ INTERVAL

$x \in R \Rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$

<u>Příklady:</u>

1) V množině reálných čísel řešte nerovnici $6x - 2 \geq 11x + 8$

$6x - 2 \geq 11x + 8 \quad / - (11x + 8)$ ... ekvivalentní úprava d)

$6x - 11x - 2 - 8 \geq 11x - 11x + 8 - 8$

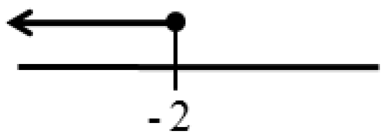
$-5x - 10 \geq 0 \quad / + 10$ … ekvivalentní úprava a)

$-5x - 10 + 10 \geq 0 + 10$

$-5x \geq 10 \quad / : (-5)$ … ekvivalentní úprava h)

$x \leq -2$

Řešení nerovnice znázorníme na číselnou osu a následně zapíšeme pomocí intervalu.



$x \in (-\infty, -2\rangle$ → zleva neomezený polootevřený (polozavřený) interval

2) V oboru přirozených čísel řešte nerovnici $x + 3 \leq 5$

$x + 3 \leq 5 \quad / -5$ … ekvivalentní úprava c)

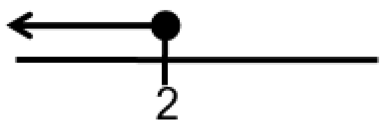
$x + 3 - 5 \leq 5 - 5$

$x - 2 \leq 0 \quad / +2$ … ekvivalentní úprav a)

$x - 2 + 2 \leq 0 + 2$

$x \leq 2$

Nerovnici řešíme na množině přirozených čísel, proto řešením nebude interval, ale odpovídající množina čísel.



$x \in \{1, 2\}$

3) V množině reálných čísel řešte nerovnici $3x - 5 > 3x + 2$

$3x - 5 > 3x + 2 \quad / -(3x + 2)$ … ekvivalentní úprava d)

$3x - 3x - 5 - 2 > 3x - 3x + 2 - 2$

$-7 > 0$

Výsledná nerovnost neplatí, proto daná nerovnice nemá řešení.

Zkouška při řešení nerovnice:

Při řešení nerovnic využíváme ekvivalentních úprav právě z toho důvodu, aby zkouška nemusela být součástí řešení. Protože řešení nerovnice je zpravidla nekonečně mnoho, ani nelze do dané nerovnice dosazovat všechny hodnoty. O správnosti řešení je možné se přesvědčit dosazením náhodně vybraných čísel z výsledného intervalu do zadání nerovnice. Nejedná se o zkoušku, ale je možné touto cestou odhalit různé chyby, kterých jsme se mohli při řešení nerovnice dopustit.

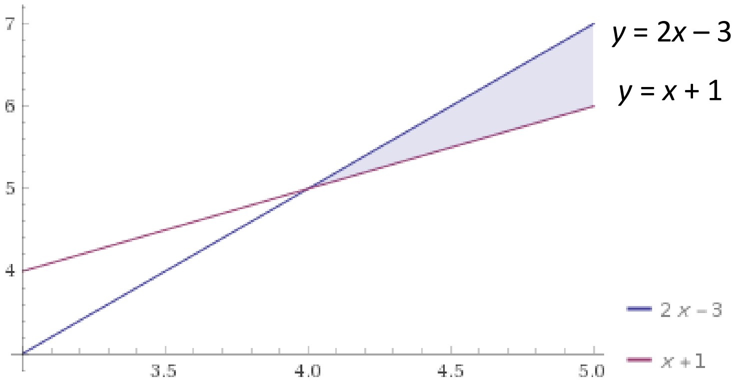
Grafické řešení nerovnic:

Kromě početního řešení nerovnice můžeme danou nerovnici řešit také graficky. Při grafickém řešení nerovnice L (x) > P (x), popřípadě L (x) < P (x), využíváme toho, že levá i pravá strana nerovnice představuje předpis lineární funkce, jejímž grafem je přímka: L (x) = f (x), P (x) = g (x). Graf lineární funkce z levé i pravé strany nerovnice znázorníme ve stejné pravoúhlé soustavě souřadnic a vzniknou tedy dvě přímky, z nichž každá odpovídá předpisu dané lineární funkce. Nerovnici vyřešíme tak, že vyhledáme z grafu všechna čísla x, v nichž je hodnota funkce f větší než hodnota funkce g v případě, kdy f (x) > g (x). V případě, že f (x) < g (x) vyhledáme v grafu všechna čísla x, ve kterých je hodnota funkce f menší než hodnota funkce g. Kromě nerovnic s ostrou nerovností můžeme graficky řešit i nerovnice s nerovností neostrou.

1) Řešte graficky nerovnici: $2x - 3 > x + 1$

   f: $y = 2x - 3$

   g: $y = x + 1$



[39]

Hodnoty funkce f jsou větší než hodnoty funkce g pro čísla $x > 4$. Množina všech řešení je tedy interval $(4, +\infty)$.

Soustavou nerovnic s jednou neznámou $x \in R$ rozumíme dvě nebo více nerovnic, které mají platit zároveň. Z vysokoškolského hlediska je soustava nerovnic definována jako konjunkce výrokových forem.

Řešit soustavu nerovnic o jedné neznámé znamená určení množiny všech hodnot proměnné x, pro které současně platí všechny nerovnice dané soustavy. Řešením soustavy nerovnic je průnik množin řešení každé z nerovnic soustavy.

1) Řešte soustavu nerovnic: $3x - 1 > 5$

$$-x - 2 \leq 8 - 3x$$

Při postupu řešení řešíme každou nerovnici zvlášť:

a) $3x - 1 > 5 \quad / -5$ … ekvivalentní úprava c)

$3x - 1 - 5 > 5 - 5$

$3x - 6 > 0 \quad / +6$ … ekvivalentní úprava a)

$3x - 6 + 6 > 0 + 6$

$3x > 6 \quad / :3$ … ekvivalentní úprava f)

$x > 2$

b) $-x - 2 \leq 8 - 3x \quad / -(8 - 3x)$ … ekvivalentní úprava d)

$-x + 3x - 2 - 8 \leq 8 - 8 - 3x + 3x$

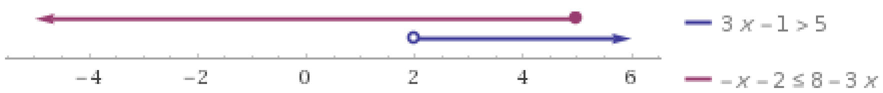
$2x - 10 \leq 0 \quad / +10$ … ekvivalentní úprava a)

$2x - 10 + 10 \leq 0 + 10$

$2x \leq 10 \quad / :2$ … ekvivalentní úprava f)

$x \leq 5$

Výsledky obou nerovnic znázorníme na číselnou osu a určíme průnik obou řešení.



[39]

$2 < x \leq 5$

Průnikem množin řešení každé z nerovnic je interval (2, 5⟩, který je řešením soustavy daných nerovnic.

2 RÁMCOVÝ VZDĚLÁVÁCÍ PROGRAM PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ- 1. STUPEŇ

V rámcovém vzdělávacím programu najdeme výčet vědomostí a dovedností, které jsou v kontextu s nerovnostmi ve vzdělávací oblasti s názvem Matematika a její aplikace. Souvislostí s nerovnostmi je tu mnoho, já jsem ve svém textu podle mého posouzení vypsala jen ty, které jsou s nerovnostmi v přímém vztahu a najdeme je u jednotlivých tematických okruhů.

V rámci očekávaných výstupů 1. období žák v tematickém okruhu Číslo a početní operace porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah nerovnosti a užívá lineární uspořádání. Minimální doporučená úroveň 1. období je porovnávání množství v oboru do 20, znalost matematických operátorů <, > a jejich zápis. V očekávaných výstupech 2. období se objevuje provádění odhadů v oboru přirozených čísel a porovnávání zlomků se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel. Minimální doporučená úroveň 2. období je porovnávání čísel do 100.

Jedním z bodů minimální doporučené úrovně tematického okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty je doplnění posloupnosti v oboru čísel do 20. Aby žák zmiňovanou minimální úroveň splnil, musí mít představu o tom, které číslo je vzhledem k danému číslu menší, a které je větší.

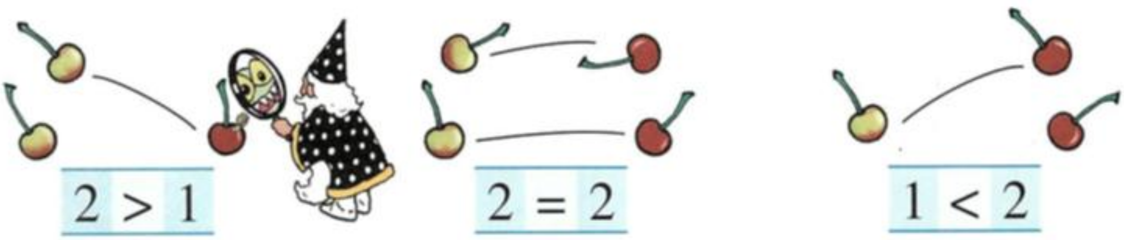
V tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žák dle očekávaných výstupů souvisejících s nerovnostmi porovnává velikosti útvarů. Minimální doporučenou úrovní je měření a porovnávání délky úsečky.

V následující části se budeme zaobírat nerovnostmi a nerovnicemi, které jsou součástí učiva 1. stupně základní školy. Popíšeme úlohy související s nerovnostmi a nerovnicemi z jednotlivých ročníků a uvedeme konkrétní ukázky úloh, které se v učebnicích vyskytují. Součástí textu je výčet získaných dovedností, které si žáci při řešení jednotlivých úloh osvojí.

3 1. ROČNÍK

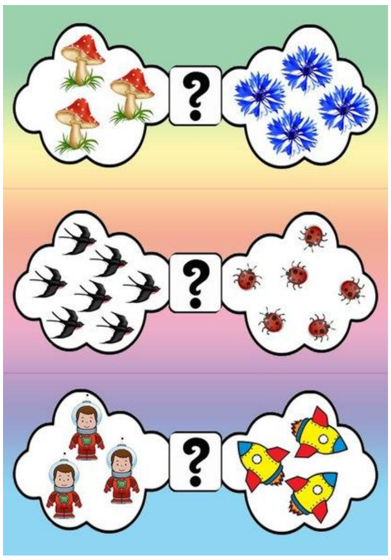
V prvním ročníku se žáci prvně setkávají s čísly, s početními operacemi a s nerovnostmi. Vše se provádí v oboru čísel do 20.

V prvních chvílích se děti učí porovnávat počty věcí. Poprvé užívají znaky <, >, se kterými se v rámci nerovnosti pracuje a tyto znaky se učí zapisovat. V úlohách je zapotřebí určit počty zobrazených věcí a následně získané počty porovnat mezi sebou, vše nejprve na základě vzorově vyřešené úlohy, viz Obr. 1.



Obr. 1, Porovnávání (Převzato z [1, str. 28].)

Tyto úlohy přispívají k rozvoji představy o čísle. Dítě se postupně učí přestat vnímat zřejmé vlastnosti zobrazených předmětů, jako je například jejich barva, velikost nebo tvar. Určuje pouze počet zobrazených předmětů. (Obr. 2)



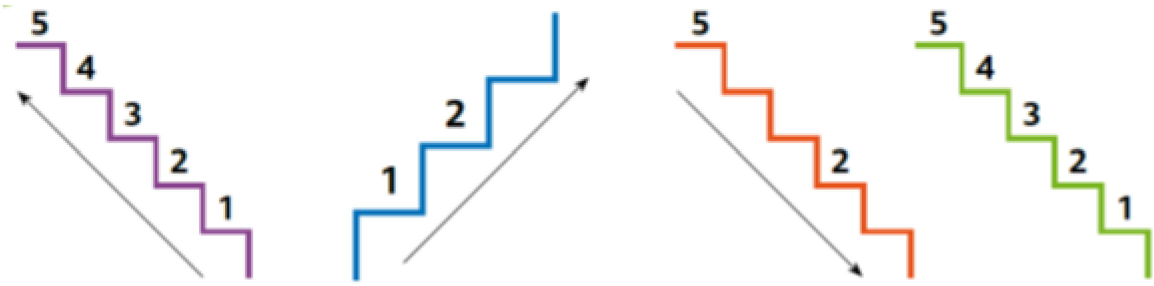
Obr. 2, Porovnávání (Převzato z [2].)

V jiných úlohách je třeba rozhodnout o počtu zobrazených věcí a následně dokreslit větší nebo naopak menší počet věcí a výsledek porovnání zapsat. Takové úlohy odpovídají řešení nerovnic typu $x < n$, $x > n$, $n \in \mathbb{N}$.

Postupně se přechází k řešení nerovnic $x < y$, $y > x$, ve kterých se již nepracuje s obrázky, ale pouze s čísly. Úkolem je najít jedno řešení takové nerovnice. (Obr. 3)

Obr. 3, Nerovnice typu $x > y$ (Převzato z [3] str. 25.)

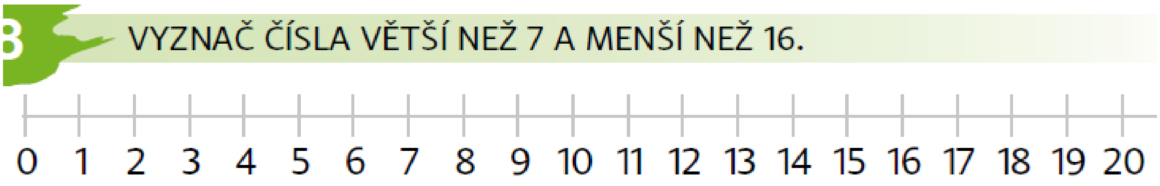
Pomocí výše uvedených úloh žáci získají představu o číselné řadě a procvičí si uspořádání čísel. Tato znalost se ověřuje pomocí následujících úloh. Úkolem je doplnit číslo v posloupnosti. (Obr. 4)



Obr. 4, Uspořádání čísel (Převzato z [3] str. 20.)

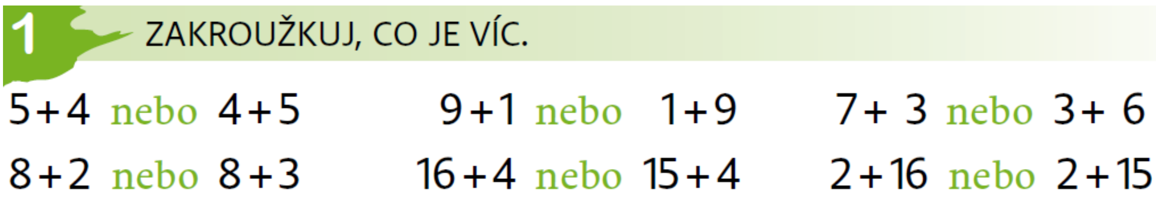
Dalším typem úloh může být nalezení čísel splňujících dvě podmínky, tj. vyřešení soustavy nerovnic. (Obr. 5)

Takové úlohy řeší děti pomocí číselné osy. Úkoly jsou v učebnicích zadány slovně a cílem je vyznačit čísla na číselné ose splňující zadané podmínky. Při porovnávání dvou čísel pomocí číselné osy využívají pravidlo, podle kterého je na číselné ose větší číslo umístěné vpravo od čísla menšího.



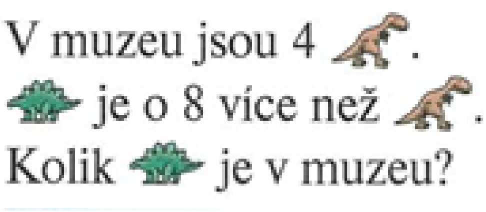
Obr. 5, Soustavy nerovnic typu $a < x < b$ (Převzato z [4] str. 56.)

Ve chvíli, kdy děti mají hotovou představu o posloupnosti přirozených čísel a zvládají porovnávání čísel, přechází se k početním operacím s čísly. Úlohy na porovnání lze následně zkomplikovat přidáním početních operací. (Obr. 6)



Obr. 6, [4] str. 55

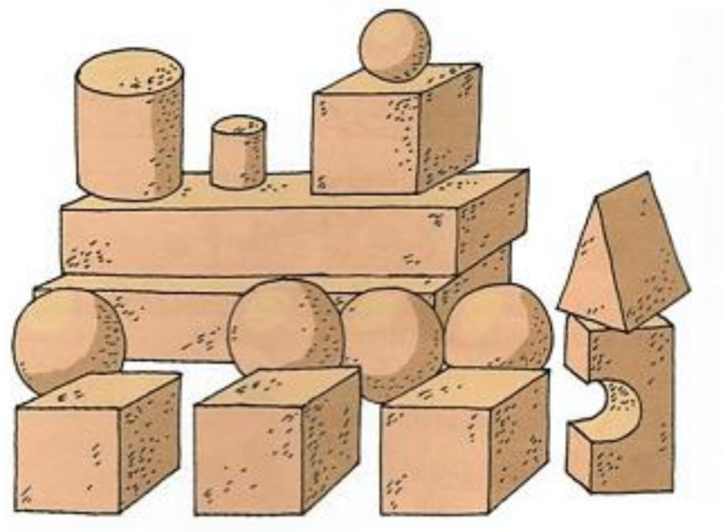
Již od 1. ročníku řeší žáci slovní úlohy typu „o *n* více“, „o *n* méně“, tzv. úlohy s porovnáním. (Obr. 7) Takové úlohy řeší znázorněním.



Obr. 7, (Převzato z [5, str. 31.]

Ordinální přístup

Ordinální přístup se uplatňuje v následující úloze. (Obr. 8) Zadaným úkolem je spočítat, kolik krychlí, kvádrů, koulí a válců je na zobrazené stavebnici. V dalším kroku má žák za úkol počty těles mezi sebou porovnat. Žák při porovnání aplikuje znalost, že ve vyjmenované řadě přirozených čísel je větší to, které je jmenováno později.



Obr. 8, (Převzato z [5 str. 18].)

Kardinální přístup

Kardinálního přístupu žáci využívají například u výše uvedené úlohy, viz 1, str. 16. Spojení předmětů odpovídá vytváření bijekce jedné množiny na druhou. Žák následně porovná počty předmětů na obou stranách.

V rámci 1. ročníku se v souvislosti s nerovnicemi setkáváme s typy úloh na porovnávání, při kterých žáci používají znaky nerovnosti. Zpočátku porovnávají počty znázorněných věcí a následně přechází k porovnávání samotných čísel. Po zvládnutí číselných operací mezi čísly je možné porovnávat výsledky početních operací. Dále se žáci v průběhu prvního ročníku při výuce matematiky setkávají s číselnou řadou, pomocí které si vytvářejí představy o uspořádání čísel. Zatím se jedná pouze o uspořádání a posloupnost čísel přirozených. V souvislosti s číselnou řadou je možné řešit úlohy na jednoduché soustavy nerovnic.

4 2. AŽ 5. ROČNÍK

V rámci učiva každého ročníku si žáci opakují získané znalosti o nerovnostech a nerovnicích z ročníků předchozích. Pomocí úloh jsou ověřovány očekávané výstupy žáků, s cílem ujasnit případné nejasnosti, které by se mohly stát komplikací pro získání nových poznatků.

V následném textu jsou uvedeny operace, které se k tématu nerovnice a nerovnosti vztahují a jejich podoba v jednotlivých ročnících.

4.1 POROVNÁVÁNÍ

Úloh na porovnávání se v učebnicích nachází nejvíce.

Ve druhé třídě se řeší úlohy, které jsou typově stejné jako úlohy ve třídě první, zvětšuje se pouze obor čísel. Porovnávání se vztahuje k nezáporným číslům $x \leq 100$. Například se doplňují znaménka <, >, mezi dvě čísla 20, 40; 71, 41, popřípadě do trojice čísel 15, 54, 89 apod.

Stejné typy úloh se řeší i ve třetím ročníku, ale v číselném oboru 0 – 1 000. Trojciferná čísla žáci porovnávají pomocí číselné osy a pomocí zápisu čísel. Ve spojení s porovnáním se ve třetí třídě setkáváme s úlohami na zaokrouhlování a s úlohami na dělení se zbytkem.

Zaokrouhlování

Přirozená čísla se zaokrouhlují podle známého pravidla. Čísla končící 1, 2, 3, 4 zaokrouhlujeme směrem dolů a při následném porovnávání je zaokrouhlená hodnota menší než zaokrouhlované číslo. Čísla končící 5, 6, 7, 8, 9 zaokrouhlujeme směrem nahoru a zaokrouhlená hodnota je větší než zaokrouhlované číslo.

Dělení se zbytkem

Porovnání se využije i v náročné operaci, kterou je pro žáky dělení se zbytkem. U dělení se zbytkem se porovnávání provádí hned dvakrát.

Př.1: Vypočítej

37	:	5 =	7	(zb. 2)
dělenec		***dělitel***	***podíl***	***zbytek***

Vzhledem k tomu, že číslo 37 není násobkem čísla 5, hledáme nejbližší **menší** násobek čísla 5. V tomto případě je to 35. Zbytek dělení vypočítáme z rozdílu dělence a nejbližšího menšího násobku. Kontrolujeme podmínku, zda je zbytek **menší** než dělitel.

Postup řešení:

7 . 5 = 35

37 – 35 = 2

2 < 5

37 : 5 = 7 (zb. 2)

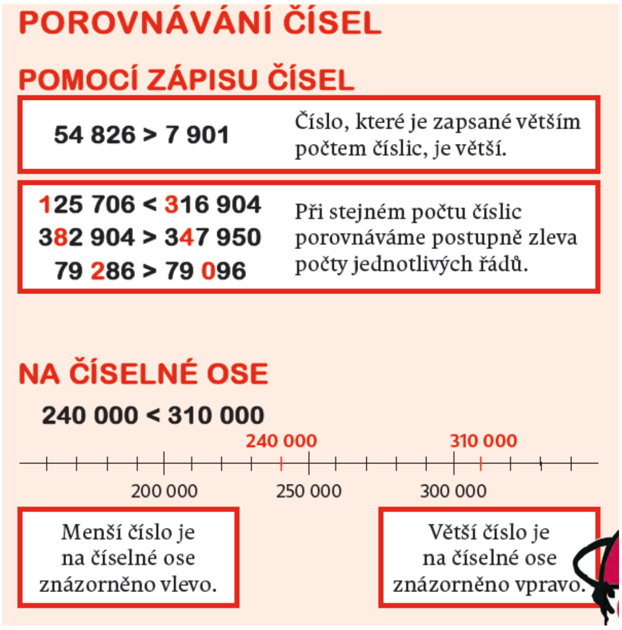
Obor hodnot čísel, se kterým se pracuje v úlohách čtvrtého ročníku, dosahuje do 1 000 000. Opět se tu setkáváme s úlohami na porovnávání čísel a s úlohami na porovnávání výsledků početních operací. Dále se ve čtvrtém ročníku porovnávají čísla v úlohách o převodu jednotek. Ukázkou dané úlohy je následující obrázek. (Obr. 9)

Porovnej.

2 roky ☐ 28 měsíců	3 roky ☐ 156 týdnů
18 měsíců ☐ 2 roky	3 dny ☐ 72 h
100 h ☐ 5 dnů	1 rok ☐ 306 dnů
170 s ☐ 2 min	10 min ☐ 1 400 s
36 h ☐ 2 dny	52 měsíců ☐ 4 roky
37 měsíců ☐ 3 roky	3 min ☐ 130 s

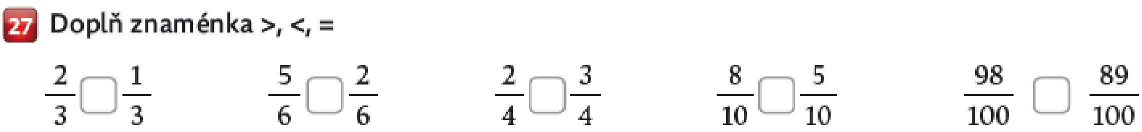
Obr. 9, (Převzato z [7, str. 53].)

Při postupu řešitel musí vypočítat potřebné dílčí příklady, v úlohách o převodu jednotek se jedná o převedení zadaných hodnot na stejné jednotky. Následně řešitel určí počet číslic obou údajů. Pokud se počet číslic liší, je větší číslo s větším počtem řádů. V případě stejného počtu číslic se porovnávají čísla od nejvyšších řádů, tj. zleva doprava, viz pravidlo na obr. 10.



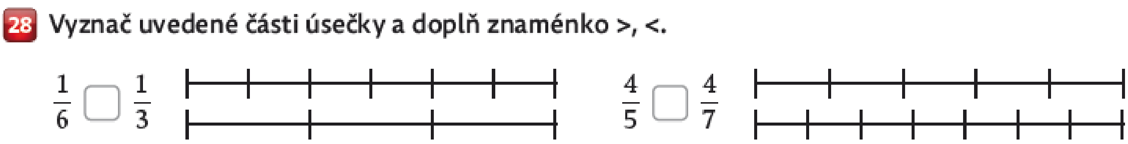
Obr. 10, (Převzato z [7, str. 29].)

Novou látkou čtvrtého ročníku jsou zlomky. Žáci si v rámci učiva osvojují nové pojmy jako je čitatel, zlomková čára a jmenovatel. Jedním z očekávaných výstupů je porovnávání zlomků se stejným jmenovatelem. (Obr. 11) Pokud mají zlomky stejného jmenovatele, je větší ten zlomek, který má většího čitatele.



Obr. 11, Porovnávání zlomků se stejným jmenovatelem (Převzato z [7] str. 65.)

Někdy se porovnávají i zlomky se stejným čitatelem pomocí znázornění. (Obr. 12) Takto si mohou děti osvojit pravidlo, podle něhož ze dvou zlomků se stejným čitatelem je větší ten, který má menšího jmenovatele.



Obr. 12, Porovnávání zlomků se stejným čitatelem (Převzato z [7] str. 66.)

V pátém ročníku se v rámci úloh pohybujeme na množině všech přirozených čísel. Kromě typických příkladů na porovnání se v učebnicích objevují slovní úlohy s porovnáním. Ukázkou takové slovní úlohy je příklad 2. Dále se znaky nerovnosti využívají při porovnání výsledků početních operací se zlomky, viz příklad 3. Většina příkladů byla doteď řešena v množině přirozených čísel. V pátém ročníku se již řeší úlohy na zmiňovanou dovednost i v oboru desetinných čísel a v oboru čísel celých.

Př. 2 Jana měla ušetřeno 850 Kč, Petr o 220 Kč méně. Jana dostala od babičky ještě 120 Kč a pak koupila dárek za 90 Kč. Petrovi poslal strýc 200 Kč a od dědy dostal 70 Kč. Kdo má nyní více a o kolik?

Převzato z [37], str. 3

Př. 3 Doplň čitatele nebo jmenovatele tak, aby platil uvedený vztah.

a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} > \frac{}{5}$

b) $\frac{7}{11} + \frac{2}{11} > \frac{9}{}$

4.2 Nerovnice

V každém ročníku je v učebnicích možné najít nerovnice vztahující se k probíranému číselnému oboru, který je u každého ročníku zmíněný již v podkapitole porovnávání. Například učivem druhého ročníku jsou nerovnice typu 40 > x, x < 58 aj., které se stejně jako úlohy na porovnání vztahují k nezáporným číslům $x \leq 100$.

Ukázkou nerovnic řešených v pátém ročníku je na jednoduché nerovnice příklad 4 a na nerovnice složitější příklad 5. Po žácích se chtějí hned tři řešení každé nerovnice. Při vymýšlení příkladů jsem se inspirovala učebnicí matematiky pro 5. ročník od nakladatelství Fraus.

Př. 4 Najdi tři řešení obou nerovnic.

a) $x > 5$

b) $y < -13$

Př. 5 Najdi tři řešení nerovnice. Použij dosazování.

a) $10 + 2b < 30$

b) $5x - 3 < 22$

V dílčích příkladech následující úlohy se rovněž vyskytují různá písmenka, která v matematice značí neznámou. Tato písmenka nahradila prázdné čtverečky, do kterých žáci v předchozích úlohách doplňovali požadovaná čísla.

Pracuje se tu s typy nerovnic $a > x$ ($a < x$) a typy $x > a$ ($x < a$). První zmiňovaný typ je pro žáky snadněji vyřešitelný než typ druhý, který se žákům hůř čte.

Př. 6 Najděte alespoň tři čísla, která jsou řešením nerovnice.

a) $8\,456\,789 > z$

b) $a > 22\,789$

4.3 SOUSTAVY NEROVNIC

Některé slovní úlohy čtvrtého ročníku vedou na řešení soustav nerovnic. Ukázkou je příklad 7 ze třetího dílu učebnice matematiky pro 4. ročník základní školy od nakladatelství Alter. Obdobné soustavy nerovnic se řeší pomocí číselné osy, ze které se vyčtou potřebné hodnoty.

Př.7 Maminka smažila koblížky. Míša se jí zeptala, kolik koblížků usmažila. Maminka řekla: ,,Je jich více než čtyřicet, ale padesát jich není." Kolik koblížků mohla maminka usmažit?

počet koblížků k

počet koblížků více než 40 $k > 40$

méně než 50 $k < 50$

můžeme také zapsat $40 < k < 50$

Koblížků mohlo být 41, 42, _____________, 49.

Převzato z [36], str. 29

V pátém ročníku se řeší obdobné příklady na soustavy nerovnic, jako je příklad číslo 8. Při vymýšlení následných dvou příkladů jsem se inspirovala 1. dílem učebnice matematiky pro 5. ročník od nakladatelství Alter.

Př. 8 Doplň libovolná čísla tak, aby platilo:

_____ < 1 234 < _____

47 200 < _____ < 88 411

_____ < _____ < 8 005

Pracuje se tu s třemi typy soustav nerovnic. Jedná se o úlohu typu $x < 1\,234 < y$, úlohu typu $47\,200 < x < 88\,411$ a úlohu typu $x < y < 8\,005$. Za vyřešením soustavy nerovnic žák vyhledává čísla, která vhodně nahradí za neznámé x a y, aby zadaná nerovnost platila.

V následujícím příkladu je soustava nerovnic s neznámou ležící mezi dvěma danými čísly zahrnuta do slovní úlohy. Slovní úloha je ukázkou praktického použití soustavy nerovnic.

Př. 9 Ze Sokolova do Karlových Varů je to 19 km, do Prahy 145 km. Kolik kilometrů může měřit vzdálenost ze Sokolova do Bochova, který leží mezi Karlovými Vary a Prahou?

Označíme: v … vzdálenost ze Sokolova do Bochova

Zapíšeme: ______ < v < ______

Nerovnice $1 < x < y$ je dalším typem. V tomto typu úlohy se opět hledají dvě různá čísla, která nahradí neznámé x a y a budou splňovat požadovanou nerovnost. Posledním dílčím příkladem je úloha typu $x < y < z$, ve které není předvolené žádné číslo, a tak řešitel sám volí čísla, která splňují dané nerovnosti.

O něco složitější jsou nerovnice splňující danou podmínku, které navazují na předchozí typy. Úkolem není pouze doplnit požadovaná čísla, žák musí vzhledem k podmínce na požadovaná čísla přijít a navíc nerovnost sám vhodně sestavit.

Řešení nerovnic se může využít při odhadování výsledku násobení. Níže popsaný odhad by se dal využít již ve 4. ročníku.

Postup je následující: zvolíme ke každému činiteli vhodná čísla, mezi kterými leží. Tato čísla jsou volena podle toho, jak přesný odhad chceme mít. V dalším kroku provedeme součin menších zvolených čísel, než jsou původní činitelé a součin čísel větších. Proto při výběru volíme taková čísla, u kterých součin umíme snadno vypočítat. Součin původních čísel bude ležet mezi vypočítanými výsledky násobení a odhad je hotový.

Př. 10 Odhadni výsledek písemného násobení čísel 461 a 73.

Postup: Z platnosti nerovností $0 < d < a$, $0 < k < b$ plyne $dk < ab$.

Číslo 461 leží mezi čísly 400 a 500. Číslo 73 leží mezi čísly 70 a 80.

Dolní odhad:	Horní odhad:
$0 < 400 < 461$ a $0 < 70 < 73$	$0 < 461 < 500$ a $0 < 73 < 80$
$400 \,.\, 70 < 461 \,.\, 73$	$461 \,.\, 73 < 500 \,.\, 80$
$400 \,.\, 70 = 28\,000$	$500 \,.\, 80 = 40\,000$

Výpočet:

$$\begin{array}{r} 461 \\ \underline{.\ 73} \\ 33\,653 \end{array}$$

Dolní odhad je 28 000 a horní odhad je 40 000, proto bude součin čísel 461 a 73 ležet mezi čísly 28 000 a 40 000.

5 RÁMCOVÝ VZDĚLÁVÁCÍ PROGRAM PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ- 2. STUPEŇ

Práce s nerovnostmi a nerovnicemi se v rámci učiva druhého stupně vyskytuje různým způsobem ve velké řadě učebních látek. Na tematický okruh Číslo a početní operace z prvního stupně navazuje a zároveň ho prohlubuje tematický okruh Číslo a proměnná. V textu RVP v tematickém okruhu Číslo a proměnná můžeme nerovnost najít například v očekávaném výstupu, kterým je provádění odhadů s danou přesností. Minimální doporučenou úrovní je porovnávání čísel v oboru do 1 000 000.

V tematickém okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty se mnou rozebírané téma využije při porovnávání souborů dat. Porovnávání dat je jednou z minimálních doporučených úrovní tohoto okruhu.

V tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru je očekávaným výstupem odhad obsahu a obvodu základních rovinných útvarů. Učivem, kde nerovnost je přímo v jeho názvu, je trojúhelníková nerovnost, o které se více dozvíte v textu na straně 35.

V rámci učiva 2. stupně se vyskytují pouze lineární rovnice a soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Nerovnice do učiva v RVP zařazeny nejsou, ale přesto se v 8. Ročníku základní školy vyučují (viz str. 56).

6 6. ROČNÍK

Přechod z prvního stupně na druhý stupeň ZŠ je pro žáky novým začátkem a pro některé může být tato změna problematická. Aby byl žákům tento přechod co nejvíce ulehčen, úvodním tématem šestého ročníku je opakování učiva z první až páté třídy. Učitel matematiky se na většině škol v šesté třídě mění, a proto není opakování vhodné pouze pro děti, ale také pro samotného učitele. Díky opakování pozná u každého žáka úroveň matematických znalostí a dovedností.

V úlohách se kromě znamének ostré nerovnosti >, < objevují i znaménka nerovnosti neostré ≥, ≤ (například se může jednat o úlohu na vyznačení přirozených čísel na číselné ose, která jsou větší nebo rovna 3 a zároveň menší než 10).

6.1 DESETINNÁ ČÍSLA

6.1.1 POROVNÁVÁNÍ

Postup při porovnávání desetinných čísel znají žáci již z pátého ročníku. Tato látka je v šesté třídě probírána znovu, aby následně byli žáci schopni své dovednosti v oboru desetinných čísel rozšířit.

Úkolem může být doplnění číslic v zápisech desetinných čísel tak, aby platila daná nerovnost. Pomocí těchto úkolů se žáci učí zapsat desetinná čísla. O tom, které desetinné číslo je větší, rozhoduje cifra na vyšším řádu. (Př. 11)

Dalším typem jsou úlohy s vypsanou nerovností mezi desetinnými čísly. Žáci v takových úlohách kontrolují, zda je v zápisu použito správné znaménko nerovnosti. (Př. 12) Při vymýšlení vlastních příkladů jsem se inspirovala učebnicemi matematiky od nakladatelství Fortuna, Prometheus, SPN a Prodos.

Př. 11 Doplňte číslice a zapište správnou nerovnost.

a) 15, . . 4 > 15, . . 4

b) 6 . , 6 > 62 , .

Př. 12 Zjisti, které ze zápisů jsou správné, chyby oprav:

a) 32,021 > 32,08   b) 3,76 > 3,67   c) 13,42 < 13,41

Porovnání v oboru desetinných čísel je dále rozšířeno o soustavy nerovnic. V příkladech se po žácích požaduje nalezení jakéhokoliv řešení soustavy nebo je řešení omezeno podmínkou. Jedná se například o nalezení řešení v oboru přirozených čísel, se kterým žáci pracovali většinu doby na prvním stupni. V zadání příkladu jsou obě dvě čísla desetinná nebo dochází ke kombinaci čísel přirozených a čísel desetinných. Takové příklady slouží k ujasnění rozdílů mezi těmito skupinami čísel. Dalším důvodem je to, aby žák dokázal vybrat nejbližší menší, popřípadě větší přirozené číslo k danému číslu desetinnému.

Př. 13 Zapiš všechna přirozená čísla *x*, pro která platí:

a) $3{,}2 < x < 5{,}6$

b) $4 \leq x \leq 8{,}77$

c) $2{,}5 < x \leq 5$

d) $24{,}6 \leq x \leq 32{,}3$

Porovnávání s další operací

Sčítání a odčítání desetinných čísel je již učivo, se kterým se žáci setkávají v šesté třídě poprvé. Po procvičení těchto dovedností následují příklady, ve kterých je spolu se zmiňovanou látkou právě i porovnávání. Zadaným úkolem je srovnat výsledek sčítání (odčítání) s dalším číslem, popřípadě s výsledkem další početní operace. Před porovnáváním čísel je zapotřebí danou početní operaci provést.

Př. 14 Rozhodněte, zda je zapsaná nerovnost správná.

a) $6{,}27 < 6{,}2 + 0{,}1$

b) $0{,}34 > 0{,}09 + 0{,}3$

c) $7{,}53 + 0{,}01 < 8{,}03 - 0{,}5$

d) $4{,}82 - 0{,}5 > 4{,}33$

Obdobně jako u sčítání a odčítání se nerovnost vyskytuje v příkladech na násobení a dělení desetinných čísel. Jedná se opět o nerovnice s další operací. Žáci se učí nerovnost mezi čísly odhadnout i konkrétně vypočítat. V některých úlohách se jedná o zkoušku, zda je daná nerovnost platná, či nikoliv.

Př. 15 Piš *platí-neplatí*. Nenásob, jen odhaduj:

a) 6,3 . 13,1 > 91

b) 0,05 . 5,13 ≥ 0,06 . 4,11

Př. 16 Doplňte správný znak nerovnosti:

a) 90 : 0,09 ___ 0,9 : 9

b) 0,08 : 0,4 ___ 8 : 4

Do úloh s porovnáváním by se opět mohlo zařadit i zaokrouhlování. Desetinná čísla se zaokrouhlují podle stejných pravidel jako čísla přirozená. Nerovnosti se využívá při rozhodování, zda zaokrouhlit „dolů“ či „nahoru“. „Dolů“ se zaokrouhluje tehdy, pokud za zaokrouhlovaným číslem následuje číslo 0, 1, 2, 3, 4. Zaokrouhlování „dolů“ nemění hodnotu zaokrouhlovaného čísla, zůstává stejná. V případě, kdy za zaokrouhlovaným číslem následuje číslo 5, 6, 7, 8, 9, jedná se o zaokrouhlování „nahoru“ a hodnota na místě řádu, na nějž zaokrouhlujeme, se zvětší o 1.

Př. 17

- na desetiny

1,3**7**4 529 ≐ 1,4

protože 7 ≥ 5, zaokrouhlujeme nahoru, výsledkem zaokrouhlení je číslo 1,4

- na setiny

1,37**4** 119 ≐ 1,37

protože 4 < 5, zaokrouhlujeme dolů, výsledkem zaokrouhlení je číslo 1,37

- na tisíciny

1,374 **5**19 ≐ 1,375

protože 5 ≥ 5, zaokrouhlujeme nahoru, výsledkem zaokrouhlení je číslo 1,375

Podobně postupujeme i při zaokrouhlování na desítitisíciny, stotisíciny, miliontiny...

Daná čísla porovnáváme s číslem 5, protože jde o první číslo, od kterého zaokrouhlujeme nahoru.

6.2 Jednotky délky, hmotnosti a obsahu

Nerovnost hraje v učební látce týkající se jednotek délky, hmotnosti a obsahu důležitou roli, co se týče jejich velikosti (např.: cm je menší než dm). Při převádění jednotek je klíčová znalost vztahu mezi danými jednotkami, jak jdou v řadě od nejmenší za sebou. Při postupu řešení si řešitel musí uvědomit, která ze zadaných jednotek je větší, popřípadě čeho je více a následně převod provést.

6.2.1 Porovnávání s převodem

Nerovnosti se využívá také při porovnávání zadaných údajů. Při porovnávání je zapotřebí převést obě hodnoty na stejné jednotky. Až poté lze množství mezi sebou porovnat (Př. 18, 19). V rámci převodů jednotek se můžeme setkat i se slovními úlohami jako je příklad 20. Žák si při řešení úlohy musí uvědomit, co má za úkol a najít v zadání slovní úlohy potřebné hodnoty, které mezi sebou následně porovná.

Př. 18 Co je více?

a) 0,17 m nebo 1,7 dm
b) 0,5 dm nebo 5 mm
c) 13 cm nebo 1,3 mm
d) 6,8 km nebo 680 m

Př. 19 Porovnejte obsahy doplněním jednoho ze znamének >, <, = :

a) 7 a ___ 70 m^2
b) 3 km^2 ___ 300 ha
c) 0,05 ha ___ 5 a

Př. 20 Martin si chtěl koupit 140 g salámu. Prodavačka se při vážení ptala Martina, zda mu bude stačit množství salámu, které navážila. Martin si přečetl údaj 0,125 kg a řekl: „Bude." Nechal si Martin navážit menší, nebo větší množství salámu, než chtěl? O kolik gramů?

6.3 SPOLEČNÍ DĚLITELÉ, SPOLEČNÉ NÁSOBKY

S hledáním společných dělitelů a násobků souvisí termíny, jako jsou čísla nesoudělná a čísla soudělná. Tato čísla se rozlišují podle hodnoty jejich největšího společného dělitele. Pro nalezení takového dělitele je zapotřebí jednotlivé dělitele mezi sebou porovnat, použít nerovnost.

6.3.1 POROVNÁVÁNÍ A DĚLITELNOST

Zmíněné dovednosti jsou trénovány pomocí následujících úloh.

Př. 21 Nejprve najděte všechny společné dělitele čísel a mezi nimi určete největšího společného dělitele:

a) 28, 42 b) 30, 12 c) 33, 55

6.3.2 NEROVNICE

Mimo nerovností se v zadání úloh týkajících se společných dělitelů a násobků vyskytují také nerovnice. (Př. 22) Stejně tak jako nerovnice v souvislosti se soudělnými čísly můžeme v učebnicích najít příklady na nerovnice ve spojení s čísly nesoudělnými.

Př. 22 Vypiš všechna čísla $x < 18$, která jsou s číslem 18 soudělná.

Př. 23 Zjisti a zapiš všechna čísla menší nebo rovna 60, která jsou společnými násobky čísel:

a) 2, 3, 5 b) 3, 4, 6 c) 7, 14, 21

[12], str. 71

6.4 ÚHLY DANÉ VELIKOSTI

Úhly můžeme klasifikovat dle velikostí. Úhel ostrý a úhel tupý jsou pojmy, které jsou definovány právě pomocí nerovností.

Úhel ostrý je definován jako úhel, jehož velikost je větší než 0° a menší než 90°.

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

Úhel tupý je definován jako úhel, jehož velikost je větší než 90° a menší než 180°.

$$90^\circ < \beta < 180^\circ$$

6.4.1 POROVNÁVÁNÍ ÚHLŮ

Dále můžeme nerovnost najít v úlohách na porovnávání úhlů a při rozhodování o jaký typ úhlu se jedná. Úhel dané velikosti je řešitelem pomyslně dosazen do soustav nerovnic uvedených v definicích. Jestliže daná nerovnost platí, jedná se o daný typ úhlu.

Při řešení následujícího příkladu si žáci trénují kromě porovnávání úhlů také převod stupňů na minuty.

Př. 24 Porovnejte úhly

a) 30° 15' a 15° 30' c) 20° a 1 220' e) 45° 180' a 30° 1 080'

b) 20° 58' a 20° 59' d) 30° 15' a 1 810' f) 49° 90' a 50° 31'

[11], str. 99

Kromě zmiňované dvojice úhlů žáci také pracují s úhly pravými a úhly přímými, jejichž velikost do definice pro ostrý a tupý úhel není zařazena. Klíčová je znalost velikosti úhlu pravého = 90° a velikosti úhlu přímého = 180°.

Př. 25 Rozhodni, zda úhel o dané velikosti je ostrý, pravý, tupý, nebo přímý:

180°	121°	11°	90°	156°	79°	97°
88°	113°	77°	141°	33°	89°	171°

6.5 TROJÚHELNÍK

Podle velikosti vnitřních úhlů existují tři typy trojúhelníků. Jedná se o trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý.

- Ostroúhlý trojúhelník má všechny vnitřní úhly ostré.

$\alpha < 90^\circ$
$\beta < 90^\circ$
$\gamma < 90^\circ$

- Pravoúhlý trojúhelník má právě jeden vnitřní úhel pravý.

$\gamma = 90^\circ$
$\alpha < 90^\circ$
$\beta < 90^\circ$

- Tupoúhlý trojúhelník má právě jeden vnitřní úhel tupý.

$\alpha > 90^\circ$
$\beta < 90^\circ$
$\gamma < 90^\circ$

Nerovnosti jsou také využity ve vlastnostech trojúhelníku a to konkrétně ve větách ohledně vnitřních úhlů trojúhelníku.

I. Velikost každého vnitřního úhlu trojúhelníku je menší než 180°.

II. Součet velikostí každé dvojice vnitřních úhlů trojúhelníku je menší než 180°.

Dále se v rámci kapitoly trojúhelník nerovnost vyskytuje ve vyučovací látce trojúhelníková nerovnost, kde je dokonce součástí názvu.

Trojúhelníková nerovnost je pravidlo, které se používá při zjišťování, zda pro daná 3 čísla existuje trojúhelník a při ověřování, zda lze daný trojúhelník sestrojit.

V každém trojúhelníku je součet délek libovolných dvou stran větší než délka strany třetí.

Mějme trojúhelník ABC, kde a je strana ležící proti vrcholu A, b je strana ležící proti vrcholu B a c je strana ležící proti vrcholu C.

Pro trojúhelník ABC platí nerovnosti:

$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

Pokud pro daný trojúhelník zmíněné tři nerovnosti platí, trojúhelník lze sestrojit.

Př. 26 Rozhodni, zda existuje trojúhelník s těmito délkami stran:

a) 2 cm, 3 cm, 4 cm (2 + 3 > 4, 2 + 4 > 3, 3 + 4 > 2, trojúhelník existuje)

b) 12 cm, 12 cm, 12 cm (12 + 12 > 12, trojúhelník existuje)

c) 6 cm, 2 cm, 3 cm (2 + 3 < 6, trojúhelník neexistuje)

Při zjišťování, zda platí trojúhelníková nerovnost, není nutně potřeba zkoušet platnost všech tří nerovností mezi délkami stran trojúhelníku. Stačí porovnat součet délek dvou nejkratších stran trojúhelníku s délkou strany nejdelší. Pokud zmíněná nerovnost platí, trojúhelník existuje. Při výuce na základní škole se díky tomu ušetří čas, který může být následně využit k řešení dalších příkladů.

7 7. ROČNÍK

Před úvodem do nového učiva se v některých učebnicích opakuje učivo z předchozího ročníku. Učivo v matematice na sebe navazuje, proto je vhodné probrané učební látky zopakovat. Součástí opakování jsou i příklady na nerovnosti a nerovnice. Nerovnost je aplikována také ve slovních úlohách, například při opakování dělitelnosti.

7.1 ZLOMKY

7.1.1 POROVNÁVÁNÍ

Zlomky jsou ve většině učebnic první novou učební látkou sedmého ročníku. S porovnáváním zlomků se žáci již několikrát setkali. Umí porovnat zlomky se stejnými jmenovateli (viz 11, str. 23) a zlomky se stejnými čitateli (viz 12, str. 23). Pro připomenutí vypíšeme pravidla, kterými se při takovém porovnávání zlomků řídíme:

- Ze dvou zlomků se stejnými jmenovateli je větší ten, který má většího čitatele. Žák mezi sebou porovnává čísla, která tvoří čitatele zlomků.
- Ze dvou zlomků se stejnými čitateli je větší ten, který má menšího jmenovatele. Žák mezi sebou porovnává čísla, která tvoří jmenovatele zlomků.

Dosud se žáci nesetkali s porovnáváním zlomků s různými čitateli i jmenovateli, což bude novým učivem sedmého ročníku.

Při porovnávání zlomků s různými čitateli i jmenovateli je zapotřebí převést zlomky na společného jmenovatele a pak následně provést porovnání zlomků. Mezi rozšířenými zlomky platí stejná nerovnost jako mezi zlomky původními. [16]

Při vymýšlení vlastních příkladů jsem se inspirovala učebnicemi matematiky 7. ročníku od nakladatelství SPN, Prometheus, Fraus a Prodos.

Př. 27 Porovnejte následující dvojice zlomků:

a) $\frac{5}{4}, \frac{3}{7}$ b) $\frac{1}{5}, \frac{4}{15}$ c) $\frac{5}{8}, \frac{6}{10}$ d) $\frac{4}{5}, \frac{11}{20}$

a) Ukážeme porovnání dvojice zlomků $\frac{5}{4}, \frac{3}{7}$

- Společným jmenovatelem zlomku $\frac{5}{4}$ a zlomku $\frac{3}{7}$ je číslo 28, proto každý z dvojice zlomků převedeme na zlomek s tímto jmenovatelem.
- Jmenovatele zlomku $\frac{5}{4}$ rozšiřujeme 7, proto také čitatele zlomku musíme rozšířit 7.

$$28 : 4 = 7$$

$$7 \cdot 5 = 35$$

$$\frac{5}{4} = \frac{35}{28}$$

- Jmenovatele zlomku $\frac{3}{7}$ rozšiřujeme 4, proto také čitatele zlomku musíme rozšířit 4.

$$28 : 7 = 4$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

$$\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$$

- Následně získanou dvojici zlomků porovnáme.

$$\frac{35}{28} > \frac{12}{28}$$

- Pro rozšířenými zlomky platí stejná nerovnost jako mezi zlomky původními, proto je zlomek $\frac{5}{4}$ větší než zlomek $\frac{3}{7}$.

$$\frac{5}{4} > \frac{3}{7}$$

Př. 28 Mezi třemi zápisy je jen jeden správný, vyber ho:

a) $1 < \frac{31}{15} < 2$ b) $3 < \frac{31}{15} < 4$ c) $2 < \frac{31}{15} < 3$

V soustavách nerovností příkladu 28 jsou zlomky větší než 1, které jsou v matematice označovány jako zlomky nepravé. Nepravé zlomky je za účelem porovnání vhodné převést na čísla smíšená. Druhou možností je převedení celých čísel na zlomky, které budou mít stejného jmenovatele jako zlomek, s kterým porovnáváme.

Nerovnosti se dále vyskytují ve složitějších úlohách na porovnávání, jako je příklad 29 a příklad 30. Informace o tom, který číselný údaj je větší, je součástí zadání. Úkolem je zjistit, o kolik je dané číslo větší nebo kolikrát je větší a k tomu jsou zapotřebí další matematické operace. V případě „o kolik" se jedná o rozdíl čísel a v případě „kolikrát" se jedná o podíl čísel.

Př. 29 Zjisti a zapiš, o kolik je zlomek $\frac{5}{4}$ větší než zlomek $\frac{3}{8}$.

- Abychom zjistili, o kolik je jeden zlomek větší než ten druhý, převedeme je opět na společného jmenovatele.
- Společným jmenovatelem dvojice zlomků $\frac{5}{4}$ a $\frac{3}{8}$ je číslo 8.
- $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$
- Druhý zlomek převádět nemusíme, protože číslo 8 ve jmenovateli již má.
- Ověřili jsme, že zlomek $\frac{5}{4}$ je opravdu větší než zlomek $\frac{3}{8}$, nyní jen zbývá vypočítat o kolik.
- $\frac{10}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ … Zlomek $\frac{5}{4}$ je oproti zlomku $\frac{3}{8}$ větší o $\frac{7}{8}$.

Př. 30 Vypočítej a zapiš, kolikrát je číslo 6 větší než $\frac{2}{3}$.

- Abychom zjistili kolikrát je číslo 6 vetší než zlomek $\frac{2}{3}$, provedeme jejich podíl
- $\frac{6}{1} : \frac{2}{3} \rightarrow$ dělení zlomků převedeme na násobení prvního zlomku převráceným zlomkem druhým
- $\frac{6}{1} . \frac{3}{2} = \frac{3}{1} . \frac{3}{1} = 9$ … Číslo 6 je 9 krát větší než zlomek $\frac{2}{3}$.

Porovnání částí z celku

Při výpočtu částí z celku je využíváno pomůcky: „místo *z* píšeme krát“, jedná se tedy o součin zlomku a daného celého čísla. Získané části z celku se následně porovnají mezi sebou.

Př. 31 Co je víc?

a) $\frac{3}{4}$ z 5, nebo $\frac{1}{3}$ ze 6

b) $\frac{6}{7}$ z 9, nebo $\frac{3}{5}$ z 10

c) $\frac{4}{9}$ z 11, nebo $\frac{3}{11}$ z 15

7.1.2 Uspořádání

Kromě využití nerovnosti v úlohách na porovnávání, jsou v učebnicích také úlohy na uspořádání. V ukázkovém příkladu se jedná o uspořádání zlomků. Aby žák dokázal zlomky podle velikosti uspořádat, je opět potřeba zlomky převést na společného jmenovatele. Poté již není problém zlomky seřadit od nejmenšího po největší.

Př. 32 Uspořádejte zlomky podle velikosti od nejmenšího po největší:

a) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}$

7.2 Celá čísla

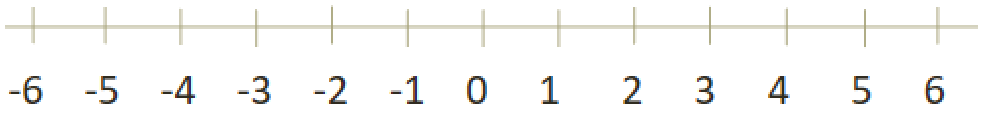
7.2.1 Porovnávání

S příklady na porovnání v rámci oboru celých čísel mají žáci zkušenost již od pátého ročníku. Porovnávání celých čísel je v učebnicích vysvětleno pomocí číselné osy. Z dvojice celých čísel je větší (menší) to číslo, jehož obraz na číselné ose leží vpravo (vlevo) od obrazu čísla druhého. [15] Jinými slovy, vzhledem k danému číslu leží na číselné ose směrem doprava čísla větší, směrem doleva čísla menší.

Znázorňování čísel na číselné ose, která vyhovují zadané podmínce, je procvičováno například pomocí následujícího příkladu. Při vymýšlení vlastních příkladů jsem se inspirovala učebnicemi pro 7. ročník základní školy od nakladatelství SPN, Prodos, Fraus a Prometheus.

Př. 33 Vyznačte (Obr. 13) různými barvami všechny body, které mají od nuly vzdálenost:

a) rovnou 4,
b) rovnou 2,
c) menší nebo rovnou 4,
d) menší než 2,
e) větší nebo rovnou 4,
f) větší než 2.



Obr. 13, (Převzato z [17, str. 17].)

<u>Při porovnávání celých čísel využíváme tohoto pravidla:</u>

Ze dvojice záporného a kladného celého čísla je kladné vždy větší. Pokud je jedním z dvojice celých čísel 0, záporné celé číslo je vždy menší a kladné celé číslo je vždy větší než 0. [16]

Př. 34 Doplňte správně jeden ze znaků <, >:

a) 11 ___ -5
b) -16 ___ -15
c) 25 ___ 52
d) -17 ___ 16

Př. 35 Ze dvou čísel vyberte větší (menší) číslo:

a) 3 a -3
b) -2 a 0
c) -2 a -4
d) 3 a 5

S nerovnicemi pracujeme také v příkladech na hledání zapsaných chyb. Při hledání chyb řešitel mezi sebou porovná daná čísla a vyhodnotí, zda je správně použito znaménko nerovnosti.

Př. 36 Dokážete nalézt chybné zápisy?

a) 8 > -12 b) -6 < -9 c) 0 > -8 d) -2 > 0

7.2.2 NEROVNICE

V sedmé třídě se žáci dozvídají o funkci absolutní hodnota a co to vlastně absolutní hodnota je. Tato znalost je v souvislosti s nerovnicemi využívána v následujícím příkladu. Absolutní hodnoty se také využívá při porovnávání záporných celých čísel. Z dvojice záporných čísel je větší to, které má menší absolutní hodnotu. [16]

Př. 37 Vypiš všechna celá čísla, která můžeš dosadit za *x* tak, aby platilo:

a) $|x| < 3$ b) $|x| \leq 3$

Příklad 38 je zkouškou znalostí. V nerovnici se nachází absolutní hodnota, nepravé zlomky a řešení příkladu se má pohybovat v oboru celých čísel.

Př. 38 Napiš všechna celá čísla *a*, pro která je $|a| < \frac{65}{9}$.

- Nepravý zlomek $\frac{65}{9}$ je vhodné převést na číslo smíšené $\rightarrow \frac{65}{9} = \frac{63+2}{9} = \frac{63}{9} + \frac{2}{9} = 7\frac{2}{9}$
- Hledáme celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než $7\frac{2}{9}$
- Ze záporných čísel se jedná o čísla: -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1
- Z kladných čísel se jedná o čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
- Mezi celá čísla řadíme i 0
- Řešením nerovnice jsou tedy čísla: -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

7.2.3 NEROVNOST

Aplikace nerovnosti je nápomocná při rozhodování o znaménku ve výsledku při sčítání a odčítání čísel s opačnými znaménky. Ve výsledku příkladu bude znaménko čísla, jehož absolutní hodnota je větší. [17] Jedná se o další možné využití funkce absolutní hodnota.

7.2.4 SOUSTAVY NEROVNIC

Složitějšími úlohami jsou soustavy nerovnic v oboru celých čísel.

Př. 39 Zapiš všechna celá čísla *x*, pro která platí:

a) $1 \leq x < 5$ b) $-4 < x \leq 2$ c) $-8 < x < -5$ d) $-11 \leq x \leq -7$

Ukážeme řešení dílčího příkladu c) $-8 < x < -5$

- V soustavě nerovnic se nacházejí znaménka pro ostrou nerovnost, proto krajní body do řešení nepatří.
- Celá čísla větší než -8 a zároveň menší než -5 jsou: -7, -6
- Řešením soustavy nerovnic jsou čísla -7 a -6

Pro přemýšlivé je soustava nerovnic v zadání příkladu 40. Při řešení se využívá znalost o součtu dvou opačných čísel, který je roven 0.

Př. 40 Urči bez počítání součet všech celých čísel, pro která platí:

a) $-6 \leq x \leq 5$

Součástí závěrečného opakování 7. ročníku může být úloha na ověřování platnosti nerovnosti v příkladech s více početními operacemi mezi celými čísly (Př. 41) nebo v příkladech zahrnujících více číselných oborů (Př. 42).

Př. 41 Zjistěte, zda platí:

a) $5 - 3 \cdot (3 - 5) < 0$

b) $(5 - 7) - (6 - 20) < 10$

c) $2 \cdot (4 - 18) > 3 \cdot (7 - 8)$

d) $-2 \cdot (4 - 6) - 2 \cdot (4 - 7) > 0$

Př. 42 Zjistěte, zda platí:

a) $6 - \frac{8}{9} + 4{,}5 > 10{,}5$

7.3 Racionální čísla

Racionální čísla jsou všechna čísla, která můžeme zapsat ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$,

kde $p \in Z$, $q \in N$.

7.3.1 Porovnávání

Pro porovnávání racionálních čísel platí stejná pravidla jako při porovnávání čísel celých. (viz str. 41) Ze dvojice záporného a kladného racionálního čísla je kladné vždy větší. Pokud se ve dvojici vyskytuje 0, záporné racionální číslo je vždy menší a kladné racionální číslo je vždy větší než 0. Ze dvojice záporných čísel je větší to, které má menší absolutní hodnotu. [16]

Pro vysvětlení je opět využito číselné osy. Z dvojice racionálních čísel je větší (menší) to číslo, jehož obraz na číselné ose leží vpravo (vlevo) od obrazu čísla druhého. [15]

V rámci oboru racionálních čísel se setkáváme s typy příkladů na porovnání dvojice čísel (Př. 43), popřípadě porovnání s další početní operací (Př. 45) a s příklady na doplnění znaménka nerovnosti (Př. 44).

Př. 43 Porovnej čísla podle velikosti pomocí znaků < a >:

a) 0,3 a 1,2

b) -2,2 a 4,6

c) $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{5}$

Př. 44 Doplňte některý ze znaků <, >, nebo = :

a) -3,6 ___ -0,3

b) 0,23 ___ 0,32

c) -2,1 ___ -0,21

Ukázkou porovnání s další operací v oboru racionálních čísel je příklad 45. Nerovnost je zde určena a řešitel rozhoduje, zda je zápis platný či nikoliv. Provádí tedy zkoušku.

Př. 45 Rozhodni, co je pravda; piš *ano- ne*:

a) $(-7,4) : 2,5 > 0$

b) $(-11,5) \cdot (-32,3) < 305$

c) $(-7,7) + (-13,6) < -20$

7.3.2 SOUSTAVY NEROVNIC

Též v oboru racionálních čísel je možné pracovat se soustavami nerovnic. Příkladem je následující úloha.

Př. 46 Zjisti, která z čísel -2,4; -3,1; -3,7; -2; $-\frac{8}{4}$; $-\frac{7}{2}$; $-\frac{5}{3}$; $-\frac{5}{2}$ můžeš dosadit za x tak, aby platilo $-3,5 \leq x < -2,3$.

7.4 PŘÍMÁ A NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST, PROCENTA

Přímá a nepřímá úměrnost jsou pojmy definované pomocí nerovností.

Přímá úměrnost popisuje závislost dvou veličin, kterou lze vyjádřit vzorcem $y = k \cdot x$, kde k je koeficient přímé úměrnosti. Pro hodnotu koeficientu k platí vztah $k > 0 \vee k < 0$. [17] V látce s názvem přímá úměrnost je nerovnost využita právě ve vymezení hodnoty koeficientu k. Stejné omezení pro hodnotu koeficientu k platí i u nepřímé úměrnosti, která je vyjádřená vzorcem $y = \frac{k}{x}$. (více viz str. 63)

Dále je v rámci přímé a nepřímé úměrnosti nerovnost aplikována prostřednictvím definičního oboru. Soustava nerovnic vymezuje čísla, která je možné dosadit za x při sestrojování grafu dané úměrnosti.

Př. 47 Sestroj graf přímé úměrnosti s koeficientem $k = 2{,}5$; $0 \leq x \leq 5$.

Př. 48 Sestroj graf nepřímé úměrnosti s koeficientem $k = 4$; $1 \leq x \leq 10$.

V kapitole zaměřené na procenta užíváme nerovnosti při porovnávání procentuálních částí celku. Jedná se o složitější příklady, proto jsou tyto příklady označeny za příklady pro přemýšlivé. Žák rozhoduje o tom, zda je vypsaná nerovnost platná.

Př. 49 Rozhodni, zda tvrzení platí; piš *ano* – *ne*. Nic nepočítej, jen se pozorně dívej a odhaduj:

a) 26 % ze 400 je větší než 100.
b) 77 % ze 400 je menší než 300.

Př. 50 Rozhodni, zda tvrzení platí; piš *ano* – *ne*. Nic nepočítej, jen odhaduj:

a) 17 % z 62 je větší než 17% z 57.
b) 43 % z 800 je menší než 42 % ze 780.

8 8. ROČNÍK

V prvních hodinách matematiky je i v 8. ročníku opakováno učivo z ročníku předchozího. Do opakování je v souvislosti s nerovností a nerovnicemi zahrnuto vymezení úměrností, porovnávání celých čísel včetně absolutní hodnoty a porovnávání zlomků. Dalším opakováním jsou nerovnice a soustavy nerovnic v oboru celých čísel. Novým učivem, které s nerovnicemi souvisí, jsou mocniny a odmocniny. Při vymýšlení vlastních příkladů jsem se inspirovala učebnicemi pro 8. ročník od nakladatelství Fortuna, Prodos, Fraus, SPN a Prometheus.

8.1 MOCNINY

Jako mocninu označujeme součin stejných činitelů. V učební látce věnující se mocninám jsou nerovnostmi popsány některé vlastnosti mocnin. Vlastnosti jsou v učebnicích popsány jak slovně, tak pomocí znamének nerovnosti.

1) Druhá mocnina je označení pro součin dvou stejných činitelů, $a^2 = a \cdot a$, proto je druhá mocnina každého čísla číslo nezáporné, $a^2 \geq 0$. [24]

2) Nerovnost mezi čísly a jejich druhými mocninami:

   - Jestliže $a \in (0, 1)$, $a \rightarrow a^2$, potom $a > a^2$
   - Jestliže $a \in \langle 1, + \infty)$, $a \rightarrow a^2$, potom $a \leq a^2$

3) Pokud pro dvojici nezáporných čísel platí nerovnost $a < b$, potom tato nerovnost platí i pro druhé mocniny daných nezáporných čísel. [25]

$$\text{Pokud } 0 \leq a < b, \text{ potom také } a^2 < b^2$$

4) Při porovnávání záporného a kladného čísla je záporné číslo automaticky menší. Při porovnávání druhých mocnin záporného a kladného čísla je druhá mocnina záporného čísla větší v případě, kdy jeho absolutní hodnota je větší než dané kladné číslo. [25]

$$-6 < 1 \qquad \text{ale} \qquad (-6)^2 > 1^2$$

5) Stejně tak je tomu při porovnávání druhých mocnin dvou záporných čísel. Hodnota druhé mocniny je větší pro číslo, které má větší absolutní hodnotu. Stejná pravidla platí pro každou sudou mocninu. [25]

$$-4 < -1 \quad \text{ale} \quad (-4)^2 > (-1)^2$$

6) Jiné nerovnosti platí pro třetí mocninu. Třetí mocnina každého kladného čísla je též kladné číslo a třetí mocnina každého záporného čísla je opět číslo záporné. Stejná pravidla platí pro každou lichou mocninu. [24]

Je- li $a > 0$, potom $a^3 > 0$. Je-li $a < 0$, potom $a^3 < 0$.

8.1.1 Porovnávání

Mimo popisu vlastností mocnin je možné nerovnosti najít v příkladech na porovnávání. (Př. 51) Dále je porovnávání výsledků mocnin možné nalézt ve slovních úlohách (Př. 52).

Př. 51 Odhadněte vzájemné velikosti čísel a porovnejte je pomocí znaku < nebo > :

a) 3^3, $(\frac{1}{3})^3$
b) $(-4)^2$ a $(-2)^4$
c) 2^3, 1^{10}

Př. 52 Martin si hrál s čísly a objevil:

$2^2 < 2^3$, $3^2 < 3^3$, $4^2 < 4^3$, …

Pro každé číslo a platí $a^2 < a^3$.

a) Má Martin pravdu?
b) Najdi aspoň jedno číslo, pro které Martinova věta neplatí.
c) Dovedeš říci, pro která čísla Martinova věta platí a pro která ne?

Úlohy s náročnějším postupem řešení jsou příklady, kde se kromě mocnin vyskytují další početní operace. Před porovnáním je zapotřebí tyto číselné operace provést. Přednost má umocňování, následuje násobení a dělení a v poslední řadě sčítání a odčítání.

Př. 53 Mezi dva číselné výrazy napište jeden ze znaků <, >, = tak, aby platila rovnost, nebo nerovnost:

a) -5^2 ;$(-5)^2$ b) $-(-7)^2$; -7^2 c) $(-8) + 10$; $(-10)^2 - 8^2$

Příklad 54 je pro žáky 8. ročníku náročný, proto je označen jako příklad pro přemýšlivé. V zadání se nachází neznámé *a* a *b*, pro které po dosazení konkrétních čísel bude daný vztah platit. Úkolem je tato čísla vymyslet.

Př. 54 Napiš takovou dvojici přirozených čísel *a*, *b*, pro kterou platí:

a) $a^b < b^a$ b) $a^b > b^a$

- Žáci by tento druh příkladu mohli řešit metodou experimentu. Zkoušeli by do nerovnice dosazovat čísla, dokud by nenašli taková, pro která daná nerovnost platí.

Součástí pravidel pro počítání s mocninami je zápis čísla v desítkové soustavě. Pomocí nerovnosti je omezená velikost neznámé *a* v zápisu $a \cdot 10^n$, $1 \leq a < 10$. Tento typ zápisu se nazývá semilogaritmický tvar, který se může použít při zápisu velkých čísel. Jedná se o pojem definovaný pomocí nerovností.

Ukázkou příkladu s tímto zápisem je příklad 55.

Př. 55 Zapište uvedená čísla ve tvaru uvedeném výše, jestliže všechna čísla mají jen dvě platné číslice:

a) 865 000 b) 693 c) 6 006 d) 11 832 000

Příklad 56 je jedním z příkladů na porovnávání.

Př. 56 Která čísla jsou větší než 600 000?

a) $1,3 \cdot 10^5$ b) $6,5 \cdot 10^7$ c) $1,2 \cdot 10^6$

8.1.2 Odhad

Aplikace nerovnosti je vhodná při odhadování druhé mocniny desetinných čísel. Žák určí celá čísla, mezi kterými dané desetinné číslo leží a umocní je na druhou. Druhá mocnina desetinného čísla pak leží mezi získanými druhými mocninami celých čísel.

Př. 57 Odhadni druhou mocninu čísla 12,6.

Číslo 12,6 leží mezi celými čísly 12 a 13.

$$12 < 12{,}6 < 13$$

Pro druhé mocniny čísel platí tatáž nerovnost.

$$12^2 < 12{,}6^2 < 13^2$$

$$144 < 12{,}6^2 < 169$$

Druhá mocnina čísla 12,6 bude ležet mezi čísly 144 a 169.

[23], str. 20

8.2 Odmocniny

Odmocnina je jeden dalších pojmů, který je definovaný pomocí nerovností. Základem odmocniny $\sqrt{a}$ může být pouze nezáporné číslo a, $a \geq 0$. Výsledkem druhé odmocniny je též nezáporné číslo $b \geq 0$, pro které platí $b^2 = a$. [24]

$$\sqrt{a} = b, \text{ kde } a \geq 0,\ b \geq 0$$

Vztah, který platí mezi základy odmocnin, platí i pro jejich druhé odmocniny, tj.:

$$\text{Pokud } 0 \leq a < b, \text{ potom také } \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

8.2.1 Porovnávání

Úkolem v příkladech na odmocniny může být vzájemné porovnání odmocnin, popřípadě kontrola, zda je zapsaná nerovnost platná a následná oprava neplatných nerovností.

Př. 58 Zkontroluj, zda je použit správný znak nerovnosti, piš *ano* – *ne*; chyby oprav:

a) $\sqrt{13{,}4} < \sqrt{14{,}3}$ b) $\sqrt{0{,}05} > \sqrt{0{,}09}$ c) $\sqrt{\frac{3}{4}} < \sqrt{\frac{3}{5}}$

Ukážeme řešení příkladu za a) $\sqrt{13{,}4} < \sqrt{14{,}3}$

- Při řešení příkladu se použije již zmiňovaná vlastnost: Pokud $0 \leq a < b$, potom také $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- $13{,}4 < 14{,}3$, proto také $\sqrt{13{,}4} < \sqrt{14{,}3}$, znak nerovnosti je užit správně.
- Pokud by žáka tento postup nenapadl, může obě strany nerovnice umocnit na druhou a dostane se také ke vztahu $13{,}4 < 14{,}3$.

V příkladech stejného typu jako je příklad následující, je vhodné čísla na pravé straně nerovnice vyjádřit jako druhé odmocniny. Následné porovnání odmocnin již nebude složitým úkolem.

Př. 59 Rozhodni, zda platí; piš *ano* – *ne*:

a) $\sqrt{25{,}4} < 8$ b) $\sqrt{127{,}4} > 25$ c) $\sqrt{13\,000} \leq 100$

Ukážeme řešení příkladu za a) $\sqrt{25{,}4} < 8$

- Číslo 8 vyjádříme jako druhou odmocninu $8 = \sqrt{64}$
- Nyní porovnáme čísla pod odmocninami $\sqrt{25{,}4}$ a $\sqrt{64}$
- Číslo 25,4 je menší než číslo 64, proto také $\sqrt{25{,}4}$ je menší než $\sqrt{64}$
- Znaménko nerovnosti v nerovnici $\sqrt{25{,}4} < 8$ je užito správně.

V zadání příkladu 60 jsou jak mocniny, tak odmocniny. Pomocí takových příkladů si žáci uvědomí jejich vzájemný vztah.

Př. 60 Porovnejte výsledky příkladů v řádcích a popište, jak rozdíl v zápisu ovlivnil výsledek.

$3 . 4^2$	$(3 . 4)^2$
$\sqrt{100 - 20}$	$\sqrt{100} - 20$

Následující příklad je na porovnávání čísla, jeho druhé odmocniny a druhé mocniny. Příklad poukazuje na to, jak se velikost čísla vzhledem k dané funkci změní.

Př. 61 Seřaď čísla podle velikosti.

a) $25, \sqrt{25}, 25^2$

8.2.2 ODHAD

Odhad se používá u odmocnin, jejichž hodnotu nelze (z hlavy) přesně určit. Postup je podobný jako u druhých mocnin. Cílem je stanovit nejbližší menší a nejbližší větší druhou mocninu přirozených čísel k číslu pod odmocnítkem. Dle výše uvedeného pravidla platí mezi odmocninami stejná nerovnost, jako je nerovnost mezi základy odmocnin. Hodnota odmocniny z daného čísla leží mezi hodnotami odmocnin z přirozených čísel. [23]

Př. 62 Odhadni druhou odmocninu z čísla 31.

Nejbližšími druhými mocninami k číslu 31 jsou 25 a 36.

$$25 < 31 < 36$$

$$\sqrt{25} < \sqrt{31} < \sqrt{36}$$

$$5 < \sqrt{31} < 6$$

Odmocnina z čísla 31 bude ležet mezi čísly 5 a 6.

[23], str. 27

Stejným způsobem se odhadují odmocniny z desetinných čísel. Pomocí nerovností je dané rozmezí, ve kterém druhá odmocnina z daného desetinného čísla leží.

Př. 63 Odhadni druhou odmocninu z desetinného čísla 7,47.

Nejbližšími druhými mocninami k číslu 7,47 jsou 4 a 9.

$$4 < 7{,}47 < 9$$

$$\sqrt{4} < \sqrt{7{,}47} < \sqrt{9}$$

$$2 < \sqrt{7{,}47} < 3$$

Druhá odmocnina z desetinného čísla 7,47 bude ležet mezi čísly 2 a 3.

Na ověření vědomostí získaných v učebních látkách mocniny a odmocniny jsou příklady, jako je příklad 64, do kterého jsou zahrnuty i nerovnosti.

Př. 64 Rozhodni, zda věta platí; piš *ano* – *ne*. Když *ne*, uveď, proč věta neplatí:

a) Pro každé číslo a je $a^2 > a$.
   - Viz 2) na str. 47 je věta nepravdivá.

b) Pro číslo 0, číslo 1 a číslo -1 je $a^3 = a$.
   - $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $(-1)^3 = -1$, věta platí.

c) Rovnost $a^2 = a$ platí jen pro číslo 0.
   - Věta neplatí, protože rovnost platí i pro číslo 1 $\rightarrow 1^2 = 1$.

d) Pro každé číslo a je a^4 nezáporné číslo.
   - Jedná se o sudou mocninu, věta platí.

e) Pro každé číslo a je a^5 nezáporné číslo.
   - Jedná se o lichou mocninu, lichá mocnina záporného čísla je záporné číslo, proto věta neplatí. (viz 6, str. 48)

f) Pro každé nezáporné číslo a je $\sqrt{a} < a$.
   - Nula je nezáporné číslo, $\sqrt{0} = 0$, věta neplatí.

[25], str. 52

8.3 PYTHAGOROVA VĚTA

Při výuce Pythagorovy věty jsou pomocí nerovnosti popsány vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku, konkrétně délky jeho stran. Pro každý pravoúhlý trojúhelník s přeponou o délce c a s odvěsnami o délkách a, b platí: $c > a$, $c > b$. Jinými slovy, při porovnávání délek stran pravoúhlého trojúhelníku je nejdelší strana vždy přepona.

Nerovnost může být dále použita v příkladech týkajících se délky úhlopříčky čtverce, jako je následující příklad. Při řešení se použije právě Pythagorova věta.

Př. 65 Obsah čtverce je 25 dm^2.

a) Vyber správné tvrzení a odůvodni ho:

Délka úhlopříčky tohoto čtverce je

rovna 5 dm, menší než 5 dm, větší než 5 dm.

8.4 KRUŽNICE, KRUH

Kruh K(S; r) je množina všech bodů, jejichž vzdálenost od daného středu S je menší nebo rovna r, přičemž r je kladné číslo udávající poloměr kruhu K. [21] Kruh je jeden z pojmů definovaných pomocí nerovností.

Vzdálenost bodu A od středu S kruhu K je rovna poloměru r v případě, kdy bod A leží na hraniční kružnici kruhu K. Daná vzdálenost je menší než poloměr r kruhu K v případě, kdy bod A leží uvnitř kruhu K.

Pro bod kruhu A platí: $|SA| \leq r$

Kružnice i kruh jsou definované pro poloměr větší než 0.

$$r > 0$$

Př. 66 Kruh K má střed S a poloměr 5 cm. Vyber správné tvrzení:

a) $A \in K$; proto $|SA| > 5$ cm, $|SA| \leq 5$ cm;

b) $B \notin K$; proto $|SB| = 5$ cm, $|SB| \leq 5$ cm, $|SB| > 5$ cm;

c) $|SC| > 5$ cm; proto $C \in K$, $C \notin K$.

d) $|SD| \leq 5$ cm; proto $D \in K$, $D \notin K$.

Nerovnosti se dále uplatňují při popisu vzájemné polohy dvou kružnic, konkrétně u popisu vzdálenosti jejich středů. Kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a kružnice $k_2(S_2, r_2)$, $r_1 > r_2$, nemají žádný společný bod ve dvou případech. Prvním z nich je případ, kdy vzdálenost středů S_1 a S_2 je větší než součet poloměrů r_1 a r_2.

$$|S_1S_2| > r_1 + r_2$$

V druhém případě je vzdálenost středů S_1 a S_2 menší, než rozdíl poloměrů r_1 a r_2.

$$|S_1S_2| < r_1 - r_2$$

Je-li vzdálenost středů S_1 a S_2 větší než rozdíl poloměrů r_1 a r_2 a zároveň menší než součet poloměrů r_1 a r_2, kružnice se protínají. Při této vzájemné poloze mají kružnice dva společné body, průsečíky kružnic k_1 a k_2.

$$r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2$$

Jestliže znaménka pro ostrou nerovnost nahradíme znaménky pro nerovnost neostrou, kružnice mají aspoň jeden společný bod.

$$r_1 - r_2 \leq |S_1S_2| \leq r_1 + r_2$$

Dalším pojmem definovaným pomocí nerovností je mezikruží. Mezikruží je část roviny, která je ohraničená soustřednými kružnicemi $k_1(S, r_1)$ a $k_2(S, r_2)$), kde $r_1 > r_2$. Mezikruží je tvořeno všemi body X, pro které platí:

$$|SX| \geq r_2 \wedge |SX| \leq r_1$$

8.5 LINEÁRNÍ NEROVNICE S JEDNOU NEZNÁMOU

Tato učební látka se celá věnuje nerovnicím. Jednoduché nerovnice z příkladu 67 žáci již dávno umí řešit, ale objevují se tu i nerovnice složitější, jako v příkladu 68. Nerovnice se od rovnic liší znakem mezi levou a pravou stranou zápisu. V nerovnicích je znak = nahrazen znaky <, >, ≤, ≥.

Co jsou to ekvivalentní úpravy (viz str. 7), žáci vědí již z učební látky lineární rovnice. V rámci nerovnic jsou v učebnicích vysvětlovány úpravy, které souvisejí se znaménky nerovnosti. Jedná se o násobení a dělení záporným číslem. Při takové úpravě se znaménko nerovnosti změní v opačné. [22] Důvod pro změnu znaménka nerovnosti v opačné a obecný postup řešení nerovnice je vypsaný již na začátku mé diplomové práce, viz str. 8.

Př. 67 Mezi čísly A = {-6, -5, -4, -3, -2, -1} najděte všechna čísla a, která jsou řešením nerovnice:

a) $a > -5$ b) $a \geq -3$ c) $a \leq -1$

Př. 68 Na množině reálných čísel řešte nerovnice:

a) $8 - 2x \geq 0$ b) $2 \,.\, (x - 1) \leq x - 3$ c) $\frac{4z-9}{6} + \frac{4z-3}{5} \geq \frac{3z-4}{2}$

Ukážeme řešení příkladu za b) $2 \,.\, (x - 1) \leq x - 3$

- $2 \,.\, (x - 1) \leq x - 3$

  $2x - 2 \leq x - 3 \quad / - (x - 3)$

  $2x - x - 2 + 3 \leq x - x - 3 + 3$

  $x + 1 \leq 0 \quad / - 1$

  $x + 1 - 1 \leq 0 - 1$

  $x \leq -1$

- Nerovnici řešíme na množině reálných čísel, řešením bude interval $x \in (-\infty, -1\rangle$

Dalšími příklady z této učební látky mohou být úlohy na vytvoření nerovností z výčtu čísel, s čímž již žáci mají zkušenost v rámci číselné osy. Nebo se může jednat o úlohy na zápis slovního výroku pomocí nerovnice.

Př. 69 Mezi čísly 7, -7, 5 a -5 vytvořte více než pět pravdivých nerovností.

Př. 70 Zapište pomocí nerovnice:

a) Emu běhá rychlostí větší než 48 km/h.
b) Markéta měří víc než 1,40 m ale maximálně 1,50 m.
c) Hmotnost stoličky dospělého slona se pohybuje mezi 4 a 4,5 kilogramy.
d) Kobra královská dorůstá do délky 4,5 metru.

[22], str. 46

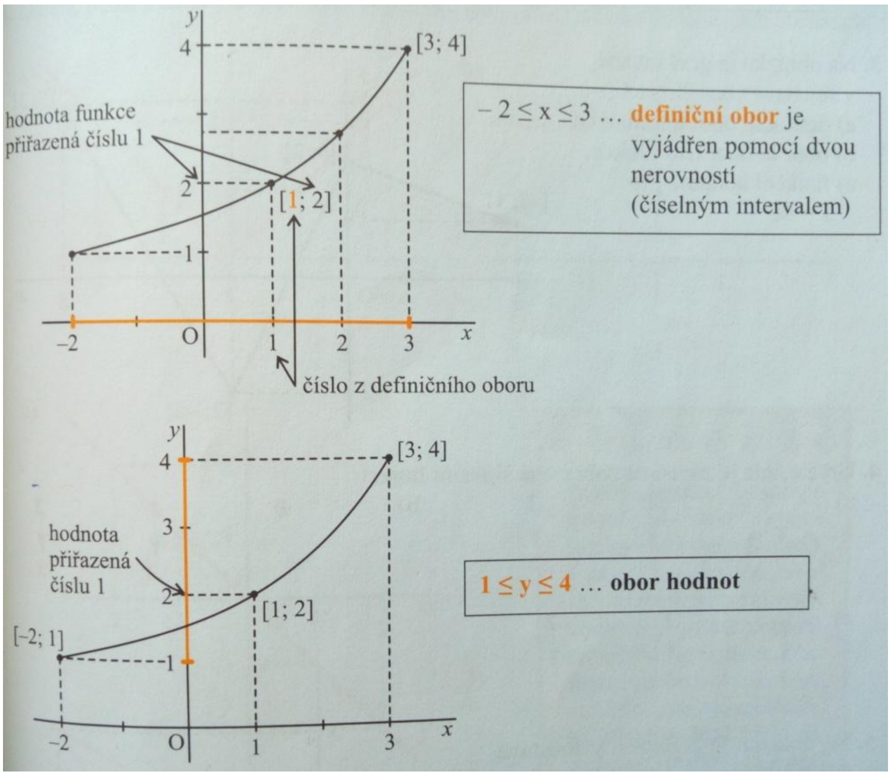
9 9. ROČNÍK

Devátý ročník je posledním ročníkem základní školy. Téma mé diplomové práce se i pro tentokrát vyskytuje v několika příkladech z různých učebních látek. Při vymýšlení vlastních příkladů jsem se inspirovala učebnicemi matematiky pro 9. ročník od nakladatelství SPN, Fortuna, Prodos, Prometheus a Fraus.

9.1 FUNKCE

Nově probíranou látkou devátého ročníku jsou funkce. Žáci se tu setkávají s novými pojmy, jako je například definiční obor a obor hodnot funkce. V obou případech může být obor prostřednictvím nerovností omezen, což se následně projeví v grafu funkce. Pomocí nerovnosti se vyjadřuje například obecná definice pro monotonii funkce a následně i monotonie konkrétních funkcí, jako je například přímá a nepřímá úměrnost.

Definiční obor a obor hodnot jsou zobrazeny na obrázku 14. V obou případech jsou obory dané funkce omezeny dvěma nerovnostmi. Na obrázku dále můžeme vidět popsání souřadnic bodu grafu. První souřadnice bodu je číslo z definičního oboru, druhá souřadnice bodu se získá dosazením *x*-ové souřadnice do předpisu funkce.



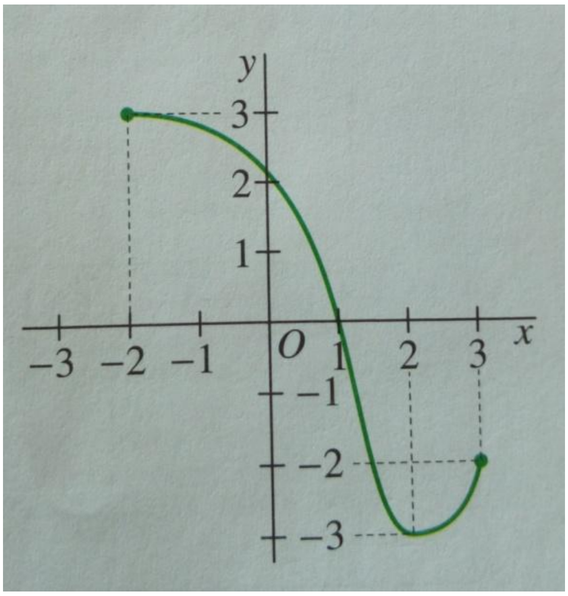
Obr. 14, (Převzato z [27, str. 61].)

Na čtení informací z grafu, které souvisí s nerovnicemi, slouží příklad 71. Žák ze zobrazeného grafu (Obr. 15) ověřuje správnost daných informací. V příkladu jsou soustavy nerovnic, které se vztahují k definičnímu oboru a oboru hodnot.

Př. 71 Na obrázku je graf nějaké funkce v pravoúhlé soustavě souřadnic O_{xy}. Rozhoduj, zda platí; piš *ano* – *ne*:

a) Definiční obor funkce tvoří všechna x, pro která platí -2 ≤ *x* ≤ 3.

b) Obor hodnot funkce tvoří všechna y, pro která platí -3 ≤ *y* ≤ 3.



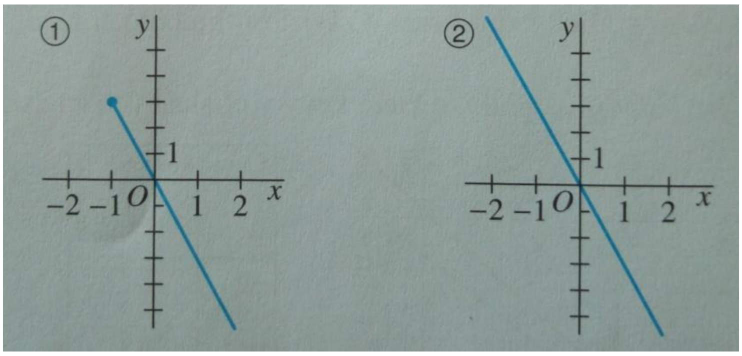
Obr. 15, (Převzato z [30, str. 31].)

Stejným typem příkladu je příklad 72. V zadání příkladu je zmíněný předpis funkce, který přísluší přímé úměrnosti.

Př. 72 Na obrázku 16 jsou sestrojeny grafy funkcí, které jsou vyjádřeny vzorcem *y* = -3x a jejichž definiční obor tvoří

a) všechna čísla b) všechna *x* ≥ -1.

Urči, ke které funkci patří graf 1 a ke které graf 2.



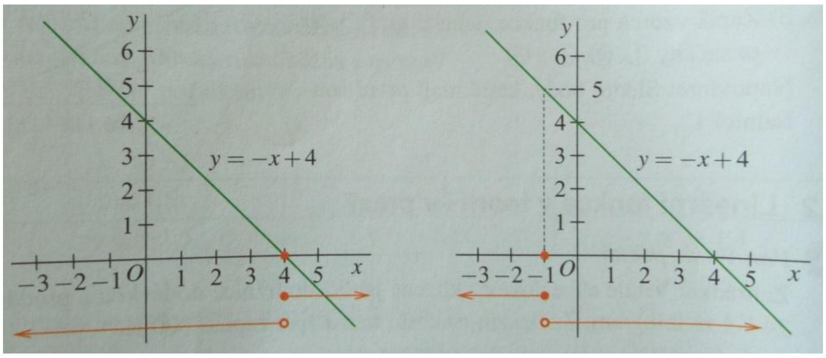
Obr. 16, (Převzato z [30, str. 36].)

Čtení z grafu v souvislosti s nerovnicemi je součástí i následujících úloh. Úkoly se již nezaměřují na definiční obor a obor hodnot, ale na samotné řešení nerovnic. Vyhledáváním řešení nerovnice z grafu nazýváme grafické řešení nerovnic, více viz str. 12.

Př. 73 Zjisti z grafu funkce *y* = -*x* + 4 (Obr. 17) všechna *x*, pro která platí:

a) -*x* + 4 ≤ 0 b) -*x* + 4 > 0

c) -*x* + 4 ≥ 5 d) -*x* + 4 < 5



Obr. 17, (Převzato z [30, str. 50])

Řešení dílčího příkladu za a) $-x + 4 \leq 0$

- Graf funkce $y = -x + 4$ porovnáváme s grafem lineární funkce, která je dána předpisem $y = 0$. Funkce s tímto předpisem se nazývá funkce konstantní. Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x. V našem případě se jedná o přímku protínající osu y v bodě 0, což je samotná osa x. Hodnota funkce $y = -x + 4$ je menší než hodnota funkce $y = 0$ pro $x \in \langle 4, +\infty)$.

Řešení dílčího příkladu za b) $-x + 4 > 0$

- V dílčím příkladu za b) porovnáváme grafy stejných funkcí, jako v dílčím příkladu za a). V tomto případě z grafu vyhledáváme všechna čísla x, pro která je hodnota funkce $y = -x + 4$ větší než hodnota funkce $y = 0$. Řešením nerovnice je interval $x \in (-\infty, 4)$.

Řešení dílčího příkladu za c) $-x + 4 \geq 5$

- Graf funkce $y = -x + 4$ porovnáváme s grafem funkce $y = 5$, což je přímka rovnoběžná s osou x protínající osu y v bodě 5. Hodnota funkce $y = -x + 4$ je větší nebo rovna hodnotě funkce $y = 5$ pro $x \in (-\infty, -1\rangle$.

Řešení dílčího příkladu za d) $-x + 4 < 5$

- Graf funkce $y = -x + 4$ porovnáváme opět s grafem funkce $y = 5$. Hodnota funkce $y = -x + 4$ je menší než hodnota funkce $y = 5$ pro $x \in (-1, +\infty)$.

Graf předepsané funkce ale nemusí být u úlohy v učebnicích sestrojen, jako v předešlé úloze. V takových případech si žáci pro grafické řešení dané nerovnice potřebují graf funkce sami vytvořit. Tento pokyn může být uveden přímo v zadání příkladu. Následným krokem je vyčtení potřebných informací z grafu a vyřešení nerovnice. Ukázkou takové úlohy je příklad 74.

Př. 74 Sestroj graf lineární funkce $y = 2x - 5$. Pak z něho zjisti všechna x, pro která platí:

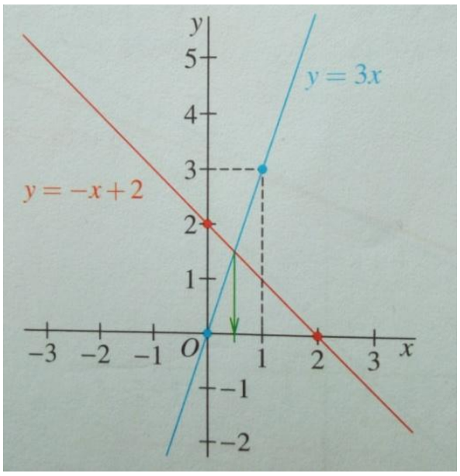
a) $2x - 5 \geq 0$ b) $2x - 5 < 0$

c) $2x - 5 > 1$ d) $2x - 5 \leq -7$

V následujícím příkladu jsou zobrazeny grafy dvou funkcí, z nichž ani jedna není funkce konstantní. Levou stranu nerovnice tvoří předpis první funkce a pravou stranu nerovnice tvoří předpis funkce druhé, v obou případech se jedná o funkce lineární.

Př. 75 Urči z grafů (Obr. 18) lineárních funkcí $y = 3x$ a $y = -x + 2$ všechna x, pro která platí:

a) $3x \leq -x + 2$
b) $3x < -x + 2$
c) $3x \geq -x + 2$



Obr. 18, (Převzato z [30, str. 52])

Následující příklad se již nevztahuje k řešení nerovnice, ale pouze k sestrojení grafu. Při sestrojování grafu z příkladu 74 (str. 61) nabývají všechna x z definičního oboru hodnot, který vychází z předpisu dané funkce. Graf funkce ale nemusí být vždy tvořen jednou funkcí pro celý definiční obor. Souřadnice y v tomto případě nabývají hodnot podle toho, z jaké části definičního oboru x pochází, což je vymezeno právě nerovnostmi.

Př. 76 Funkce f je dána rovnicí $y = -2x + 1$ pro $x < 0$ a $y = 3$ pro $x > 0$. Načrtněte její graf.

9.1.1 MONOTONIE FUNKCE

Předpisy pro monotonii funkce jsou obecně vymezeny pomocí nerovností, jak jsem již zmiňovala výše.

Funkce se nazývá rostoucí v případě, kdy pro všechny dvojice čísel x_1, x_2 z jejího definičního oboru a pro příslušné funkční hodnoty f_1, f_2 platí:

Je- li $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) < f(x_2)$. [34] str. 32

Funkce se nazývá klesající v případě, kdy pro všechny dvojice čísel x_1, x_2 z jejího definičního oboru a pro příslušné funkční hodnoty f_1, f_2 platí:

Je- li $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) > f(x_2)$. [34] str. 32

Podmínky pro monotonii funkce jsou konkrétně vymezeny například u funkce lineární, přímé úměrnosti nebo úměrnosti nepřímé.

Lineární funkce s předpisem $y = a \,.\, x + b$ je rostoucí právě tehdy, pokud koeficient a je větší než 0. [28], str. 126

$$a > 0$$

Lineární funkce s předpisem $y = a \,.\, x + b$ je klesající právě tehdy, pokud koeficient a je menší než 0. [28], str. 126

$$a < 0$$

S přímou a nepřímou úměrností se žáci setkali již v sedmém ročníku, kdy se seznámili s předpisem obou úměrností a sestrojovali jejich graf (viz 47, 48 str. 46). V rámci funkcí je v učebnicích konkrétně vymezeno, kdy je funkce přímé i nepřímé úměrnosti rostoucí a kdy klesající. Nerovnosti jsou součástí právě tohoto vymezení.

Funkce přímé úměrnosti s předpisem $y = k \,.\, x$ je rostoucí právě tehdy, pokud koeficient k je větší než 0. [34], str. 36

$$k > 0$$

Funkce přímé úměrnosti s předpisem $y = k \,.\, x$ je klesající právě tehdy, pokud koeficient k je menší než 0. [34], str. 36

$$k < 0$$

Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola.

Funkce nepřímé úměrnosti s předpisem $y = \frac{k}{x}$ je rostoucí pro k menší než 0.[31]

$$k < 0$$

Funkce nepřímé úměrnosti s předpisem $y = \frac{k}{x}$ je klesající pro k větší než 0. [31]

$$k > 0$$

Rozšiřujícím učivem devátého ročníku je funkce kvadratická s předpisem $y = a \cdot x^2$, $a \neq 0$, jejímž grafem je parabola. V závislosti na parametru *a* mohou nastat dva případy omezení funkce.

V prvním případě, kdy koeficient $a > 0$ je parabola omezená zdola a osa souměrnosti paraboly je osa *y*. Jako pomůcku bych žákům při výuce řekla, že se parabola „usmívá“. Funkce je klesající pro záporná *x* a nulu, to je pro $x \leq 0$. Rostoucí je pro nezáporná *x*, tzn. pro $x \geq 0$. Obor hodnot tvoří všechna čísla větší nebo rovna 0.

V druhém případě je koeficient $a < 0$. Parabola je omezená shora a osa souměrnosti paraboly je osa *y*. Jako pomůcku bych žákům při výuce řekla, že se parabola „mračí“. Monotonie funkce se obrací, pro $x \leq 0$ je funkce rostoucí a pro $x \geq 0$ je funkce klesající. [29] Obor hodnot tvoří všechna čísla menší nebo rovna 0.

V textu byl použit pojem omezená funkce:

- Funkce je omezená shora právě tehdy, pokud existuje číslo *c*, $c \in R$, takové, že pro všechna *x* z definičního oboru hodnot platí, že $c \geq f(x)$. [34]
- Funkce je omezená zdola právě tehdy, pokud existuje číslo *d*, $d \in R$, takové, že pro všechna *x* z definičního oboru hodnot platí, že $d \leq f(x)$. [34]

9.1.2 GONIOMETRICKÉ FUNKCE

Goniometrické funkce představují poměry délek stran pravoúhlého trojúhelníku. Na základní škole se jedná o funkce sinus, kosinus a tangens. Každá z těchto funkcí se vztahuje k ostrému úhlu α (viz str. 34).

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

Každému ostrému úhlu v pravoúhlém trojúhelníku je přidružena jediná hodnota sin α, cos α a tg α. [32]

Příklady na porovnání jsou i v této učební látce, konkrétně ke každé ze zmíněných goniometrických funkcí.

Př. 77 Porovnej pomocí znaků >, < s užitím grafu funkcí.

a) sin 42° a sin 38°

b) cos 58° a cos 62°

c) tg 20° a tg 18°

9.2 PODOBNOST

Geometrické útvary jsou podobné, jestliže všechny dvojice úseček, které si odpovídají, mají stejný poměr délek *k*, kde *k* je kladné reálné číslo, které označuje poměr podobnosti. Podle velikosti čísla *k* mohou nastat tři možnosti podobnosti. [29]

Je- li *k* > 1, jde o zvětšení.

Je- li *k* = 1, jde o shodnost, útvar se nezmění.

Je-li *k* < 1, jde o zmenšení.

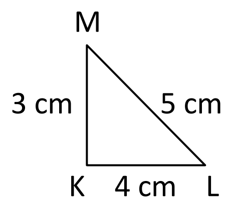
Př. 78 Větší nebo menší?

Trojúhelník K'L'M' je podobný trojúhelníku KLM.

Urči, zda je trojúhelník K'L'M' větší, nebo menší než trojúhelník KLM, je-li poměr podobnosti

a) 3,

b) $\frac{1}{2}$.



9.3 DALŠÍ VYUŽITÍ NEROVNOSTÍ

V rámci lomených výrazů je nerovnost součástí pravidla pro počítání s mocninami u dělení.

$$a^{m} : a^{n} = a^{m-n}, \text{ přičemž } a \neq 0,\ m,n \text{ jsou přirozená čísla, } m > n$$

Dále je nerovnost u lomených výrazů možné najít ve slovních úlohách, kde je využita pro zavedení podmínek doplňujících zadání úlohy.

Př. 79 Pan Pichl uběhl ráno za *x* hodin vzdálenost *a* km a téhož dne odpoledne uběhl za *y* hodin vzdálenost *b* km. Určete průměrnou hodinovou rychlost jeho běhu v uvedeném dni za předpokladu, že $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

Nerovnice jsou rozšířeny o nerovnice s neznámou ve jmenovateli. Nerovnici můžeme řešit dvěma způsoby, pomocí soustav lineárních nerovnic nebo pomocí metody nulových bodů. Konkrétní ukázkou s postupem řešení je příklad 80.

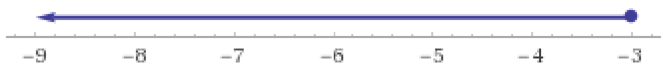
Př. 80 Vyřešte nerovnici $\frac{x+3}{1+x} \geq 0$

Řešení pomocí soustav lineárních nerovnic:

- Zlomek je nezáporný, pokud čitatel zlomku je záporný nebo roven nule a jmenovatel je záporný.

  $x + 3 \leq 0 \wedge 1 + x < 0$

  $x \leq -3 \wedge x < -1$

  [39]

  řešení: $K_1 = (-\infty, -3\rangle$

- Zlomek je nezáporný, pokud čitatel zlomku je nezáporný a jmenovatel je kladný.

  $x + 3 \geq 0 \wedge 1 + x > 0$

  $x \geq -3 \wedge x > -1$

  [39]

  řešení: $K_2 = (-1, +\infty)$

- Množina všech řešení dané nerovnice je sjednocením obou dílčích řešení K_1, K_2.

  $K = K_1 \cup K_2 = (-\infty, -3\rangle \cup (-1, +\infty)$

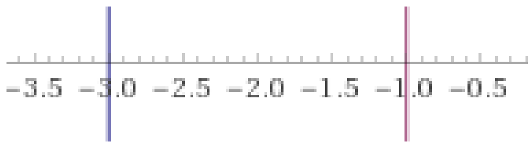
Řešení metodou nulových bodů:

- Určíme nulové body výrazů v čitateli a jmenovateli zlomku

  $x + 3 = 0 \;\wedge\; 1 + x = 0$

  $x = -3 \wedge x = -1$

- Tato čísla rozdělí číselnou osu na tři intervaly.



[39]

- Z každého intervalu vybereme libovolnou hodnotu x_0, kterou následně dosadíme do zlomku $\frac{x+3}{1+x}$, x ≠-1 a zjistíme znaménko v intervalu. Zvlášť vypočteme hodnotu zlomku po dosazení krajního bodu -3 intervalu (-∞, -3), abychom zjistili, zda číslo -3 do intervalu zařadit či nikoliv. Hodnotu krajního bodu -1 intervalu (-1, +∞) neřešíme, protože dosazení čísla -1 by bylo v rozporu s podmínkou pro daný zlomek.

x_0	-10	-3	-2	0
Interval	(-∞, -3)		(-3, -1)	(-1, +∞)
	+	0	-	+

- Vybereme intervaly, v nichž je hodnota zlomku kladná a provedeme jejich sjednocení.

  K_1 = (-∞, −3⟩ … Číslo -3 do intervalu zařadíme, jelikož po jeho dosazení je hodnota zlomku rovna 0, což vyhovuje zadání.

  K_2 = (-1, +∞)

  $K = K_1 \cup K_2$ = (-∞, −3⟩ ∪ (-1, +∞)

V poslední řadě je pomocí nerovností definovaný pojem koule. Koule je definovaná jako množina všech bodů v prostoru, které mají od jejího středu S vzdálenost *a*, která je menší nebo rovna poloměru *r*, (*r* > 0). [33].

$$a \leq r$$

10 ZÁVĚR

Ve své diplomové práci jsem se snažila zohlednit výskyt nerovností a nerovnic v jednotlivých ročnících na základní škole. Ke každé učební látce, kde se nerovnosti či nerovnice objevují, jsem vypsala konkrétní příklady úloh pro lepší představu.

Od těch nejjednodušších možností, jako jsou nerovnosti spojené s obrázky v první třídě, jsem se dostala až k funkcím, které jsou součástí učiva ročníku devátého, kde se nerovnosti a nerovnice nacházejí v nejrůznějších podobách.

Učebnice, ze kterých jsem čerpala jednotlivé úlohy, se běžně využívají při výuce matematiky na základních školách.

11 RESUMÉ

In my diploma thesis I focused on inequalities and inequalities in the individual year at primary school.

Part of the work are also concrete examples of given occurrence of inequalities and inequalities. Inequalities appear in different forms in teaching

The tasks are selected from textbooks that are commonly used in elementary schools in teaching mathematics. The level of knowledge is increasing every year, so the examples are getting harder and harder.

12 ZDROJE

[1] *Matematika 1 pro 1. ročník základní školy*. Brno: Didaktis, 2005. ISBN 80-7358-034-9.

[2] [online]. 2019 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: http://primasyuki.blogspot.com/2016/11/blog-post.html

[3] *Matematika 1 se čtyřlístkem*. Plzeň: Fraus, 2015. ISBN 978-80-7489-041-3.

[4] *Matematika 1 se čtyřlístkem*. Plzeň: Fraus, 2015. ISBN 978-80-7489-042-0.

[5] *Matematika 3*. Brno: Didaktis, 2005. ISBN 80-7358-036-5.

[6] *Matematika*. Pardubice: Alter, 1995. ISBN 80-85775-28-X.

[7] *Matematika 4 se čtyřlístkem*. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7489-017-8.

[8] *Matematika pro střední školy*. Brno: Didaktis, 2013. ISBN 978-80-7358-208-1.

[9] *Matematika 5 se čtyřlístkem*. Plzeň: Fraus, 2015. ISBN 978-80-7489-062-8.

[10] *Matematika pro základní školy*. Praha: SPN, 2007. ISBN 978-80-7235-364-4.

[11] *Matematika pro šestý ročník základní školy*. Praha: Fortuna, 1998. ISBN 80-7168-588-7.

[12] *MATEMATIKA pro 6. ročník základní školy, 2. díl*. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-086-1.

[13] *MATEMATIKA 6*. Liberec: PRODOS, 1998. ISBN 80-85806-98-3.

[14] *MATEMATIKA pro 6. ročník základní školy, 3. díl*. Brno: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-092-6.

[15] *Matematika pro základní školy*. Praha: SPN, 2008. ISBN 978-80-7235-398-9.

[16] *MATEMATIKA pro 7. ročník základní školy, 1. díl*. Třetí vydání. Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-423-0.

[17] *Matematika 7*. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-679-6.

[18] *MATEMATIKA pro 7. ročník základní školy, 2. díl*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-126-4.

[19] *MATEMATIKA pro 7. ročník základní školy, 3. díl*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-129-9.

[20] *MATEMATIKA 7*. Olomouc: Prodos, 1999. ISBN 80-7230-031-8.

[21] *MATEMATIKA pro 8. ročník základní školy*. Druhé vydání. Praha: Fortuna, 2007. ISBN 978-80-7168-994-2.

[22] *MATEMATIKA 8*. Olomouc: Prodos, 2000. ISBN 80-7230-062-8.

[23] *Matematika 8*. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-684-0.

[24] *MATEMATIKA pro základní školy*. Praha: SPN, 2009. ISBN 978-80-7235-419-1.

[25] *MATEMATIKA pro 8. ročník základní školy, 1. díl*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-148-5.

[26] *MATEMATIKA pro 8. ročník základní školy, 3. díl*. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-183-3.

[27] *MATEMATIKA pro základní školy*. Praha: SPN, 2010. ISBN 978-80-7235-487-0.

[28] *MATEMATIKA pro 9. ročník základní školy*. Druhé vydání. Praha: Fortuna, 2007. ISBN 978-80-7168-995-9.

[29] *MATEMATIKA 9*. Olomouc: Prodos, 2001. ISBN 80-7230-109-8.

[30] *MATEMATIKA pro 9. ročník základní školy, 1. díl*. Třetí vydání. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-439-1.

[31] *Matematika 9*. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-689-5.

[32] *MATEMATIKA pro 9. ročník základní školy, 2. díl*. Třetí vydání. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-441-4.

[33] *MATEMATIKA pro základní školy*. Praha: SPN, 2010. ISBN 978-80-7235-489-4.

[34] *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-264-9.

[35] *Matematika pro gymnázia*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-154-3.

[36] BLAŽKOVÁ, Růžena, Milena VAŇUROVÁ a Květoslava MATOUŠKOVÁ. *Matematika pro 4. ročník základních škol*. Všeň: Alter, 1997. ISBN 80-85775-62-X.

[37] JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 5. Praha: Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-212-5.

[38] BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Pracovní sešit k učebnici Matematika 4*. Vydání čtvrté. Všeň: Alter, 2015. ISBN 978-80-7245-321-4.

[39] WolframAlpha. *WolframAlpha* [online]. Wolfram Alpha, 2019 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: https://www.wolframalpha.com/

[40] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. [online]. Praha: MŠMT, 2017. 142 s. [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/