Mathematics. — „*Ueber Wirkungsfunktionen*". By Prof. R. WEITZENBÖCK. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of May 27, 1922.)

§ 1. *Einleitung.*

Bei der Ableitung der Feldgesetze und der Erhaltungssätze in der allgemeinen Relativitätstheorie und deren Erweiterungen steht man vor folgender Aufgabe: wenn g_{ik} und φ_i die Komponenten eines Kovarianten Tensors. 2. resp. 1. Stufe sind und

$$g_{ik,\alpha}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha},\quad g_{ik,\alpha\beta}=\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta},\quad \varphi_{i,\alpha}=\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha},\quad \varphi_{i,\alpha\beta}=\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\quad . \quad (1)$$

gesetzt wird, so ist aus diesen Funktionen eine absolute Invariante W zu bilden. $W\sqrt{g}$ wird dann eine relative Differentialinvariante vom Gewichte eins (= eine scalare Dichte) und

$$\int \mathfrak{W}\,dx=\int W\sqrt{g}\,dx=\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int W\sqrt{g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\ .\ \ .\quad (2)$$

wird eine absolute Integralinvariante.

Man nennt $\mathfrak{W}$ die Wirkungsfunktion. Bedeutet δ eine Variation der g_{ik} und φ_i, so gibt die Gleichung

$$\delta\int \mathfrak{W}\,dx=0\quad \text{(für alle } \delta g_{ik} \text{ und } \delta\varphi_i)\ .\ \ .\ \ .\ \ .\quad (3)$$

die Feldgesetze.

Die Frage nach allen Differentialinvarianten zweiter Ordnung der beiden Tensonen g_{ik} und φ_i wird zurückgeführt auf die einfachere Frage nach allen ganzen, rationalen Differentialinvarianten dieser Tensoren. Hierauf gibt ein Reduktionssatz von RICCI und LEVI-CIVITÀ [1]) die Antwort: man hat alle projektiven Invarianten der folgenden 5 Tensonen zu suchen:

$$\left.\begin{array}{ll} g_{ik} & = \text{metrischer Fundamentaltensor} \\ \varphi_i & = \text{electromagnetisches Potential} \\ R_{ik,\alpha\beta} & = \text{(Riemann-Christoffel'scher) Krümmungstensor} \\ \varphi_{i(\alpha)} & = \text{erste kovariante Ableitung der } \varphi_i \\ \varphi_{i(\alpha)(\beta)} & = \text{zweite kovariante Ableitung der } \varphi_i . \end{array}\right\}\ .\ (4)$$

[1]) Mathem. Ann. 54, (1901), p. 138.

Die Frage nach *allen* projektiven Invarianten dieser Tensoren bildet ein sehr kompliziertes algebraïsches Problem. (Nach dem allgemeinen Endlichkeitssatz von HILBERT gibt es *endlich-viele* ganze rationale Invarianten, durch die sich alle übrigen ganz und rational ausdrücken lassen.)

Glücklicherweise ist hier die Sache nicht so trostlos verwickelt, indem zwei sehr einschränkende Forderungen gestellt werden: in der EINSTEIN'schen Theorie wird verlangt, dass die Feldgesetze Differentialgleichungen höchstens zweiter Ordnung werden; in der Theorie von WEYL müssen die aus den Tensoren (4) gebildeten Wirkungsfunktionen auch masstabsinvariant sein.

Wir behandeln zuerst den zweiten Fall.

§ 2. *Die Theorie von* WEYL.

In der durch WEYL gegebenen Erweiterung der allgemeiner Relativitätstheorie muss die aus den Tensoren (4) gebildete Wirkungsfunktion absolut-invariant gegenüber Masstabstransformationen sein. Diese Transformationen sind gegeben durch

$$g'_{ik} = \lambda g_{ik} \qquad \varphi'_i = \varphi_i - \frac{\partial \log \lambda}{\partial x_i}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

woraus noch entsprechende Gleichungen für $R'_{ik,\alpha\beta}$, $\varphi'_{i(\alpha)}$ und $\varphi'_{i(\alpha)(\beta)}$ folgen.

Die Forderung $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}$ (für alle λ) erniedrigt dann die Anzahl 5 der Tensoren (4) auf 4 masstabinvariante Tensoren:

$$\left.\begin{array}{lll} g_{ik} & = \text{metrischer Fundamentaltensor} & (g'_{ik} = \lambda\, g_{ik}) \\ f_{ik} & = \text{electromagnetisches Feld} & (f'_{ik} = f_{ik}) \\ {}^*F_{ik,\alpha\beta} & = \text{Richtungskrümmung} & ({}^*F'_{ik,\alpha\beta} = \lambda\, {}^*F_{ik,\alpha\beta}) \\ E_{ik,\alpha} & \multicolumn{2}{l}{= f_{ik(\alpha)} - \tfrac{1}{2}(f_{\alpha k}\varphi_i + f_{i\alpha}\varphi_k + 2 f_{ik}\varphi_\alpha - g_{\alpha i} f_{\beta k}\varphi^\beta - g_{\alpha k} f_{i\beta}\varphi^\beta)} \\ & & (E'_{ik,\alpha} = E_{ik,\alpha}). \end{array}\right\} \quad . \quad (6)$$

Der gegenüber $\mathfrak{W} = W\sqrt{g}$ etwas allgemeinere Ansatz $\mathfrak{W} = W g^h$, wobei W keinen Faktor g mehr enthält, führt weiters auf die Gleichung

$$2n_2 + 2n_3 + 3n_4 = 4,$$

wobei W ganz und rational vom Grade n_2, n_3, n_4 in den f_{ik}, ${}^*F_{ik,\alpha\beta}$ und $E_{ik,m}$ ist. Daher ist $n_4 = 0$ und für n_2 und n_3 bleiben nur die drei Möglichkeiten (2,0), (1,1) und (0,2) übrig. Man kann dann beweisen[1]), dass sich unter diesen Annahmen nur die folgenden sechs Wirkungsfunktionen ergeben:

[1]) R. WEITZENBÖCK, Wiener Ber. 129, (1920), p. 683 und p. 697; dito, 130, (1921), p. 15.

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{W}_1 &= \sum_{ik} f_{ik} f_{i'k'} = 2(f_{12}f_{34} + f_{13}f_{42} + f_{14}f_{23}) \\
\mathfrak{W}_2 &= f_{ik} f^{ik} \sqrt{g} \\
\mathfrak{W}_3 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ik} \sum_{lm} {}^*F_{ik,lm} \, {}^*F_{i'k',l'm'} \\
\mathfrak{W}_4 &= \sum_{ik} {}^*F^{oo,\lambda\mu}_{ik,oo} \, {}^*F_{i'k',\lambda\mu} \\
\mathfrak{W}_5 &= \left({}^*F^{oo,ik}_{ik,oo}\right)^2 \sqrt{g} \\
\mathfrak{W}_6 &= {}^*F^{ik,lm} \, {}^*F_{ik,lm} \sqrt{g}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Hiezu machen wir die folgenden Bemerkungen[1]). $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_4$ kommen als Wirkingsfunktionen nicht in Betracht, da ihre Variationen identisch Null geben, wie R. BACH bewiesen hat[2]). $\mathfrak{W}_2$ ist die MAXWELL'sche Wirkingsfunktion, bei WEYL mit $\mathfrak{l}$ bezeichnet[3]). Auch $\mathfrak{W}_5 = F^2 \sqrt{g}$ wird von WEYL verwendet.

An Stelle von $\mathfrak{W}_3$ kann man auch die Invariante

$$W_3' = {}^*F_{ik} {}^*F^{ik} \quad , \quad \mathfrak{W}_3' = W_3' \sqrt{g} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

verwenden; es ist nämlich:

$$\mathfrak{W}_3 = -\mathfrak{W}_3' + \tfrac{1}{4}\mathfrak{W}_2 + \tfrac{1}{4}\mathfrak{W}_5 + \mathfrak{W}_6 \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Die Variationen von $\mathfrak{W}'_3$ und $\mathfrak{W}_6$ wurden von W. PAULI[4]) und R. BACH[2]) berechnet.

§ 3. *Die Theorie von* EINSTEIN.

In der EINSTEIN'schen Theorie ist $\mathfrak{W} = W\sqrt{g}$ und W ist aus den Tensoren (4) zusammen gesetzt: rational in den g_{ik}, ganz und rational in den übrigen vier Tensoren.

Variïeren wir die g_{ik} allein, so bekommen wir die Gravitationsgleichungen $\mathfrak{W}^{ik} = 0$; die Variation von φ_i ergibt die verallgemeinerten MAXWELL'schen Gleichungen $\mathfrak{w}^i = 0$. Dabei sind diese „Tensordichten" [5]) gegeben durch:

$$\mathfrak{W}^{ik} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial g_{ik}} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial g_{ik,\alpha}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial g_{ik,\alpha\beta}}\right) \quad \ldots \quad (10)$$

$$\mathfrak{w}^i = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \varphi_{i,\alpha}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \varphi_{i,\alpha\beta}}\right) \quad \ldots \quad (11)$$

---

1) H. WEYL, Phys. Zeitschr., 22, (1921), p. 473.

2) R. BACH, Mathem. Zeitschr. 9, (1921), p. 124.

3) H WEYL, Raum, Zeit, Materie, 4. Aufl., (1921), p. 268.

4) W. PAULI, Phys. Zeitschr., 20, (1919), p. 457; Verhdl. d. Deutsch. Phys. Ges. 21, (1919), p. 742.

5) D. HILBERT, Göttinger Nachr. 20. 11. 1915.
R. WEITZENBÖCK, Wiener Ber. 130, (1921), p. 15.

Berechnet man diese „Variations-Ableitungen" und verlangt man, dass sie Differentialquotienten von höchstens zweiter Ordnung enthalten, so ergeben sich die drei folgenden Möglichkeiten:

A. W enthält die $R_{ik,\alpha\beta}$ linear, keine $\varphi_{i(\alpha)}$ und keine $\varphi_{i(\alpha)(\beta)}$:

$$W = A\,(g_{ik}\;,\;\varphi_i\;,\;R_{ik,\alpha\beta})\;; \qquad (12)$$

B. W enthält die $\varphi_{i(\alpha)(\beta)}$ linear, keine $R_{ik,\alpha\beta}$ und keine $\varphi_{i(\alpha)}$:

$$W = B\,(g_{ik}\;,\;\varphi_i\;,\;\varphi_{i(\alpha)(\beta)})\;; \qquad (13)$$

C. W enthält keine $R_{ik,\alpha\beta}$ und keine $\varphi_{i(\alpha)(\beta)}$:

$$W = C\,(g_{ik}\;,\;\varphi_i\;,\;\varphi_{i(\alpha)})\,. \qquad (14)$$

Wir behandeln diese drei Fälle der Reihe nach. Bei A kann man zeigen, dass man nur die zwei Invarianten erhält:

$$A_1 = R = g^{ik} R_{ik} \quad , \quad A_2 = R_{ik}\varphi^i\varphi^k \qquad (15)$$

A_1 ist das von EINSTEIN verwendete R.

Im Falle B haben wir drei Invarianten:

$$B_1 = \varphi^{\;\,i}_{o\,(\alpha)\,(i)}\varphi^\alpha \quad , \quad B_2 = \varphi^{o\alpha o}_{io\,(\alpha)}\,\varphi^i \quad , \quad B_3 = \varphi_{i\,(\alpha)\,(\beta)}\varphi^i\varphi^\alpha\varphi^\beta. \qquad (16)$$

Die neben B_1 noch mögliche Invariante

$$B'_1 = \varphi^{\;\,i}_{o(i)(\alpha)}\,\varphi^\alpha$$

ist mit Hilfe von B_1 und A_2 ausdrückbar:

$$B_1 - B'_1 = \varphi^{\;\,i}_{o\,(\alpha)\,(i)}\,\varphi^\alpha - \varphi^{\;\,i}_{o\,(i)\,(\alpha)}\,\varphi^\alpha = -R_{\alpha\beta}\,\varphi^\alpha\,\varphi^\beta = -A_2 \qquad (17)$$

Komplizierter ist der dritte Fall C. Hier ist die Anzahl der Invarianten sehr gross: das Aufsuchen aller Invarianten kommt hinaus auf das Berechnen eines vollen Systems von orthogonalen Invarianten einer quaternären Linearform φ_i und einer ebensolchen (unsymmetrischen) Bilinearform $\varphi_{i(\alpha)}$. Dies ist eine bisher noch ungelöste Aufgabe.

Wir führen einige der einfachsten Invarianten vom Typus C an. Enthält C erstens keine $\varphi_{i(\alpha)}$, so haben wir die einzige Invariante

$$C_1 = \varphi = \varphi_i\,\varphi^i = g^{ik}\,\varphi_i\,\varphi_k \qquad (18)$$

Wenn C die $\varphi_{i(\alpha)}$ linear enthält, haben wir zwei Invarianten

$$C_2 = \varphi_{i(\alpha)}\,\varphi^i\,\varphi^\alpha \quad , \quad C_3 = \varphi^{\;\,i}_{o\,(i)} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial\,(\varphi^i\sqrt{g})}{\partial x_i} \qquad (19)$$

Die Wirkungsfunktion $C_3\sqrt{g}$ gibt zu den Feldgesetzen keinen Beidrag, da $C_3\sqrt{g}$ eine Divergenz ist.

Von den in den $\varphi_{i(\alpha)}$ quadratischen Invarianten C nennen wir nur noch

$$C_4 = 2\,(\varphi_{i(\alpha)}\,\varphi^{i(\alpha)} - \varphi_{i(\alpha)}\,\varphi^{\alpha(i)}) = f_{ik}f^{ik}; \qquad (20)$$

Hier ist f_{ik} das elektromagnetische Feld und $C_4\sqrt{g}$ ist die MAXWELL'sche Wirkungsfunktion.

Sind $f_\sigma(\varphi)$ Polynome von φ (Vgl. (18)) mit constanten Koeffizienten, so hat die allgemeinste Wirkungsfunktion die Gestalt

$$\mathfrak{W} = [f_0(\varphi)+f_1(\varphi)A_1+f_2(\varphi)A_2+f_3(\varphi)B_1+f_4(\varphi)B_2+f_5(\varphi)B_3+C]\sqrt{g} \quad (21)$$

C bedeutet hier eine ganze rationale Funktion von Invarianten (14).

Von dieser Wirkungsfunktion ausgehend, wären nun die Feldgesetze aufzustellen. Dies ist bisher nur für die einfachsten Invarianten durchgeführt worden.