(18) $z \in \mathbb{C}$, f funkce def. na okolí z, nechť existuje $f'(z) \neq 0$

Potom existuje $g := f^{-1}$ na okolí $w := f(z)$; $g'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$ existuje.

Důsledek. Nechť f je holomorfní funkce na okolí bodu $z \in \mathbb{C}$ a $f'(z) \neq 0$.

Potom existuje $g := f^{-1}$ na nějakém okolí $w := f(z)$ a je zde holomorfní.

Řešení. Ztotožníme $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $z = x + iy$

$$f'(z) \text{ existuje} \iff df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

$$f'(z) \neq 0 \iff \alpha^2 + \beta^2 > 0 \iff \text{existuje} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$f'(z) \neq 0 \Rightarrow df_{(x,y)}^{-1}$ existuje $\Rightarrow$ lokálně existuje $g := f^{-1}$

na okolí $f(x,y) = (\xi, \eta)$, $w = \xi + i\eta$

$$\text{a platí} \quad dg_{(\xi,\eta)} = df_{(x,y)}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

(Cauchy-Riemann rovnice)

$\Rightarrow g'(w)$ existuje

$\zeta = g(f(\zeta))$ pro $\zeta \in$ okolí z, $1 = \left.\dfrac{dg(f(\zeta))}{d\zeta}\right|_{\zeta = z} = g'(w)\, f'(z)$

(19) $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ oblast (otevřená, souvislá)

Nalézt všechny $f \in H(\Omega)$, $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

Řešení. $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in H(\Omega)$

$\Omega \ni z = x + iy$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $f \in H(\Omega) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ existují na Ω

$\dfrac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ (CR rovnice)

$\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i \dfrac{\partial}{\partial y}\right) f = 0$, f reálná $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

$f \in H(\Omega) \Rightarrow df_{(x,y)}$ existuje na Ω $\Rightarrow df_{(x,y)} = 0$ na Ω

$\Rightarrow f = \text{konst}$ lokálně na $\Omega \Rightarrow (\Omega$ souvislá$)$ $f = \text{konst} \in \mathbb{R}$ na Ω