Příklad 1: Najděte příklad

a) omezeného operátoru, který není kompaktní,

b) kompaktního operátoru, který není Hilbert–Schmidtův,

c) H–S operátoru, který není jaderný,

d) jaderného operátoru, který není konečněrozměrný.

Návod: Doporučuji hledat mezi násobícími operátory na $\ell^2(\mathbb{N})$, kterým dokážete „vnutit" jakékoli bodové spektrum.

Příklad 2: Jak byste hledali na $L^2(\mathbb{R})$ operátory B tvaru

$$(Bf)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

tak, aby byly jaderné? Jak pro takové bude vyjádřena stopa?

Příklad 3: Najděte na $\mathbb{C}^2$ singulární rozklad operátoru

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Jaký je geometrický význam rozkladu $B = VDW$ jakožto posloupnosti transformací roviny?

Příklad 4: Najděte pro operátor B z minulého příkladu normy $\|B\|_1$, $\|B\|_2$, $\|B\|$ a spektrální poloměr $r(B)$.

Příklad 1: Operátor

$$S : \ell^2(\mathbb{N}_0) \to \mathbb{C} : (v_0, v_1, v_2, \ldots) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} v_k \tag{1}$$

s přirozeným definičním oborem je neomezený (přesvědčte se). Najděte dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vektorů z $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ (tedy *posloupnosti posloupností!*), které mají stejnou limitu, obě limity Sa_n a Sb_n existují, ale dávají různé číslo. Jedná se tedy o neuzavřený operátor.

Příklad 2: Pro operátor z minulého příkladu napište předpis jádra $\operatorname{Ker} S$. Ukažte, že není uzavřeným podprostorem: že existuje posloupnost vektorů $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ z $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, pro které všechny $Sa_n = 0$, existuje $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, ale buď $a \notin D(S)$ nebo $Sa \neq 0$. Jaký je ortogonální doplněk tohoto podprostoru?

Příklad 3: Nechť $(e_0, e_1, e_2, \ldots)$ je báze nějakého separabilního $\mathscr{H}$, označme V jeho uzavřený podprostor s bází $(e_1, e_2, \ldots)$. Operátor

$$J : V \to \mathscr{H} : x \mapsto x \tag{2}$$

nepatří do třídy $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, protože jeho definiční obor V není v $\mathscr{H}$ hustý (má netriviální ortogonální doplněk). Ukažte, že podmínku sdruženého operátoru splňuje nekonečně mnoho různých operátorů J_α^* (stačí zkonstruovat dva různé).

Příklad 4: Najděte příklad dvojice hustě definovaných operátorů S, T, pro které $S + T$ není hustě definovaný. *Návod*: hustě definovaný operátor můžete vyrobit tak, že nějaký jednoduchý, klidně omezený operátor (třeba I) zúžíte na (neuzavřený) lineární obal nějaké báze.

Příklad 1: Pro jednotkové vektory $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$ napište předpis, jak působí projektory E_φ, E_ψ na obecný vektor $x \in \mathscr{H}$. Přesvědčte se pomocí tohoto zápisu o obecné platnosti vztahu $\mathrm{Tr}(E_\varphi E_\psi) = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2$.

Příklad 2: Ukažte, že vektory $\psi_n := \chi_{(n,n+1)}$ jsou v $L^2(\mathbb{R})$ jednotkové, patří do $D(Q)$, ale jejich normy $\|Q\psi_n\|$ rostou nade všechny meze. Jak byste sestrojovali posloupnost se stejnými vlastnostmi pro P?

Příklad 3: V předchozím příkladě posloupnost $(\psi_n)_{n=0}^\infty$ nekonvergovala. Najděte pro Q *konvergentní* posloupnost vektorů (ne nutně jednotkových) z $D(Q)$, pro které tato posloupnost norem také diverguje.

Návod: zvolte si nějaký vektor z $L^2(\mathbb{R})$, který dodatečnou podmínku definičního oboru Q porušuje, a hledejte vhodnou posloupnost konvergující k němu.

Příklad 4: Ukažte, že operátory P_α na úsečce (ve značení z přednášky), dejme tomu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 2\pi\rangle$, mají – – narozdíl od hybnosti volné částice na přímce – bodové spektrum.

Příklad 5: Zkoumejte diskrétní verzi operátoru polohy pro částice existující na kvantizované přímce, tj. $\mathscr{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$, působící jako $Q_\mathbb{Z} : (\psi_m)_{m\in\mathbb{Z}} \mapsto (m\psi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$. Napište jeho přirozený definiční obor a ukažte, že je na něm samosdružený.

Návod: Viz řešený příklad 7.1.6. Základní myšlenkou je, podobně jako jsme použili u P, operátor $Q_\mathbb{Z}$ vymezit na $\dot{Q}_\mathbb{Z}$ definované na posloupnostech s kompaktním nosičem, a ukázat, že $\dot{Q}_\mathbb{Z}^* = Q_\mathbb{Z}$.

Fourierova transformace

Dnešní cvičení bude pojato jako praktické seznámení se zavedením Fourierova–Plancherelova operátoru F. Myšlenka je taková, že Fourierova transformace definovaná jako

$$(\mathscr{F} f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{1}$$

má smysl pouze pro funkce f třídy $L^1(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\boldsymbol{x})$, protože integrál na pravé straně konverguje právě a jen pro takové. $\mathscr{F}$ potom zobrazuje tyto funkce do $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ (prostor rychle ubývajících funkcí, neplést s prostorem funkcí nekonečně diferencovatelných). Pozor na to, že vlivem této vlastnosti

$$\mathscr{F}^\dagger : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_\infty(\mathbb{R}^n) : f(\boldsymbol{x}) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{+i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{2}$$

není inverzní transformací k (1), protože jejím definičním oborem není obor hodnot $\mathscr{F}$.

Poněkud pěknější vlastnosti má jeho zúžení na Schwartzův prostor $\mathscr{S} \overset{\text{ozn}}{=} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$: označíme-li $\mathscr{F}_0 \coloneqq \mathscr{F}\big|_{\mathscr{S}}$, pak $\mathscr{F}_0$ zobrazuje $\mathscr{S}$ sám na sebe a stejné zúžení operátoru (2) je jeho inverzí. Máme tedy

$$\begin{aligned} &\mathscr{F}_0 : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \\ &\mathscr{F}_0^\dagger : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \mathscr{F}_0^\dagger = (\mathscr{F}_0)^{-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Jednou z vlastností $\mathscr{F}_0$ je Plancherelova rovnost

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathscr{F}_0 f)(\boldsymbol{y})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{4}$$

díky které je $\mathscr{F}_0$ hustě definovaný operátor na $L^2(\mathbb{R}^n)$ s normou 1 a můžeme uvažovat o jeho spojitém rozšíření (vůči L^2-normě), které bude díky rovnici (4) **unitárním** operátorem. Takto získaný operátor

$$F : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \tag{5}$$

nazveme **Fourierovým–Plancherelovým operátorem**, jeho inverzí bude podobně spojité rozšíření $F_0^\dagger$.

Jistou překážkou v používání operátoru F je, že vzorec (1) *není nadále jeho předpisem.* L^2-integrabilita funkcí totiž nezaručuje, že jeho pravá strana má smysl. Naštěstí tato situace má snadné řešení:

a) je-li funkce $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *současně* L^1-integrabilní, tedy $f \in L^1 \cap L^2$, pak vzorec (1) použít lze a dává správný výsledek,

b) v ostatních případech můžeme funkci $f \in L^2$ vymezit na nějakou omezenou množinu, například kouli $B_n(\boldsymbol{0}), n \in \mathbb{N}$, čímž L^1-integrabilitu získá. Tuto množinu pak zvětšujeme a získané vektory $\mathscr{F} f$ konvergují v L^2 – tzv. *konvergence podle středů* či *limes in medio*, ozn.

$$(F f)(\boldsymbol{y}) = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{B_n} e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{6}$$

Formou příkladů se seznámíme ještě s jednou užitečnou alternativou pro případ $n = 1$.

Příklad 1: V případě *přímky* trvdíme, že na $L^2(\mathbb{R})$ jsou univerzálně použitelné vzorce

$$\begin{aligned} (F\psi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} \psi(y) \, \mathrm{d}y, \\ (F^\dagger\psi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixy} - 1}{iy} \psi(y) \, \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{7}$$

V tomto cvičení se přesvědčte, že integrál má formu skalárního součinu $\psi(y)$ s funkcí, která je rovněž $L^2(\mathbb{R})$, a proto má konečnou hodnotu $\forall \psi \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$. Ukažte také, že pro $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se jeho výsledek shoduje s použitím (1).

Návod pro druhou část: existuje integrabilní majoranta nezávislá na x, díky čemuž lze derivaci posunout dovnitř integrálu.

Příklad 2: Ukažte, že ve vzorcích (7) je integrál na pravé straně absolutně spojitý a jeho derivací podle x lze skutečně formálně dospět k $(F\psi)(x)$, resp. $(F^\dagger\psi)(x)$ (stačí jeden z nich).

Návod: zlomek $(e^{ixy}-1)/(iy)$, jakožto funkce y, je Fourierovou transformací $\chi_{(0,x)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, a integrand je díky tomu možno psát jako $(F\chi_{(0,x)}(y), \psi(y))$. Pak použijte unitaritu a rozepište skalární součin zpět na integrál.

Příklad 3: Ukažte, že vzorcem $F^\dagger Q F$ je na $L^2(\mathbb{R})$ určen operátor hybnosti – toto jednak představuje jeho unitární ekvivalenci s Q a současně jeho spektrální reprezentaci. To znamená: ukažte, že má předpis $\psi \mapsto -i\psi'$ a jeho definiční obor $F^\dagger D(Q)$ se shoduje s $D(P)$. Odvoďte na základě této informace spektrum $\sigma(P)$.

Návod: viz řešený příklad 7.4.12.

Příklad 1: Najděte indexy defektu operátoru $P^{(0)}$ definovaného předpisem $\psi \mapsto -i\psi'$ na oboru

a) $H^1(\mathbb{R})$,

b) $\{\psi \in H^1(\mathbb{R}_+) \,|\, \psi(0) = 0\}$,

c) $\{\psi \in H^1(a,b) \,|\, \psi(a) = \psi(b) = 0\}$

(ze kterého jsme vycházeli při konstrukci hybnosti na přímce, polopřímce, úsečce).

Návod: Sdruženým operátorem je ve všech třech případech operátor zobrazující $\psi \mapsto -i\psi'$ na celém prostoru H^1 příslušného intervalu.

Příklad 2: V případě intervalu (a,b) máme samosdružená rozšíření $P^{(0)}$ určená přímým výpočtem. Na základě určení defektních prostorů

$$K_\pm = \{\eta_\pm\}_{\mathrm{lin}}, \quad \eta_-(x) = e^{-x}, \quad \eta_+(x) = e^x \tag{1}$$

najděte, jaká samosdružená rozšíření by dával náš obecný postup a jak jejich parametrizace souvisí s notací P_α.

Návod: izometrie K_- na K_+ jsou dány předpisem $c_1\eta_- \mapsto e^{i\theta}c_2\eta_+$, kde c_1 a c_2 jsou voleny tak, aby $\xi_- = c_1\eta_-$ a $\xi_+ = c_2\eta_+$ byly jednotkové. Případně postačí, aby měly tyto dva stejnou normu $\neq 0$. Pak využijte předpisu

$$D(\tilde{P}) = D(P^{(0)}) + (I - V_G)K_- = \left\{\psi + \alpha(\xi_- - e^{i\varphi}\xi_+) \,\middle|\, \psi \in D(P^{(0)}, \sigma \in \mathbb{C}\right\} \tag{2}$$

a zkuste formulovat náležitost do něj zvolněním okrajové podmínky $\psi(a) = \psi(b) = 0$.

Příklad 3: Určete defektní prostory a indexy defektu operátoru zadaného předpisem $T : \psi \mapsto -\Delta\psi$ na oboru

$$D(T) = \left\{\psi \in H^2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \psi(0) = 0, \psi'(0) = 0\right\}. \tag{3}$$

Dokončete potom nalezení samosdružených rozšíření a zapište nové definiční obory pomocí navazovacích podmínek v nule. Diskutujte interpretaci všech zvláštních případů.

Návod: Sdružený operátor je stále $-\Delta$, ale pozor na to, na jakém prostoru. O funkcích $D(T^*)$ se sjednocením *překrývajících se* kompaktních intervalů dozvídáme, že jsou spolu se svými derivacemi absolutně spojité na $\mathbb{R}_+$ a na $\mathbb{R}_-$, ale v nule mohou mít skok. Druhá část: do $D(T)$ přibydou jisté lineární kombinace vektorů z K_- a K_+; spočítejte si, jaké lineární vztahy splňuje pro ně čtveřice hodnot $\psi(0_\pm)$, $\psi'(0_\pm)$.

Příklad 1: Zapište podmínky pro vektor $\psi \in L^2(J)$, aby ležel v $D(P_\alpha^2)$, kde P_α je jedno ze samosdružených rozšíření $-i\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ na konečném intervalu $J = (a, b)$. Ukažte přímým dosazením, že podmínky získané pro $\psi(a)$, $\psi(b)$, $\psi'(a)$, $\psi'(b)$ vyhovují vztahům získaným pro rozšíření $-\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ na regulárním intervalu z přednášky.

Pro P^2 na celé reálné ose stejným způsobem ukažte, že jeho definičním oborem je $H^2(\mathbb{R})$.

Příklad 2: Samosdružené operátory dané diferenciálním operátorem $-\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ na polopřímce tvoří třídu parametrizovanou jedním z možných ekvivalentních způsobů, například

$$\begin{aligned} T &= \tilde{T}\big|_{D(T_c)}, \quad \tilde{T}: H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}_+): \psi \mapsto -\psi'', \\ D(T_c) &= \left\{\psi \in H^2(\mathbb{R}_+) \,\middle|\, \psi'(0) = c\psi(0)\right\}, \quad c \in \mathbb{R}, \\ D(T_\infty) &= \left\{\psi \in H^2(\mathbb{R}_+) \,\middle|\, \psi(0) = 0\right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ukažte, že pro $c \in \mathbb{R}_-$ mají operátory T_c jednu vlastní hodnotu, a najděte odpovídající vlastní vektor. Co popisuje fyzikálně?

Příklad 3: Poučku, která nám přišla vhod zejména pro zespoda omezené potenciály (předpoklady viz 24.3.), že

$$\int_I \left(V(x)|\psi(x)|^2 + |\psi'(x)|^2\right) \mathrm{d}x \quad \text{konverguje,} \tag{2}$$

dokažte. Jak odsud plyne, že pro $\operatorname{ess\,inf} V > -\infty$ je $\psi' \in L^2(\mathbb{R})$? Co se může pokazit, pokud spodní mez neexistuje?

Návod: Uvažujte funkci $(\psi'(x)^*\psi(x) + \psi(x)^*\psi'(x))'$. Ukažte použitím argumentů absolutní spojitosti, že její integrál přes $\mathbb{R}$ konverguje, a tuto znalost pak použijte na výraz, který získáte rozepsáním derivace.

Poznámka: Po další proběhlé hodině v (2) rozpoznáváme formu $s(\varphi, \psi) = (\varphi', \psi') + (\varphi, V\psi)$ vyhodnocenou v (ψ, ψ).

Příklad 4: Operátor energie na polopřímce nebo úsečce můžeme namísto von Neumannova postupu také hledat Friedrichsovým rozšířením (protože je pozitivní). Zde uvažujeme seskvilineární formu $(P^{(0)}\varphi, P^{(0)}\psi)$, ke které hledáme uzávěr. Jestliže vyjdeme z uzavřeného operátoru $P^{(0)} = S$, dá se ukázat, že výsledkem rozšíření je operátor S^*S. Uvažujte operátory $\psi \mapsto -i\psi'$ na definičních oborech

$$\begin{aligned} D(P_+^{(0)}) &= \left\{\psi \in H^1(\mathbb{R}_+) \,\middle|\, \psi(0) = 0\right\} && \text{(polopřímka),} \\ D(P_J^{(0)}) &= \left\{\psi \in H^1(\mathbb{R}_+) \,\middle|\, \psi(a) = \psi(b) = 0\right\} && \text{(úsečka } J = (a, b)\text{).} \end{aligned} \tag{3}$$

Kterému rozšíření z naší nekonečné rodiny toto *konkrétní* rozšíření odpovídá?

Příklad 1: Dokažte následující o výrazech vyskytujících se ve tvrzení 2. postulátu:

a) Pro statistický operátor W a projektor E je $\mathrm{Tr}(EW) \geq 0$.

b) Pro statistický operátor W a projektor E takový, že $\mathrm{Tr}(EW) \neq 0$ je

$$W' = \frac{EWE}{\mathrm{Tr}(EW)} \tag{1}$$

opět statistický operátor.

c) Je-li W čistý stav E_φ, pak (1) je také čistý stav reprezentovaný vektorem $E\varphi/\|E\varphi\|$.

d) Je-li $\{E_1, \dots, E_n\}$ množina ortogonálních projektorů taková, že $\mathrm{Tr}(EW) \neq 0$, $E = \sum_{i=1}^n E_n$, pak

$$W' = \frac{\sum_{k=1}^n E_k W E_k}{\mathrm{Tr}(EW)} \tag{2}$$

je opět statistický operátor.

Příklad 2: Napište kompletní předpis spektrální míry spinové pozorovatelné σ_x. Ukažte, že funkce z prostoru $\Phi_{E_{\sigma_x}}$ jsou plně určeny jen svými hodnotami v 1 a -1, a tedy $\Phi_{E_{\sigma_x}} \cong \mathbb{C}^2$. Spočítejte z definice funkce operátoru (tj. integrací podle této míry, **ne** Taylorovou řadou!) $\exp(it\sigma_x)$.

Příklad 3: Pro vektor $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ napište, jak působí číselná míra μ_ψ získaná z operátoru polohy. Závisí smysluplnost výrazu na tom, zda $\psi \in D(Q)$? Pro které vektory ψ je μ_ψ vůči Lebesgueově míře absolutně spojitá, pro které singulární (viz definice a věta na str. 658)?

Příklad 4: Přeformulujte obsah následující věty z 01FA2 pomocí projektorové míry (53 ve Wikiskriptu, s uzpůsobeným značením):

Nechť $\{E_\lambda\}$ je rozklad jednotky a $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda E_\lambda$. Potom

a) $\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$ právě tehdy, když E_λ je konstantní na nějakém okolí λ,

b) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ právě tehdy, když $E_\lambda - E_{\lambda-0} \neq 0$.

Ukažte, že odsud také plyne, že *nosičem* projektorové míry E_A je σ_A (viz definice v poznámce A.3.3b).

Funkce operátoru P

Příklad 1: Na základě unitární ekvivalence $P = F^\dagger Q F$ ukažte, že $\exp(itP), t \in \mathbb{R}$ předepisuje unitární operátor

$$\exp(itP) \colon \psi(x) \mapsto \psi(x+t). \tag{1}$$

Návod: Ukažte pro funkce $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ a využijte vlastnosti omezených operátorů.

Příklad 2: Ukažte také, že pokud funkce f je $\in L^2(\mathbb{R})$, pak $f(P)$ je integrální operátor

$$f(P) \colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \colon \psi(x) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (Ff)(y-x)\psi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Návod: Viz řešený příklad 10.5.2b.

Příklad 3: Na základě výsledku (2) najděte funkcionální vyjádření

a) rezolventy $R_{P^2}(\mu)$ pro $\mu < 0$,

b) spektrální míry $E_P(J)$ omezeného intervalu J.

Příklad 1: Alternativu ke zkoumání rozdílu $A_1A_2 - A_2A_1$ představuje kvadratická forma $(A_1\psi, A_2\psi) - (A_2\psi, A_1\psi)$.

a) Ukažte, že její definiční obor je nadmnožinou $D(A_1A_2 - A_2A_1)$.

b) Spočítejte, jaký výsledek dává pro operátor polohy a hybnosti na $L^2(\mathbb{R})$.

c) Ukažte, že operátory polohy a hybnosti na kružnici rovnost formálně stejnou jako v předchozím bodě nesplňují.

Příklad 2: Body přibližně bodového spektra je možné, podobně jako vlastní hodnoty, hledat z definice, a pro samosdružené operátory tak získat informaci o spojitém spektru. Podaří-li se najít posloupnost jednotkových (resp. nenulových) vektorů ψ_n, pro něž $\|A\psi_n - \lambda\psi_n\|$ konverguje k nule (resp. nemá spodní hranici $c\|\psi_n\|$ pro žádné $c > 0$), pak $\lambda \in \sigma(A)$. Ukažte tímto postupem následující:

Nechť $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je omezená měřitelná funkce taková, že $\lim_{x\to\pm\infty} v(x) = 0$. Pak celý interval $\langle 0, +\infty)$ patří do spektra operátoru $H = P^2 + V$, $V = v(Q)$.

Návod: uvažujte část sinusové vlny v oblasti, kde $|v(x)| \leq \varepsilon$, vyhlazenou tak, aby spadala do $D(H) = H^2(\mathbb{R})$.

Příklad 3: Uvažujte částici na přímce v pravoúhlé potenciální jámě, tj. $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$, $H = P^2 + V$, $V = v(Q)$, $v(x) = -V_0\chi_{(-a,a)}(x)$. Ukažte, že operátor V je vůči P^2 relativně kompaktní, a použijte tuto skutečnost k nalezení esenciálního spektra H. Jak potom může vypadat celé $\sigma(H)$? Detaily hledání vlastních hodnot vynechte.

Příklad 4: Jedním z uzavřených rozšíření operátoru $P^{(0)}$ na konečném intervalu $J = (a, b)$ je operátor P' definovaný na množině $\{\psi \in H^1(J) \,|\, \psi(a) = 0\}$. Ukažte, že jeho spektrem je prázdná množina. Jak na základě toho dokážeme říci, že každý samosdružený operátor hybnosti na J má čistě bodové spektrum?

Návod k první části: ukažte, že předpis $\psi(x) \mapsto \int_a^x e^{i\lambda(x-t)}\psi(t)\,\mathrm{d}t$ je omezené zobrazení z $\mathscr{H}$ do $D(P')$, odkud plyne $\lambda \in \rho(P')$ pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Uzavřenost nemusíte ověřovat – zájemci viz příklad 7/18 v knize.

Příklad 1: Ukažte z definice, že jednoparametrická grupa

$$U(t)\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})\colon \psi(x) \mapsto \psi(x+t) \tag{1}$$

je silně spojitá. Označme její generátor T. Ukažte, že nutnou a postačující podmínkou pro $\psi \in D(T)$ je $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ a že potom $T\psi = -i\psi'$. (Takto můžeme pomocí Stoneovy věty ukázat samosdruženost operátoru P.)

Návod: Pro silnou spojitost uvažujte limitu akce na $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Pro $\psi \in H^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \psi \in D(T)$ přijde vhod věta o Lebesgueových bodech. Pro opačnou implikaci integrujte funkci $(\psi(x+\tau)-\psi(x))/(i\tau)$ na konečném intervalu (a,b). Potřebujeme také tvrzení, že konvergence v normě implikuje bodovou konvergenci skoro všude.

Příklad 2: Najděte příklad kombinace Hamiltoniánu a počátečního stavu ψ_s, pro který formulace časového vývoje pomocí Schrödingerovy rovnice nemá smysl. Ukažte ale, že pomocí unitárního propagátoru ano, a najděte tímto způsobem ψ_t pro $t \neq s$.

Ukažte obecně, že pro čistý stav $W_s = E_{\psi_s}$ určený vektorem $\psi_s \notin D(H)$ je podmínka $W_s D(H) \subset D(H)$ také porušena, takže nelze-li pro ψ_s psát Schrödingerovu rovnici ve vektorovém tvaru, nezachrání nás ani její formulace pro smíšené stavy.

Příklad 3: Ukažte, že funkce $U^{(D)}(t,s) = U_0(t_0,t)U(t,s)U_0(s,t_0)$, vyjadřující Diracův propagátor, má všechny vlastnosti unitárního propagátoru pro libovolné *pevně* zvolené t_0.

Nelze však volit $t_0 \equiv s$. Ukažte, že naivní formulka $\tilde{U}^{(D)}(t,s) = U_0(s,t)U(t,s)$ by s požadavkem unitárního propagátoru a s $U_0(a,b) = U_0(a-b)$ implikovala komutativitu $U_0(t,s)$ a $U(r,s)$ pro libovolnou trojici $r,s,t \in \mathbb{R}$.

Příklad 1: Pro prostor $\mathscr{H}_1$ konečné dimenze d odvoďte dimenze prostorů $\mathscr{H}_1^{\otimes N}$, $S_N\mathscr{H}_1^{\otimes N}$, $A_N\mathscr{H}_1^{\otimes N}$. Za jakých podmínek je první z dimenzí rovna součtu zbývajících dvou?

Příklad 2: Pro $\mathscr{H}_1 = \mathbb{C}^2$ uvažujte standardní bázi (e_1, e_2). Jak pomocí ní sestrojíme báze prostorů $\mathscr{F}(\mathscr{H}_1)$, $\mathscr{F}_S(\mathscr{H}_1)$, $\mathscr{F}_A(\mathscr{H}_1)$? Napište tyto báze. Přiřaďte každému vektoru střední hodnotu pozorovatelné $E_{e_1}^{\oplus}$.

Příklad 3: Jaký význam má Fockův prostor sestavený nad $\mathscr{H}_1 = \mathbb{C}$ v případě symetrizace, antisymetrizace? Jaké operátory na něm získáváme prostředky $T^{\oplus}$?

Příklad 4: Uvažujte N částic, které kromě prostorových stupňů volnosti mají nějaký alespoň N-rozměrný vnitřní stav, tedy pro jednoduchost nechť

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_0 \otimes \mathbb{C}^N. \tag{1}$$

Nechť dále $(e_1, \dots, e_N)$ značí standardní bázi $\mathbb{C}^N$. Uvažujme zobrazení

$$\varphi_i \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \tag{2}$$

zkonstruujme omezené zobrazení

$$\Phi\colon \mathscr{H}_0^{\otimes N} \to \mathscr{H}_1^{\otimes N} : (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \mapsto (\varphi_1 \otimes e_1) \otimes \dots \otimes (\varphi_N \otimes e_N). \tag{3}$$

Ukažte, že složené zobrazení $\sqrt{N!}P_N \circ \Phi$ splňuje všechny požadavky lineární izometrie pro $P \in \{S, A\}$, takže prostor *rozlišitelných částic* $\mathscr{H}_0^{\otimes N}$ můžeme vnořit do symetrizovaného i antisymetrizovaného prostoru rozšířeného o vnitřní stupně volnosti.

Izometrii zkonstruujte explicitně pro dvě částice. Najděte operátor (splňující požadavek principu nerozlišitelnosti), jaký by v jejím rámci reprezentoval operátor $A \otimes I \in \mathscr{L}_{\mathrm{sa}}(\mathscr{H}_0 \otimes \mathscr{H}_0)$.