Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Международный государственный экологический
университет имени А. Д. Сахарова»

Факультет мониторинга окружающей среды
Кафедра физики и высшей математики

Н. А. Савастенко

Математическая статистика

Курс лекций

Учебно-методическое пособие

Минск
2015

УДК 519.2 (476) (075.8)
ББК 22.172

Рекомендовано к изданию НМС МГЭУ им. А.Д. Сахарова
(протокол №4 от 17.12.2013)

Автор:
доцент, к. физ.-мат. н. *Н. А. Савастенко*

Рецензенты:
доцент, к. физ.-мат. н., завкафедрой экологических информационных систем *В. А. Иванюкович*
доцент кафедры теории и истории государства и права ФГБОУ ВПО «Российский государственный социальный университет», филиал РГСУ в г. Минске *В. В.Пакштайте*

Савастенко, Н. А.

Математическая статистика. Курс лекций: учеб.-метод. пособие. / Н. А. Савастенко. – Минск: МГЭУ им. А.Д. Сахарова, 2015. – 72 с.

ISBN

Книга содержит краткий курс лекций по математической статистике с контрольными вопросами и указанием литературных источников по каждой теме. В основе пособия лежит курс лекций по теории веоятностей и математической статистике, читавшийся студентам различных специальностей факультета мониторинга окружающей среды МГЭУ им. А.Д. Сахарова. Математический аппарат, используемый при изложении материала, основан на курсе высшей математики для студентов нематематических специальностей. Предполагается знакомство с основными понятиями математического анализа, дифференциального и интегрального исчисления.

В конце пособия приведена некоторая справочная информация о часто используемых в математической статистике распределениях Стьюдента и Фишера.

Предназначается для студентов факультета мониторинга окружающей среды МГЭУ им. А.Д. Сахарова. Может быть полезна магистрантам, аспирантам и преподавателям.

УДК 519.2 (476) (075.8)
ББК 22.172

Оглавление

1. Основные понятия математической статистики

Основные понятия и определения. Генеральная и выборочная совокупности. Основные задачи математической статистики. Предварительная обработка результатов измерения.

Основные понятия и определения

Математическая статистика **–** раздел математики, разрабатывающий методы регистрации, описания и анализа данных наблюдений и экспериментов с целью построения вероятностных моделей массовых случайных явлений.

Статистическое описание применяют к таким физическим процессам, для которых результат отдельного измерения не может быть предсказан с необходимой точностью. Тем не менее, при проведении достаточто большого числа повторных измерений может быть с достаточно хорошей точностью предсказана некоторая величина, являющаяся функцией результатов измерений.

При построении моделей в математической статистике предполагают вероятностную природу наблюдаемых явлений и используют математический аппарат теории вероятностей.

Хотя математическая статистика и опирается на методы и понятия теории вероятностей, но можно сказать, что в каком-то смысле математическая статистика решает обратные задачи.

Так, в теории вероятностей полагают, что вероятностная модель явления задана, и на основе этой модели рассчитывают интересующие нас вероятности событий.

В математической статистике полагают, что вероятностная модель явления неизвестна, и поступают следующим образом. Допустим, что в результате проведенных экспериментов (или наблюдений) получены некоторые экспериментальные данные (статистические данные). На основании этих данных выбирают соответствующую им вероятностную модель. И затем уже используют полученную модель для описания рассматриваемого явления или процесса.

Приведем пример постановки задачи в теории вероятностей и в математической статистике. *Постановка задачи в теории вероятностей* формулируется следующим образом. Вероятность выпадения цифры «шесть» при подбрасывании игральной кости известна и равна некоторому значению p. Определить вероятность того, что при n подбрасываниях кости цифра «шесть» выпадет k раз. Здесь $0 < k < n$. Типичная *постановка в задачи в математической статистике* звучит следующим образом. Игральную кость подбрасывали n раз. Цифра «шесть» выпала k раз. Какова вероятность выпадения цифры «шесть» при одном подбрасывании.

Генеральная и выборочная совокупности

Понятия генеральной совокупности и выборки из нее (выборочной совокупности) являются основополагающими понятиями математической статистики. В теории вероятностей было введено понятие случайной величины X, которая может принимать различные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$. В математической статистике говорят, что множество всех значений случайной величины X – это генеральная совокупность. Вводят также понятие случайной выборки. Под случайной выборкой понимают некоторые случайные величины, такие, что их распределение совпадает с распределением случайной величины X.

Рассматривая задачи теории вероятностей, говорят, что в результате n независимых испытаний (опытов, наблюдений) случайная величина X приняла значения $x_1, x_2, \dots x_n$. Аналогичная ситуация в математической статистике описывается следующим образом: из генеральной совокупности X извлечена случайная выборка $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Прежде чем вводить строгие определения генеральной и выборочных совокупностей, приведем пример, иллюстрирующий эти два основных понятия математической статистики. Допустим, что некоторые измерительные приборы выпускаются определенным предприятием. Пусть нас интересует некоторая количественная характеристика качества работы прибора, например, точность измерений, обеспечиваемая этим прибором, или время безотказной работы прибора. Очевидно, осуществление контроля интересующего нас параметра может быть проведено не для всей выпущенной продукции (генеральной совокупности), а для некоторых приборов (случайной выборки, выборочной совокупности).

Другими примерами генеральной совокупности являются:

- все жители Минска,
- все студенты Беларуси,
- все юридические лица какой-либо страны,

- все предприятия, расположенные на территории определенного города, осуществляющие торговлю книжной продукцией.

Выборочная совокупность состоит из части объектов, генеральной совокупности, отобранных для изучения, целью которого является установление определенных характеристик генеральной совокупности. Таким образом, примерами выборочных совокупностей могут являться:

-часть населения Минска,

-некоторая часть студентов Беларуси,

-некоторые юридические лица определеной страны и т. д.

Для того чтобы выводы, полученные при изучении выборочной совокупности, можно было распространить на генеральную совокупность, выборка должна корректно отражать генеральную совокупность (говорят, выборка должна быть репрезентативной). Так, выборка, состоящая из жителей Минска, являющихся владельцами двух автомобилей, не репрезентирует все население Минска (или не репрезентирует покупательную способность жителей Минска).

Рассмотрим некоторые определения, принятые в математической статистике.

Все множество значений случайной величины X называют ***генеральной совокупностью*** случайной величины X. То есть генеральная совокупность – это случайная величина X, заданная на пространстве элементарных событий Ω.

Законом распределения генеральной совокупности X называют закон распределения случайной величины X.

Свойства генеральной совокупности изучают на основании анализа ***статистических*** (экспериментальных) ***данных,*** под которыми понимают значения случайной величины, полученные в результате повторений случайного эксперимента (наблюдений над случайной величиной). При этом предполагается, что эксперимент может быть проведен сколько угодно много раз в одних и тех же условиях. «Эксперимент, проведенный в одних и тех же условиях» означает, что распределение случайной величины X_i, $i= 1, 2, ...$, полученной в i-том эксперименте, не зависит от номера испытания i и совпадает с распределением генеральной совокупности X. То есть наблюдения над случайной величиной проводятся в независимых повторных экспериментах.

Совокупность независимых случайных величин $X_1, ..., X_n$, каждая из которых имеет то же распределение, что и случайная величина

X, называется ***случайной выборкой*** из генеральной совокупности X и обозначается как

$$\overrightarrow{X_n} = (X_1, \dots, X_n). \tag{1.1}$$

Случайные величины X_i называются ***элементами случайной выборки***, а ***n*** называют ***объемом случайной выборки***.[1]

Реализацией случайной выборки (или ***выборкой)*** из генеральной совокупности X называют любое возможное значение случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$ и обозначают

$$\overrightarrow{x_n} = (x_1, \dots, x_n). \tag{1.2}$$

Здесь числа x_i – элементы выборки $\overrightarrow{x_n}$. Элементы выборки называют также ***вариантами.***

Выборку $\overrightarrow{x_n}$ можно интерпретировать как совокупность n чисел $x_1, x_2, \dots x_n$, полученных в результате проведения n повторных независимых наблюдений (испытаний) над случайной величиной X.

Основой любых выводов о вероятностных свойствах генеральной совокупности X, т.е. статистических выводов, является так называемый ***выборочный метод***. Суть выборочного метода заключается в том, что свойства случайной величины X устанавливаются на основании изучения случайной выборки.

Выборка должна быть ***репрезентативной*** (представительной), то есть такой, по которой можно с уверенностью определять интересующие нас характеристики генеральной совокупности. Другими словами, репрезентативность выборки заключается в том, что она достоверно и в полной мере отображает все характеристики генеральной совокупности, частью которой она является.

При использовании в статистических исследованиях выборочного метода возникают так называемые ошибки репрезентативности. Ошибки репрезентативности обусловлены тем, что выборочная совокупность не полностью воспроизводит генеральную и представляют собой расхождение между значениями параметров, полученными по

[1] Аналогичным образом можно ввести объем генеральной совокупности N как число объектов генеральной совокупности.

выборке, и значениями соответствующих параметров генеральной совокупности.

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществлять случайно, объем выборки должен быть достаточно большим.

Существует несколько способов отбора случайных величин для получения выборочной совокупности:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части:
   - простой случайный бесповторный отбор;
   - простой случайный повторный отбор.
2. Отбор, при котором производится расчленение генеральной совокупности на части:
   - типический отбор;
   - механический отбор;
   - серийный отбор.

Выборка называется ***повторной***, если объект возвращается в генеральную совокупность перед произведением следующего отбора.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

При большом объеме генеральной совокупности различия между повторной и бесповторной выборкой незначительны.

Типический отбор – это отбор, при котором неоднородная генеральная совокупность разбивается на типические (однородные) группы, из которых затем и производится случайный отбор. Так, например, если продукция изготавливается на нескольких станках, то для проведения контроля качества естественно проводить выборку продукции, произведенной на каждом из станков.

Механический отбор производится через определенный интервал, например, выбирают каждую 100 деталь.

При ***серийном*** отборе – отбирают не отдельную единицу (например, произведенную деталь или прибор), а группу, серию, например, продукцию, изготовленную одним станком.

На практике часто применяют комбинированный отбор.

Множество возможных значений случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$ называют ***выборочным пространством*** χ_n.

Любую функцию случайной выборки $g(\overrightarrow{X_n})$ называют ***статистикой,*** или выборочной характеристикой. Значение статистики

$g(\overrightarrow{X_n})$, полученное по реализации $\overrightarrow{x_n}$ случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$, называется ее ***выборочным значением*** и обозначается $g(\overrightarrow{x_n})$.

Характерной чертой задач в математической статистике является наличие некоторой априорной информации.

До проведения испытаний о случайной величине может быть известно очень мало, например, только то, что она является дискретной или непрерывной. С другой стороны, на практике также встречаются задачи, когда известно распределение случайной величины с точностью до параметра. Например, генеральная совокупность имеет нормальное распределение с неизвестными параметрами μ (математическое ожидание) и σ (среднее квадратическое отклонение).

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} . \qquad (1.3)$$

Так как параметры σ и μ – неизвестны, то мы можем говорить только о семействе (классе) распределений.

Выборочное пространство, на котором задан класс распределений, называется ***статистической моделью***.

Статистическая модель полностью определена функцией распределения. Будем обозначать статистическую модель {F(x)}, поскольку она полностью определена функцией распределения F(x) генеральной совокупности.

Если функция распределения задана с точностью до неизвестного параметра (в общем случае вектор параметров с множеством возможных значений $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n)$, то статистическую модель называют ***параметрической*** $\left\{F\left(x, \vec{\theta}\right), \vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)\right\}$.

Статистическую модель называют ***непрерывной,*** или ***дискретной***, в зависимости от того, является ли случайная величина X непрерывной или дискретной. В случае непрерывной статистической модели распределение задается плотностью распределения. Для статистических моделей можно использовать также обозначения $\left\{p\left(x, \vec{\theta}\right), \vec{\theta} = (\theta_1 \theta_2, \dots, \theta_n)\right\}$.

Приведем пример задания параметрической статистической модели.

Пусть известно, что генеральная совокупность случайной величины X распределена по нормальному закону с известной дисперсией и неизвестным значением математического ожидания θ.

Тогда статистическая параметрическая модель $\{F(x;\ \theta)\}$ может быть задана с помощью плотности распределения

$$p(x;\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}.$$

Если в распределении неизвестны оба параметра – математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, то статистическая модель примет вид $\{F(x;\vec{\theta}), \vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)\}$, где плотность распределения содержит два неизвестных параметра.

$$p(x;\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2{\theta_2}^2}}.$$

Все вышеизложенное можно обобщить также на многомерные случайные величины.

Если используются законы распределения случайных величин, имеющие общепринятые названия (нормальное распределение, биномиальное распределение), то и статистические модели называют соотвествующим образом: нормальная модель, биномиальная модель.

Основные задачи математической статистики

Прежде всего, следует отметить, что при решении любой задачи математической статистики, в распоряжении имеются два источника информации: результаты статистического эксперимента (то есть выборка из генеральной совокупности случайной величины X) и некоторая априорная информация об интересующих свойствах генеральной совокупности, известной к текущему моменту. Априорная информация учитывается в выбираемой статистической модели.

Перечислим некоторые наиболее часто встречающиеся задачи математической статистики:

1. Оценка неизвестных параметров.
2. Проверка статистических гипотез.
3. Установление формы и степени связи между случайными величинами.

Задача ***оценки неизвестных параметров*** формулируется следующим образом.

Функция распределения известна с точностью до параметра θ. То есть задана параметрическая статистическая модель $\{F(x,\vec{\theta}), \vec{\theta} =$

$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)\}$. Необходимо найти такую статистику $\hat{\theta}(\overrightarrow{X_n})$, выборочное значение которой $\hat{\theta}(\overrightarrow{x_n})$ для рассматриваемой реализации $\overrightarrow{x_n}$ случайной выборки можно было бы считать приближенным значением параметра θ.

Статистику $\hat{\theta}(\overrightarrow{X_n})$, выборочное значение которой $\hat{\theta}(\overrightarrow{x_n})$ для рассматриваемой реализации $\overrightarrow{x_n}$ случайной выборки принимают за приближенное значение параметра θ, называют его ***точечной оценкой,*** или просто оценкой, а $\hat{\theta}(\overrightarrow{x_n})$ – значением точечной оценки.

Однако возможна и другая формулировака поставленной задачи.

Пусть функция распределения известна с точностью до параметра θ. То есть задана параметрическая статистическая модель $\{F(x, \vec{\theta}), \vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)\}$. Необходимо найти такие статистики $\overline{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ и $\underline{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, чтобы с вероятностью γ выполнялось неравенство

$$P\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}) \leq \theta \leq \overline{\theta}\overrightarrow{(X_n)}\} = \gamma. \tag{1.4}$$

В этом случае говорят об ***интервальной оценке*** для оцениваемого параметра θ.

Интервал $(\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}), \overline{\theta(\overrightarrow{X_n})})$ называют ***доверительным интервалом*** для параметра θ. Величину γ называют ***коэффициентом доверия,*** или ***доверительной вероятностью.***

Проверка статистических гипотез. Статистической гипотезой называют любое предположение о распределении вероятностей случайной величины. Речь может идти или о виде распределения (непараметрическая гипотеза), или о значении параметров распределения (параметрическая гипотеза).

В последнем случае можно рассматривать задачу проверки статистической гипотезы как обратную к задаче оценки параметров. Действительно, при решении задачи об оценке параметра истинное значение параметра неизвестно. При проверке статистической гипотезы мы на основании априорной информации предполагаем известным его значение и по результатам эксперимента проверяем выдвинутое предположение.

Приведем некоторые примеры статистических гипотез.

1. Гипотезы о величине математического ожидания (параметрическая гипотеза):
   $\mu=\mu_0$;
   $\mu=5$;

$\mu = -0{,}01$,

где μ – математическое ожидание случайной величины.

2. Гипотеза о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей (параметрическая гипотеза):
   $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$,
   где σ^2_1 и σ^2_2 – дисперсии двух случайных величин X_1 и X_2.

3. Гипотеза о виде функции распределения (непараметрическая гипотеза):

$F(x)=F_t(x)$, где $F(x)$ – функция распределения случайной величины, $F_t(x)$ – некоторая предполагаемая функция распределения.

Установление формы и степени связи между случайными величинами. При решении ряда практических задач часто возникает необходимость установления зависимостей между величинами.

Для пояснения смысла такого типа задач приведем некоторые примеры.

Пусть случайная величина Y_1 – количественная характеристика производительности какой-либо химической установки (химического реактора), случайная величина Y_2 – описывает долю брака в выпущенной продукции. Предположим, что X_1, X_2, и X_3 – случайные величины, характеризующие технологические параметры, например, содержание примеси в сырье, влажность газовой атмосферы в реакторе, температура в реакторе. Естественно предположить, что технологические параметры влияют на величины Y_i. Для оптимизации производства необходимо установить степень влияния различных технологических факторов X_i на величины Y_i. При найденной зависимости Y_i от X_i можно установить, каковы должны быть технологические параметры для минимизации степени брака при заданном значении производительности реактора.

Предположим, что Y – степень износа некоторой конструкционой детали в химическом реакторе, используемом для очистки сырья. X_1, X_2 и X_3 – состав материалов, из которых эта деталь может быть изготовлена. Z_1, Z_2 и Z_3 – химический состав реактивных смесей, используемых в технологическом процессе (в данном случае, очистке). Если установить степень влияния величин X_i и Y_i на величину X, то можно увеличить время «бесперебойной» работы реактора.

Предварительная обработка результатов измерения

Использование методов математической статистики для решения прикладных задач связано с обработкой большого количества данных. Поэтому статистические данные, полученные в результате измерений (статистических экспериментов, наблюдений), должны пройти предварительную обработку, облегчающую их анализ.

Одна из самых простых процедур предварительной обработки статистических данных – это упорядочивание их по величине.

Предположим, что в результате эксперимента получена выборка $(x_1, \dots, x_n)$ объема n из генеральной совокупности X. Упорядочим полученную выборку, расположив ее элементы в неубывающем порядке:

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \dots \le x_{(i)} \le \dots \le x_{(n)}. \quad (1.5)$$

Здесь $x_{(1)}$ – наименьший из элементов выборки, а $x_{(n)}$ – наибольший из элементов выборки.

Последовательность чисел $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющих условию (1.5) называют ***вариационным рядом выборки***. Числа $x_{(i)}$, $i = \overline{1 - n}$ называют членами вариационного ряда.

Операция упорядочивания значений выборки называется ***ранжированием*** статистических данных.

Следует заметить, что переход от случайной выборки к вариационному ряду не приводит к потере информации, однако функции распределения случайных величин уже не совпадают с функцией распределения генеральной совокупности.

Среди элементов выборки могут быть повторяющиеся величины.

Статистическим рядом для выборки называют таблицу, которая содержит элементы выборки $x_{(i)}$ и числа n_i, показывающие, сколько раз это значение повторялось при проведении измерения (табл. 1.1). При задании статистического ряда можно указывать не только числа n_i , но и отношения n_i/n , где n – объем выборки. При этом числа n_i называют ***частотами***, а отношение n_i/n – ***относительными частотами*** элемента выборки.

Таблица 1.1

Статистический ряд

$x_{(i)}$	$x_{(1)}$	…	$x_{(i)}$	…	$x_{(m)}$
n_i	n_1	…	n_i	…	n_m
n_i/n	n_1/n	…	n_i/n	…	n_m/n

Статистические данные, представленные в виде статистического ряда называются ***группированными***.

Данные можно группировать не только в виде статистического ряда, но и в виде ***интервального статистического ряда.***

Для построения интервального статистического ряда все выборочные значения разбивают на несколько интервалов. Как правило, интервалы выбирают равной длины. Для определения количества интервалов можно использовать следующую оценочную формулу (формула Стерджеса)

$$m = \log_2 n + 1 = 3{,}32 \ln \mathrm{n} + 1. \quad (1.6)$$

Некоторые другие формулы для определения количества интервалов будут приведены в следующем разделе.

Каждый интервал содержит определенные число элементов выборки.

Так, интервал $J_j = [x_i, x_{i+1}]$ содержит n_j элементов выборки, значения которых удовлетворяют условиям $x_i \leq x_j < x_{i+1}$.

Разности

$$\Delta = x_{i+1} - x_i , \quad (1.7)$$

равные длинам интервалов, называют ***интервальными разностями***.

Разность между наибольшим и наименьшим значением выборки называют ***размахом вариации***.

Полученные значения записывают в виде таблицы (табл. 1.2), причем допускается в верхней строчке таблицы указывать либо интервал, либо его среднее значение.

Таблица 1.2

Интервальный статистический ряд

J_j	J_1	…	J_j	…	J_m
n_j	n_1	…	n_j	…	n_m
n_j/n	n_1/n	…	n_j/n	…	n_m/n

Приведем пример предварительной обработки данных. Пусть в результате измерений получены слудующие значения некоторой физической величины (то есть, получена следующая выборка):

2; 3; 2; 4; 5; 2; 3; 4; 2; 5; 3; 4; 2; 4; 3; 4; 5; 3; 2; 3; 4; 3; 2; 3; 4; 3; 2; 3; 4; 3; 3; 3; 3; 3; 3.

Объем выборки n = 35. Построим вариационный ряд выборки. Первый (наименьший) элемент вариационного ряда $x_1 = 2$, последний (наибольший) элемент вариационного ряда $x_4 = 5$. Вариационный ряд выглядит следующим образом:

2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5.

Статистический ряд полученной выборки приведен в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Статистический ряд выборки

$x_{(i)}$	2	3	4	5
n_i	8	16	8	3
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{3}{35}$

Таким образом, статистический ряд содержит четыре элемента.

В табл. 1.4 представлен интервальный статистический ряд распределения выборки, полученной при измерении роста 500 детей, подростков и молодых людей в возрасте до 20 лет.

Таблица 1.4

Интервальный статистический ряд выборки

$\mathbf{J}_j$	$[135; 140)$	$[140; 145)$	$[145; 150)$	$[150; 155)$	$[155; 160)$	$[160; 165)$
n_j	21	27	35	88	123	91
n_j/n	$\frac{21}{500}$	$\frac{27}{500}$	$\frac{35}{500}$	$\frac{88}{500}$	$\frac{123}{500}$	$\frac{91}{500}$
$\mathbf{J}_j$	$[165; 170)$	$[170; 175)$	$[175; 180)$	$[180; 185)$	$[185; 190)$	$[190; 195]$
n_j	60	43	7	4	0	1
n_j/n	$\frac{60}{500}$	$\frac{43}{500}$	$\frac{7}{500}$	$\frac{4}{500}$	0	$\frac{1}{500}$

Вопросы

1.1. Что такое выборочная и генеральная совокупность?

1.2. Что называется случайной выборкой и реализацией случайной выборки?

1.3. Назовите известные Вам методы произведения отбора.

1.4. В чем заключается выборочный метод?

1.5. Что такое статистика?

1.6. Сформулируйте основные задачи математической статистики.

1.7. Что называется вариационным рядом, статистическим рядом и интервальным статистическим рядом?

Литература

1. Математическая статистика: учеб. для вузов / В. Б. Горяинов, [и др.]; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI), С. 18–31.

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2003. – С. 187–191.

3. Фигурин, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие. / В. В. Фигурин, В. В. Оболонкин // – Минск: ООО «Новое знание», 2000. – С. 132–133.

4. Гусак, А. А. Высшая математика: учебник для студентов вузов. В. 2 т. Т. 2 / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – С. 395–400.

5. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – С. 212–218.

2. Характеристики генеральной и выборочной совокупностей

Выборочная, эмпирическая и теоретическая функция распределения. Эмпирическая и теоретическая плотность распределения. Гистограмма распределения. Выборочные и теоретические числовые моменты

Рассмотренное в предыдущей главе построение вариационного, статистического и интервального статистического рядов относится к методам предварительной обработки данных, необходимой для нахождения законов распределения, средних значений и дисперсий изучаемых величин. Следует также помнить, что нас интересуют в конечном итоге характеристики генеральной совокупности, но для их установления в нашем распоряжении находятся только данные экспериментов – реализации случайной выборки. Поэтому в математической статистике рассматривают теоретические характеристики (характеристики генеральной совокупности) и их статистические аналоги – эмпирические характеристики (характеристики выборки).

Выборочная, эмпирическая и теоретическая функции распределения

Рассмотрим случайную выборку $\overrightarrow{X_n}$ объема n из генеральной совокупности X. Пусть некоторая функция $n(x, \overrightarrow{X_n})$ равна числу элементов в выборке, меньших, чем x для каждой реализации $\overrightarrow{x_n}$ случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$.

Функция

$$\hat{F}(x, \overrightarrow{X_n}) = \frac{n(x, \overrightarrow{X_n})}{n} \quad (2.1)$$

называется ***выборочной функцией распределения***.

Очевидно, что при любом фиксированном x выборочная функция распределения $\hat{F}(x, \overrightarrow{X_n})$ представляет собой относительную частоту появления события $X < x$.

Различие между выборочной функцией распределения $\hat{F}(x, \overrightarrow{X_n})$ и функцией распределения генеральной совокупности $F(x)$, называемой ***теоретической функцией распределения***, заключается в том, что выборочная функция определяет относительную частоту события $X < x$, а теоретическая функция – вероятность.

Можно доказать, что последовательность случайных величин $\{\hat{F}(x, \overrightarrow{X_n})\}$ сходится по вероятности[1] к функции распределения генеральной совокупности $F(X)$ при $n \to \infty$.[2]

$$\hat{F}(x, \overrightarrow{X_n}) \underset{n \to \infty}{\overset{P}{\to}} F(X).$$

[1] Последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится по вероятности к X, если для любого $\varepsilon > 0$, выполняется равенство $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 0$. Сходимость по вероятности можно записывать следующим образом:

$$X_n \overset{P}{\to} X.$$

[2] При доказательстве необходимо воспользоваться законом больших чисел в форме теоремы Бернулли. Доказательство можно найти, например, в Математическая статистика: учеб. для вузов / В. Б. Горяинов [и др.]; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI). – С. 33.

Далее в тексте для каждой реализации $\overrightarrow{x_n}$ будем обозначать $n(x,\overrightarrow{X_n})$ как $n(x)$. Введем для реализации $\overrightarrow{x_n}$ случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$ ***эмпирическую функцию распределения***

$$F^*(x) = \frac{n(x)}{n}, \tag{2.2}$$

где n – объем выборки. Эмпирическая функция распределения кусочно постоянна и изменяется скачками в кажной точке $x_{(i)}$ ($x_{(i)}$ – i-ая варианта).

Эмпирическая функция распределения обладает всеми свойствами функции распределения, рассмотренными в курсе лекций по теории вероятностей[1].

Свойства функции распределения

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1].
2. Функция распредлеения $\mathrm{F}^*(\mathrm{x})$ – неубывающая функция.
3. Если $x_{(1)}$ – наименьшее значение выборки, а $x_{(k)}$ – наибольшее, то

$$F^*(x) = 0\,, x < x_{(1)},$$
$$F^*(x) = 1, x < x_{(k)}.$$

Таким образом, эмпирическая функция распределения, построенная с помощью выборки из генеральной совокупности, является приближением теоретической функции распределения, ее ***статистическим аналогом***.

Построим эмпирическую функцию распределения для выборки, заданной интервальным статистическим рядом, представленным в табл. 1.4.

[1] Савастенко, Н. А. Теория вероятностей. Курс лекций: учеб.-метод. пособие. / Н. А. Савастенко. Минск: МГЭУ им. А.Д. Сахарова, 2014. – 104 с.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \ x < 135 \\ \frac{21}{500}, \ 135 \le x < 140 \\ \frac{48}{500}, \ 140 \le x < 145 \\ \frac{83}{500}, \ 145 \le x < 150 \\ \frac{171}{500}, \ 150 \le x < 155 \\ \frac{294}{500}, \ 155 \le x < 160 \\ \frac{385}{500}, \ 160 \le x < 165 \\ \frac{445}{500}, \ 165 \le x < 170 \\ \frac{488}{500}, \ 170 \le x < 175 \\ \frac{495}{500}, \ 175 \le x < 180 \\ \frac{499}{500}, \ 180 \le x < 185 \\ \frac{499}{500}, \ 185 \le x < 190 \\ \frac{499}{500}, \ 190 \le x < 195 \\ \frac{500}{500} = 1, \ x > 195 \end{cases}.$$

На рис. 2.1 представлен график заданной функции распределения.

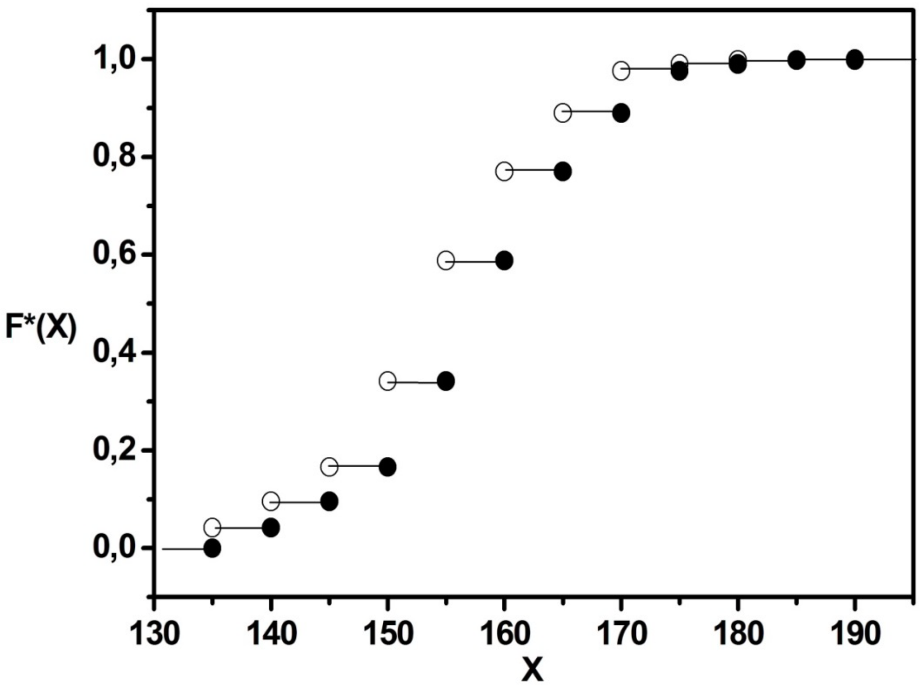

Рис 2.1. График эмпирической функции распределения для выборки, заданной интервальным статистическим рядом, представленным в табл. 1.4

Эмпирическая и теоретическая плотность распределения. Гистограмма распределения

Плотности распределения также можно поставить в соответствие статистический аналог, определенный на выборке.

Эмпирической плотностью распределения соответствующей реализации $\overrightarrow{x_n}$ случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$ объема n из генеральной совокупности X, называют функцию, которая во всех точках интервала $J_j = [x_i, x_{i+1}]$, $j = \overline{1,m}$ равна $\frac{\mathrm{n}_j}{\mathrm{n}\Delta}$, а вне интервала J_j равна 0. Здесь $\Delta = x_{i+1} - x_i$ – длина интервалов J_j, то есть интервальная разность.

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{n_j}{n\Delta}, \ x \in J_j \\ 0, \ x \notin J_j \end{cases}. \tag{2.3}$$

Если рассматриваются выборки больших объемов и (или) непрерывные статистические модели, то в качестве предварительной обработки данных удобно строить интервальный статистический ряд (табл. 1.4). Как видно из табл. 1.4, в нижней строке представлены относительные частоты $\mathrm{n_j}/\mathrm{n}$. Если мы разделим значение относительной частоты $\mathrm{n_j}/\mathrm{n}$ на значение интервальной разности $\Delta = x_{i+1} - x_i$, то получим значения плотности распределения в данном интервале $J_j = [x_i, x_{i+1}]$.

Введем случайную величину $n_i(\overrightarrow{X_n})/n$. Эта величина для каждой реализации $\overrightarrow{x_n}$ случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$ равна относительной частоте n_i/n. По закону больших чисел в форме теоремы Бернулли случайная величина $n_i(\overrightarrow{X_n})/n$ сходится по вероятности к вероятности попадания случайной величины в промежуток $J_j = [x_i, x_{i+1}]$ при $n \to \infty$

$$\frac{n_i(\overrightarrow{X_n})}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} P(X \in [x_i, x_{i+1}]) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx.$$

Здесь $p(x)$ – плотность распределения генеральной совокупности X. Если длина интервалов Δ мала, то можно полагать, что

$$\frac{n_i}{n} \approx p(\widetilde{x_i})\Delta,$$

где $\widetilde{x_i}$ – середина промежутка J_j.

Тогда

$$\frac{n_i}{n\Delta} \approx p(\widetilde{x_\iota}),$$

$$p_n(x) = p(x),$$

и функцию $\mathrm{p_n(x)}$ можно считать статистическим аналогом теоретической плотности распределения $\mathrm{p(x)}$.

Функция $\mathrm{p_n(x)}$ – кусочно-постоянная. График функции $\mathrm{p_n(x)}$ называется ***гистограммой*** (рис. 2.2).

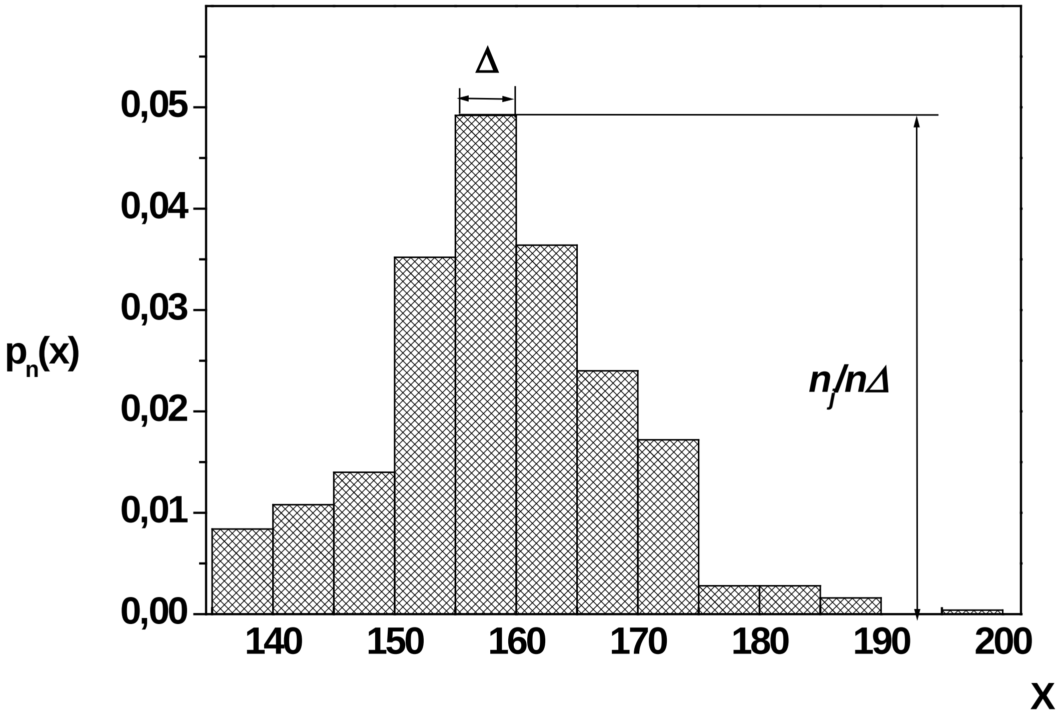

Рис 2.2. График эмпирической плотности распределения

Гистограмма представляет собой диаграмму, составленную из прямоугольников с основанием $\Delta = x_{i+1} - x_i$ и высотами $\mathrm{n_j/n\Delta}$, $j = \overline{1, m}$. Суммарная площадь всех прямогуольников равна 1.

Площадь каждого прямоугольника $\mathrm{(n_j/n)}$ – частота попадания элементов выборки в соотвествующий интервал.

Иногда вместо показанной на рисунке ***гистограммы относительных частот*** строят ***гистограмму частот***, откладывая по оси OY значения частот $\mathrm{n_j/\Delta}$.

Наряду с гистограммой часто используют другое графическое представление для функции $p_n(x)$ – полигон частот или полигон относительных частот.

Полигон частот (полигон относительных частот) – ломанная, отрезки которой соединяют отложенные по оси y значения частот (относительных частот), если по оси x отложены значения элементов выборки.

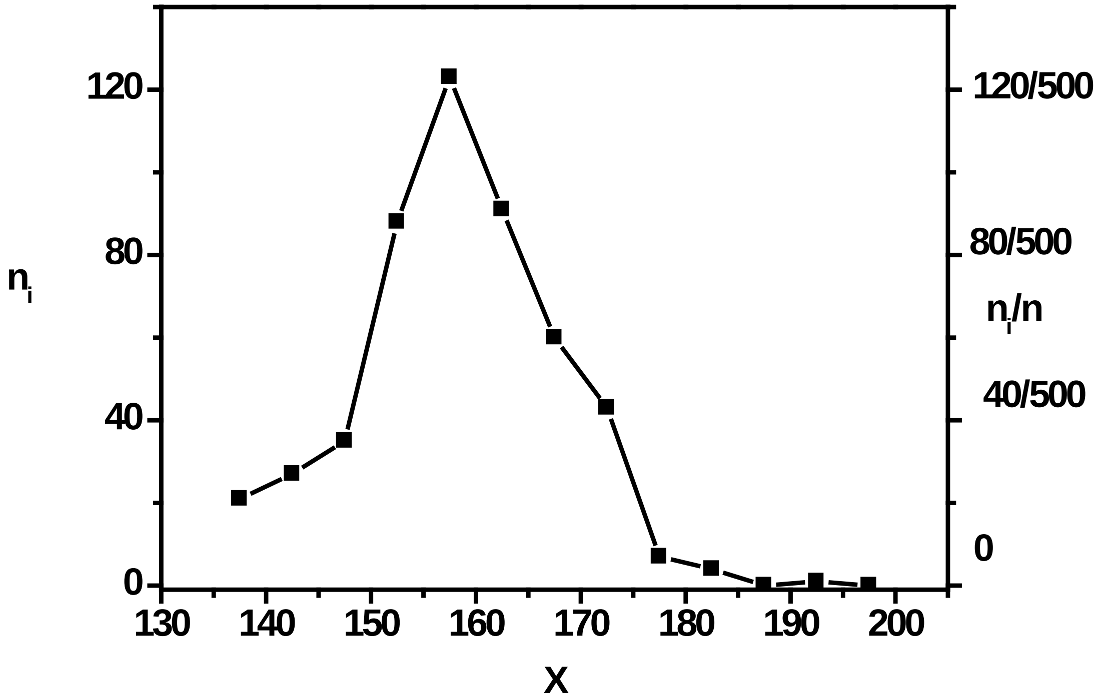

Рис 2.3. Полигон частот (n_i) и полигон относительных частот (n_i/n)

Выбор количества интервалов при потроении гистограмм существенно зависит от объема данных. В литературе приводятся несколько руководств по выбору числа интервалов.

Например, при выборе числа интервалов можно пользоваться введенной в предыдущем разделе формулой Стерджеса (формула (1.6)). Существуют также другие методы расчета:

$$m = 5\ ln\ n, \tag{2.4}$$

$$m = \sqrt{n}\ . \tag{2.5}$$

Формулы (1.6), (2.4), (2.5) следует рассматривать как оценку снизу для определения количества интервалов.

Выборочные и теоретические числовые моменты

Аналогичным образом всем числовым характеристикам генеральной совокупности (теоретическим или генеральным) можно поставить в соответствие их выборочные аналоги (статистические аналоги), определенные на выборке.

Теоретические начальный (m_k) и центральный ($\dot{\mathrm{m}}_{\mathrm{k}}$) моменты k-того порядка определяются следующим образом:

$$m_k = M(X^k), \quad (2.6)$$

$$\dot{m}_k = M(\dot{X}^k) = M((X - M(X))^k). \quad (2.7)$$

Здесь $M(X)$ – математическое ожидание, которое можно найти, зная плотность распределения непрерывной случайной величины или закон распределения дискретной случайной величины по формулам (2.8) и (2.9) соответственно.

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k, \quad (2.8)$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx. \quad (2.9)$$

Определим выборочные начальный ($\widehat{m_k}(\overrightarrow{X_n})$) и центральный ($\widehat{\dot{m}_k}(\overrightarrow{X_n})$) моменты k-того порядка следующим образом:

$$\widehat{m_k}\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad (2.10)$$

$$\widehat{\dot{m}_k}(\overrightarrow{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k. \quad (2.11)$$

Здесь $\bar{X}$ – выборочное среднее:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \quad (2.12)$$

Таким образом, выборочное среднее является выборочным начальным моментом первого порядка:

$$\bar{X} = \widehat{m_1}(\overrightarrow{X_n}).$$

Выборочная дисперсия – это выборочный центральный момент 2-го порядка:

$$\widehat{\sigma^2}(\overrightarrow{X_n}) = \widehat{\dot{m}_2}(\overrightarrow{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2. \quad (2.13)$$

Выборочное среднее квадратичное отклонение определяется как

$$\hat{\sigma}(\overrightarrow{X_n}) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}. \quad (2.14)$$

Основное свойство выборочных моментов как начальных, так и центральных состоит в том, что при увеличении объема выборки n они сходятся по вероятности к соответствующим теоретическим (генеральным) моментам.

Соответствующие величины, определенные на выборочной совокупности (реализации случайной выборки), являются статистическими аналогами теоретических величин и называются начальным и центральным моментом k-того порядка выборки, средним значением выборки, дисперсией и средним квадратичным отклонением выборки:

$$\widehat{m_k}(\overrightarrow{x_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \qquad (2.15)$$

$$\widehat{\mathring{m}_k}(\overrightarrow{x_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^k, \qquad (2.16)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \qquad (2.17)$$

$$\widehat{\sigma^2}(\overrightarrow{x_n}) = \widehat{\mathring{m}_2}(\overrightarrow{x_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2, \qquad (2.18)$$

$$\hat{\sigma}(\overrightarrow{x_n}) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \qquad (2.19)$$

Вопросы

2.1. Каким образом связаны теоретическая функция распределения и функция распределения выборки.

2.2. Дайте определение выборочной и эмпирической функции распределения.

2.3. Дайте определение выборочной и эмпирической плотности распределения.

2.4. Что такое гистограмма?

2.5. Как построить полигон частот?

2.6. Дайте определение выборочным числовым характеристикам.

2.7. Напишите выражения для вычисления числовых характеристик выборки.

Литература

1. Математическая статистика: учеб. для вузов / В. Б. Горяинов [и др.]; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI). – С. 32–53.

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2003. – С. 192–196.

3. Оценка моментов и параметров распределения

Виды оценок и их характеристики. Свойства точечных оценок. Точечные оценки моментов случайной величины: точечная оценка математического ожидания; точечная оценка дисперсии. Методы нахождения точечных оценок параметров распределения: метод моментов; метод максимального правдоподобия. Интервальные оценки. Построение интервальных оценок методом центральной статистики. Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения: построение доверительного интервала для математического ожидания генеральной совокупности, подчиняющейся закону нормального распределения с известной дисперсией; построение доверительного интервала для математического ожидания генеральной совокупности, подчиняющейся закону нормального распределения с неизвестной дисперсией; построение доверительного интервала для дисперсии (среднего квадратического отклонения) генеральной совокупности.

Виды оценок и их характеристики

Задача оценки параметров возникает при рассмотрении парамерической модели. В этом случае полагают, что закон распределения генеральной совокупности имеет вид:

$$F(x;\ \vec{\theta}).$$

То есть функция распределения генеральной совокупности известна с точностью до параметра $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, значение которого и нужно оценить по данным измерения.

В математической статистике рассматривают два вида оценок: ***точечные*** и ***интервальные***.

Задача нахождения точечной оценки формулируется следующим образом.

Рассмотрим случайную выборку $\overrightarrow{X_n}$ объема n из генеральной совокупности X, закон распределения которой задан с точностью до параметра $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. То есть задана статистическая параметрическая модель.

$$\{F(x;\ \vec{\theta});\ \vec{\theta} \in \Theta\}.$$

Необходимо найти такую статистику $\hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, выборочное значение которой $\hat{\theta} = \hat{\theta}\overrightarrow{(x_n)}$ для рассматриваемой реализации $\overrightarrow{(x_n)}$ случайной выборки можно было бы считать приближенным значением параметра $\vec{\theta}$.

Статистику $\hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, выборочное значение $\hat{\theta} = \hat{\theta}\overrightarrow{(x_n)}$ которой для любой реализации $\overrightarrow{(x_n)}$ принимают за приближенное значение параметра $\vec{\theta}$, называют ***точечной оценкой***, а выборочное значение $\hat{\theta} = \hat{\theta}\overrightarrow{(x_n)}$ – ***значением точечной оценки***.

Задача оценки параметров сводится к нахождению неизвестного параметра распределения по результатам измерений (реализации случайной выборки). В качестве оценки выбирают некоторую функцию от измеренных величин. Например, как будет показано далее, для оценки математического ожидания нормального распределения выбирается следующая статистика

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

Значение этой статистики вычисляется по измеренным значениям элементов выборки x_i. Таким образом, точечная оценка – это число.

Значение статистики, вычисленной по реализации случайной выборки, может в значительной степени отличаться от значения оцениваемого параметра. Точность точечной оценки характеризуется дисперсией.

Очевидно, что в качестве оценки может быть выбрана любая статистика. Для того, чтобы определить «оптимальную» для оцениваемого параметра статистику, необходимо, чтобы она удовлетворяла ряду условий. Так, например, оценка должна быть состоятельной. Предпочтительнее использовать эффективные оценки и т. д. Свойства точечных оценок далее будут рассмотрены подробнее. Для нахождения точечных оценок разработан ряд методов: метод моментов, метод максимального правдоподобия, графический метод, метод наименьших квадратов. Некоторые из перечисленных методов будут рассмотрены подробнее в следующих разделах.

Задача нахождения интервальной оценки формулируется следующим образом.

Рассмотрим случайную выборку $\overrightarrow{X_n}$ объема n из генеральной совокупности X, закон распределения которой задан с точностью до параметра $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. То есть задана статистическая параметрическая модель.

$$\{F(x;\ \vec{\theta});\ \vec{\theta} \in \Theta\}.$$

Необходимо найти такие статистики $\bar{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ и $\underline{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, чтобы с вероятностью γ выполнялось равенство

$$P\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}) \leq \theta \leq \bar{\theta}\overrightarrow{(X_n)}\} = \gamma. \tag{3.1}$$

В этом случае говорят об ***интервальной оценке*** для параметра $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$.

Интервал

$$(\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}), \overline{\theta(\overrightarrow{X_n})}) \tag{3.2}$$

называют ***доверительным интервалом,*** или (γ-интервалом) для параметра $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Здесь $\bar{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ и $\underline{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ – верхняя и нижняя границы интервальной оценки.

Коэффициент γ называют ***коэффициентом доверия***, ***доверительной вероятностью, или уровнем доверия***.

Интервальная оценка $(\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}), \overline{\theta(\overrightarrow{X_n})})$ – это интервал со случайными границами, который с заданной вероятностью накрывает истинное значение параметра $\vec{\theta}$. Следовательно, для различных реализаций случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$, то есть для различных элементов выборочного пространства, статистики $\bar{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ и $\underline{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ могут принимать различные значения.

В отличие от точечной оценки, интервальная оценка характеризуется двумя числами – концами интервала. Таким образом, можно сказать, что интервальные оценки являются в какой-то степени более полными и надежными характеристиками по сравнению с точечными.

В отличие от точечной оценки интервальная оценка позволяет получить вероятностную характеристику точности оценивания неизвестного параметра.

Вероятностной характеристикой точности оценивания параметра является случайная величина, которая для любой реализации x_i случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$, есть длина интервала $(\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}), \overline{\theta(\overrightarrow{X_n})})$:

$$l(\overrightarrow{X_n}) = \bar{\theta}(\overrightarrow{X_n}) - \underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}).$$

Иногда параметр оценивают только сверху или только снизу. Тогда соответствующие статистики называют односторонними нижними или верхними γ-доверительными границами.

$$P\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}) < \theta)\} = \gamma.$$

$$P\{\theta < \bar{\theta}\overrightarrow{X_n})\} = \gamma.$$

Здесь $\bar{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ – односторонняя верхняя доверительная граница, $\underline{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ – односторонняя нижняя доверительная граница.

Свойства точечных оценок

Как уже упоминалось ранее, в качестве точечной оценки параметра θ можно использовать различные статистики. Например, в качестве точечной оценки μ=M(X) можно предложить следующие статистики

$$\hat{\theta}\overrightarrow{(\mathrm{X_n})} = \bar{\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_i},$$

$$\hat{\theta}\overrightarrow{(\mathrm{X_n})} = \bar{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{X_1}+\mathrm{X_n}}{2},$$

$$\hat{\theta}\overrightarrow{(\mathrm{X_n})} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{X}_{\mathrm{n}/2}+\mathrm{X}_{\frac{\mathrm{n}}{2}+1}}{2}, & \mathrm{n} - \textit{четное} \\ \mathrm{X}_{\frac{\mathrm{n}+1}{2}}, & \mathrm{n} - \textit{нечетное} \end{cases}.$$

Какая из указанных статистик является «наилучшей» для получения точечной оценки? Для того чтобы выбрать необходимую функцию, рассмотрим, какими свойствами должна обладать статистика.

Состоятельная оценка

Рассмотрим случайную выборку $\overrightarrow{\mathrm{X_n}} = (\mathrm{X_1}, \dots, \mathrm{X_n})$ объема n генеральной совокупности X. Пусть функция распределения генеральной совокупности известна с точностью до параметра F(x;θ). То есть вид функции распределения известен, а параметр θ неизвестен. Таким образом, рассматривается параметрическая модель

$$\{F(x;\theta);\ \theta \in \Theta\}.$$

Для простоты будем полагать, что параметр θ является скаляром. Требуется построить статистику $\hat{\theta} = \hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, которую можно было бы принять в качестве точечной оценки параметра θ.

Статистику $\hat{\theta} = \hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ называют ***состоятельной*** оценкой параметра θ**,** если с ростом объема выборки n она сходится по вероятности к оцениваемому параметру θ.

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)} \xrightarrow[n \to \infty]{P} \theta.$$

Другая запись этого свойства выглядит следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\hat{\theta} - \theta\right|) < \varepsilon)=1,$$

где ε > 0. То есть почти достоверным является событие, заключающееся в том, что состоятельная оценка отклоняется по модулю от значения параметра на сколь угодно малую положительную величину, если объем выборки достаточно велик.

Свойство состоятельности – практически важное свойство, так как несостоятельная оценка бесполезна.

Несмещенная оценка

С практической точки зрения важно, чтобы выбранная в качестве оценки статистика не давала систематических погрешностей, то есть заниженных или завышенных значений оцениваемого параметра. Удовлетворяющая этому свойству статистика называется несмещенной оценкой.

Статистику $\hat{\theta} = \hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, называют ***несмещенной оценкой*** параметра θ, если ее математическое ожидание совпадает с θ для любого фиксированного n.

$$M\hat{\theta}\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \theta.$$

Оценка является ***смещенной*** с параметром смещения ***b***, если это равенство не выполняется.

$$b_n(\theta) = M\hat{\theta}\left(\overrightarrow{X_n}\right) - \theta.$$

Смещение оценки можно устранить, введя соответствующую поправку. Иногда достаточно найти ассимптотически несмещенную оценку.

Оценка $\hat{\theta} = \hat{\theta}\overrightarrow{(x_n)}$ является ***ассимптотически несмещенной,*** если при n→∞ она сходится по вероятности к своему математическому ожиданию для любого ε > 0.

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\hat{\theta}(\vec{X}_n) - M\hat{\theta}(\vec{X}_n)\right| < \varepsilon) = 1.$$

Эффективная оценка

Пусть имеются две несмещенные оценки $\hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ и $\tilde{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, такие, что для дисперсий этих оценок $D\hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ и $D\tilde{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ выполняется неравенство[1]:

$$D\hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)} \leq D\tilde{\theta}\overrightarrow{(X_n)}. \tag{3.3}$$

Очевидно, что при выборе статистики, используемой для получения оценки параметра, следует предпочесть $\hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ – статистику с меньшей дисперсией.

Если в некотором классе несмещенных оценок параметра имеется такая $\hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, что неравенство (3.3) выполняется для всех $\tilde{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, то говорят, что $\hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ является ***эффективной*** в данном классе оценок.

Таким образом, дисперсия эффективной оценки параметра в некотором классе является минимальной среди дисперсий всех оценок.

Эффективную оценку назвают также несмещенной оценкой с минимальной дисперсией, или оптимальной оценкой.

Неравенство Рао-Крамера

Пусть $\hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ – несмещенная оценка параметра θ. Тогда имеет место неравенство

$$D\hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)} \geq \frac{1}{nI(\theta)}, \tag{3.4}$$

где I(θ) – так называемое количество информации по Фишеру в одном наблюдении, которое определяется следующим образом:

$$I(\theta) = M(\frac{\partial lnp(X;\theta)}{\partial\theta})^2,$$

[1] Вычисление дисперсии случайной величины подробно рассмотрено в: Савастенко, Н. А. Теория вероятностей. Курс лекций: учеб.-метод. пособие. / Н. А. Савастенко. – Минск: МГЭУ им. А.Д. Сахарова, 2014. – 104 с.

где $p(X;\theta)$ – плотность распределения генеральной совокупности X, если рассматривается непрерывная статистическая модель или вероятность события $X = x_i$, если рассматривается дискретная статистическая модель[1].

Неравенство Рао-Крамера определяет нижнюю границу дисперсий несмещенных оценок параметра θ.

Величину

$$\mathrm{e}(\theta) = \frac{1}{\mathrm{n}\mathrm{I}(\theta)\mathrm{D}\hat{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}})}. \qquad (3.5)$$

называют ***показателем эффективности по Рао-Крамеру.***

Из неравенства Рао-Крамера следует, что $0 < \mathrm{e}(\theta) \leq 1$.

Несмещенную оценку $\hat{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ параметра θ ***называют эффективной по Рао-Крамеру***, если показатель эффективности $\mathrm{e}(\theta) = 1$.

Критерий эффективности

Равенство

$$\mathrm{D}(\hat{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}})) = \frac{1}{\mathrm{n}\mathrm{I}(\theta)}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \ln p(X;\theta)}{\partial\theta} = a(\theta)\left(\hat{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}}) - \theta\right), \qquad (3.6)$$

где $a(\theta) = 1/D(\hat{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}})$.

Достаточные статистики

[1] Количество информации по Фишеру определяет, насколько изменяется плотность распределения вероятности $p(X;\theta)$, при изменении значения параметра θ. Так, если плотность распределения не изменяется при изменении θ, то нет никакой возможности делать какие-либо заключения о значении параметра θ по измерениям (наблюдениям) случайной величины (нулевая информация о значении θ, содержащаяся в наблюдении). С другой стороны, если по полученному в результате наблюдений значению случайной величины можно достоверно (то есть, с вероятностью 1) определить значение параметра θ, то это означает, что случайная величина содержит максимально возможное количество информации о параметре. Подробное объяснение термина «количество информации по Фишеру» можно найти, например, в книге Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: справочное изд. / С. А. Айвазян и др. – М.: Финансы и статистика, 1983. – С. 254–257.

Оценка является ***достаточной статистикой***, если вся полученная из выборки информация относительно параметра содержится в оценке. Если известна достаточная статистика, то никакая другая статистика, вычисленная по той же выборке, не может дать дополнительную информацию о параметре.

Рассмотрим случайную выборку $\overrightarrow{\mathrm{X_n}} = (\mathrm{X_1}, \dots, \mathrm{X_n})$ объема n генеральной совокупности X. Пусть функция распределения генеральной совокупности известна с точностью до параметра F(x;θ). То есть вид функции распределения известен, а параметр θ неизвестен. Таким образом, рассматривается параметрическая модель

$$\{F(x;\theta);\ \theta \in \Theta\}.$$

Рассмотрим некоторую статистику $T = T(\overrightarrow{\mathrm{X_n}})$. Пусть будет известна не вся выборка (реализация случайной выборки), а только значение статистики, полученное по результатам этой выборки $T(\overrightarrow{x_\mathrm{n}}) = t$.

Введем условную функцию распределения случайной выборки $\overrightarrow{\mathrm{X_n}}$ при условии, что $T(\overrightarrow{x_\mathrm{n}}) = t$.

$$F_{\overrightarrow{\mathrm{X_n}}}(x_1, \dots, x_n / T(\overrightarrow{x_\mathrm{n}}) = t).$$

Статистика $T(\overrightarrow{x_\mathrm{n}})$ называется ***достаточной***, для параметра θ, если условная функция распределения случайной выборки $\overrightarrow{\mathrm{X_n}}$ $F_{\overrightarrow{\mathrm{X_n}}}(x_1, \dots, x_n / T(\overrightarrow{x_\mathrm{n}}) = t)$ не зависит от параметра θ для любого t.

Из определения достаточной статистики следует, что для фиксированного значения t при изменении параметра θ, условное распределение $F_{\overrightarrow{\mathrm{X_n}}}(x_1, \dots, x_n / T(\overrightarrow{x_\mathrm{n}}) = t)$ не изменится. То есть значение статистики t дает полную информацию о параметре θ.

Точечные оценки моментов случайной величины

Точечная оценка математического ожидания

Статистика

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X_i} \tag{3.7}$$

(выборочная средняя) является ***оценкой математического ожидания*** $\theta = M(X) = \mu$ генеральной совокупности X с конечной дисперсией. Выборочная средняя является несмещенной, состоятельной и эффективной в классе всех линейных оценок, т. е. оценок вида

$$\hat{\theta}(\overrightarrow{X_n}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

При рассмотрении свойств выборочного среднего необходимо помнить следующее.

Элементы X_i, $i = 1,\ n$ случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$ являются независимыми случайными величинами и распредлены так же, как и генеральная совокупность X. Следовательно,

$$M(X_i) = M(X) = \mu, D(X_i) = D(X) = \sigma^2, i = \overline{1, n}.$$

Несмещенность оценки. Учитывая свойства математического ожидания, получаем

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu .$$

Это доказывает несмещенность оценки $\bar{X}$.

Состоятельность оценки. Поскольку последовательность $X_1,\ldots,X_n$ состоит из независимых одинаково распределенных величин с конечной дисперсией, то в силу закона больших чисел в форме Чебышева для любого ε

$$P(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{P} 1 .$$

То есть оценка сходится по вероятности к оцениваемому параметру. Таким образом, оценка состоятельна.

Эффективность оценки. Докажем, что

$$D(\tilde{\theta}(\overrightarrow{X_n})) = D(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(\alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 D(X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2$$

достигает своего минимального значения при $\alpha_i = 1/n$, то есть, когда $\tilde{\theta}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X}$. Таким образом мы докажем, что оценка $\tilde{\theta}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X}$ является эффективной оценкой.

Отыщем условный минимум функции

$$g(\alpha_1, \dots \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i{}^2$$

при наложении ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Составим функцию Лагранжа с множителем Лагранжа λ

$$L(\alpha_1, \dots \alpha_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \lambda(\sum_{i=1}^{n} a_i - 1).$$

Необходимые условия существования условного экстремума выражаются следующим образом

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i + \lambda = 0, i = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} a_i - 1 = 0 \end{cases}.$$

Решив систему (для решения надо просуммировать первые уравнения), получаем $\lambda = -2/n$, $\alpha_i = 1/n$, $i = 1,n$. То есть при этих значениях аргуметна функция g $(\alpha_{1, \dots} \alpha_n)$ имеет условный минимум. Что и требовалось доказать.

Оценка дисперсии

Статистика

$$\hat{\sigma}^2(\overrightarrow{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 , \tag{3.8}$$

(выборочная дисперсия) является ***оценкой дисперсии***

$$\theta = D(X) = \sigma^2$$

генеральной совокупности X. Здесь $\overrightarrow{X_n}$ – случайная выборка объема n из генеральной совокупности X. Выборочная дисперсия является смещенной состоятельной ***оценкой дисперсии генеральной совокупности.***

Смещенность оценки. Действительно, учитывая свойство выборочной дисперсии, получим

$$\hat{\sigma}^2(\overrightarrow{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 ,$$

$$\hat{\sigma}^2\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((X_i - \mu) - \overline{(X-\mu)})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2\overline{(X} - \mu)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2\overline{(X} - \mu)^2 + \frac{1}{n}n\,(\bar{X} - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - \overline{(X} - \mu)^2 .$$

С учетом свойств математического ожидания получим

$$\text{M}\hat{\sigma}^2\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \frac{1}{n}M\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - M\,\overline{(X} - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(X_i) - D(\overline{X}) = \frac{1}{n}n\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(n-1)}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2.$$

Что и требовалось доказать.

Состоятельность оценки. Примем без доказательства состоятельность оценки выборочной дисперсии.[1]

Замечание. Статистика

$$\mathrm{S}^2\left(\overrightarrow{\mathrm{X_n}}\right) = \frac{1}{\mathrm{n}-1}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X_i} - \overline{\mathrm{X}})^2 \qquad (3.9)$$

(исправленная выборочная дисперсия) является несмещенной и состоятельной ***оценкой дисперсии генеральной совокупности.***

Таким образом, в качестве ***статистических оценок математического ожидания и дисперсии*** берут ***выборочное среднее и выборочную дисперсию (исправленную выборочную дисперсию).***

Можно доказать, что ***выборочные начальные и центральные моменты*** являются ***состоятельными оценками соответствующих моментов генеральной совокупности***, если только они существуют. Оценки являются ***смещенными*** за исключением $\bar{X}$.

[1] Доказательство состоятельности оценки проводится на основании второго неравенства Чебышева. Доказательство для генеральной совокупности, имеющей моменты до четвертого порядка включительно и нулевое математическое ожидание приведено в Математическая статистика: учеб. для вузов / В. Б. Горяинов [и др.]; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI). – С. 60–63.

Методы нахождения точечных оценок параметров распределения

Рассмотрим два метода нахождения точечных оценок параметров распредения генеральной совокупности.

Метод моментов

Метод моментов был предложен английским статистиком Пирсоном и является одним из первых разработанных методов оценивания. Он заключается в слудеющем.

Пусть имеется случайная выборка $\overrightarrow{X_n} = (X_{1,\dots,}X_n)$ объема n генеральной совокупности X. Ее распределение $p(x;\vec{\theta})$ известно с точностью до вектора параметров $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Необходимо найти оценку параметра $\vec{\theta}$ по случайной выборке $\overrightarrow{X_n}$.

Полагаем, что у случайной величины X имеются первые r моментов: $m_k = M(X^k)$, k=1,r. Очевидно, что моменты являются функциями параметра $m_k = m_k(\vec{\theta})$.

Рассмотрим выборочные моменты $\widehat{m}_k(\overrightarrow{X_n})$. Выборочные моменты являются состоятельными оценками моментов генеральной совокупности. При большом объеме выборки генеральные моменты m_k могут быть заменены выборочными.

В ***методе моментов*** в качестве точечной оценки $\widehat{\theta}\overrightarrow{(X_n)} = (\widehat{\theta}_1\overrightarrow{(X_n)}, \dots \widehat{\theta}_n\overrightarrow{(X_n)})$ вектора параметров $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ берут статистику, значение которой для любой реализации $\overrightarrow{(x_n)}$ случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$ получают как решение системы уравнений

$$\widehat{m}_k = m_k\left(\vec{\theta}\right), k = \overline{1, r}. \qquad (3.10)$$

Таким образом, выборочные моменты приравнивают к теоретическим моментам, зависящим от искомого параметра.

Эти уравнения во многих случаях просты и не вызывают вычислительных сложностей.

Рассмотрим несколько примеров.

Предположим, случайная величина имеет распределение

$$p(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}.$$

По значениям случайной выборки x_i необходимо найти оценку параметра распределения σ.

Вычислим начальный теоретический момент первого порядка:

$$m_1\ (\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + t) e^{-\frac{t^2}{2}} d\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mu\ .$$

Выборочный начальный момент первого порядка – это, как было показано ранее, выборочное среднее

$$\widehat{m}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Приравнивают теоретический (зависящий от параметра) момент и выборочный и находят значения параметра:

$$m_1 = \widehat{m}_1,$$

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Метод максимального правдоподобия

Метод предложен Фишером и является наиболее универсальным. Вычисления на практике бывают довольно сложными и требуют применения численных методов.

Пусть имеется случайная выборка $\overrightarrow{X_n} = (X_{1,\dots,}X_n)$ генеральной совокупности X. Ее распределение $\mathrm{p}(\mathrm{x}; \vec{\theta})$ известно с точностью до вектора параметров $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_\mathrm{n})$. Необходимо найти оценку параметра $\vec{\theta}$ по случайной выборке $\overrightarrow{X_n}$.

Введем так называемую функцию правдоподобия

$$L(X_1, X_n; \vec{\theta}) = p(x_1; \theta) \dots p(x_n; \vec{\theta}),$$

$$L(X_1, X_n; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \vec{\theta}). \qquad (3.11)$$

Здесь $p(x; \theta)$ – плотность распределения случайной величины (в случае непрерывной случайной величины) или вероятность события X = x (в случае дискретной случайной величины).

Оценкой максимального правдоподобия параметра θ называют статистику $\hat{\vec{\theta}}(\overrightarrow{X_n})$, значение $\hat{\vec{\theta}}$ которой для любой выборки $\overrightarrow{x_n}$ удовлетворяет условию

$$L\left(\overrightarrow{x_n};\ \hat{\vec{\theta}}\right) = \max_{\vec{\theta}} L(\overrightarrow{x_n};\ \vec{\theta}) \quad . \qquad (3.12)$$

То есть такое значение $\hat{\vec{\theta}}$, для которого функция правдоподобия как функция аргумента $\vec{\theta}$ достигает максимума.

Если функция правдоподобия дифференцируема, то значения точечной оценки максимального правдоподобия для скалярного параметра удовлетворяют уравнению (необходимое условие экстремума)

$$\frac{\partial L(\overrightarrow{x_n};\theta)}{\partial\theta}=0. \tag{3.13}$$

Или, так как при логарифмировании точки экстремума остаются те же, а уравнение, как правило, упрощается

$$\frac{\partial lnL(\overrightarrow{x_n};\theta)}{\partial\theta}=0. \tag{3.14}$$

Если распределение случайной величины зависит от вектора случайных параметров, то последнее уравнение распадается на систему уравнений

$$\frac{\partial lnL(\overrightarrow{x_n};\theta)}{\partial\theta_k}=0, k=\overline{1,r}. \tag{3.15}$$

Уравнения (3.12)–(3.15) называются ***уравнениями правдоподобия.***

Основные свойства оценок метода максимального правдоподобия приведем без доказательства.

1. Если существует эффективная оценка для скалярного параметра, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение, которое является выборочным значением этой оценки.

2. Если существует достаточная статистика параметра, то решения уравнения правдоподобия являются функциями от выборочного значения этой статистики.

3. Уравнение правдоподобия имеет решение, которое является выборочным значением состоятельной оценки параметра.

Оценки, полученные методом максимального правдоподобия, могут быть смещенными и неэффективными. Смещенность можно устранить. Во многих случаях неэффективные оценки являются ассимптотически эффективными.

Рассмотрим пример.

Для общей нормальной модели необходимо найти оценку вектора параметров $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2)$ методом максимального правдоподобия.

Функция правдоподобия для нормальной модели имеет вид

$$L(\vec{X}_n;\ \theta_1,\theta_2) = \frac{1}{(\theta_2\sqrt{2\pi})^n}\exp(-\frac{1}{2{\theta^2}_2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2),$$

$$lnL(\vec{x}_n;\ \theta_1,\theta_2) = -nln\sqrt{2\pi} - nln\theta_2\ -\frac{1}{2{\theta^2}_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2.$$

Параметры находим из решения системы уравнений.

$$\begin{cases} \frac{\partial lnL(\overrightarrow{x_n};\theta)}{\partial\theta_1} = \frac{1}{{\theta^2}_2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1) = 0 \\ \frac{\partial lnL(\overrightarrow{x_n};\theta)}{\partial\theta_2} = -\frac{n}{\theta_2} + \frac{1}{{\theta^3}_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2 = 0 \end{cases}.$$

Решая систему, получаем

$$\widehat{\theta_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\widehat{\theta_2^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

Следовательно, оценками максимального правдоподобия для математического ожидания $\theta_1 = M(X)$ и дисперсии $\theta_2^2 = D(X)$ случайной величины, распределенной по нормальному закону, являются выборочное среднее и выборочная дисперсия.

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{X_i},$$

$$\widehat{\sigma}^2(\overrightarrow{\mathrm{X_n}}) = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X_i}-\overline{\mathrm{X}})^2.$$

Рассмотрим еще один пример.

Пусть наблюдаемая в эксперименте величина X – время работы прибора до отказа – имеет экспоненциальное распределение с плотностью

$$\mathrm{p}(\mathrm{x},\lambda) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x < 0\end{cases}.$$

Здесь λ – неизвестный параметр. Применяя метод максимального правдоподобия, необходимо найти точечную оценку для параметра λ.

Пусть $\overrightarrow{x_n} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – любая реализация случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$ из генеральной совокупности X.

В рассматриваемом случае функция правдоподобия

$$\mathrm{L}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\dots,\mathrm{x}_n;\lambda) =$$
$$= \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{p}(\vec{\mathrm{X}}_\mathrm{n};\lambda) = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n\exp(-\lambda\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{x_i}),$$

$$\ln\mathrm{L}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\dots,\mathrm{x}_n;\lambda) = \mathrm{n}\ln\lambda - \lambda\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{x_i}.$$

Уравнения правдоподобия имеют вид:

$$\frac{\partial \ln \quad L(x_1,x_2,\dots,x_n;\lambda)}{\partial\lambda} = n/\lambda - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

$$\hat{\lambda} = (1/n \sum_{i=1}^{n} x_i)^{-1}.$$

Точечной оценкой неизвестного параметра λ является величина

$$\hat{\lambda}\overrightarrow{(X_n)} = 1/\overline{X}.$$

Полученный ответ согласуется с тем, что $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, а оценкой математического ожидания $M(X) = \mu$ является выборочное среднее:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Интервальные оценки

Как уже упоминалось ранее, задача нахождения интервальной оценки формулируется следующим образом.

Рассмотрим случайную выборку $\overrightarrow{X_n}$ объема n из генеральной совокупности X, закон распределения которой задан с точностью до параметра $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. То есть задана статистическая параметрическая модель.

$$\{F(x;\ \vec{\theta});\ \vec{\theta} \in \Theta\}.$$

Необходимо найти такие статистики $\bar{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ и $\underline{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, чтобы с вероятностью γ выполнялось равенство

$$P\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}) \le \theta \le \bar{\theta}\overrightarrow{(X_n)}\} = \gamma.$$

В этом случае говорят об ***интервальной оценке*** для параметра $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$.

Интервал

$$(\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}), \overline{\theta(\overrightarrow{X_n})})\ .$$

называют ***доверительным интервалом,*** или (γ-интервалом), для параметра $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Здесь $\bar{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ и $\underline{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ – верхняя и нижняя границы интервальной оценки.

Коэффициент γ называют ***коэффициентом доверия***, ***доверительной вероятностью,*** или ***уровнем доверия***.

Интервальная оценка $(\boldsymbol{\underline{\theta}}(\overrightarrow{\boldsymbol{X_n}}), \boldsymbol{\overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})})$ – это интервал со случайными границами, который с заданной вероятностью накрывает истинное значение параметра $\vec{\theta}$. Следовательно, для различных реализаций случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$, то есть для различных элементов выборочного пространства, статистики $\overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ и $\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ могут принимать различные значения.

Иногда параметр оценивают только сверху или только снизу. Тогда соответствующие статистики называют односторонними нижними или верхними γ-доверительными границами.

$$P\{\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n}) < \theta)\} = \gamma,$$

$$P\{\theta < \overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})\} = \gamma.$$

Здесь $\overline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ – односторонняя верхняя доверительная граница, $\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ – односторонняя нижняя доверительная граница.

Построение доверительных интервалов методом центральной статистики

Рассмотрим случайную выборку объема n $\overrightarrow{X_n}$ с функцией распределния $F(x;\theta)$, зависящей от неизвестного параметра θ. Один из наиболее распространенных методов построения интервальных оценок связан с использованием ***центральной статистики*** – любой статистики $T(\overrightarrow{X_n};\theta)$, функция распределения которой

$$F_t(t) = P\{T(\overrightarrow{X_n};\theta) \ < t\}$$

не зависит от параметра θ.

При построении интервальной оценки будем предполагать следующее:

1. Функция распределения $F_t(t)$ непрерывна и возрастающая.
2. Заданы такие положительные коэффициенты α и β, что γ=1 – α – β.
3. Для любой выборки $\overrightarrow{x_n}$ из генеральной совокупности X функция $T(\overrightarrow{X_n};\theta)$ является непрерывной и возрастающей (убывающей) функцией параметра θ.

Из допущения 1 следует, что для любого q из интервала (0,1) существует единственный корень h_q уравнения $F_t(t)=q$, который является квантилью уровня q функции $F_t(t)=q$ распределения случайной величины $T(\overrightarrow{X_n};\theta)$.

Принимая во внимание допущение 2, получим

$$P\{h_\alpha < T(\overrightarrow{X_n};\theta) < h_{1-\beta}\} = F_t(h_{1-\beta}) - F_t(h_\alpha) = 1-\beta-\alpha = \gamma \tag{3.16}$$

Равенство (3.16) справедливо для любого значения параметра θ, так как $T(\overrightarrow{X_n};\theta)$ – центральная статистика и ее функция распределения $F_t(t)$ не зависит от параметра θ.

Для построения интервальной оценки необходимо уравнение (3.14) преобразовать в выражение вида

$$\mathrm{P}\{\underline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}}) \le \theta \le \bar{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}})\} = \gamma.$$

Положим, что $T(\overrightarrow{X_n};\theta)$ – возрастающая функция, тогда по допущению 3, для кажой выборки $\overrightarrow{x_n}$ уравнения $T(\overrightarrow{X_n};\theta) = h_\alpha$ и $T(\overrightarrow{X_n};\theta) = h_{1-\beta}$ имеют единственные решения $\underline{\theta}(\overrightarrow{X_n})$ и $\bar{\theta}(\overrightarrow{X_n})$.

При этом неравенства

$$h_\alpha < T(\overrightarrow{X_n};\theta) < h_{1-\beta},\ \underline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}}) \le \theta \le \bar{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}})$$

являются равносильными, так как они выполняются или не выполняются одновременно для любой выборки.

Таким образом,

$$P\{h_\alpha < T(\overrightarrow{X_n};\theta) < h_{1-\beta}\} = \mathrm{P}\{\underline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}}) \le \theta \le \bar{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}})\}$$

и $(\underline{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}}), \bar{\theta}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}}))$ является искомой оценкой.

Практически построение доверительного интервала сводится к следующему:

1. Построение центральной статистики $T(\overrightarrow{X_n};\theta)$ и ее функции распределения $F_t(t)$.
2. Представление заданного коэффициета доверия в виде $\gamma=1-\alpha-\beta$.

3. Нахождение квантилей h_{α}, $h_{1-\beta}$ уровней α и $1-\beta$ функции распределения $F_t(t)$.

4. Нахождение нижней и верхней границ искомой интервальной оценки решением уравнений

$$T(\overrightarrow{X_n}; \underline{\theta}) = h_{\alpha}, \qquad T(\overrightarrow{X_n}; \overline{\theta}) = h_{1-\beta},$$

если центральная статистика является возрастающей функцией, и уравнений

$$T(\overrightarrow{X_n}; \overline{\theta}) = h_{\alpha}, \qquad T(\overrightarrow{X_n}; \underline{\theta}) = h_{1-\beta},$$

если центральная статистика является убывающей функцией.

Рассмотрим примеры построения интервальной оценки для параметров нормального распределения.

Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения

Оценка для математического ожидания при известной дисперсии

Рассмотрим случайную выборку объема n $\overrightarrow{X_n}$ из генеральной совокупности X, распределенную по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

Определим ***оценку для математического ожидания при известной дисперсии***.

Рассмотрим статистику

$$T(\overrightarrow{X_n}; \mu) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}. \qquad (3.17)$$

Можно показать, что эта статистика имеет стандартное нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$, то есть является центральной статистикой. $T(\overrightarrow{X_n}; \mu)$, определенная формулой (3.15), является функция убывающая по μ.

Соответсвующая система уравнений имеет вид:

$$\frac{\bar{x}-\underline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\beta},$$

$$\frac{\bar{x}-\overline{\mu}}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\alpha},$$

где u_q – квантиль стандрартного нормального распределения. Учитывая, что $u_{1-\alpha} = -u_\alpha$, получаем нижнюю и верхнюю границы доверительного интервала для параметра μ при $\gamma=1-\alpha-\beta$.

$$\underline{\mu} = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\beta},$$

$$\overline{\mu} = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}.$$

Доверительный интервал для математитческого ожидания с известной дисперсией записывается следующим образом:

$$(\bar{\mathrm{x}} - \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} \mathrm{u}_{1-\beta}, \bar{\mathrm{x}} + \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} \mathrm{u}_{1-\alpha}). \tag{3.18}$$

Смысл полученного соотношения: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(\bar{\mathrm{x}} - \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} \mathrm{u}_{1-\beta}, \bar{\mathrm{x}} + \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} \mathrm{u}_{1-\alpha})$ покрывает неизвестный параметр μ.

На практике часто используется формула:

$$(\bar{\mathrm{x}} - \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} \mathrm{u}_{1-\alpha/2}, \bar{\mathrm{x}} + \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} \mathrm{u}_{1-\alpha/2}), \tag{3.19}$$

где $\gamma=1-\alpha-\beta$.

Оценка для математического ожидания при неизвестной дисперсии

Определим ***оценку для математического ожидания при неизвестной дисперсии***. Рассмотрим статистику

$$T(\overrightarrow{X_n}; \mu) = \frac{\bar{X}-\mu}{S(\overrightarrow{X_n})} \sqrt{n}. \tag{3.20}$$

Здесь используется статсистика $\mathrm{S}(\overrightarrow{\mathrm{X_n}})$, квадрат которой является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии

$$\mathrm{S}^2(\overrightarrow{\mathrm{X_n}}) = \frac{1}{\mathrm{n}-1} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{X_i} - \bar{\mathrm{X}})^2.$$

Статистика $T(\overrightarrow{X_n}; \mu)$ является центральной статистикой, имеет распределение Стьюдента с n-1 степенями свободы и ее функция распределения не зависит от параметров μ и σ^2.

Плотность вероятности распределения Стьюдента определяется параметром n – объемом выборки, или числом степеней свободы $k = n - 1$.

$$S(t,n) = B_n\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2},$$

$$B_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}.$$

Распределение Стьюдента рассмотрено в разделе 5.

Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\frac{\bar{x}-\underline{\mu}}{S(\overrightarrow{X_n})}\sqrt{n} = t_{1-\beta}(n-1),$$

$$\frac{\bar{x}-\overline{\mu}}{S(\overrightarrow{X_n})}\sqrt{n} = t_{\alpha}\ (n-1),$$

где $t_q(n-1)$ – квантиль уровня q распределения Стьюдента с n – 1 степенями свободы. Учитывая, что $t_{1-\alpha\,(n-1)} = -t_{\alpha(n-1)}$ получаем нижнюю и верхнюю границы доверительного интервала для параметра μ при γ=1– α – β.

$$\underline{\mu} = \bar{x} - \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\beta}(n-1) \qquad (3.21)$$

$$\overline{\mu} = \bar{x} + \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1). \qquad (3.22)$$

Доверительный интервал для математитческого ожидания с неизвестной дисперсией

$$\left(\bar{x} - \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\beta}(n-1), \bar{x} + \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)\right). \qquad (3.23)$$

Смысл полученного соотношения: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x} - \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\beta}(n-1), \bar{x} + \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1)\right)$ покрывает неизвестный параметр μ.

На практике часто используется формула

$$\left(\bar{x} - \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1); \bar{x} + \frac{S(\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right). \qquad (3.24)$$

Оценка для среднего квадратичного отклонения

Рассмотрим случайную выборку объема n $\overrightarrow{X_n}$ из генеральной совокупности X, распределенную по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

Определим ***оценку для среднего квадратичного отклонения.*** Рассмотрим статистику

$$T\left(\overrightarrow{X_n};\sigma\right) = \frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X_n})}{\sigma^2}. \tag{3.25}$$

Статистика $T\left(\overrightarrow{X_n};\sigma\right)$ является центральной статистикой, имеет распределение «хи»-квадрат с n – 1 степенями свободы, не зависит от μ и σ^2, является убывающей функцией σ.

Соответствующая система имеет вид

$$\frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X_n})}{\underline{\sigma}^2} = {\chi^2}_{1-\beta}(n-1), \tag{3.26}$$

$$\frac{(n-1)S^2(\overrightarrow{X_n})}{\overline{\sigma}^2} = {\chi^2}_{\alpha}\ (n-1), \tag{3.27}$$

где ${\chi^2}_q(n-1)$ – квантиль уровня q распределения «хи»-квадрат с n – 1 степенями свободы. Получаем нижнюю и верхнюю границы доверительного интервала для параметра σ при γ=1– α – β.

$$\underline{\sigma} = \frac{\sqrt{(n-1)}S\ \ (\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{{\chi^2}_{1-\beta}(n-1)}} \quad , (3.28)$$

$$\overline{\sigma} = \frac{\sqrt{(n-1)}S\ \ (\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{{\chi^2}_{\alpha}(n-1)}}. \tag{3.29}$$

Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения записывается следующим образом:

$$\left(\frac{\sqrt{(n-1)}S\ \ (\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{{\chi^2}_{1-\beta}(n-1)}}, \frac{\sqrt{(n-1)}S\ \ (\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{{\chi^2}_{\alpha}(n-1)}}\right). \tag{3.30}$$

Смысл полученного соотношения: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал

$$\left(\frac{\sqrt{(n-1)}s\ \ (\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{\chi^2{}_{1-\beta}(n-1)}}, \frac{\sqrt{(n-1)}s\ \ (\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{\chi^2{}_{\alpha}(n-1)}}\right). \tag{3.31}$$

покрывает неизвестный параметр σ.

На практике используется формула:

$$\left(\frac{\sqrt{(n-1)}s\ \ (\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{\chi^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{(n-1)}s\ \ (\overrightarrow{X_n})}{\sqrt{\chi^2{}_{\alpha/2}(n-1)}}\right). \tag{3.32}$$

Вопросы

3.1. Что такое точечная оценка параметра генеральной совокупности?

3.2. Какими свойствами должна обладать статистика, которую можно выбрать в качестве точечной оценки параметров?

3.3. Что такое интервальная оценка парматетра генеральной совокупности?

3.4. Какими методами может быть найдена точечная оценка?

3.5. Какими методами может быть найдена интервальная оценка?

Литература

1. Математическая статистика: учеб.для вузов / В. Б. Горяинов, [и др.]; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI). – С. 54–158.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2003. – С. 197–237.

4. Проверка статистических гипотез

Статистические гипотезы: основные определения. Статистический критерий. Критерий Неймана-Пирсона. Проверка гипотез о математическом ожидании нормального закона с известной дисперсией. Сложные параметрические гипотезы. Построение критерия для проверки сложных параметрических гипотез. Проверка гипотез о математическом ожидании. Проверка гипотез о равенстве двух выборочных средних (о равенстве двух математических ожиданий).

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух совокупностей. Проверка непараметрических гипотез. Критерий согласия χ^2. (критерий согласия Пирсона).

Статистические гипотезы: основные определения

Проверка статистических гипотез относится к одной из часто встречающихся задач приложений математической статистики.

В предыдущих разделах были рассмотрены задачи оценки неизвестных параметров распределения и построения точечных и интервальных оценок параметров распределений. В этих задачах рассматривалась случайная выборка $\overrightarrow{X_n}$ из генеральной совокупности X объемом n. Функция распределения $F(x;\vec{\theta})$ была известна с точностью до параметра $\vec{\theta}= (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i \dots, \theta_n)$. Параметр $\vec{\theta}$ не был известен.

Мы не располагали никакой априорной информацией о параметре $\vec{\theta}$.

Далее по реализации случайной выборки $\overrightarrow{x_n}$ необходимо было найти либо одну такую статистику $\hat{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, выборочное значение которой можно было принять за приближенное значение параметра (в случае нахождения точечной оценки), либо две такие статистики $\bar{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$ и $\underline{\theta}\overrightarrow{(X_n)}$, выборочные значения которых являлись границами доверительного интервала (в случае нахождения интервальной оценки).

Еще раз подчеркнем, что в обоих случаях мы не располагали никикой априорной информацией о значении параметра $\vec{\theta}$.

В задачах о проверке статистических гипотез, рассматриваем в некотором смысле обратную ситуацию.

На основании той или иной априорной информации выдвигается предположение (гипотеза) о значении параметра $\vec{\theta}$. После этого проводится эксперимент. В результате эксперимента получают реализацию $\overrightarrow{x_n}$ случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$ из генеральной совокупности X, распределение которой зависит от искомого параметра. По данным эксперимента необходимо решить, согласуется ли выдвинутое предположение (гипотеза) с экпериментальными данными, или гипотезу необходимо отклонить.

Иногда выдвигается гипотеза не о значении параметра, а о виде функции распределения.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметре известного распределения.

Приведем примеры статистическуих гипотез. Статистическая гипотеза может быть сформулирована следующим образом: «*Генеральная совокупность распределена по закону Пуассона».* Другими примерами формулировок статистических гипотез являются: *«Дисперсия нормального распределения не равна 5»*, или *«Математическое ожидание нормального распределения равно 7»*.

Нулевой (или основной) называют выдвинутую гипотезу. Нулевую гипотезу обозначают H_0. Наряду с основной гипотезой рассматривают также противоречащую ей гипотезу.

Альтернативной (конкурирующей) H_1 называют гипотезу, противоречащую нулевой.

Если по результатам экспериментальных данных принимают решение об отклонении выдвинутой нулевой гипотезы, то принимают альтернативную гипотезу.

Приведем примеры формулировок нулевых и альтернативных гипотез.

Пусть нулевая гипотеза заключается в том, что математическое ожидание генеральной совокупности, подчиняющейся закону нормального распределения с известной дисперсией, равно 10, то есть $\mu = 10$. Тогда альтернативная гипотеза может быть сформулирована как $\mu \neq 10$. Краткая запись обеих гипотез выглядит следующим образом:

$$H_0: \mu = 10;$$

$$H_1: \mu \neq 10.$$

Простой называется статистическая гипотеза, которая содержит только одно предположение. Например,

$$H: \mu = 150.$$

Сложной называется статистическая гипотеза, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез**.** Примерами сложных гипотез являются следующие гипотезы:

$$H: \mu > 150,\ H: \sigma > \sigma_0,\ H: \mu = b_i,$$

где b_i – любое число.

Статистические гипотезы относительно неизвестного параметра θ, называют ***параметрическими***.

В общем случае можно сказать, что статистическую гипотезу называют ***простой,*** если она имеет вид:

$$H: \vec{\theta} = \overrightarrow{\theta_o},$$

и статистическую гипотезу называют ***сложной***, если она имеет вид:

$$H: \vec{\theta} \in D,$$

где D – некоторое множество значений $\vec{\theta}$, состоящее более чем из одного элемента.

Если параметр является скаляром, то речь идет об ***однопараметрических гипотезах***, если вектор, то о ***многопараметрических гипотезах***.

Приведем примеры простых и сложных параметрических гипотез.

Пусть $\overrightarrow{X_n}$ случайная выборка из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием μ и извесной дисперсией σ^2.

Гипотеза $H: \mu = \mu_0$, простая, если μ_0 – некоторое заданное значение. Гипотеза $H: \mu < \mu_0$, – сложная. Гипотезы $H: \mu \neq \mu_0$ и $H: \mu_0 < \mu_1$ также являются сложными.

Статистическую гипотезу относительно вида распределения называют ***непараметрической.***

Статистический критерий

Пусть необходимо проверить простую параметрическую статистическую гипотезу относительно величины скалярного параметра θ. В данном случае будем рассматривать две простые гипотезы: нулевую H_0 и альтернативную H_1:

$$H_0: \theta = \theta_0,$$

$$H_1: \theta = \theta_1,$$

где θ_0 и θ_1 – два заданных различных значения.

По данным выборки $\overrightarrow{x_n}$ необходимо принять решение о справедливости одной из гипотез.

Критерием, или ***статистическим критерием,*** проверки гипотезы называют правило, по которому по данным выборки $\overrightarrow{x_n}$ принимается решение о справедливости или нулевой, или альтернативной гипотезы.

Критерий задают с помощью так называемого критического множества W, являющегося подмножеством выборочного пространства случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$.

Решение принимают следующим образом.

1. Если выборка $\overrightarrow{x_n}$ принадлежит множеству W, то отвергают нулевую гипотезу H_0 и принимают альтернативную гипотезу H_1.

2. Если выборка $\overrightarrow{x_n}$ не принадлежит множеству W (принадлежит дополнению $\overline{W}$ множества W до выборочного пространства), то отвергают альтернативную гипотезу H_1 и принимают нулевую гипотезу H_0.

При использовании критерия возможны следующие ошибки:

1. ***Ошибка первого рода*** заключается в том, что приняли гипотезу H_1, но верна гипотеза H_0. (То есть отвергнута правильная гипотеза).

2. ***Ошибка второоого рода*** заключается в том, что приняли гипотезу H_0, но верна гипотеза H_1. (То есть принята неправильная гипотеза).

Вероятности совершения ошибок первого и второго рода выражаются через условные вероятности.

Вероятность совершения ошибки первого рода (обозначается α) – это условная вероятность события $\overrightarrow{X_n} \in W$ при условии, что нулевая гипотеза H_0 верна

$$\alpha = P\{\overrightarrow{X_n} \in W/H_0\}. \qquad (4.1)$$

Вероятность совершения ошибки второго рода (обозначается β) – это условная вероятность события $\overrightarrow{X_n} \in \overline{W}$ при условии, что альтернативная гипотеза H_1 верна

$$\beta = P\{\overrightarrow{X_n} \in \overline{W}/H_1\}. \qquad (4.2)$$

Вероятности ошибок первого и второго рода могут быть расчитаны по формулам:

$$\alpha = \int \dots \int_W \prod_{k=1}^{n} p(t_k; \theta_o) dt_1 \dots dt_n. \qquad (4.3)$$

$$\beta = \int \dots \int_{\overline{W}} \prod_{k=1}^{n} p(t_k; \theta_1) dt_1 \dots dt_n. \qquad (4.4)$$

Вероятность ошибки первого рода α называют ***уровнем значимости критерия.*** Чем меньше α, тем меньше вероятность отвергнуть верную нулевую гипотезу. Допустимую ошибку α обычно задают заранее и выбирают $\alpha = 0{,}05; 0{,}01; 0{,}005; 0{,}0001$.

Величина $1 - \beta$ называется ***мощностью критерия***. Очевидно, что мощность критерия – это вероятность отвергнуть основную гипотезу H_0, когда она неверна.

Критерий Неймана-Пирсона

При построении критерия для проверки статистических гипотез, как правило, исходят из необходимости максимизации его мощности $1 - \beta$ при фиксированном уровне значимости α.

Максимизация мощности критерия означает минимизацию вероятности совершения ошибки второго рода. Таким образом, условие максимизации критерия означает увеличение вероятности отвергнуть основную гипотезу в том случае, если она неверна при фиксированном уровне значимости α.

Рассмотрим случайную выборку $\overrightarrow{X_n}$ из генеральной совокупности X объема n с плотностью распределения вероятности $p(t;\theta)$, где θ – неизвестный параметр.

Будем рассматривать две простые гипотезы: нулевую H_0 и альтернативную H_1:

$$H_0: \theta = \theta_0,$$

$$H_1: \theta = \theta_1,$$

где θ_0 и θ_1– два заданных различных значения.

Введем функцию случайной выборки $\varphi(\overrightarrow{X_n})$, называемую ***отношением правдоподобия*** – статистику, представляющую собой отношение функций правдоподобия при истинности альтернативной H_1 и основной гипотез H_0.

$$\varphi(\overrightarrow{X_n}) = \frac{L(\vec{X}_n;\theta_1)}{L(\vec{X}_n;\theta_0)}). \qquad (4.5)$$

Здесь

$$L(\vec{X}_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(\vec{X}_n;\theta).$$

Для построения оптимального (то есть наиболее мощного) при заданном уровне значимости α ***критерия Неймана-Пирсона*** в критическое множество W включают те элементы $\vec{x}_n$ выборочного пространства χ_n случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$, для которых выполняется неравенство

$$\varphi\left(\overrightarrow{X_n}\right) \geq C_\varphi. \qquad (4.6)$$

Величину C_φвыбирают из условия

$$P\left\{\varphi\left(\overrightarrow{X_n}\right) \geq C_\varphi \middle| H_0\right\} = \alpha. \qquad (4.7)$$

Условие (4.7) обеспечивает заданное значение уровня значимости α и может быть записано в виде

$$\int \dots \int_{\varphi(t_{1,\dots,}t_n) \geq C_\varphi} L\left(t_{1,\dots,}t_n; \theta_0\right) dt_1 \dots dt_n = \alpha. \qquad (4.8)$$

При этом вероятность ошибки второго рода не может быть уменьшена при заданном значении вероятности ошибки первого рода α.

Рассмотрим примеры построения критерия Неймана-Пирсона для проверки некоторых гипотез.

Построение оптимального критерия Неймана-Пирсона для параметра μ (математического ожидания) нормального закона распределения с известной дисперсией

1. Рассмотрим две простые гипотезы

$$H_0: \mu = \mu_0,$$

$$H_1: \mu = \mu_1,$$

Причем $\mu_0 < \mu_1$.

Запишем выражения для функции правдоподобия $L\left(\vec{X}_n; \theta\right)$ и отношения правдоподобия $\varphi\left(\overrightarrow{X_n}\right)$. Учитывая, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение, получаем

$$L(X_1, \dots, X_n; \mu) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right) \qquad (4.9)$$

и

$$\varphi\left(\overrightarrow{X_n}\right) = \frac{L(X_1,\dots,X_n;\mu_1)}{L(X_1,\dots,X_n;\mu_0)} = \exp\left(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \exp\left(-\frac{n(\mu_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (4.10)$$

В данном случае два неравенства

$$\varphi(\overrightarrow{x_n}) = \exp(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i)\exp(-\frac{n(\mu_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2}) \quad \geq C_\varphi \qquad (4.11)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq C \qquad (4.12)$$

равносильны, то есть они выполняются или не выполняются одновременно.

Константу C выбирают таким образом, чтобы обеспечить заданный уровнь значимости α.

$$P\{\sum_{i=1}^{n} x_i \geq C \,/\mu = \mu_0\} = \alpha. \qquad (4.13)$$

Покажем, что неравенства (4.11) и (4.12) равносильны. Преобразуем неравенство (4.11)

$$\ln(\exp(\frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i)\exp\left(-\frac{n(\mu_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)) = \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \\ -\frac{n(\mu_1-\mu_0)}{2\sigma^2} \geq lnC_\varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{\sigma^2}{\mu_1-\mu_0}\left(lnC_\varphi - \frac{n(\mu_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right) \geq \widetilde{C_\varphi}.$$

Случайная величина $\sum_{i=1}^{n} x_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $n\mu$ и дисперсией $n\sigma^2$. Поэтому условие (4.13) может быть переписано в виде

$$1 - \Phi\left(\frac{C-n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \alpha,$$

или

$$\frac{C-n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} = u_{1-\alpha},$$

где $u_{1-\alpha}$ – квантиль нормального распределения порядка $1-\alpha$.

Таким образом, константа C, задающая критическую область, определяется следующим образом:

$$C = n\mu_0 + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}. \qquad (4.14)$$

При этом вероятность совершения ошибки второго рода является минимальной при заданном значении уровня значимости критерия α.

$$\beta = P\{\sum_{i=1}^{n} x_i < C/\mu = \mu_1\} = \Phi\left(\frac{C - n\mu_1}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

2. Рассмотрим две простые гипотезы

$$H_0: \mu = \mu_0,$$

$$H_1: \mu = \mu_1,$$

Причем $\mu_0 > \mu_1$.

Используя рассуждения, приведенные выше, можно записать, что критическое множество задается следующим образом

$$\varphi(\overrightarrow{x_n}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \leq C.$$

Константу C выбирают из условия

$$P\{\sum_{i=1}^{n} x_i \leq C/\mu = \mu_0\} = \alpha. \qquad (4.15)$$

Случайная величина $\sum_{i=1}^{n} x_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $n\mu$ и дисперсией $n\sigma^2$.

Поэтому условие (4.15) может быть переписано в виде

$$\Phi\left(\frac{C - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

или

$$\frac{C - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} = u_\alpha = -u_{1-\alpha}.$$

Окончательно получим, что константа C определяется следующим образом:

$$C = n\mu_0 - u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}. \qquad (4.16)$$

Определение минимального объема выборки

В предыдущих задачах мы предполагали, что объем выборки задан. Иногда необходимо определить, каков должен быть объем выборки n^*, при котором может быть построен критерий для проверки двух простых гипотез

$$H_0: \theta = \theta_0,$$

(4.17)

$$H_1: \theta = \theta_1$$

с заданными или меньшими значениями вероятностей ошибок первого и второго рода (α и β соответственно).

В данном случае n^* определяется как минимальное целое значение n, для которого система неравенств может быть выполнена при некотором значении константы C=C*

$$\begin{cases} P\{\varphi(\overline{X_n}) \geq C_\varphi/\theta = \theta_0\} \leq \alpha \\ P\{\varphi(\overline{X_n}) \geq C_\varphi/\theta = \theta_1\} \leq \beta \end{cases}. \quad (4.18)$$

При этом соответствующий оптимальный критерий Неймана-Пирсона, обеспечивающий заданные значения α и β, будет иметь критическое множество, обеспечиваемое неравенством

$$\varphi(\overrightarrow{x_n}) \geq C_\varphi.$$

Определим минимальный объем выборки n^*, необходимый для построения критерия Неймана-Пирсона для проверки гипотез (4.17), если генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения.

Пользуясь предыдущим примером, для системы неравенств

$$\begin{cases} P\{\varphi(\overline{X_n}) \geq C_\varphi/\theta = \theta_0\} \leq \alpha \\ P\{\varphi(\overline{X_n}) \geq C_\varphi/\theta = \theta_1\} \leq \beta' \end{cases}$$

получим

$$1 - \Phi\left(\frac{C - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) \leq \alpha$$

и

$$\Phi\left(\frac{C - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) \leq \beta.$$

Для обеспечения заданных значений α и β – ошибок первого и второго рода минимально необходимый объем выборки n^* и соответствующую константу C* можно определить из системы уравнений

$$1 - \Phi\left(\frac{C - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

и

$$\Phi\left(\frac{C-n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\beta.$$

Используя квантили нормального распределения, получаем

$$\left(\frac{C-n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)=u_{1-\alpha}$$

и

$$\left(\frac{C-n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)=u_{\beta}=-u_{1-\beta}.$$

Решая системы уравнений, окончательно для минимального необходимого объема выборки n^* получаем:

$$n^*=\frac{\sigma^2\,(u_{1-\alpha}+u_{1-\beta})^2}{(\mu_1-\mu_0)^2}. \tag{4.19}$$

Сложные параметрические гипотезы. Построение критерия для проверки сложных параметрических гипотез

Рассмотрим сложные параметрические гипотезы

$$H_0\colon \theta\in\Theta_0,$$

$$H_1\colon \theta\in\Theta_1.$$

Здесь Θ_0, Θ_1 – непересекающиеся области параметра Θ.

Области Θ_0 и Θ_1, например, могут быть заданы следующим образом:

$$\Theta<\Theta_0$$

и

$$\Theta>\Theta_1,$$

причем

$$\Theta_1<\Theta\ .$$

Критерий проверки сложных гипотез, так же как и критерий проверки простых гипотез, рассмотренный выше, задается с помощью критического множества W реализаций случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$.

При рассмотрении критерия решение о том, следует ли отвергнуть или принять нулевую гипотезу принимают следующим образом:

1. Если выборка $\overrightarrow{x_n}$ принадлежит множеству W, то отвергают нулевую гипотезу H_0 и принимают альтернативную гипотезу H_1.

2. Если выборка $\overrightarrow{x_n}$ не принадлежит множеству W (принадлежит дополнению $\overline{W}$ множества W до выборочного пространства), то отвергают альтернативную гипотезу H_1 и принимают нулевую гипотезу H_0.

При использовании критерия возможны ошибки первого и второго рода.

1. ***Ошибка первого рода*** заключается в том, что приняли гипотезу H_1, но верна гипотеза H_0. (То есть, отвергнута правильная гипотеза).

2. ***Ошибка второого рода*** заключается в том, что приняли гипотезу H_0, но верна гипотеза H_1. (То есть, принята неправильная гипотеза).

Вероятности совершения ошибок первого и второго рода имеют прежний смысл и определяются выражениями:

$$\alpha(\theta) = P\{\overrightarrow{X_n} \in W/\theta\}, \theta \in \Theta_0, \qquad (4.20)$$

$$\beta(\theta) = P\{\overrightarrow{X_n} \in \overline{W}/\theta\}, \theta \in \Theta_1. \qquad (4.21)$$

В отличие от простых гипотез вероятности ошибок первого и второго рода, возникающие при проверке сложных параметрических гипотез, – это функции параметра θ (α(θ) и β(θ)).

Максимально возможное значение вероятности совершения ошибки первого рода называется ***размером критерия*** и обозначается α.

$$\alpha = \max_{\theta \in \Theta_0} \quad \alpha(\theta). \qquad (4.24)$$

Функция, определяющая значение вероятности отклонения основной гипотезы H_0 в зависимости от истинного значения параметра θ, называется ***функцией мощности критерия***

$$M(\theta) = P\{\overrightarrow{X_n} \in W|\theta\}. \qquad (4.25)$$

Если существует критерий, который при данном фиксированном размере α максимизирует функцию мощности M(θ) по всем возможным критериям одновременно при всех θ из множества Θ_1, то такой критерий называют ***равномерно наиболее мощным.*** То есть равномерно наиболее мощный критерий минимизирует вероятность совершения ошибки второго рода β(θ) при фиксированном размере α одновременно при всех θ из множества Θ_1

Равномерно наиболее мощные критерии существуют лишь для некоторых частных случаев.

Параметры $\alpha(\theta)$ и $\beta(\theta)$ связаны с функцией мощности критерия $M(\theta)$ следующим образом:

$$\alpha(\theta) = M(\theta), \theta \in \Theta_0, \tag{4.26}$$

$$\beta(\theta) = 1 - M(\theta), \theta \in \Theta_1. \tag{4.27}$$

Формально вышеприведенные равенства справедливы для всех значений параметра α, а не только для значений параметра, указанных в равенствах. Однако формально $\alpha(\theta)$ и $\beta(\theta)$ теряют свой смысл вне определенных областей.

Иногда наряду с функцией мощности используется также ***оперативная характеристика*** критерия, представляющая собой вероятность принятия основной гипотезы $\mathbf{H_0}$ при условии, что истинное значение параметра равно θ

$$s(\theta) = P\{\overrightarrow{X_n} \in \overline{W}/\theta\},$$

$$s(\theta) = 1 - M(\theta).$$

Рассмотрим некоторые примеры построения критериев для проверки сложных параметрических гипотез для нормальной модели.

Проверка гипотез о математическом ожидании

1. Рассмотрим проверку простой гипотезы против сложной относительно математического ожидания μ нормального закона распределения с извесной дисперсией σ^2.

Причем нулевую и альтернативную гипотезу сформулируем следующим образом:

$$H_0: \mu=\mu_0;$$

$$H_1: \mu>\mu_0.$$

Выберем некоторое μ_1, такое, что $\mu_1 > \mu_0$.

Для любого $\mu_1 > \mu_0$ может быть сформулирован оптимальный критерий Неймана-Пирсона. Критическая область оптимального критерия Неймана-Пирсона для фиксированного значения α для простых гипотез H_0: $\mu = \mu_0$ против H_1: $\mu = \mu_1$, рассмотренных выше, имеет вид

$$\varphi(\overrightarrow{x_n}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq C.$$

Константу выбирают C из условия

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \geq C/\mu = \mu_0\right\} = \alpha$$

или

$$1 - \Phi\left(\frac{C - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \alpha.$$

Очевидно, что константа C не зависит от μ_1. Следовательно, построенный выше критерий с критичским множеством, задаваемым следующим выражением

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq C = n\mu_0 + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}, \tag{4.28}$$

является равномерно наиболее мощным критерием размера α для данной задачи проверки простой гипотезы против сложной

$$H_0: \mu = \mu_0;$$

$$H_1: \mu > \mu_0.$$

2. Рассмотрим проверку простой гипотезы против сложной относительно математического ожидания μ нормального закона распределения с известной дисперсией σ^2.

Причем нулевую и альтернативную гипотезу сформулируем следующим образом:

$$H_0: \mu = \mu_0;$$

$$H_1: \mu < \mu_0.$$

В этом случае так же, как и в предыдущем, выберем некоторое μ_1, такое, что $\mu_1 < \mu_0$. Используем результаты построения критерия Неймана-Пирсона для соответствующего случая и выводы предыдущего примера.

Равномерно наиболее мощный критерий размера α для данной задачи задается критическим множеством, определяемым неравенством.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq C = n\mu_0 - u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}. \tag{4.29}$$

3. Рассмотрим проверку простой гипотезы против сложной относительно математического ожидания μ нормального закона распределения с известной дисперсией σ^2.

Причем нулевую и альтернативную гипотезы сформулируем следующим образом:

$$H_0: \mu = \mu_0;$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0.$$

Для задания критического множества рассмотрим статистику

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}.$$

Статистика имеет нормальное распределение. Критическое множество для проверки гипотез определяется

$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n} \geq u_{1-\alpha/2}. \qquad (4.30)$$

Здесь $u_{1-\alpha/2}$ – квантиль нормального распределения порядка $1-\alpha/2$.

4. Рассмотрим проверку простой гипотезы против сложной относительно математического ожидания μ нормального закона распределения с неизвесной дисперсией.

Нулевую и альтернативную гипотезы сформулируем следующим образом:

$$H_0: \mu = \mu_0;$$

$$H_1: \mu > \mu_0.$$

Для задания критического множества рассматриваем статистику, которая имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S(\overrightarrow{X_n})}\sqrt{n}.$$

Распределение Стьюдента рассмотрено в разделе 5.

Критерий уровня значимости α задается критическим множеством

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S(\overrightarrow{X_n})}\sqrt{n} \geq t_{1-\alpha}(n-1). \qquad (4.31)$$

Здесь $t_{1-\alpha}(n-1)$ – квантиль распределения Стьюдента порядка $1-\alpha$ и с $n-1$ степенями свободы.

5. Рассмотрим проверку простой гипотезы против сложной относительно математического ожидания μ нормального закона распределения с неизвестной дисперсией.

Нулевую и альтернативную гипотезы сформулируем следующим образом:

$$H_0\colon \mu = \mu_0;$$

$$H_1\colon \mu < \mu_0.$$

Критерий уровня значимости α задается критическим множеством, определяемым из неравенства

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S(\overrightarrow{X_n})}\sqrt{n} \le -t_{1-\alpha}(n-1). \tag{4.32}$$

Здесь, как и в предыдущем случае, $t_{1-\alpha}(n-1)$ – квантиль распределения Стьюдента порядка $1-\alpha$ и с $n-1$ степенями свободы.

6. Рассмотрим проверку простой гипотезы против сложной относительно математического ожидания μ нормального закона распределения с неизвесной дисперсией.

Нулевую и альтернативную гипотезы сформулируем следующим образом:

$$H_0\colon \mu = \mu_0;$$

$$H_1\colon \mu \ne \mu_0.$$

Критерий уровня значимости α задается критическим множеством

$$\frac{\overline{|X}-\mu_0|}{S(\overrightarrow{X_n})}\sqrt{n} \ge t_{1-\alpha/2}(n-1). \tag{4.33}$$

Здесь $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ – квантиль распределения Стьюдента порядка $1-\alpha/2$ с $n-1$ степенями свободы.

Проверка гипотез о равенстве двух выборочных средних (о равенстве математических ожиданий)

1. Рассмотрим проверку двух сложных гипотез о равенстве математических ожиданий двух нормальных распределений с извесными дисперсиями σ^2.

Пусть определены две случайные выборки $(X_1,...X_n)$, $(Y_1,...,Y_m)$ объемов m и n из генеральной совокупностей независимых случайных величин $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Рассмотрим следующие пары гипотез:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$;	H_0: $\mu_1 = \mu_2$;	H_0: $\mu_1 = \mu_2$;
H_1: $\mu_1 > \mu_2$.	H_1: $\mu_1 < \mu_2$,	H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.

Разность выборочных средних имеет нормальное распределение $\bar{X} - \bar{Y}$ с математическим ожиданием $\mu_1 - \mu_2$ и дисперсией $\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}$.

При справедливости основной гипотезы статистика имеет нормальное распределение

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}.$$

Отсюда критерии для указанных задач задаются критическими множествами:

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \geq u_{1-\alpha}, \quad (4.34) \qquad \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \leq -u_{1-\alpha}, \quad (4.35) \qquad \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \geq u_{1-\alpha/2}. \quad (4.36)$$

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух совокупностей

Рассмотрим проверку двух сложных гипотез о равенстве дисперсий двух нормальных распределений. Пусть определены две случайные выборки $(X_1,...X_n)$, $(Y_1,...,Y_m)$ объемов m и n из генеральной совокупности независимых случайных величин $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Рассмотрим следующие пары гипотез:

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $\quad$ $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$;
$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. $\quad$ $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Для построения критического множенства используем статистику, имеющую распределение Фишера со степенями свободы n – 1, m – 1:

$$\frac{S_1^2(\overrightarrow{X_n})}{S_2^2(\overrightarrow{Y_m})}.$$

Распределение Фишера – это распределение для случайной величины, являющейся отношением квадратов двух случайных величин, распределенных по «хи»-квадрат со степенями m и n:

$$p(x) = \begin{cases} C\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(1+\frac{nx}{m})^{\frac{n+m}{2}}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

где C – нормировочная константа. Распределение Фишера рассмотрено в разделе 5.

Критические множества для указанных гипотез задаются следующим образом:

$$\frac{S_1{}^2(\overrightarrow{X_n})}{S_2{}^2(\overrightarrow{Y_m})} \geq f_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1), \quad (4.37) \qquad \frac{S_1{}^2(\overrightarrow{X_n})}{S_2{}^2(\overrightarrow{Y_m})} \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1), \quad (4.38)$$

где $f_{1-\alpha}(n, m)$ – квантиль распределения Фишера.

В качестве случайной выборки $\overrightarrow{X_n}$ всегда выбирают случайную выборку с большей дисперсией, а в качестве случайной выборки $\overrightarrow{Y_m}$ выбирают выборку с меньшей дисперсией.

Критерий согласия χ^2 (критерий Пирсона)

До сих пор рассматриваемые методы проверки статистических гипотез относились к гипотезам с известным видом распределения. То есть априори были сделаны некоторые допущения о виде статистической модели. В частности, для всех рассматриваемых здесь задач предполагался нормальный закон распределения.

Само предположение о виде распределения также является статистической гипотезой, а именно, непараметрической статистической гипотезой, которая также может быть проверена на основе статистических данных. Для проверки непараметрических гипотез строят ***критерии согласия.***

Критерий Пирсона, или критерий согласия χ^2 (Хи-квадрат), – наиболее часто употребляемый критерий согласия для проверки гипотезы о законе распределения. Рассмотрим критерий согласия χ^2 для простой гипотезы.

Обозначим через X исследуемую случайную величину. Пусть требуется проверить гипотезу о том, что эта случайная величина подчиняется некоторому закону распределения F(x). Для проверки гипотезы произведем выборку, состоящую из n независимых наблюдений над случайной величиной X. По выборке построим эмпирическое распределение F*(x) исследуемой случайной величины.

Для проверки критерия вводим статистику χ^2, которую определим следующим образом:

$$\chi^2 = N\sum_{i=1}^{N}\frac{(P_i^{emp}-P_i^{theor})^2}{P_i^{theor}}. \tag{4.39}$$

$P_i^{theor} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ – предполагаемая вероятность попадания случайной величины в i-тый интервал.

$P_i^{emp} = \frac{n_i}{N}$ – соответствующее эмпирическое значение, n_i – число элементов выборки из i-того интервала, N – полный объем выборки.

X – случайная величина, следовательно заданная по (4.39) статистика χ^2 также является случайной величиной. χ^2 должна подчиняться распределению «хи-квадрат».[1]

Правило критерия. *Если полученная статистика χ^2 превосходит квантиль закона распределения χ^2 заданного уровня значимости α с l=(k-p-1) степенями свободы, где k – число наблюдений, p – число оцениваемых параметров закона распределения, то гипотеза отвергается. В противном случае гипотеза принимается на заданном уровне значимости.*

[1] Распределение «хи-квадрат» подробно рассмотрено в: Савастенко, Н. А. Теория вероятностей. Курс лекций: учеб.-метод. пособие. / Н. А. Савастенко. – Минск: МГЭУ им. А.Д. Сахарова, 2014. – 104 с.

Применение правила критерия сводится к следующему.

1. На основании выборочных данных x_1, x_2, …x_n находят оценки параметров теоретического распределения.

2. Вычисляют по теоретическому распределению вероятности попадания случайной величины в i-тые интервалы (P_i^{theor}).

3. Рассчитывают значение статистики χ^2 .

4. Определяют число степеней свободы *l*.

5. Выбирают уровень значимости, как правило, 0,05 или 0,01.

6. По таблицам находят квантиль распределния «хи-квадрат» $\chi^2_{l,\alpha}$

7. Если статистика χ^2 больше $\chi^2_{l,\alpha}$, то гипотеза отвергается при уровне значимости α.

Критерием согласия χ^2 нельзя пользоваться при небольших объемах выборки.

Вопросы

4.1. Что такое статистическая гипотеза?

4.2. Что такое параметрическая (однопараметрическая, многопараметрическая) и непараметрическая гипотезы?

4.3. Что такое статистический критерий?

4.4. Что такое критерий согласия?

4.5. Что такое простая и сложная гипотеза?

4.6. Что такое нулевая и альтернативная гипотезы?

4.7. В чем заключаются ошибки первого рода и ошибки второго рода?

Литература

1. Математическая статистика: учеб. для вузов / В. Б. Горяинов, [и др.]; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI) – С. 158–206, 214–217.

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2003. – С. 281–308, 329–332.

5. Некоторые распределения случайных величин

Приведем некоторые распределения случайных величин, используемые при построении оценок и критериев проверки статистических гипотез, и не рассматриваемые ранее в курсе лекций.[1]

Распределение Стьюдента

Плотность распределения Стьюдента определяется следующим образом:

$$S(t,n) = B_n\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2},$$

$$B_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}, \tag{5.1}$$

где n – объем выборки. Иногда задают не n, а число степеней свободы k = n – 1. $\Gamma(n)$ – гамма-функция.

Можно показать, что распределение Стьюдента имеет случайная величина, определенная как отношение стандартной нормальной случайной величины к квадратному корню из независимой случайной величины, подчиняющейся закону распределения χ^2.

Так, если X_1 – случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение (т.е. нормальное распределение с математическим ожиданием μ=0 и средним квадратическим отклонением σ = 1), и X_2 – случайная величина, подчиняющаяся закону распределения χ^2 со степенями свободы k, то случайная величина, определяемая как

$$У = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{1}{k}X_2}}$$

имеет распределение Стьюдента, плотность вероятностей которого задается формулой (5.1).

На рис. 5.1 представлено распределение Стьюдента. Можно заметить, что распределение Стьюдента имеет более протяжные «хво-

[1] Распределение «хи-квадрат» и гамма-функция ($\Gamma(n)$) рассмотрены в: Савастенко, Н. А. Теория вероятностей. Курс лекций: учеб.-метод. пособие. / Н. А. Савастенко. – Минск: МГЭУ им. А.Д. Сахарова, 2014. – 104 с.

сты», чем нормальное распределение, при $n > 30$ графики почти сливаются.

Распределение Стюдента используется в математической статистике, в частности, при построении доверительных интервалов для математического ожидания в случае неизвестной дисперсии генеральной совокупности и при проверке статистических гипотез относительно математического ожидания при условии, что генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения, причем дисперсия генеральной совокупности неизвестна.

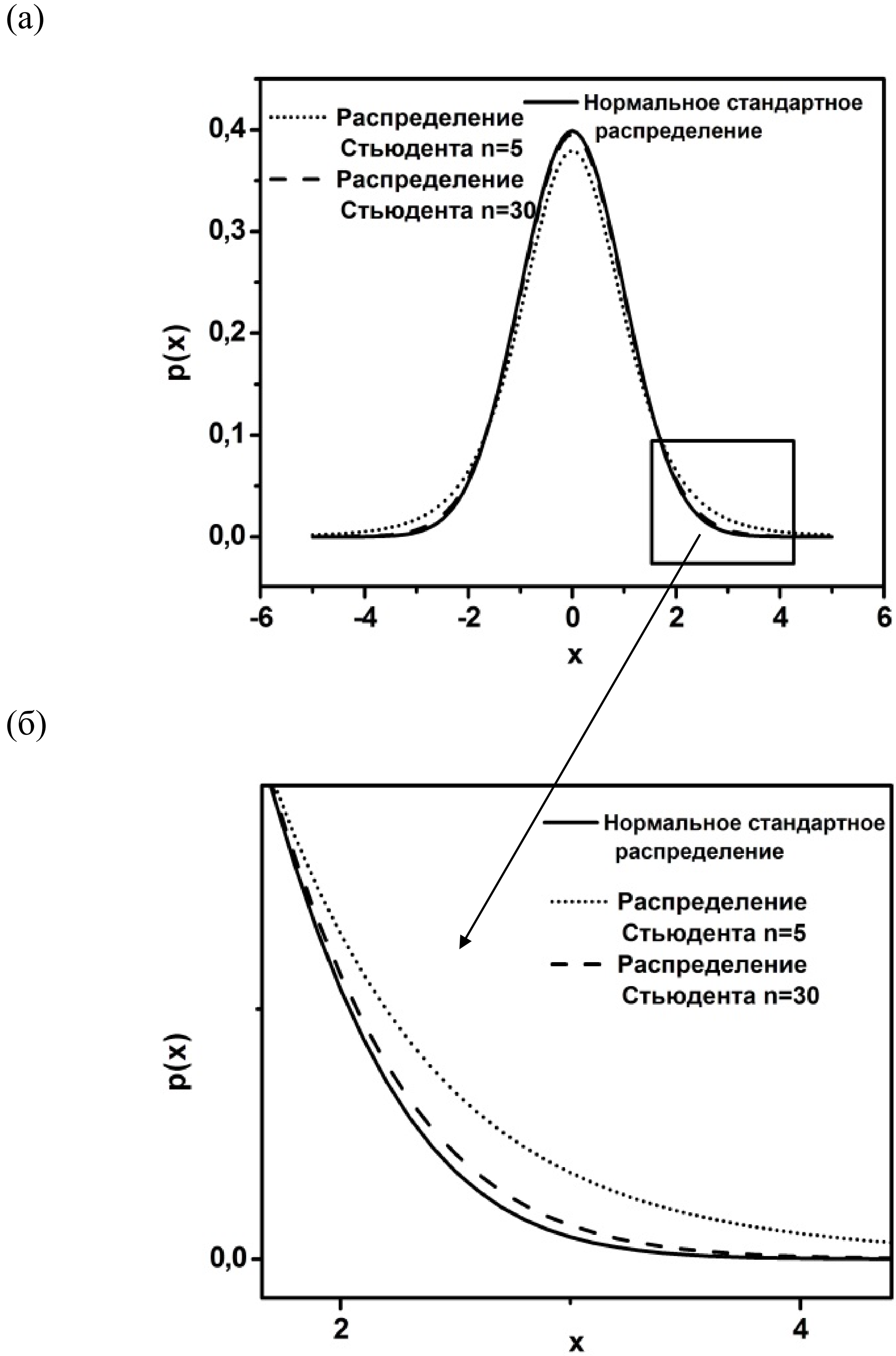

Рис 5.1. Распределение Стьюдента для различных значений n и нормальное стандартное распределение (а), увеличенный выделенный участок графика (б).

Распределение Фишера

Плотность распределения Фишера задается следующим образом:

$$F_{n,m}(x) = \begin{cases} C\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1+\frac{nx}{m}\right)^{\frac{n+m}{2}}},\ x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}, \qquad (5.2)$$

Здесь n и м – степени свободы, C – нормировочная константа, определяемая как

$$C = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}}{B(\frac{n}{2},\frac{m}{2})},$$

где $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ – бета-функция Эйлера или интеграл Эйлера I рода.

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Распределение Фишера имеет случайная величина, представляющая собой отношение двух независимых случайных величин, имеющих распределение χ^2 со степенями свободы m и n.

Так, если случайная величина X_1 имеет распределение χ^2 с числом степеней свободы n, а случайная величина X_2 имеет распределение χ^2 с числом степеней свободы m, величины X_1 и X_2 независимы, то случайная величина $X = \frac{mX_1}{nX_2}$ подчиняется закону распределения $F_{n,m}$, задаваемому формулой (5.2). Порядок индексов n и m в записи $F_{n,m}$ существенен. Первым записывается индекс, соответствующий числу степеней свободы случайной величины, находящейся в числителе (см. рис. 5.2).

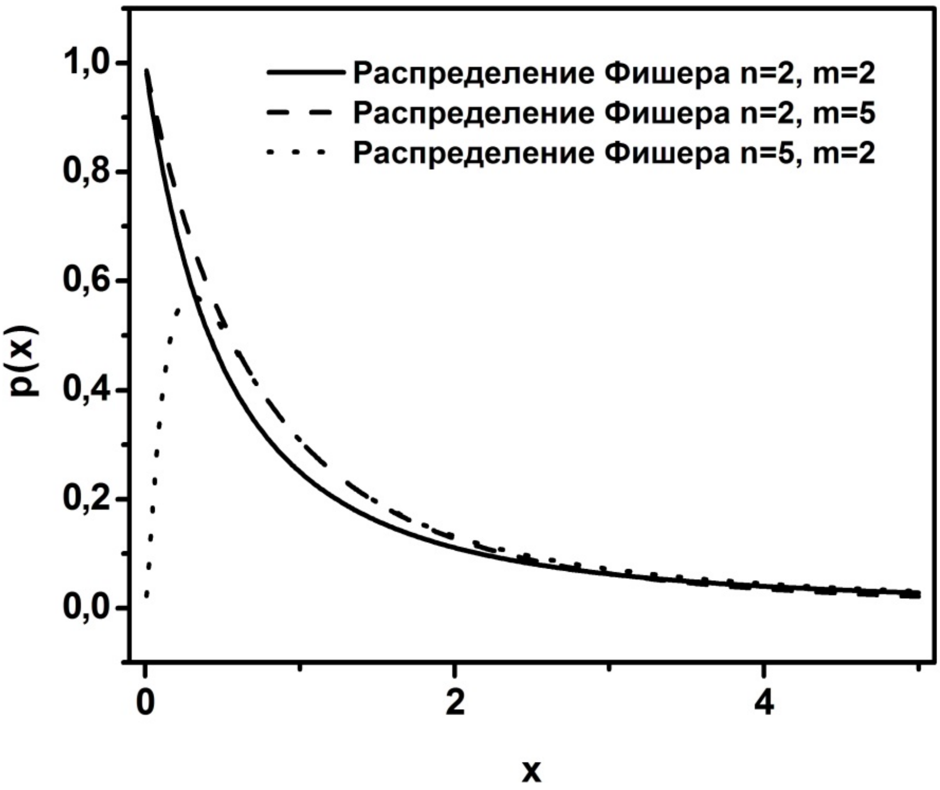

Рис 5.2. Распределение Фишера для различных значений n и m: $F_{2,2}$, $F_{2,5}$ *и* $F_{5,2}$.

Литература

1. Математическая статистика: учеб. для вузов / В. Б. Горяинов [и др.]; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI). – С. 145–152.

2. Худсон, Д. Статистика для физиков. – М.: Изд-во «Мир», 1970. – С. 80–89.

,

Учебно-методическое пособие

Савастенко Наталья Александровна

Математическая статистика.
Курс лекций

Подписано в печать 29.06.2015. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 4,76. Тираж экз.
Заказ