



Národní konference s mezinárodní účastí
INŽENÝRSKÁ MECHANIKA 2002

13. – 16. 5. 2002, Svratka, Česká republika

**POROVNÁNÍ ODEZVY VYNUCENÉHO USTÁLENÉHO KMITÁNÍ
STŘEDU HŘÍDELE ROTOROÉ SOUSTAVY S KLUZNÝM
LOŽISKEM VYCHÁZEJÍCÍ Z REYNOLDSOVY A NAVIER-
STOKESOVY ROVNICE TEKUTINY**

Petr Kučera, Eduard Malenovský, František Pochylý¹

Abstrakt

Problémem je matematické modelování kluzného ložiska na rotorové soustavě. Nový přístup vychází z Navier-Stokesovy rovnice tekutiny, podporován rovnicí kontinuity a Bézierovými tělesy. V tomto příspěvku je věnována pozornost řešení matematického modelu ložiska v kolmých a zejména v bezrozměrných souřadnicích. Do příspěvku byla zařazena modelová úloha, ve které matematicky modelujeme trajektorii středu hřídele pod kluzným ložiskem, kde je výpočet proveden v bezrozměrných souřadnicích.

Klíčová slova: Navier-Stokesova rovnice tekutiny, Bézierovo těleso, Rovnice kontinuity, Metoda Runge-Kutta, Trajektorie středu hřídele, Bezrozměrné souřadnice

1. ÚVOD

Z obecného případu pohybu tělesa v reálné tekutině se v dalším zaměřím na rovinný případ pohybu s malými vůlemi mezi vnitřním povrchem tělesa a vnějším kroužkem. Z pohledu technické aplikace jsou to zejména hydrodynamické olejové tlumiče a kluzná ložiska. V literatuře je analýza tlumičů i kluzných ložisek poměrně podrobně a často publikována. Teoretický základ téměř všech analýz vychází z Reynoldsovy rovnice, což je v podstatě pohybová rovnice tekutiny. Pohyb tekutiny v obvodovém směru, v prostoru mezi vnitřním a vnějším kroužkem, je analyzován jako jednodimenzionální proudění po přímce s délkou rovnou obvodu vnitřního kroužku. Jsou analyzovány případy krátkých a dlouhých, kavitujících a nekavitujících olejových ložisek. V případě navrhovaného řešení F. Pochylým, které je na obecnější úrovni, jsou hlavními výchozími rovnicemi Navier Stokesova pohybová rovnice tekutiny a dále rovnice kontinuity a počáteční okrajové podmínky. V dalším bude analyzován rovinný případ proudění, což odpovídá dlouhému, kavitujícímu, nebo nekavitujícímu olejovému ložisku. Nový přístup, který byl vymyšlen a rozpracován na VUT FSI ÚSTAVU MECHANIKY TĚLES, spočívá v možnosti separace pohybu tělesa a tekutiny. Vlastní

¹ Doc. Ing. Eduard Malenovský, DrSc., VUT FSI Brno, Ústav Mechaniky těles, Technická 2, 616 69 Brno, tel.: 05/41142855, e-mail: malenov@umtn.fme.vutbr.cz

Prof. Ing. Pochylý František, CSc., VUT FSI Brno, Energetický ústav, Technická 2, 616 69 Brno, tel.: 05/41142335, e-mail: pochyly@khzs.fme.vutbr.cz

Ing. Petr Kučera, VUT FSI Brno, Ústav Mechaniky těles, Technická 2, 616 69 Brno, tel.: 05/41142871, e-mail: kucera@umtn.fme.vutbr.cz

algoritmus analýzy dynamických vlastností rotorových soustav se tak skládá ze dvou samostatných kroků. Nejdříve se ve vhodném programovém prostředí, zaměřeném na analýzu tekutinových systémů, provede analýza samostatného vazebného elementu. Následně se v programovém prostředí vhodném pro analýzu dynamických vlastností rotorových soustav provede analýza rotorové soustavy se zahrnutím výsledků získaných z předchozího řešení. Vhodnou substitucí lze tedy od sebe separovat a následně i řešit pohyb tělesa a tekutiny, přičemž k analýze pohybu tekutiny je použita metoda kontrolních objemů. K analýze dynamických vlastností tekutiny bylo použito Bézierovo těleso, přičemž řešení je provedeno v křivočarých souřadnicích. Bézierovo těleso je použito pro popis geometrické konfigurace, i pro aproximaci rychlostní a tlakové funkce. Vzhledem k tomu, že se změnou polohy hřídele je prováděno i nové generování sítě, jedná se o kombinovanou ALE metodu. Přístup umožnil oddělit řešení stacionární a nestacionární části. Na základě teorie byl zpracován v jazyce MATLAB programový systém

2. ANALÝZA VYCHÁZEJÍCÍ Z NAVIER-STOKESOVI ROVNICE

V této kapitole se budu zabývat teorií, která používá pro sestavení rovnic Navier – Stokesovu rovnici, k řešení je použita metoda kontrolních objemů a pro aproximaci rychlosti a tlaku je použito Bézierovo těleso (Bézierovy polynomy). Dále pak, při řešení budeme od sebe separovat pohyb tělesa a tekutiny.

3. KLUZNÉ LOŽISKO – KOLMÉ SOUŘADNICE

3.1 Výchozí rovnice pohybu kapaliny

Pro předpoklad laminárního proudění má pohybová rovnice tekutiny

$$\rho \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \rho \left[\text{rot} \vec{c} \times \vec{c} + \frac{1}{2} \text{grad} |\vec{c}|^2 \right] + \eta \text{rot rot} \vec{c} + \text{grad} p = \vec{0} \quad (1)$$

Rovnice kontinuity

$$\rho \text{div} \vec{c} = 0 \quad (2)$$

Okrajové podmínky

$$S: \vec{c} = \vec{\omega} \times \vec{y}_S + \vec{z}^{\bullet}$$

$$\Gamma: \vec{c} = \vec{0}$$

$$P: p = 0, \left(\vec{c} = \vec{\omega} \times \vec{y}_P + \vec{z}^{\bullet} \right) \quad (3)$$

$$K: p = 0, \left(\vec{c} = \vec{\omega} \times \vec{y}_K + \vec{z}^{\bullet} \right)$$

V Einsteinově sumační symbolice se zahrnutím konvektivních členů má pohybová rovnice tekutiny

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (c_i c_j) - \eta \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

$$S: c_i = \varepsilon_{i3k} \omega y_{Sk} + z_i^{\bullet}$$

$$\Gamma: c_i = 0$$

$$P: p = 0, \left(c_i = \varepsilon_{i3k} \omega y_{Pk} + z_i^{\bullet} \right), \quad (6)$$

$$K: p = 0, \left(c_i = \varepsilon_{i3k} \omega y_{Kk} + z_i^{\bullet} \right)$$

Předpokládejme, že jak poloha středu hřídele, tak i rychlost a tlak jsou dány součtem stacionární a nestacionární části, pak pro polohu, rychlost a tlak platí

$$\begin{aligned} z_j &= z_{0j}(x_i) + v_j(x_i, t) \\ c_j &= c_{0j}(x_i) + w_j(x_i, t) \\ p &= p_0(x_i) + \sigma(x_i, t) \end{aligned}$$

Po dosazení má pohybová rovnice tvar

$$\rho \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{0i} c_{0j} + c_{0i} w_j + w_i c_{0j} + w_i w_j) - \eta \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} (c_{0i} + w_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (p_0 + \sigma) = 0 \quad (7)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_i} (c_{0i} + w_i) = 0 \quad (8)$$

$$S: c_{0i} + w_i = \varepsilon_{i3k} \omega y_{Sk} + v_i^* = \varepsilon_{i3k} \omega (x_{Sk} - z_k) + v_i^*$$

$$\Gamma: c_{0i} + w_i = 0$$

$$P: p = 0, (c_{0i} + w_i = \varepsilon_{i3k} \omega y_{Pk} + v_i^* = \varepsilon_{i3k} \omega (x_{Pk} - z_k) + v_i^*), \quad (9)$$

$$K: p = 0, (c_{0i} + w_i = \varepsilon_{i3k} \omega y_{Kk} + v_i^* = \varepsilon_{i3k} \omega (x_{Kk} - z_k) + v_i^*)$$

Porovnáním členů u stacionárních částí se obdrží soustava rovnic pro analýzu stacionárního pohybu tělesa a porovnáním členů u nestacionárních částí se obdrží soustava rovnic pro analýzu nestacionárního pohybu tělesa. Řešení je provedeno v kolmých složkách rychlosti a v křivočarých souřadnicích u^i pro $i=1, 2, 3$. Pak pro rychlosti platí $c_i = c_i(x_j, t)$ a také $x_j = x_j(u^r)$. Pak také je $\frac{\partial c_i}{\partial x_j} = \frac{\partial c_i}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x_j}$ kde derivace

$\frac{\partial c_i}{\partial x_j} = \frac{\partial c_i}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x_j}$ kde derivace

$\frac{\partial u^r}{\partial x_j}$ se stanoví ze vztahu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \frac{\partial u^1}{\partial x_2} & \frac{\partial u^1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x_1} & \frac{\partial u^2}{\partial x_2} & \frac{\partial u^2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x_1} & \frac{\partial u^3}{\partial x_2} & \frac{\partial u^3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

přičemž parciální derivace $\frac{\partial x_i}{\partial u^r}$, které tvoří složky vektorů $\vec{g}_u, \vec{g}_v, \vec{g}_w$ se stanoví derivacemi vztahů pro Bézierovo těleso, které popisují geometrii oblasti. Normálové vektory v křivočarých souřadnicích k plochám vymežujícím kontrolní objem se stanoví ze vztahu (např. pro plochu vymezenou souřadnicemi u, v) vztahem

$$\vec{n}_{uv} = \frac{\vec{g}_u \times \vec{g}_v}{|\vec{g}_u| |\vec{g}_v|}$$

3.2 Stacionární pohyb tělesa

V pevném nerotujícím s.s. je statická poloha středu hřídele, který je zatížen statickou silou (může být např. tíhová síla) dán polohou středu hřídele. Kolem tohoto středu, jehož souřadnice jsou dány vektorem \vec{z} rotuje hřídel úhlovou rychlostí ω . Pro zadávání okrajových podmínek je důležité specifikovat rychlosti tělesa a tekutiny na tomto okraji. Pro reálnou tekutinu jsou zde rychlosti tekutiny a tělesa stejné. Pro

takovou konfiguraci tuhého tělesa v pevném ss. je nutno sestavit rovnice pro tekutinu a rovnice pro rovnováhu sil působících na těleso.

3.3.1 Rovnice kapaliny pro statickou polohu

Pro analýzu pohybu tekutiny je zvolena metoda kontrolních objemů. Po integraci pohybové rovnice a rovnice kontinuity přes zvolený kontrolní objem, se využívá věta Gauss- Ostrogradského. Pro další postup je velmi výhodné eliminovat staticky rovnovážnou polohu středu hřídele z_k z okrajových podmínek. Právě zavedení této substituce přináší nový pohled na celé další řešení.

3.3.2 Transformace rovnic pohybu tekutiny

Eliminace polohy středu hřídele z okrajových podmínek lze docílit na základě následujících předpokladů

$$\begin{aligned} c_{0_i} &= \alpha_{0_i} + \alpha_{0_{ij}} z_{0_j} \\ p_0 &= \beta_0 + \beta_{0_j} z_{0_j} \end{aligned} \quad (10)$$

Uvedenou substitucí se obecně v prostoru 3D zavádí místo tří složek rychlosti a tlaku tři složky rychlosti α_{0_i} , jedna složka tlaku β_0 , devět složek $\alpha_{0_{ij}}$ a tři složky β_{0_i} . Rychlostní funkce α_{0_i} na povrchu hřídele je závislá na souřadnicích x_i okraje hřídele, jehož souřadnice se zadávají v pevném ss a úhlové rychlosti rotace. Souřadnice x_i jsou závislé na statické poloze hřídele z_{0_k} . Rychlostní funkce $\alpha_{0_{ij}}$ na povrchu hřídele je závislá pouze na úhlové rychlosti rotace hřídele. Rovnice pro stanovení α_{0_i} a β_0 mají tvar (pohybová rovnice a kontinuity jsou ve tvaru kontrolních objemů)

$$\rho \int_{\Delta S} \alpha_{0_i} \alpha_{0_j} n_j dS - \eta \int_{\Delta S} \frac{\partial \alpha_{0_i}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x_j} n_j dS + \int_{\Delta S} \beta_0 n_i dS = 0 \quad (11)$$

$$\rho \int_{\Delta S} \alpha_{0_i} n_i dS = 0$$

(16)

$$S: \alpha_{0_i} = \omega \varepsilon_{i3k} x_{Sk}$$

$$\Gamma: \alpha_{0_i} = 0$$

$$P: \beta_0 = 0, (\alpha_{0_i} = \omega \varepsilon_{i3k} x_{Pk}), \quad (12)$$

$$K: \beta_0 = 0, (\alpha_{0_i} = \omega \varepsilon_{i3k} x_{Kk})$$

Jestliže zanedbáme nelineární člen pro stacionární polohu obsahující z_{0_i} obdrží se

$$\rho \int_{\Delta S} (\alpha_{0_i} \alpha_{0_{jk}} + \alpha_{0_{ik}} \alpha_{0_j}) n_j dS - \eta \int_{\Delta S} \frac{\partial \alpha_{0_{ik}}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x_j} n_j dS + \int_{\Delta S} \beta_{0_k} n_i dS = 0 \quad (13)$$

$$\rho \int_{\Delta S} \alpha_{0_{ik}} n_i dS = 0$$

(19)

$$S: \alpha_{0_{ij}} = -\omega \varepsilon_{i3j}$$

$$\Gamma: \alpha_{0_{ij}} = 0$$

$$P: \beta_{0_i} = 0, (\alpha_{0_{ij}} = -\omega \varepsilon_{i3j}), \quad (14)$$

$$K: \beta_{0_i} = 0, (\alpha_{0_{ij}} = -\omega \varepsilon_{i3j})$$

Pro oba problémy je možné použít stejné kontrolní objemy, jejichž počet je nutno volit s ohledem na počet neznámých.

3.3.3 Řešení rovnic tekutiny

Jednou z možností řešení obou soustav je, neznámé hodnoty funkcí α_{0_i} a $\alpha_{0_{ij}}$ na hranicích explicitně vypočítat a dosadit do pohybových rovnic a rovnic kontinuity. Tento přístup byl vybrán po testování celé řady algoritmů jako nejvhodnější. Po dosazení těchto veličin do pohybové rovnice a rovnice kontinuity mají tyto v symbolickém vyjádření tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\alpha}_{0_1}^2 - \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha}_{0_1} + \mathbf{C} \boldsymbol{\beta}_{0_1} &= \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}_{0_1} &= -\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{A}_2 (\boldsymbol{\alpha}_{0_1}) \boldsymbol{\alpha}_{0_2} - \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha}_{0_2} + \mathbf{C} \boldsymbol{\beta}_{0_2} &= \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}_{0_2} &= -\mathbf{f}_4 \end{aligned} \quad (15)$$

Z prvních dvou rovnic soustavy se vypočítají řešením nelineární soustavy rovnic funkční hodnoty β_0 a α_{0_i} a z druhých dvou β_{0_j} a $\alpha_{0_{ij}}$.

3.3.4 Vliv přídavných účinků tekutiny

Na povrchu hřídele platí rovnováha mezi silovými účinky tekutiny a vnější tíhové síly

$$\eta \int_S \frac{\partial c_{0_i}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x_j} n_j dS - \int_S p_0 n_i dS = f_i \quad (16)$$

Po dosazení za rychlosti a tlak z rovnice do rovnice rovnováhy (16) se po úpravě obdrží

$$\left(\eta \int_S \frac{\partial \alpha_{0_{ik}}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x_j} n_j dS - \int_S \beta_{0_k} n_i dS \right) z_{0_k} = -\eta \int_S \frac{\partial \alpha_{0_i}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x_j} n_j dS + \int_S \beta_0 n_i dS + f_i \quad (17)$$

kteřou lze přepsat do tvaru

$$k_{0_{mj}} z_{0_j} = f_{\text{int}_m} + f_m \quad (18)$$

kde $k_{0_{mj}}$ je tenzor statické tuhosti kapalinové vrstvy a f_{int_m} je doplňková síla kapalinové vrstvy. Je možno definovat tenzor přídavných tuhostí kapalinové vrstvy

$$k_{0_{ik}} = \eta \int_S \frac{\partial \alpha_{0_{ik}}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x_j} n_j dS - \int_S \beta_{0_k} n_i dS \quad (19)$$

Statickou polohu hřídele z_{0_j} je nutno nalézt iteračním řešením. Změnou statické polohy se rovněž mění souřadnice x_i na povrchu hřídele.

4. BEZROZMĚRNÉ SOUŘADNICE

4.1 Stacionární řešení

4.1.1 Transformace do bezrozměrného tvaru

Pro transformaci do bezrozměrného tvaru (bezrozměrné veličiny jsou označeny nahoře pruhem) je nutné zavést tyto transformační vztahy:

Pro funkce rychlosti: $\alpha_0 = R_1 \omega \bar{\alpha}_0$

Pro funkce rychlosti: $\alpha_1 = \omega \bar{\alpha}_1$

Pro funkce tlaku: $\beta_0 = \frac{F_{stat}}{R_1^2} \bar{\beta}_0$

Pro funkce tlaku: $\beta_1 = \frac{F_{stat}}{R_1^3} \bar{\beta}_1$

Pro objem: $V = R_1^3 \bar{V}$

Pro plochu: $S = R_1^2 \bar{S}$

Pro délku: $x = R_1 \bar{x}$

Pro statickou polohu: $z = R_1 \bar{z}$

Pro statické zatížení: $F_{stat} = abs(F_{st}), F_{st} = F_{stat} \bar{F}_{st}$

Pro čas: $t = \frac{1}{\omega} \bar{t}$

kde R_1 je poloměr hřídele

Reynoldsovo číslo je dáno vztahem $Re_S = \frac{R_1^2 \omega}{\nu}$

kde ν je kinematická viskozita

Sommerfeldovo číslo vztahem $So_S = \frac{F_{stat}}{\eta R_1^2 \omega}$

index S značí to, že se veličiny vztahují ke statickému řešení

Vyjde se z rovnic

$$\rho \int_{\Delta S} \alpha_{0i} \alpha_{0j} n_j dS - \eta \int_{\Delta S} \frac{\partial \alpha_{0i}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x_j} n_j dS + \int_{\Delta S} \beta_0 n_i dS = 0 \quad (21)$$

$$\rho \int_{\Delta S} \alpha_{0i} n_i dS = 0 \quad (22)$$

$$S: \alpha_{0i} = \omega \varepsilon_{i3k} x_{Sk}$$

$$\Gamma: \alpha_{0i} = 0$$

$$P: \beta_0 = 0, (\alpha_{0i} = \omega \varepsilon_{i3k} x_{Pk}), \quad (23)$$

$$K: \beta_0 = 0, (\alpha_{0i} = \omega \varepsilon_{i3k} x_{Kk})$$

kteřé mají v bezrozměrném vyjádření tvar (horní pruh je vynechán)

$$Re_S \int_{\Delta \bar{S}} \bar{\alpha}_{0i} \bar{\alpha}_{0j} n_j d\bar{S} - \int_{\Delta \bar{S}} \frac{\partial \bar{\alpha}_{0i}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial \bar{x}_j} n_j d\bar{S} + So_S \int_{\Delta \bar{S}} \bar{\beta}_0 n_i d\bar{S} = 0 \quad (24)$$

$$Re_S \int_{\Delta \bar{S}} \bar{\alpha}_{0i} n_i d\bar{S} = 0 \quad (25)$$

$$S: \bar{\alpha}_{0i} = \varepsilon_{i3k} \bar{x}_{Sk}$$

$$\Gamma: \bar{\alpha}_{0i} = 0$$

$$P: \bar{\beta}_0 = 0, (\bar{\alpha}_{0i} = \varepsilon_{i3k} \bar{x}_{Pk}), \quad (26)$$

$$K: \bar{\beta}_0 = 0, (\bar{\alpha}_{0i} = \varepsilon_{i3k} \bar{x}_{Kk})$$

Vztah pro výpočet bezrozměrné polohy

$$\left(\int_{\bar{S}} \frac{\partial \bar{\alpha}_{0ik}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial \bar{x}_j} n_j d\bar{S} - \text{So}_S \int_{\bar{S}} \bar{\beta}_{0k} n_i d\bar{S} \right) \bar{z}_{0k} =$$

$$- \int_{\bar{S}} \frac{\partial \bar{\alpha}_{0i}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial \bar{x}_j} n_j d\bar{S} + \text{So}_S \int_{\bar{S}} \bar{\beta}_0 n_i d\bar{S} + \text{So}_S \bar{F}_{st}$$
(27)

odkud se po úpravě obdrží vztah pro statickou tuhost

$$k_{st_{ik}} = \eta \omega R_1 \left(\int_{\bar{S}} \frac{\partial \bar{\alpha}_{0ik}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial \bar{x}_j} n_j d\bar{S} - \text{So}_S \int_{\bar{S}} \bar{\beta}_{0k} n_i d\bar{S} \right) = \eta \omega R_1 \bar{k}_{st_{ik}}$$
(28)

Vztah pro bezrozměrnou rychlost

$$c_{0_i} = \alpha_{0_i} + \alpha_{1_j} z_j = R_1 \omega (\bar{\alpha}_{0_i} + \bar{\alpha}_{1_j} \bar{z}_j) = R_1 \omega \bar{c}_{0_i}$$

4.2 Nestacionární řešení

Pro funkce rychlosti: $\alpha = \frac{w_{ref}}{R_1} \bar{\alpha}$

Pro funkci tlaku: $\beta = \frac{p_{ref}}{R_1} \bar{\beta}$

Pro objem: $V = R_1^3 \bar{V}$

Pro plochu: $S = R_1^2 \bar{S}$

Pro délku: $x = R_1 \bar{x}$

Pro čas: $t = \frac{R_1}{w_{ref}} \bar{t}$

Pro Diracovu funkci: $\delta(t) = \frac{w_{ref}}{R_1} \bar{\delta}(t)$

kde w_{ref} je referenční rychlost

R_1 je vnitřní poloměr

p_{ref} je referenční tlak

Reynoldsovo číslo je dáno vztahem $\text{Re}_D = \frac{w_{ref} R_1}{\nu}$

kde ν je kinematická viskozita.

Sommerfeldovo číslo vztahem $\text{So}_D = \frac{p_{ref} R_1}{\eta w_{ref}}$

index D značí to, že se veličiny vztahují k nestacionárnímu (dynamickému) řešení.

Poznámka: Je výhodné volit referenční rychlost ve tvaru: $w_{ref} = R_1 \omega$

Vyjde se z rovnic

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \alpha_{ik} dV + \rho \int_{\Delta S} (c_{0i} \alpha_{jk} + \alpha_{ik} c_{0j}) n_j dS - \eta \int_{\Delta S} \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial x_j} n_j dS + \int_{\Delta S} \beta_k n_i dS = 0 \quad (29)$$

$$\rho \int_{\Delta S} \alpha_{ik} n_i dS = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} S: \alpha_{ik} &= \delta_{ik} \delta(t) \\ \Gamma: \alpha_{ik} &= 0 \\ P: \beta_k &= 0, (\alpha_{ik} = \delta_{ik} \delta(t)) \end{aligned} \quad (31)$$

$$K: \beta_k = 0, (\alpha_{ik} = \delta_{ik} \delta(t))$$

kteřé mají v bezrozměrném vyjádření tvar

$$\text{Re}_D \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \int_{\Delta \bar{V}} \bar{\alpha}_{ik} d\bar{V} + \text{Re}_S \int_{\Delta \bar{S}} (\bar{c}_{0i} \bar{\alpha}_{jk} + \bar{\alpha}_{ik} \bar{c}_{0j}) n_j d\bar{S} - \int_{\Delta \bar{S}} \frac{\partial \bar{\alpha}_{ik}}{\partial \bar{u}^r} \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial \bar{x}_j} n_j d\bar{S} + \text{So}_D \int_{\Delta \bar{S}} \bar{\beta}_k n_i d\bar{S} = 0 \quad (32)$$

$$\text{Re}_D \int_{\Delta \bar{S}} \bar{\alpha}_{ik} n_i d\bar{S} = 0 \quad (33)$$

$$\begin{aligned} S: \bar{\alpha}_{ik} &= \delta_{ik} \bar{\delta} \\ \Gamma: \bar{\alpha}_{ik} &= 0 \\ P: \bar{\beta}_k &= 0, (\bar{\alpha}_{ik} = \delta_{ik} \bar{\delta}) \\ K: \bar{\beta}_k &= 0, (\bar{\alpha}_{ik} = \delta_{ik} \bar{\delta}) \end{aligned} \quad (34)$$

4.3 Přídavné účinky

Převod z bezrozměrných veličin do veličin s rozměrem je pak dán vztahy

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \bar{A}_{ij} \\ B_{1i} &= \frac{p_{ref} R_1}{w_{ref}^2} \bar{B}_{1i} \end{aligned} \quad (35)$$

$$B_{2i} = \frac{p_{ref}}{w_{ref}} \bar{B}_{2i}$$

Přídavná hmotnost

$$m_{ij} = \frac{p_{ref} R_1^3}{w_{ref}^2} \int_{\bar{S}} \bar{B}_{1j} n_i d\bar{S} = \frac{p_{ref} R_1^3}{w_{ref}^2} \bar{m}_{ij} \quad (36)$$

Přídavné tlumení

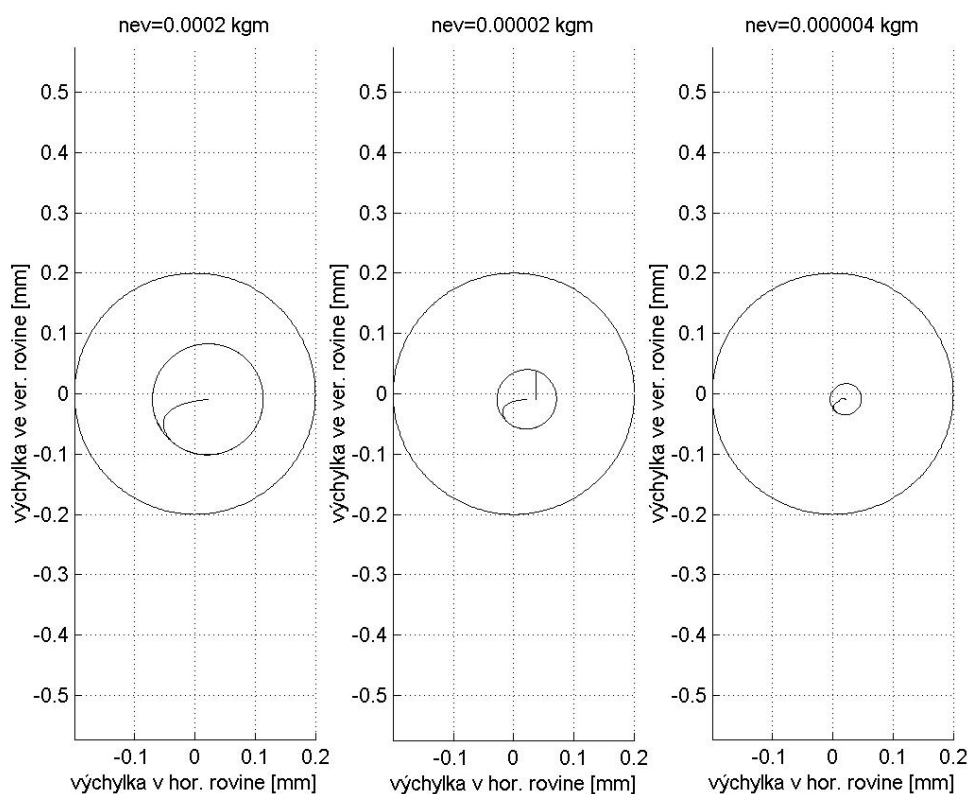
$$b_{ij} = \eta R_1 \left[\text{So}_D \int_{\bar{S}} \left(\bar{B}_{2j} - \frac{R_1 \omega}{w_{ref}} \bar{B}_{1k} \varepsilon_{k3j} \right) n_i d\bar{S} - \int_{\bar{S}} \frac{\partial \bar{A}_{ij}}{\partial \bar{u}^r} \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial \bar{x}_k} n_k d\bar{S} \right] = \eta R_1 \bar{b}_{ij} \quad (37)$$

Přídavná tuhost

$$k_{ij} = \eta R_1 \omega \left(\int_{\bar{S}} \frac{\partial \bar{A}_{im}}{\partial \bar{u}^r} \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial \bar{x}_k} n_k \varepsilon_{m3j} d\bar{S} - \text{So}_D \int_{\bar{S}} \bar{B}_{2k} \varepsilon_{k3j} n_i d\bar{S} \right) = \eta R_1 \omega \bar{k}_{ij} \quad (38)$$

5. MODELOVÁ ÚLOHA

Na základě výše uvedené teorie byla matematicky modelována trajektorie středu hřídele pod kluzným ložiskem. Buzení rotorové soustavy bylo simulováno odstředivou silou pro tři různé nevývahy. Nejprve se vypočítaly přídavné účinky tekutiny, tzn. přídavná hmotnost, tuhost a tlumení, které byly propočítány pro 5 radiálních poloh a 12 úhlů po 30 stupních nad geometrickou sítí ložiska, přičemž pro polohy mimo tyto uzlové body byla použita interpolace. Dále byla spočítána staticky rovnovážná poloha. Pro výpočet trajektorie středu hřídele byla použita metoda Runge-Kutta, kde pro každý časový krok v této metodě byla doiterována poloha středu hřídele pomocí metody Newton-Rabsonovi. Trajektorie středu hřídele pro jednotlivé nevývahy jsou zobrazeny na obr. č.1



Obr č.1 Trajektorie středu hřídele pod ložiskem pro jednotlivé nevývahy

6. ZÁVĚR

Celé řešení analýzy kluzného ložiska vycházející z Navier-Stokesovy rovnice, rovnice kontinuity a okrajových podmínek bylo v minulosti řešeno v křivočarých souřadnicích. Analýza v křivočarých souřadnicích měla tu výhodu, že normálové a tečné vektory křivočarých souřadnic v jednotlivých bodech v ložiskové vůli, měly stejný směr a smysl jako tlakové a rychlostní funkce tekutiny v ložisku. Velkou nevýhodou ovšem bylo to, že hodnoty tečných a normálových souřadnic tlakových a rychlostních fcí. v ložisku byly od sebe o několik řádů. Následek vysokého gradientu se projevil na matematické analýze a to zejména numerickou nestabilitou výpočtů. Tento problém se podařilo částečně odstranit analýzou prováděnou v kolmých souřadnicích a zejména analýzou prováděnou v bezrozměrných hodnotách. Výhoda je, že hodnoty všech veličin, použitých při výpočtu se pohybují mezi 0 a 1 a výpočty prováděné s těmito hodnotami, se jeví při matematické analýze jako numericky silně stabilní.

LITERATURA

- [1] Muszynska, A.: Rotor/bearings stability problems, BRDRC Minden, Nevada.
- [2] Kramer, E.: dynamics of Rotors and Foundations, Springer-Verlag Berlin, 1993.
- [3] Muszynska, A.: Machinery dynamics short course, 1998.
- [4] Gash, R., Pfutzner, H.: Dynamika rotorů, Springer Verlag Berlín, 1975.
- [5] Vance, J., M.: Rotordynamics of Turbomachinery, Wiley, New York, 1990.
- [6] Pochylý, F., Stránský, L.: Metoda velkých kontrolních objemů na principu Bézierova tělesa-I.Diskretizace oblasti pomocí Bézierových entit, Inženýrská mechanika č.2,1999
- [7] El-Shafei, A.: Modeling Fluid Inertia Forces of short Journal Bearings for Rotordynamics Applications, Journal of Vibration and Acoustics, 1995
- [8] Adiletta, G., Guido, A., R., Rossi, C.: Chaotic Motions of a Rigid Rotor in Short Journal Bearings, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996
- [9] Zapoměl, J.: Přístupy k zahrnutí materiálového tlumení do počítačových modelů mechanických soustav – habilitační práce, Ostrava, 1998

Poděkování

Práce uveřejněné v tomto příspěvku byly vytvořeny na základě finanční podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy výzkumným záměrem CEZ: MSM 2600001