Vorbereitungshilfe zum Versuch „Vierpole und Leitungen“

Phasengeschwindigkeit:

Lösungen der Wellengleichung $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2} \cdot \frac{d^2u}{dt^2}$ (Beschränkung auf eine Raumrichtung) haben die Form u(x,t) = u(x ± v·t), z.B. $u(x,t) = \hat{u} \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm \mathrm{v}t) = \hat{u} \cdot \cos(kx \pm \omega t)$ für eine harmonische Welle.

λ ist die **Wellenlänge**, die Länge jener Strecke, nach der sich zu einer festen Zeit t in Ausbreitungsrichtung x der gleiche Schwingungszustand wiederholt. Die räumliche Periode der Welle. k = 2π /λ wird - nicht ganz einsichtig - als **Wellenzahl** bezeichnet und ω = 2πv/λ als **Kreisfrequenz**. Die zeitliche Periode, die **Frequenz** f = ω/2π gibt die Anzahl zeitlicher Schwingungsperioden pro Einheitszeit an einem festen Ort an. v = f·λ = ω/k ist die **Phasengeschwindigkeit**, jene Geschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung, die ein Beobachter haben müsste, um eine konstante Amplitude (x ± vt = const, konstante Phase) zu beobachten. Die Phasengeschwindigkeit ist je nach Medium unterschiedlich. Für elektromagnetische Wellen im Vakuum ist es die Lichtgeschwindigkeit c. Die Phasengeschwindigkeit kann frequenzabhängig sein. Bei der Ausbreitung im Vakuum ist das nicht der Fall.

Gruppengeschwindigkeit, Dispersion:

Die additive Überlagerung zweier Wellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung, gleicher Amplitude $\hat{u}$, jedoch verschiedener Kreisfrequenz (ω und $\omega' = \omega + \Delta\omega$) und verschiedener Phasengeschwindigkeit ($\mathrm{v} = \omega / k$ und $\mathrm{v}' = (\omega + \Delta\omega)/(k + \Delta k)$) ergibt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \hat{u} \cdot \cos(\omega t \pm kx) + \hat{u} \cdot \cos\{(\omega + \Delta\omega)t \pm (k + \Delta k)x\} \\ &= 2\hat{u} \cdot \cos\frac{(2\omega + \Delta\omega)t \pm (2k + \Delta k)x}{2} \cdot \cos\frac{\Delta\omega t \pm \Delta k x}{2} \quad . \end{aligned}$$

Für geringen Kreisfrequenzunterschied ($\Delta\omega << \omega$) und damit auch geringen Wellenzahlunterschied ($\Delta k << k$) folgt: $u(x,t) \cong 2\hat{u} \cdot \cos(\omega t \pm kx) \cdot \cos(\Delta\omega \cdot t \pm \Delta k \cdot x)$. Die Einhüllende dieser Schwebung bewegt sich mit der sogenannten Gruppengeschwindigkeit $v_G = \Delta\omega / \Delta k$. Dieses Ergebnis findet man auch für Superpositionen von mehr als zwei harmonischen Wellen verschiedener Amplituden bei geringen Frequenzunterschieden.

Ein äquivalenter Ausdruck für die **Gruppengeschwindigkeit** ist

$$\boxed{\mathrm{v}_G = d\omega / dk = \frac{d(2\pi\mathrm{v} / \lambda)}{d(2\pi / \lambda)} = \mathrm{v} - \lambda \cdot \frac{d\mathrm{v}}{d\lambda}}$$

Er zeigt, dass die Gruppengeschwindigkeit immer dann von der Phasengeschwindigkeit abweicht, wenn die **Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängig** ist (bzw. von der Frequenz), d.h. bei '**Dispersion**'.

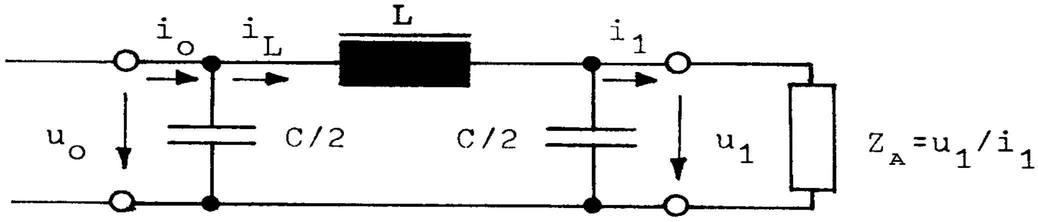
Werden durch das Ausbreitungsmedium Signale übertragen, z.B. Impulse unterschiedlicher Höhe (Spannung), Länge (Zeitdauer) oder Folge (Zeitpunkte des Auftretens), so können diese als Superposition von harmonischen Wellen sehr unterschiedlicher Frequenz (Fouriersumme) beschrieben werden. Ist die Ausbreitung dispersiv, haben also die Anteile unterschiedlicher Frequenz unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten, so 'zerfließen' die Signale. Sie ändern ihre Form, werden verzerrt.

Beispiele: Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs inhomogener Leitungen (z.B. Vierpolkette) ist dispersiv, desgleichen auch die Ausbreitung von Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten. Besonders bekannt ist die Dispersion eines Glasprismas für das sichtbare Licht. Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Vakuum ist dagegen dispersionsfrei. Auch die Ausbreitung von Kompressionswellen längs langer, dünner Stäbe und die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs homogener, verlustfreier Leitungen (z. B. ideales Koaxialkabel) ist dispersionsfrei.

Vierpole, Vierpolkette (speziell Drosselkette):

Ganz allgemein nennt man ein Netzwerk elektrischer Bauelemente mit einem Eingangs- und einem Ausgangsklemmenpaar elektrischer **Vierpol**.

Der hier betrachtete Vierpol sei ein Element einer idealen **Drosselkette**, also ein π-Glied mit einer Längsinduktivität L (Impedanz $Z_L = i\omega L$) und zwei gleichgroßen Querkapazitäten C/2 (Impedanz jeweils $Z_C = (i\omega C/2)^{-1}$). Die Verlustwiderstände realer Spulen und Kondensatoren bleiben unberücksichtigt. An den Ausgang sei eine Lastimpedanz Z_A (Arbeitswiderstand, Abschlusswiderstand; nicht notwendigerweise ein ohmscher Widerstand) angeschlossen, und gefragt sei nach dem Zusammenhang zwischen den Ausgangsgrößen u_1 und i_1 und den Eingangsgrößen u_0 und i_0.



Aus $i_0 = \dfrac{u_0}{Z_C} + i_L und\, i_L = \dfrac{u_1}{Z_C} + i_1$ (Knotenregel) und $u_0 = Z_L i_L + u_1$ (Maschenregel) folgt

$$u_0 = \left(\frac{Z_L}{Z_C} + 1\right) \cdot u_1 + Z_L \cdot i_1 \quad i_0 = \left(\frac{Z_L}{Z_C} + 2\right) \frac{1}{Z_C} \cdot u_1 + \left(\frac{Z_L}{Z_C} + 1\right) \cdot i_1$$

Die Eingangsimpedanz u_0/i_0 hängt von der Größe der angeschlossenen Lastimpedanz $Z_A = u_1/i_1$ ab. Bei einer speziellen Lastimpedanz, der **charakteristischen Impedanz Z_0** des Vierpols, gilt $Z_0 = \dfrac{u_1}{i_1} = \dfrac{u_0}{i_0}$.

Man findet durch Einsetzen in obige Formeln $\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} / \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \ \mathrm{mit}\, \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}}$.

Die charakteristische Impedanz (auch **Wellenwiderstand**) ist demnach **frequenzabhängig**. Nur im Bereich $\omega \ll \omega_0$ gilt: $Z_0 = \sqrt{L/C}$. Das ist beim Experimentieren mit unterschiedlichen Frequenzen zu beachten.

Mit Z_0 kann man für den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen des Vierpols schreiben:

$$u_0 = \left(\frac{Z_L}{Z_C} + 1\right) \cdot u_1 + Z_L \cdot i_1 \quad i_0 = \frac{Z_L}{Z_0^2} \cdot u_1 + \left(\frac{Z_L}{Z_C} + 1\right) \cdot i_1$$

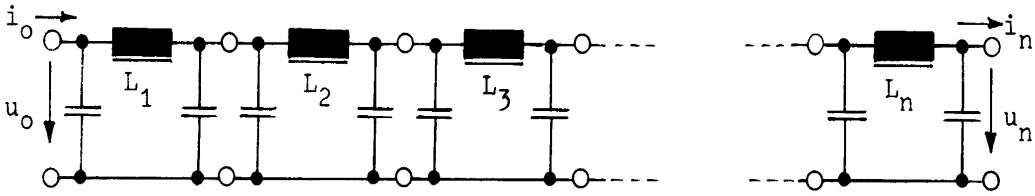
Oder aufgelöst nach u_1, i_1 und in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ Z_0 \cdot i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_L / Z_C + 1 & -Z_L / Z_0 \\ -Z_L / Z_0 & Z_L / Z_C + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ Z_0 \cdot i_0 \end{bmatrix}$$

In den Vektoren wurden die Ströme mit dem Faktor Z_0 versehen, weil dann die Vektoren dimensionsgleiche Größen enthalten, die resultierende Übertragungsmatrix symmetrisch ist, die Determinante den Wert 1 hat und sich die **Substitution** $\boxed{Z_L / Z_C + 1 = \cosh\gamma} = \left(e^{\gamma} + e^{-\gamma}\right)/2$ und $Z_L / Z = \sinh\gamma = \left(e^{\gamma} - e^{-\gamma}\right)/2$ anbietet. Das Argument γ ist eine komplexe Größe $\boxed{\gamma = \alpha + i\beta}$. Die Bildung einer Matrixpotenz, für die es im allgemeinen Fall keine geschlossene Formel gibt, die aber im nächsten Schritt erforderlich ist, wird damit sehr einfach. Bei der Frequenz ω = $\boxed{\omega_0 = 2/\sqrt{LC}}$ (später 'Grenzfrequenz') ergibt sich die Übertragungsmatrix $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Die Ausgangsgrößen weisen also bei $\omega = \omega_0$ gegenüber den Eingangsgrößen die Phasenverschiebung π auf.

Eine **Vierpolkette** - in unserem Fall eine **ideale Drosselkette** - entsteht, wenn mehrere gleiche Vierpole hintereinandergeschaltet werden:



$$\begin{bmatrix} u_n \\ Z_0 \cdot i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma & -\sinh\gamma \\ -\sinh\gamma & \cosh\gamma \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ Z_0 \cdot i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh n\gamma & -\sinh n\gamma \\ -\sinh n\gamma & \cosh n\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ Z_0 \cdot i_0 \end{bmatrix}$$

Als **Spannungsübertragung** ergibt sich $\dfrac{u_n}{u_0} = \cosh n\gamma - Z_0 \cdot \dfrac{i_0}{u_0} \cdot \sinh n\gamma$.

Mit der speziellen Lastimpedanz $Z_A = \dfrac{u_n}{i_n} = \dfrac{u_0}{i_0} = Z_0$ folgt:

$$\boxed{\frac{u_n}{u_0} = \cosh n\gamma - \sinh n\gamma = e^{-n\gamma} = e^{-n\alpha} \cdot e^{-i \cdot n\beta}}\ .$$

Liegt am Eingang eine sinusförmige Spannung, $u_0(t) = \hat{u}_0 \cdot e^{i\omega t}$, so ergibt sich $u_n(t) = \hat{u}_0 \cdot e^{i(\omega t - n\beta)} \cdot e^{-n\alpha}$.
Demnach ist $n\alpha$ die **Dämpfungskonstante** und $n\beta$ die **Phasenkonstante** der Vierpolkette.

Die Übertragungseigenschaften der Drosselkette:

Aus der Substitution $\cosh\gamma = \dfrac{Z_L}{Z_C} + 1$ folgt $\sinh\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{Z_L}{2Z_C}} = \sqrt{-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = i \cdot \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Andererseits gilt $\sinh\dfrac{\gamma}{2} = \sinh\left(\dfrac{\alpha + i\beta}{2}\right) = \sinh\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2} + i \cdot \cosh\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{\beta}{2}$.

Also sind die beiden Gleichungen $\sinh\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2} = 0$ und $\cosh\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ simultan zu erfüllen.

Für $\omega < \omega_0$ ist die Lösung $\alpha = 0$ und $\beta = 2 \cdot \arcsin\dfrac{\omega}{\omega_0}$,
für $\omega > \omega_0$ ist die Lösung $\alpha = 2 \cdot \operatorname{arccos} h \dfrac{\omega}{\omega_0} und\, \beta = \pi$.

Das bedeutet, daß die Drosselkette die Eigenschaft eines **Tiefpasses** hat. Die **ideale Drosselkette** (deren Kondensatoren und Spulen verlustfrei sind) ist für Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz ω_0 verlustfrei, $e^{-n\alpha}=1$. Oberhalb der Grenzfrequenz ω_0 zeigt sie eine mit der Frequenz steil ansteigende Dämpfung.

Die reale Drosselkette:

Die unvermeidlichen Verluste der realen Drosselkette können pro π-Glied durch einen Widerstand R in Reihe mit der Induktivität L und zwei Leitwerte G/2, jeweils parallel zu den Kapazitäten C/2, in den Ansätzen berücksichtigt werden. Die resultierenden Formeln werden hier nicht angegeben. Die Verluste bei den im Praktikum verwendeten realen Drosselketten sind nicht sonderlich groß, und die Formeln für die ideale Drosselkette sind gute Näherungen.

Die homogene Leitung:

Bei einer üblichen homogenen Leitung sind Induktivität und Kapazität homogen über die Leitungslänge verteilt. Man gibt die Induktivität L' pro Längeneinheit und die Kapazität C' pro Längeneinheit an.

Beim Koaxialkabel gilt: $L' = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\frac{r_a}{r_i}$; $C' = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \left(\ln\frac{r_a}{r_i}\right)^{-1}$ mit dem Innenradius r_i und dem Außenradius r_a. Im Grenzfall niedriger Frequenzen ergibt sich für die charakteristische Impedanz Z_0:

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} / \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{4\pi^2\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \left(\ln\frac{r_a}{r_i}\right)^2}}$$

Wenn man $L = L' \cdot \ell / n$ *und* $C = C' \cdot \ell / n$ in ω_0 im Ausdruck für die Phasengeschwindigkeit der Drosselkette einsetzt, so folgt

$$\mathrm{v}(\omega) = \frac{\omega\ell}{2n \cdot \arcsin\frac{\omega\ell\sqrt{L'C'}}{2n}} .$$

Beim Grenzübergang zur homogenen Leitung ($n \to \infty$) ergibt sich $\mathrm{v}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$.

Demnach ist die verlustfreie homogene Leitung dispersionsfrei.

Es gibt aber keine ganz verlustfreie Leitung. Die Leiter haben einen ohmschen Widerstand, das Dielektrikum isoliert nicht perfekt und bewirkt Umpolarisierungsverluste (dielektrische Verluste). Bei der homogenen Leitung werden diese Verluste durch einen auf die Länge bezogenen Widerstand R' in Serie mit L' und durch einen auf die Länge bezogenen Leitwert G' parallel zu C' berücksichtigt. Für nicht zu große Dämpfung gilt dann: $\alpha \cong (R'C' - G'L') \cdot v/2$ für die Dämpfungskonstante, $\mathrm{v} \cong \frac{1}{\sqrt{L'C' - R'G'/\omega^2}}$ für die Phasengeschwindigkeit, $\mathrm{v}_G \cong \frac{1}{L'C' \cdot \mathrm{v}}$ für die Gruppengeschwindigkeit und $Z_0(\omega) \cong \frac{R' + i\omega L'}{\alpha + i\omega/\mathrm{v}}$ für die charakteristische Impedanz.

Die verlustbehaftete homogene Leitung ist dispersiv, d.h. Signale werden nicht völlig unverzerrt übertragen.

Reflexionen:

Im Ausdruck für die Spannungsübertragung der Drosselkette tritt die Summe $\omega t - n\beta$ auf, nicht aber $\omega t + n\beta$. Es gibt nur eine hinlaufende (vom Kettenanfang zum Kettenende) aber keine rücklaufende Welle. Das liegt daran, dass bei der Herleitung als Abschlusswiderstand die charakteristische Impedanz der Kette gewählt wurde ($Z_A = Z_0$, 'Anpassungsfall').

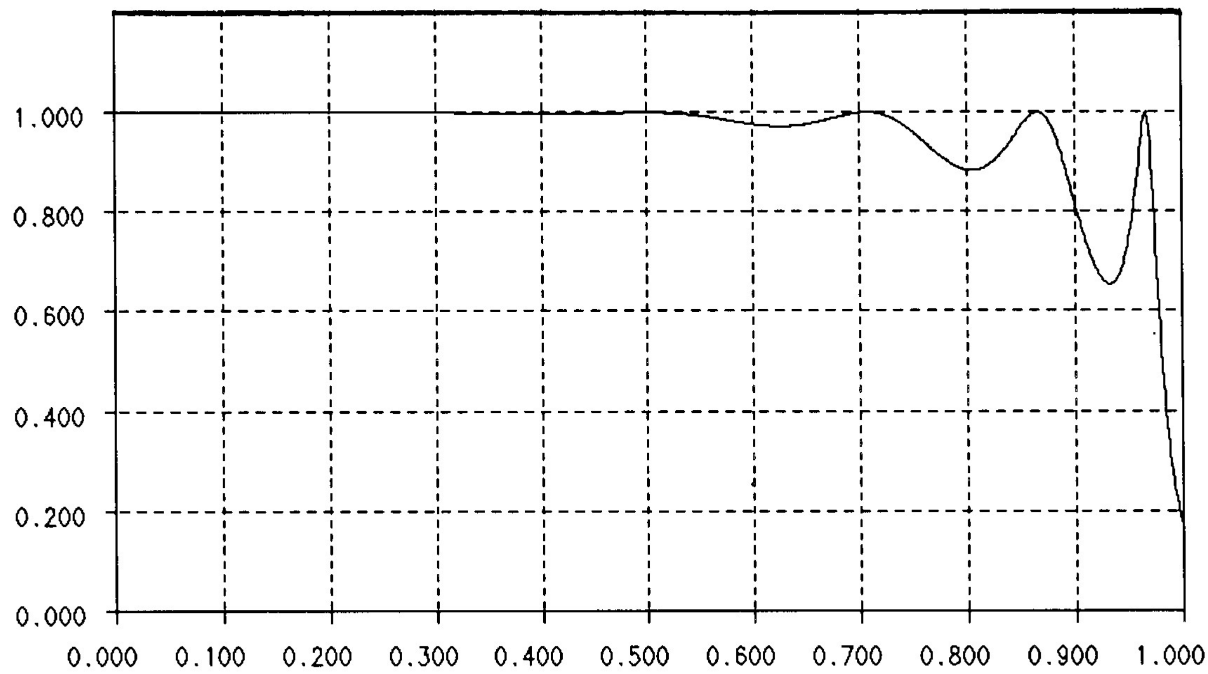
Im allgemeinen Fall treten am Kettenende (am Ende jeder Übertragungsleitung) Reflexionen auf. Dort ist das Amplitudenverhältnis von reflektierter zu ankommender Welle der sogenannte Reflexionsfaktor

$$\boxed{\rho = \frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0}} .$$

Vollständige Reflexion erfolgt demnach mit Vorzeichenumkehr ($\rho = -1$) im Kurzschlussfall ($Z_A = 0$) und ohne Vorzeichenumkehr ($\rho = 1$) bei offenem Kettenende ($Z_A = \infty$). Dazwischen gibt es je nach Wahl von Z_A alle Fälle mit $-1 < \rho < 1$.

Reflexionen bei der Aufnahme der Durchlaßkurve:

Wird bei der Aufnahme der Durchlasskurve ($|u_a/u_e| = |u_n/u_0|$ über ω aufgetragen) einer Drosselkette der Lastwiderstand konstant gelassen, z.B. $Z_A = Z_0(0)$, und der eingangsseitige Abschluss der Kette möglicherweise gar nicht beachtet, so treten wegen der Frequenzabhängigkeit der charakteristischen Impedanz Vielfachreflexionen zwischen Kettenanfang und Kettenende auf. Je nach relativer Phasenlage überlagern sich die Wellen am Kettenende mehr oder weniger destruktiv. Das führt zu einer 'welligen' Durchlasskurve anstelle des bei Reflexionsfreiheit im ganzen Durchlassbereich konstant ($|u_a/u_e| = 1$) erwarteten Verlaufs. Für eingangs- und ausgangsseitigen Abschluss der verlustfreien Drosselkette mit jeweils $Z_0(0)$ wurde von Ch. Weddigen die Superposition der reflektierten Wellen am Kettenende berechnet. Das Ergebnis für eine 6-gliedrige Kette ist im folgenden Diagramm ($|u_n/u_0|$ über ω/ω_0) dargestellt:



Die experimentell ermittelte Durchlasskurve mit $Z_A=Z_0(0)$ wird etwas anders aussehen, weil dabei eingangsseitig wahrscheinlich der Generatorinnenwiderstand ($\neq Z_0(0)$) als Abschlusswiderstand wirkt und weil bei der realen Kette die Verlustwiderstände zunehmende Abschwächung der vielfach reflektierten Wellen bewirken und auch die Phasenlagen modifizieren.

(W.Jüngst, update P.Bluem)

Version: Jan. 18