

DYNAMIKA BODU

POHYBOVÉ ROVNICE

Ze zkušenosti je známo, že tělesa (body) jsou schopny uvádět do pohybu, nebo měnit jejich pohybový stav, na ně působí (statické) silové účinky. Kvantifikací tohoto stavu je **Newtonův princip síly** (2. princip klasické mechaniky)

$$\frac{d}{dt} (m \dot{\mathbf{r}}) = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (1)$$

Veličinu $\dot{\mathbf{H}} = m \dot{\mathbf{v}}$ nazýváme **hybností hmotného bodu**. Na pravé straně stojí vektorový součet (výslednice) všech statických sil na hmotný bod působících. Je-li hmotnost hmotného bodu konstantní, dostáváme z (1)

$$m \dot{\mathbf{a}} = \sum_i \dot{\mathbf{F}}_i. \quad (2)$$

Součin hmotnosti a zrychlení $\dot{\mathbf{a}}$ hmotného bodu má rozměr síly – nazýváme ji **zrychlující síla**. Rovnici (2) nazýváme **pohybovou rovnicí hmotného bodu ve vektorovém tvaru**. Fyzikálně vyjadřuje ekvivalenci zrychlující (dynamické) síly s výslednicí sil statických. V technických úlohách zavádíme často opačně orientovanou sílu

$$\dot{\mathbf{D}} = -m \dot{\mathbf{a}},$$

ktehou nazýváme **setrvačnou silou**. Pohybovou rovnicí (2) pomocí ní přepíšeme na

$$\dot{\mathbf{D}} + \sum_i \dot{\mathbf{F}}_i = \dot{\mathbf{0}}. \quad (3)$$

Tento vztah vyjadřuje rovnováhu setrvačné (dynamické) síly s výslednicí sil statických.

Vektorovou rovnicí (2) resp. (3) rozepisujeme v různých vhodně zvolených souřadnicových soustavách do jedné (**úloha na přímce**), dvou (**úloha v rovině**) či tří (**úloha v prostoru**) skalárních pohybových rovnic.

Pro volný pohyb bodu po přímce (kdy všechny statické síly $\dot{\mathbf{F}}_i$ mají směr této přímky) má tedy jediná skalární rovnice pohybu tvar

$$m a = \sum_i F_i, \quad (4)$$

kde zrychlení přímočarého pohybu vyjadřujeme jednou ze tří z mechaniky I známých závislostí

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx} \left(= v \frac{dv}{dx} \right). \quad (5)$$

Dosažením do (4) při znalosti sil F_i jako funkcí rychlosti v , dráhy x popřípadě času t získáme pohybovou rovnici ve tvaru diferenciální rovnice, kterou při znalosti počátečních podmínek $x(0) = x_0$ (dráha v čase $t = 0$) a $v(0) = v_0$ (rychlost v čase $t = 0$) můžeme (někdy analyticky, vždycky však numericky) řešit a získat tím **znalost pohybu bodu**, tedy závislosti rychlosti na čase $v(t)$, dráhy na čase $x(t)$ a rychlosti na dráze $v(x)$.

Pro bod vázaný k hladké (bez tření) rovinné křivce, kdy všechny statické síly \underline{F}_i působí v oné rovině, rozepíšeme pohybovou rovnici (4) do dvou směrů. Nejvýhodněji do směru tečny a normály ke křivce. Příslušné skalární rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} m a_t &= \sum_i F_{it} , \\ m a_n &= \sum_i F_{in} . \end{aligned} \quad (6)$$

Pro tečné zrychlení zřejmě platí

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} \left(= v \frac{dv}{ds} \right), \quad (7)$$

kde s je proběhnutá dráha (po křivce), v velikost rychlosti a t čas. Pro normálové zrychlení platí

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (8)$$

kde R je poloměr křivosti křivky v uvažované poloze (dané parametrem s). Při znalosti tečných složek F_{it} statických sil jako funkcí v , s popřípadě t získáme první rovnici v (6), jakožto diferenciální rovnici, která je tzv. **vlastní pohybovou rovnicí**. Ve směru tečny ke křivce, totiž dochází k pohybu. Ve směru normály k pohybu nedochází, protože druhá rovnice určuje reakci vazby (křivky) na bod. Jedna ze statických sil \underline{F}_i je totiž i normálová reakce \underline{N} známá z mechaniky I. Druhá rovnice v (6) má podle (8) tvar

$$\frac{mv^2}{R} = -N + \sum_i F_{in} ,$$

kde $\sum_i F_{in}$ je součet normálových složek statických akčních sil.

Odtud

$$N = -\frac{mv^2}{R} + \sum_i F_{in} . \quad (9)$$

Z této rovnice při znalosti pohybu (po vyřešení vlastní pohybové diferenciální rovnice) vyjádříme závislost velikosti reakce N na čase. Síla (dynamická) $-m a_n = -\frac{mv^2}{R}$ se nazývá **odstředivou silou**. Orientace normály je přitom do středu křivosti křivky.

Poznámka: Je-li křivkou kružnice (velice častý případ), je $R = r$ (poloměr kružnice) a $v = r w$, kde w je úhlová rychlost příslušného kruhového pohybu bodu. Tečné zrychlení je pak $a_t = r a$, kde a je úhlové zrychlení kruhového pohybu.

Uvažujeme-li navíc třecí účinek s koeficientem smykového tření f , dostáváme rovnice (6) ve tvaru

$$m a_t = \sum_i F_{it} - f N ,$$

$$m a_n = \sum_i F_{in} - N. \quad (10)$$

Vlastní pohybová rovnice je první rovnicí, která ovšem obsahuje reakci N . Proto je nejprve nutno z algebraické druhé rovnice (10) určit reakci N dosazením za $a_n = \frac{v^2}{R}$ a dosadit do rovnice první. Získáme vlastní pohybovou rovnici ve tvaru diferenciální rovnice, kterou řešíme při počátečních podmínkách $s(0) = s_0$ (dráha v čase $t = 0$) a $v(0) = v_0$ (rychlost v čase $t = 0$) podobně jako u přímočarého pohybu. Ze druhé rovnice (10) po vyřešení pohybu lze získat (podobně jako u hladké křivky) závislost reakce na čase.

U volné rovinné křivky je možno vektorovou rovnici (2) (popřípadě (3)) rozepisovat do složek pevného souřadnicového systému x, y . Pohybové rovnice pak jsou

$$\begin{aligned} m a_x &= \sum_i F_{ix}, \\ m a_y &= \sum_i F_{iy}, \end{aligned} \quad (11)$$

kde a_x a a_y jsou složky zrychlení a F_{ix}, F_{iy} složky statické síly \mathbf{F}_i v tomto systému. Složky zrychlení lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{dv_x^2}{dx} \left(= v_x \frac{dv_x}{dx} \right), \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{dv_y^2}{dy} \left(= v_y \frac{dv_y}{dy} \right). \end{aligned}$$

Jestliže složky F_{ix} závisejí pouze na x, v_x eventuelně t a složky F_{iy} jen na y, v_y eventuelně t , lze obě diferenciální rovnice řešit nezávisle. Získané závislosti $x(t), y(t)$ vzniklé jejich řešením tvoří **parametrické rovnice rovinné křivky**, po níž se bod pohybuje. Vyloučením parametru (pokud to lze analyticky udělat) získáme analyticko – geometrickou rovnici dráhy ve tvaru $y(x)$.

Pohyb bodu je možno sledovat i v souřadnicové soustavě, jež koná vzhledem k nehybné soustavě **1** (spojené se Zemí) předepsaný pohyb. Můžeme např. pohyb bodu sledovat v rozjíždějícím se automobilu, výtahu apod. Jestliže rozklad pohybu

$$\mathbf{3} = \mathbf{2} + \mathbf{32},$$

kde **3** = pohyblivý bod, který sledujeme, **2** = pohybující se soustava (spojená s výtahem atd.), je obecný (tedy nezákladní), platí pro zrychlení absolutního pohybu

$$\mathbf{a}_{31} = \mathbf{a}_{21} + \mathbf{a}_{32} + \mathbf{a}_c, \quad (12)$$

kde \mathbf{a}_{21} je zrychlení unášivého, \mathbf{a}_{32} zrychlení relativního pohybu (určí se podle toho, o jaký pohyb se jedná v konkrétní úloze). Zrychlení $\mathbf{a}_c = 2\mathbf{w}_{21} \times \mathbf{v}_{32}$ je **Coriolisovo zrychlení**. Pokud rozklad je základní, a tedy unášivý pohyb **21** je posuvem, je $\mathbf{w}_{21} = \mathbf{0}$ a tedy i $\mathbf{a}_c = \mathbf{0}$. Do pohybové rovnice (2) resp. (3) nyní dosazujeme za zrychlení \mathbf{a} zrychlení \mathbf{a}_{31} z (12). Dynamická setrvačná síla $\mathbf{D}_c = -m\mathbf{a}_c = -2m\mathbf{w}_{21} \times \mathbf{v}_{32} = 2m(\mathbf{v}_{32} \times \mathbf{w}_{21})$ se nazývá **Coriolisova**

síla. Při znalosti unášivého pohybu lze rozpis pohybové rovnice (2) provést podobně jako pro případ výše, kdy všechny veličiny byly rovnou vyjadřovány v souřadnicovém systému **1**.

ZÁKONY DYNAMIKY BODU

Newtonův princip síly lze chápat jako **zákon o změně hybnosti v diferenciálním tvaru**. Platí totiž

$$\frac{d\dot{\mathbf{H}}}{dt} = \frac{d(m\dot{\mathbf{v}})}{dt} = \dot{\mathbf{F}}, \quad (13)$$

kde $\dot{\mathbf{F}}$ je výslednice všech statických sil na bod působících. Separací proměnných a integrací odtud dostaneme

$$\int_{\dot{\mathbf{H}}_1}^{\dot{\mathbf{H}}_2} d\dot{\mathbf{H}} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{F}} dt \Leftrightarrow \dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{H}}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{F}} dt. \quad (14)$$

Veličině napravo $\dot{\mathbf{I}} = \int_{s_1}^{s_2} \dot{\mathbf{F}} dt$ říkáme (časový) **impuls síly**. Rozměrem veličiny je $[Ns]$.

Rovnice (14) vyjadřuje **zákon o změně hybnosti v integrálním tvaru**. Slovní formulace: Vektorový rozdíl hybností bodu na konci a na počátku děje se rovná impulsu výslednice statických sil v průběhu děje na bod působících. Z rovnosti (14) plyne, že i rozměrem hybnosti je Newtonsekunda $[Ns]$. Zákon používáme zejména tehdy, kdy impuls na pravé straně se snadno spočítá. Je-li např. síla $\dot{\mathbf{F}}$ konstantní (jako vektor, tedy co do velikosti i co do směru) je (14) možno přepsat jako

$$\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\mathbf{F}}(t_2 - t_1).$$

Je-li síla $\dot{\mathbf{F}}$ dokonce nulová, je odtud ihned

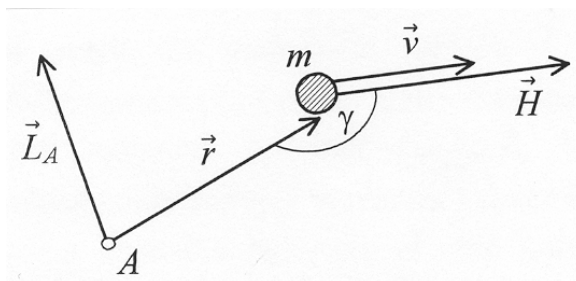
$$\dot{\mathbf{H}}_2 = \dot{\mathbf{H}}_1.$$

Je to tvrzení kterému říkáme **věta o zachování hybnosti**, která neříká nic jiného, než že bod konstantní hmotnosti, na který nepůsobí žádná síla se pohybuje rovnoměrně přímočaře (s konstantním vektorem rychlosti $\dot{\mathbf{v}}$).

Podobně jako pro sílu byl definován moment síly k bodu a k ose, definujeme i **moment hybnosti k bodu a k ose**. Moment hybnosti k bodu A (viz obr.) je definován vztahem,

$$\dot{\mathbf{L}}_A = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{v}}, \quad (15)$$

kde $\dot{\mathbf{r}}$ je polohový vektor



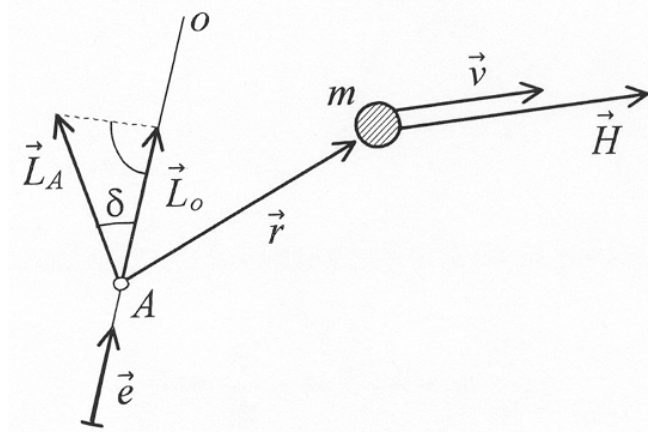
s počátečním bodem A a koncovým bodem jako hmotným bodem m . Výsledkem je **volný** vektor $\dot{\mathbf{L}}_A$. Rozměrem velikosti momentu hybnosti je $[Nm s] = [kg m^2 / s]$.

Poznámka: Podle pravidel práce s vektorovým součinem je vektor $\dot{\vec{L}}_A$ kolmý na rovinu určenou nositelkami vektorů $\dot{\vec{H}}$ a \vec{r} (to je zde na rovinu nákresny). Jeho velikost je

$$L_A = r H \sin g, \quad (16)$$

kde bez šipky značíme velikosti příslušných vektorů a g je úhel, který svírají nositelky obou vektorových činitelů (viz obr.). Smysl vektoru $\dot{\vec{L}}_A$ je dán pravidlem pravé ruky. Položíme-li pravou ruku na náčrtek tak, aby prsty směřovaly od vektoru \vec{r} k vektoru $\dot{\vec{H}}$, pak palec ukazuje smysl výsledku. Zde ukázaný náčrtek dává smysl vektoru $\dot{\vec{L}}_A$ za nákresnu.

Moment hybnosti k ose o (viz obr.) je průmět vektoru momentu, hybnosti k libovolnému bodu A té osy (viz definice výše) do té osy.



Matematicky vyjádřeno

$$\dot{\vec{L}}_0 = \dot{\vec{e}}(\dot{\vec{e}} \cdot \dot{\vec{L}}_A) = \dot{\vec{e}}[\dot{\vec{e}} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{H}})], \quad (17)$$

kde $\dot{\vec{e}}$ je jednotkový vektor směru osy o , pomocí něhož je určena kladná orientace této osy.

Poznámky: 1) Výsledný vektor $\dot{\vec{L}}_0$ samozřejmě nezávisí na volbě bodu A na ose o .

2) Vektor $\dot{\vec{L}}_0$ má vždy směr osy o . Jeho velikost (včetně znaménka) je rovna

$$L_0 = L_A \cos d, \quad (18)$$

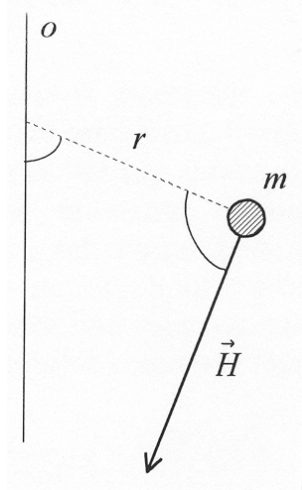
kde d je úhel, který svírá osa o s nositelkou vektoru $\dot{\vec{L}}_A$ (viz obr.)

3) Snadno lze ověřit, že souřadnice vektoru $\dot{\vec{L}}_0$ k počátku 0 kartézského souřadnicového systému (určeného podle definice momentu hybnosti k bodu) jsou velikosti momentů hybnosti L_x, L_y, L_z k osám tohoto kartézského systému (určené podle definice momentu hybnosti k ose).

4) Jsou-li osa o a nositelka hybnosti $\dot{\vec{H}}$ dvě kolmé mimoběžky o nejkratší vzdálenosti r (nejčastější případ výpočtu momentu hybnosti k ose), je velikost L_0 rovna

$$L_0 = H r \quad (19)$$

a smysl \dot{L}_0 je dán pravidlem pravé ruky. Položíme-li pravou ruku na náčrtek (viz obr.) tak, aby prsty ukazovaly smysl vektoru \dot{H} , ukazuje palec na ose smysl výsledku.



Derivujme vztah (15) za předpokladu konstantní hmotnosti podle času. Dostaneme

$$\frac{d\dot{L}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{r} \times m \frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt}.$$

Podle kinematické definice $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}$ (rychlost bodu) a $\frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt} = \dot{\mathbf{a}}$ (zrychlení bodu). Tedy je

$$\frac{d\dot{L}_A}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \times m \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{a}}.$$

Podle (16) je první sčítanec vpravo nulový, protože vektory $\dot{\mathbf{v}}$ a $m \dot{\mathbf{v}}$ jsou rovnoběžné (a tedy $\mathbf{g} = 0$). Při konstantní hmotnosti podle (13) je $m \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{F}}$. Proto

$$\frac{d\dot{L}_A}{dt} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{F}}.$$

Součin vpravo vyjadřuje moment výslednice statických sil k bodu A. Je tedy

$$\frac{d\dot{L}_A}{dt} = \dot{M}_A. \quad (20)$$

Protože jednotkový vektor \dot{o} osy o je na čase nezávislý, lze skalárním přenásobením výrazu (20) získat analogický vztah pro (velikost) momentu k ose ve tvaru

$$\frac{dL_o}{dt} = M_o. \quad (21)$$

Výrazy (20) a (21) vyjadřují **zákon o změně momentu hybnosti** (k bodu nebo k ose) **v diferenciálním tvaru.**

Separací a integrací z (20) resp. (21) dostaneme

$$\int_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{L}_2} d\mathbf{L} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt \Leftrightarrow \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt. \quad (22)$$

Veličině vpravo říkáme (časový) **impuls momentu** výslednice statických sil. Je přitom lhostejné, zda se jedná o moment k bodu nebo k ose. Vztah (22) platí pro oba typy momentů ovšem pro moment hybnosti vlevo i moment síly vpravo vždy ke stejnému bodu (ose).

Rovnice vyjadřuje **zákon o změně momentu hybnosti v integrálním tvaru**. Slovní formulace: Rozdíl momentů hybnosti k nehybnému bodu (ose) na konci a na začátku děje se rovná impulsu momentu výslednice statických sil v průběhu děje na bod působících (ke stejnému bodu nebo ose). Zákon používáme zejména tehdy, kdy impuls na pravé straně se snadno určí. Je-li výsledný statický moment konstantní (jako vektor), je

$$\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \mathbf{M}(t_2 - t_1).$$

Je-li moment síly nulový, dostáváme odtud

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1,$$

kterému říkáme **věta o zachování momentu hybnosti**.

Poznámka: Moment síly k bodu je nulový nejen pro nulovou sílu, ale i pro nulové rameno, tedy když síla stále příslušným bodem prochází. To je případ tzv. centrálního pohybu, kterým se řídí pohyb planet kolem Slunce nebo družic kolem Země. Stejně tak moment síly k ose je nulový nejen pro nulovou sílu ale i pro případ, že osa o s nositelkou síly jsou rovnoběžné nebo různoběžné přímky.

Za předpokladu konstantní hmotnosti z (13) plyne

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Skalárním přenásobením vektorem $d\mathbf{r}$ vzhledem k definici rychlosti odtud plyne

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m d\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Protože zřejmě

$$\frac{1}{2} dv^2 = \frac{1}{2} d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

a protože $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ je element práce dW , máme odtud

$$\frac{m}{2} dv^2 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Integrací

$$\frac{m}{2} \int_{v_1^2}^{v_2^2} dv^2 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W.$$

Definujeme-li **kinetickou energii bodu** jako

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2, \quad (23)$$

dostáváme odtud

$$E_{k2} - E_{k1} = W. \quad (24)$$

Rozměrem kinetické energie (stejně jako práce) je Joule ($= \text{kg m}^2 / \text{s}^2$).

Rovnice (24) vyjadřuje **zákon o změně kinetické energie**. Jeho slovní formulace: Rozdíl kinetických energií mezi dvěma polohami bodu (danými polohovými vektory \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2) je roven práci výslednice statických sil na bod působících v průběhu jeho přemístování mezi zmíněnými polohami.

Poznámky: 1) Zatímco zákony o změně hybnosti a momentu hybnosti jsou vektorové (a tudíž se rozepisují do směrů) zákon o změně kinetické energie je skalární.

2) Pro úspěšné použití zákona je třeba výslednou sílu znát jako funkci polohy, včetně tvaru dráhy, po které bod přemístujeme.

V mechanice se setkáváme rovněž se silami, u nichž práce nezávisí na tvaru dráhy (což je ekvivalentní s tvrzením, že práce takové síly po uzavřené dráze je nulová). Takové síly nazýváme **konzervativní (potenciální)**.

Nechť existuje ve zvolené souřadnicové soustavě funkce $E_p(x, y, z)$ - tzv. **potenciální energie bodu**, že pro složky síly v této souřadnicové soustavě platí

$$F_x = \frac{\partial E_p}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial E_p}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial E_p}{\partial z} \Leftrightarrow \mathbf{F} = -\text{grad } E_p.$$

Pak pro tuto souřadnicovou soustavu je

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial E_p}{\partial x} dx - \frac{\partial E_p}{\partial y} dy - \frac{\partial E_p}{\partial z} dz = -d E_p,$$

kde na pravé straně stojí totální diferenciál potenciální energie. Protože pro konzervativní sílu $dW = -d E_p$, je přírůstek potenciální energie kompenzován prací spotřebovanou silou \mathbf{F} a naopak silou vykonaná práce znamená stejný úbytek potenciální energie při přechodu působíště síly z jedné polohy do druhé. Integrací předchozí rovnice získáme

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int d E_p = E_p(x_1, y_1, z_1) - E_p(x_2, y_2, z_2),$$

kde $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i, z_i]$, $i = 1, 2$. Tato rovnice ve srovnání s (1.24) dává

$$E_{p1} - E_{p2} (= W) = E_{k2} - E_{k1}$$

odkud

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2} = \text{konst.} \quad (25)$$

Při pohybu v silovém poli konzervativním (potenciálním) je **celková mechanická energie**, daná součtem potenciální a kinetické energie, konstantní. Jedná se o **zákon zachování celkové mechanické energie**. Potenciální energii též nazýváme **potenciálem příslušejícím k silovému poli** $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)]$. Protože

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

je

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial x}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial y}.$$

Vzhledem k záměnnosti druhých smíšených derivací odtud plyne

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}. \quad (26)$$

Tyto tzv. **Cauchyovy – Riemannovy podmínky** jsou postačujícími podmínkami konzervativnosti silového pole.

Pro rovinnou úlohu (rovinné silové pole) odpadá směr osy z a ze tří podmínek se stává jediná tvaru

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \quad (27)$$

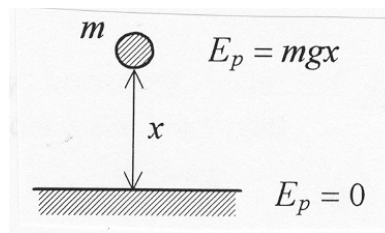
Pro jednorozměrnou úlohu k síle $F(x)$ ex. potenciální energie jako

$$F(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{dE_p}{dx} \Rightarrow E_p(x) = -\int F(x) dx + C \quad \text{pro libovolnou aditivní konstantu } C.$$

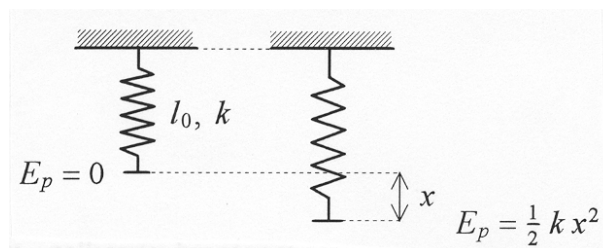
Potenciální energie je určena až na aditivní konstantu. Tuto konstantu, určujeme volbou nulové hladiny potenciální energie.

PŘÍKLADY KONZERVATIVNÍCH SIL

a) tíha – volba nulové hladiny libovolně (podle typu úlohy)



b) síla v pružině o tuhosti k – volba nulové hladiny ve volné délce pružiny l_0



Příklady nekonzervativních sil: pasivní účinky – zde se část mechanické energie přeměňuje v energii tepelnou.