LES GRANDS PROBLÈMES DES SCIENCES
OUVRAGES RÉUNIS PAR Mme P. FÉVRIER

IV.

LA THÉORIE
DU CHAMP UNIFIÉ D'EINSTEIN
ET QUELQUES-UNS DE SES DÉVELOPPEMENTS

PAR

Marie-Antoinette TONNELAT
Maître de Conférences à la Sorbonne

Préface d'André LICHNEROWICZ
Professeur au Collège de France

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1955

OUVRAGES DE LA COLLECTION

I. BROGLIE (L. DE) de l'Académie Française, Secrétaire Perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à la Sorbonne. — *La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ?* Exposé du problème suivi de la reproduction de certains documents et d'une Contribution de M. Jean-Pierre VIGIER. In-8 (16-25) de VII-113 pages, avec 4 figures; 1953.

II. FÉVRIER (Mme P.). — *L'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire et des Théories quantiques.* In-8 (16-25) de VIII-216 pages, avec 2 figures; 1955.

IV. TONNELAT (Mme M.-A.) Maître de Conférences à la Sorbonne. — *La Théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements.* In-8 (16-25) de VIII-156 pages; 1955.

Sous presse :

III. YIFTAH (S.). — *Constantes fondamentales des Théories physiques.*

V. VIGIER (J.-P.). — *Structure des Micro-objets dans l'interprétation causale de la Théorie des quanta.*

LES GRANDS PROBLÈMES DES SCIENCES

OUVRAGES RÉUNIS PAR Mme P. FÉVRIER

IV.

LA THÉORIE
DU CHAMP UNIFIÉ D'EINSTEIN
ET QUELQUES-UNS DE SES DÉVELOPPEMENTS

PAR

Marie-Antoinette TONNELAT
Maître de Conférences à la Sorbonne

Préface d'André LICHNEROWICZ
Professeur au Collège de France

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1955

A ALBERT EINSTEIN

Avril 1955.

PRÉFACE.

Il y a plus de quinze ans, dans un petit bureau de l'Institut Henri Poincaré, je fis la connaissance de M^{me} Tonnelat; en bons apprentis, nous confrontions nos vues sur les champs et les sources dans le cadre de la relativité générale classique. Je ne pensais guère, à cette époque, avoir un jour le privilège de présenter aux lecteurs scientifiques un livre tel que celui-ci, mais son auteur manifestait déjà cet esprit de haute synthèse, cette probité intellectuelle aussi qui font le prix de ce livre.

Einstein vient de disparaître, nous laissant, à côté de tant de travaux achevés, une théorie énigmatique que les savants contemplent, comme lui-même, avec un mélange de méfiance et d'espoir, mais qui porte l'empreinte de l'ambition fondamentale de son créateur. Pour que l'énigme puisse être levée, la tentation écartée ou renforcée, beaucoup de travail est nécessaire. Même si, comme il est probable, cette théorie ne nous apporte pas la clé décisive des champs physiques, ce travail sera fructueux et il nous aidera à mieux comprendre et la résistance des champs physiques au processus de géométrisation et cette ambition de géométrisation elle-même.

Ce livre ne prétend pas être un traité complet de la théorie — nous n'en sommes pas d'ailleurs au point où un tel traité est possible et désirable — mais il se présente comme un précieux outil de recherche et il favorisera l'éclosion des travaux nécessaires.

A travers la jungle des mémoires originaux, M^{me} Tonnelat a réussi à tracer les grandes voies, à présenter d'une manière synthétique et à critiquer impitoyablement les différents points de vue. Elle expose d'abord les principes de la théorie et analyse cet être géométrique fait de la réunion d'une connexion affine et d'un tenseur fondamental d'ordre deux qui satisfait à des équations de champ déduites d'un principe variationnel. Ainsi ces équations présentent bien l'invariance géométrique ou physique nécessaire, mais leurs premiers membres satisfont à des identités de conservation dont toute l'importance est apparue à travers la relativité générale.

Les difficultés commencent quand il s'agit d'interpréter cet être géométrique, de retrouver dans son sein gravitation et électromagnétisme, de comparer les équations à celles de la relativité générale. Deux voies s'ouvrent alors : trouver des solutions rigoureuses des équations de champ aussi simples que possible, et ce sont les solutions à symétrie sphérique sur lesquelles les différentes interprétations pourraient être plus facilement discutées; construire des solutions approchées, mais la manière même de conduire les approximations n'est pas univoque et implique déjà certains choix d'interprétations. Ce labeur ingrat qui doit conduire à un inventaire des possibilités de la théorie a été commencé partout dans le monde et il était bien difficile de se faire une idée d'ensemble de ces travaux conduits avec des méthodes, des notations, des arrière-pensées totalement différentes.

Le livre de M^me^ Tonnelat permet de faire vraiment le point de la théorie, met en évidence les difficultés considérables qu'il conviendrait de surmonter. Il est complété par des notes dont les unes détaillent certains calculs délicats et dont l'autre porte sur la notion de coordonnées isothermes qui, comme à M^me^ Tonnelat, me paraît importante pour les développements futurs de la théorie.

Il appartenait à la personnalité scientifique qui, à côté d'autres travaux notables, a, la première, résolu explicitement les équations reliant la connexion affine au tenseur fondamental de nous donner cette œuvre.

Paris, 10 mai 1955. André Lichnerowicz.

AVERTISSEMENT.

« *Dieu est sophistiqué mais il n'est pas malveillant* ».
Albert EINSTEIN.

J'ai voulu rassembler ici les principes et quelques-uns des développements de la théorie du champ unifié d'Einstein-Schrödinger. Il s'agit d'un exposé partiel. Malgré leur intérêt, j'ai en effet systématiquement laissé de côté certains travaux dont l'orientation aurait nui à l'homogénéité de ce livre, certaines recherches — notamment celles qui se rapportent au problème de Cauchy — déjà développées dans des ouvrages antérieurs.

Dans une large mesure, j'ai unifié les notations des divers auteurs en conservant toutefois, dans certains cas particuliers, celles qui permettent de se reporter plus facilement aux textes originaux.

La plupart des chapitres aboutissent à des conclusions qui soulèvent presque toutes, à l'heure actuelle, des difficultés plus ou moins importantes. L'existence de ces impasses est le sort commun de toutes les théories. Elles les explicitent plus ou moins clairement. La théorie du champ unifié allie à la simplicité de ses principes une certaine profusion de calculs et une grande richesse de formalisme. Aussi est-il particulièrement difficile de surmonter toutes les complications d'ordre mathématique, de trancher entre les interprétations physiques possibles pour dresser, dès maintenant, un bilan équitable entre les espoirs que permet la théorie et ses réalisations.

Il ne faut donc pas chercher ici un exposé didactique de résultats définitivement acquis, mais le développement plus ou moins heureux, plus ou moins complet, d'une théorie en voie de formation. C'est un recueil de travaux dont le but est uniquement de faciliter les recherches sur ce sujet. Les conclusions fragmentaires auxquelles on aboutit ne peuvent être que des têtes de chapitre pour des investigations ultérieures.

Je tiens à remercier ici la Société Gauthier-Villars qui a réalisé avec beaucoup de soin la difficile impression de ce texte.

Paris. Octobre 1954.

LA THÉORIE
DU CHAMP UNIFIÉ D'EINSTEIN
ET QUELQUES-UNS DE SES DÉVELOPPEMENTS

INTRODUCTION

LE BUT ET LA MÉTHODE DES THÉORIES UNITAIRES. PLACE DE LA THÉORIE D'EINSTEIN PARMI LES THÉORIES UNITAIRES.

1. **Le champ et les charges en Relativité générale.** — En construisant la Relativité générale, Einstein a réussi à donner une interprétation purement géométrique du champ de gravitation. La loi de Newton est remplacée par six conditions indépendantes imposées à la structure de l'univers et les trajectoires des particules matérielles deviennent les géodésiques d'un espace de Riemann quadridimensionnel.

Cet espace de Riemann qui sert de cadre à la Relativité générale est complètement déterminé par la donnée de l'intervalle élémentaire :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \quad (1) \tag{1}$$

En effet, à partir du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, la connexion affine d'une variété riemannienne — c'est-à-dire le raccord des espaces affines tangents en deux points infiniment voisins — est bien définie. Elle est égale aux symboles de Christoffel :

$$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{2}$$

---

(1) Toutes les formules de cet Ouvrage impliquent la convention habituelle : on doit sommer sur tout indice répété en haut et en bas.

La structure de la variété est donc complètement déterminée. Elle diffère de la structure euclidienne par l'existence d'une courbure que représente le tenseur de Riemann-Christoffel :

$$G^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\sigma \begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{Bmatrix} - \partial_\nu \begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\sigma \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda\sigma \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\sigma \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda\nu \end{Bmatrix} \tag{3}$$

et cette courbure est bien définie à partir des $g_{\mu\nu}$.

1° Dans le vide (cas « extérieur »), on obtiendra les équations du champ en imposant à la structure de l'univers les conditions suivantes :

$$S_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

$S_{\mu\nu}$ est un tenseur du second rang assujetti seulement à être fonction des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées des deux premiers ordres. Les dix équations (4) ne peuvent être indépendantes car, au moins théoriquement, elles détermineraient complètement la métrique et imposeraient le choix du système de référence. Il ne peut donc exister que six conditions indépendantes entre les 10 $S_{\mu\nu}$ pour maintenir l'arbitraire nécessaire au choix du système de coordonnées dans un espace quadridimensionnel. On supposera donc que les $S_{\mu\nu}$ doivent vérifier quatre identités de conservation,

$$\nabla_\rho S_\mu{}^\rho = 0, \tag{5}$$

∇_ρ désignant la dérivation covariante formée à l'aide des symboles de Christoffel. On conserve ainsi quatre arbitraires dans la détermination des $g_{\mu\nu}$.

E. Cartan [2] a montré que le seul tenseur $S_{\mu\nu}$ qui répond aux conditions énoncées doit avoir la forme suivante :

$$S_{\mu\nu} = h\left[G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(G - 2\lambda)\right], \tag{6}$$

h et λ étant des constantes et $G_{\mu\nu}$ le tenseur de courbure contracté appelé encore tenseur de Ricci :

$$G_{\mu\nu} = G^{\rho}_{\mu\nu\rho} = \partial_\rho \begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{Bmatrix} - \partial_\nu \begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\rho \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda\rho \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho \\ \lambda\nu \end{Bmatrix}. \tag{7}$$

Or, si l'on forme à partir de (4) et de (6) l'invariant $S = g^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0$, on trouve

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = 4\lambda. \tag{8}$$

Dans le vide, la condition $S_{\mu\nu} = 0$ est donc équivalente à

(9) $$G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}.$$

2° A l'intérieur de la matière ou en présence d'un champ électromagnétique (cas « intérieur »), il faudra équilibrer les effets du tenseur conservatif $S_{\mu\nu}$ par ceux d'un autre tenseur également conservatif : c'est celui-ci qui va représenter l'énergie-impulsion du champ ou de la matière. On aura donc

(10) $$S_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}, \qquad \text{avec} \quad \nabla_\rho T_\mu{}^\rho = 0,$$

χ étant une constante. Pour $h = 1$, cette relation s'écrit encore

(11) $$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(G - 2\lambda) = \chi T_{\mu\nu}.$$

Elle présente donc un caractère très particulier puisque la signification de $S_{\mu\nu}$ est entièrement géométrique tandis que celle de $T_{\mu\nu}$ ne l'est pas du tout.

Or $T_{\mu\nu}$ comprend :

a. D'une part l'apport énergie-impulsion du champ électromagnétique. Dans une théorie maxwellienne, cette contribution est représentée par le tenseur

(12) $$\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} - F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho.$$

b. D'autre part, la contribution d'une distribution matérielle de densité μ :

(13) $$M_{\rho\sigma} = \mu u_\rho u_\sigma,$$

u_μ étant le quadrivecteur unitaire vitesse d'univers :

(14) $$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \qquad u^\mu u_\mu = 1.$$

Si nous supposons la présence simultanée de particules matérielles chargées et d'un champ électromagnétique, la condition

(15) $$\nabla_\rho T_\mu{}^\rho = 0 \qquad \text{ou} \qquad \nabla_\rho M_\mu{}^\rho = -\nabla_\rho \tau_\mu{}^\rho$$

se traduit, *si* $\tau_{\mu\nu}$ *est le tenseur de Maxwell* (12), par la condition

(16) $$\nabla_\lambda(\mu u_\sigma u^\lambda) = -F_{\sigma\lambda} J^\lambda,$$

en posant

(17) $$\nabla_\rho F^{\lambda\rho} = J^\lambda,$$

définition identique au premier groupe des équations de Maxwell si l'on suppose que J^λ est le quadrivecteur courant. S'il en est ainsi et si l'on admet avec Lorentz que tout courant est un courant de convection, on aura toujours

$$J^\lambda = \rho u^\lambda, \tag{18}$$

ρ étant la densité de charge. En multipliant (16) par u^σ et en sommant compte tenu de (14), on aura donc

$$\nabla_\lambda(\mu u^\lambda) = 0. \tag{19}$$

C'est l'équation de continuité ; (16) s'écrira alors simplement :

$$u^\lambda \nabla_\lambda u_\sigma = -\frac{\rho}{\mu} F_{\sigma\lambda} u^\lambda. \tag{20}$$

1° La trajectoire d'une particule matérielle dépourvue de charge ($\rho = 0$) se réduit donc à

$$u^\lambda \nabla_\lambda u_\sigma = 0, \tag{21}$$

équation qui peut s'écrire encore d'après la définition (14) des u^μ

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

et qui peut s'obtenir par le principe variationnel :

$$\delta \int ds = 0.$$

C'est l'équation des géodésiques de l'espace de Riemann défini par le ds^2 (1) : les trajectoires des particules matérielles, coïncident avec les géodésiques d'un espace de Riemann.

2° Dans le cas d'une particule chargée ($\rho \neq 0$), l'équation (20) montre que les trajectoires s'écartent, au contraire, des géodésiques d'un espace de Riemann. Elles pourraient s'interpréter comme les géodésiques d'un espace de Finsler dont la métrique serait déterminée par

$$ds' = (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}} + \frac{e}{m} \varphi_\mu dx^\mu,$$

en posant $\frac{\rho}{\mu} = \frac{e}{m}$ et en désignant par φ_μ le quadrivecteur potentiel électromagnétique tel que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu$. Le rapport $\frac{e}{m}$ varie d'une particule à l'autre. C'est donc à chaque type de particule chargée qu'il faudrait associer un espace de Finsler particulier : ses géodésiques constitueraient les trajectoires.

2. **Le rôle et les possibilités des théories unitaires.** — La relativité générale sépare radicalement le champ de gravitation :

a. du champ électromagnétique qui n'est l'objet d'aucune interprétation géométrique et forme, avec le champ de gravitation, un ensemble hétérogène;

b. des sources du champ qui conservent une interprétation phénoménologique même quand il s'agit de particules dépourvues de charge.

Les théories dites *unitaires* vont essayer de supprimer l'hétérogénéité champ électromagnétique-champ de gravitation.

D'autres théories, sans toucher à ce problème, ont voulu s'attaquer au dualisme champ-particules dans le domaine purement électromagnétique. Telles sont, par exemple, les théories de Mie et de Born-Infeld [122]. Bien entendu, ces théories ne se préoccupent pas d'une interprétation géométrique des champs. Néanmoins elles ont été appelées souvent, elles aussi, théories unitaires. Pour éviter toute confusion dans l'emploi de cet adjectif, nous les appellerons théories non dualistes.

Si l'on tient compte des problèmes nouveaux que poserait l'intégration du tenseur matériel dans un schéma purement géométrique, il semble que les difficultés que rencontrerait une théorie à la fois non dualiste et unitaire s'élèveraient de plusieurs côtés à la fois. L'ambition d'Einstein est de soutenir cette difficile gageure. Peut-être n'est-ce pas impossible car il arrive qu'un problème bien posé enlève d'un seul coup des obstacles qui, séparément, seraient demeurés irréductibles.

On appelle théorie unitaire une théorie qui réunit le champ électromagnétique et le champ de gravitation en un même hyperchamp dont les équations représentent des conditions imposées à la structure géométrique de l'univers.

1° Les équations qui décrivent le comportement du champ de gravitation et du champ électromagnétique dans le vide sont donc par définition relatives à un cas unitaire « extérieur », et s'écrivent toujours

$$S_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{ou} \qquad R_{\mu\nu} = 0,$$

$R_{\mu\nu}$ étant le tenseur de Ricci formé avec une connexion affine quelconque. Ces équations correspondent au cas « intérieur » gravitation-électromagnétisme que proposait la Relativité générale.

2° En présence de matière, les équations d'une théorie unitaire comportent encore un second membre puisqu'il ne s'agit pas, en général, d'intégrer au champ les sources du champ.

Pour imposer à la structure de l'univers des conditions supplémentaires qui représentent les équations électromagnétiques, il est impossible de rester dans le cadre d'une variété purement riemannienne. La description d'une telle variété est en effet épuisée par la donnée de sa métrique. Les conditions imposées à sa courbure suffisent, sans plus, pour interpréter les équations de la gravitation. L'électromagnétisme n'y trouve pas sa place.

Pour disposer de conditions supplémentaires, il faut compliquer le cadre primitif dans lequel Einstein avait situé la Relativité générale :

1° soit en augmentant le nombre des dimensions de la variété riemannienne;

2° soit en se plaçant d'emblée dans le cadre plus général des variétés à connexion affine quelconque, ce qui laisse plus de latitude pour définir le transport parallèle d'un vecteur le long d'un contour fermé infiniment petit.

3. **Les théories unitaires à plus de quatre dimensions.** — Les théories à plus de quatre dimensions tiennent une place importante dans l'ensemble des théories unitaires. La première en date est celle de Kaluza (1921) [1], [10], [12] qui a été ensuite précisée et élargie par Einstein-Mayer (1932) [1], [12]. Une modification récente du postulat de base a conduit aux théories à 15 variables de champ de Jordan (1947) et de Thiry (1948) [10], [12]. Dans toutes ces théories, l'espace à cinq dimensions est un continuum auxiliaire dont la géométrie fournit un formalisme convenable pour interpréter les lois du champ généralisé. C'est pourquoi ces théories comportent obligatoirement une « condition cylindrique » qui met en évidence le rôle particulier de la cinquième dimension. C'est seulement dans certains changements de coordonnées, satisfaisant à cette condition cylindrique, qu'on peut s'attendre à une covariance des équations du champ.

Un autre développement d'un formalisme à cinq dimensions a été réalisé par les théories « projectives ».

La condition cylindrique s'interprète plus naturellement comme une condition « projective » et montre plus nettement encore le rôle purement auxiliaire de la variété pentadimensionnelle.

A côté de ces théories, certaines tentatives se sont développées dans un esprit assez différent. Gênées par l'introduction d'un pur formalisme, elles ont supposé que l'espace réel possédait effectivement cinq dimensions. La seule différence possible avec les théories précédentes (c'est-à-dire entre une géométrie et un formalisme géométrique) réside dans l'interprétation de la condition cylindrique. Celle-ci devient une hypothèse de structure que doit satisfaire l'espace physique pentadimensionnel : la théorie d'Einstein-Bergmann-Bargmann [1], [12] suppose que l'espace à cinq dimensions est fermé suivant la coordonnée x^5. La théorie à six dimensions de Podolanski [12] lui attribue une structure en feuillets. Si gratuites que soient ces hypothèses, elles restent cependant plus proches de l'esprit de la Relativité générale qui conduisait à une géométrisation effective des forces de gravitation.

Le grand avantage des théories à cinq dimensions, ou tout au moins de certaines de ces théories, est le suivant : dans un espace de Riemann à quatre dimensions, les trajectoires des particules chargées ne sont pas des géodésiques. S'il est possible de les interpréter comme les géodésiques d'un espace de Finsler, c'est à la condition d'attacher à chaque type de particule caractérisé par le rapport $\frac{e}{m}$, un espace de Finsler différent. Or, il est possible de montrer qu'on peut faire correspondre à chaque famille de trajectoires relative à un certain $\frac{e}{m}$, une représentation paramétrique dans un espace à cinq dimensions : ces trajectoires coïncident avec les géodésiques de l'espace de Riemann à cinq dimensions.

Ce résultat remarquable incite à développer une théorie unitaire dans un formalisme pentadimensionnel. Les équations d'Einstein et de Maxwell se groupent dans un formalisme unifié satisfaisant. Cependant, outre certaines critiques propres à chaque théorie, on a reproché aux théories pentadimensionnelles le principe même de l'utilisation d'une variété auxiliaire, c'est-à-dire la nécessité d'une condition cylindrique. On leur a reproché surtout d'aboutir à une simple codification des équations d'Einstein et de Maxwell dans un formalisme pentadimensionnel. Or si intéressante que soit cette synthèse (et son intérêt est peut-être diminué du fait même qu'elle se rapporte à une multiplicité auxiliaire et non à l'espace physique lui-même), elle devrait conduire, comme a su le faire la Relativité générale, à des prévisions nouvelles capables d'infirmer ou de confirmer la théorie.

C'est précisément à ces objections que répondent les théories à 15 variables de champ de Jordan et de Thiry. Les deux conséquences essentielles de ces théories sont les suivantes :

1° Le facteur de gravitation χ n'est plus constant. Il est susceptible de variations, d'ailleurs très faibles, liées à celles du rapport $\frac{e}{m}$.

2° Les lois d'Einstein et de Maxwell font intervenir des termes supplémentaires dus à la variation de χ. Si χ est constant on retrouve les lois classiques.

3° Il existe une quinzième équation du champ relative aux variations de χ. Elle signifie qu'en l'absence de toute charge ($\rho = 0$) la présence de matière ($\mu \neq 0$) doit créer un champ magnétique. On arrive ainsi à la prévision de l'existence d'un champ dû à la matière en mouvement et particulièrement à un corps en rotation (effet Blackett).

4. **Les théories unitaires quadridimensionnelles. Structure d'une variété à connexion affine quelconque.** — A côté des théories à cinq dimensions on a développé, dès 1918, des théories qui s'efforcent de réaliser une synthèse gravitation-électromagnétisme dans le cadre d'un espace-temps quadridimensionnel. Elles doivent alors partir de multiplicités plus générales que la variété riemannienne afin de leur imposer des conditions de structure supplémentaires qui coïncideront avec les équations classiques de l'électromagnétisme ou — ce qui est mieux — qui les modifieront.

L'espace de Riemann pourvu d'une seule sorte de courbure sera remplacé par le continuum plus général formé par une variété à connexion affine quelconque. Elie Cartan a montré [3] que la structure d'une telle variété, définie par les coefficients de connexion $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, comprenait en général :

a. Une courbure de rotation définie par le tenseur Ω^{ρ}_{μ} qui généralise le tenseur de Riemann-Christoffel.(1) :

$$\Omega^{\rho}{}_{\mu} = -\frac{1}{2} R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}[dx^{\nu}\,\delta x^{\sigma}] = -\frac{1}{2}\left(\partial_{\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\right)[dx^{\nu}\,\delta x^{\sigma}].$$

b. Une courbure d'homothétie que suffit à caractériser l'invariant $\Omega = \Omega^{\mu}_{\mu}$ et qui est nulle dans un espace de Riemann.

c. Une torsion, nulle aussi dans un espace de Riemann et représentée par le vecteur

$$\Omega^{\rho} = -\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}[dx^{\mu}\,\delta x^{\nu}].$$

---

(1) Les $dx^{\mu}\,\delta x^{\nu}$ désignent les accroissements. On a

$$[dx^{\mu}\delta x^{\nu}] = dx^{\mu}\,\delta x^{\nu} - \delta x^{\mu}\,dx^{\nu}.$$

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, PARIS (6^e)

COSTA DE BEAUREGARD (Olivier). — **La relativité restreinte et la première mécanique broglienne.** (Fascicule CIII du *Mémorial des Sciences mathématiques.*) In-8 (16-25) de 72 pages; 1944.

CUNHA (Octavio A. Ribeiro da), ancien Professeur de « Escola Nacional de Engenharia » de Rio de Janeiro. — **Confrontation entre la Mécanique rationnelle et la théorie de la relativité restreinte.** In-4° (22,5-28) de 121 pages, avec 24 figures; 1952.

DIVE (Pierre), Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier. — **Ondes ellipsoïdales et Relativité.** Préface de M. Jules Haag, Membre de l'Institut. In-8 (16-25) de x-140 pages, avec 18 figures; 1950.

EINSTEIN (A.). — **Sur l'Electrodynamique des corps en mouvement.** (Collection des *Maîtres de la Pensée scientifique.*) Traduction de Maurice Solovine. In-16 de II-56 pages, avec un portrait de l'auteur. Nouveau tirage; 1955.

— **L'Ether et la Théorie de la Relativité. La géométrie et l'expérience.** Traduction française par Maurice Solovine. 3e édition revue. In-4° carré (14-22,5) de 40 pages; 1953.

— **Quatre conférences sur la Théorie de la Relativité,** faites à l'Université de Princeton. Traduction française par Maurice Solovine. In-8 (16-25) de 96 pages. Nouveau tirage; 1955.

— **Sur le problème cosmologique. Théorie de la Gravitation généralisée.** Traduit de l'anglais par Maurice Solovine. In-8 (16-25) de 50 pages; 1951.

— **La Théorie de la Relativité restreinte et générale. Exposé élémentaire suivi d'une étude originale intitulée :** *La Relativité et le problème de l'espace.* Traduit de l'allemand par Maurice Solovine. In-8 (13-19) de 180 pages; 1954.

LAMOUCHE (A.). — **La Théorie harmonique. Le principe de simplicité dans les mathématiques et dans les sciences physiques.** In-8 (16-25) de 484 pages; 1954.

147298-55 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.

Poids : 0^{kg},305.