Vopěnkova Alternativní teorie množin v matematickém kánonu 20. století[1]

Zuzana Haniková
Ústav informatiky AV ČR, v. v. i., Praha
hanikova@cs.cas.cz

Abstract:

Vopěnka's Alternative Set Theory in the Mathematical Canon of the 20th Century
Vopěnka's Alternative Set Theory can be viewed both as an evolution and as a revolution: it is based on his previous experience with nonstandard universes, inspired by Skolem's construction of a nonstandard model of arithmetic, and its inception has been explicitly mentioned as an attempt to axiomatize Robinson's nonstandard analysis. Vopěnka preferred working in an axiomatic theory to investigating its individual models; he also viewed other areas of nonclassical mathematics through this prism. This article is a contribution to the mapping of the mathematical neighbourhood of the Alternative Set Theory, and at the same time, it submits a challenge to analyze in more detail the genesis and structure of the philosophical links that eventually influenced the Alternative Set Theory.

Keywords: Petr Vopěnka, Alternative Set Theory, nonstandard analysis, philosophy of mathematics, nonclassical mathematics, logic, axiomatic theory

DOI: https://doi.org/10.46854/fc.2022.3r.485

1. Proč se vracíme k Alternativní teorii množin?

Alternativní teorií množin (ATM)[2] míníme především výklad podaný ve dvou Vopěnkových monografiích: v *Mathematics in the Alternative Set Theory*, publikované v anglickém jazyce v roce 1979 v překladu P. Hájka,[3] a v *Úvodu do matematiky v alternatívnej teórii množín*, vydaném ve slovenštině o deset let

1 Text vznikl s podporou výzkumného záměru RVO: 67985807 Ústavu informatiky AV ČR. Libor Běhounek, Jiří Hanika a Štěpán Holub vznesli cenné připomínky k některým dřívějším verzím textu nebo jejich částem. Knihovna Ústavu informatiky AV ČR, zejména Ludmila Nývltová, byla nápomocna při získávání některých starších publikací. Děkuji také třem anonymním recenzentům *Filosofického časopisu* za podněty vedoucí k vylepšení textu.

2 Atribut „Vopěnkova" vypouštíme, pokud nemůže dojít k mýlce.

3 Vopěnka, P., *Mathematics in the Alternative Set Theory*. Transl. P. Hájek. Leipzig, Teubner 1979.

později v překladu P. Zlatoše,[4] kde je rozšířený matematický obsah doplněn značným objemem motivačních, filosofických a historických pasáží. Ani jedna z monografií neměla ambice předložit vyčerpávající přehled veškerého v době svého vzniku dostupného matematického materiálu o ATM. Relevantní je dále dlouhá řada časopiseckých článků, povětšinou dostupných v *České digitální matematické knihovně*,[5] z nichž některé ovlivnily i výslednou podobu Vopěnkových monografií,[6] a sborník příspěvků ze sympozia věnovaného ATM,[7] který byl příležitostí publikovat i ucelenější aktuální materiály o této teorii, a lze jej tedy chápat jako kompendium výsledků a odkazů na ně.

Odděleně je třeba uvažovat předchozí Vopěnkovu a Hájkovu *The Theory of Semisets* z r. 1972[8] a následnou Vopěnkovu *Novou infinitní matematiku*, jejíž ucelená publikace vyšla r. 2015.[9]

Vopěnkovo dílo se dosud nedočkalo systematického zpracování a zařazení do souvislostí na poli historie a filosofie matematiky. K dispozici není ani podrobnější vědecký životopis, nicméně velmi informativní je text A. Sochora z r. 2001[10] ve speciálním čísle *Annals of Pure and Applied Logic* věnovaném Vopěnkovi, které Sochor také editoval. Nabízí periodizaci Vopěnkova díla až do svého vydání a kromě vlastního období práce na ATM diskutuje také období předchozí, vyznačující se významnými výsledky tzv. pražského semináře teorie množin a publikací *The Theory of Semisets* [Teorie polomnožin].

Vopěnka navázal na své monografie o ATM řadou přednášek a článků,[11] jakož i šíře pojatými texty z historie teorie množin, které mimo jiné sledují okolnosti vzniku ATM.[12] Čeští logici průběžně Vopěnkovy práce reflektují: z nedávné doby jde např. o Švejdarovu práci „Vopěnka and Hájek: History

4 Vopěnka, P., *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*. Prel. P. Zlatoš. Bratislava, Alfa 1989.

5 www.dml.cz.

6 Dle Vopěnkova *Úvodu do matematiky v alternatívnej teórii množín* (c.d.) k rozvoji teorie přispěli zejména K. Čuda, J. Mlček, A. Sochor, A. Vencovská, J. Chudáček, M. Resl, K. Trlifajová, B. Vojtášková, J. Sgall, J. Witzany, J. Guričan, M. Kalina a P. Zlatoš.

7 *Proceedings of the 1st Symposium Mathematics in the Alternative Set Theory* (held in Stará Lesná on May 28 – June 4, 1989). Eds. J. Mlček – M. Benešová – B. Vojtášková. Bratislava, Association of Slovak Mathematicians and Physicists (JSMF) 1989.

8 Vopěnka, P. – Hájek, P., *The Theory of Semisets*. Transl. T. Jech – G. Rousseau. Praha – Amsterdam, Academia – North-Holland Publishing Company 1972.

9 Vopěnka, P., *Nová infinitní matematika*. Praha, Karolinum 2015.

10 Sochor, A., Petr Vopěnka (* 16. 5. 1935). *Annals of Pure and Applied Logic*, 109, 2001, No. 1–2, s. 1–8.

11 Např. Vopěnka, P., O co jde v alternativní teorii množin. In: Fiala, J. (ed.), *Horizonty nekonečna. Matematický pohled na svět*. Praha, Moraviapress 2004, 51–68. Anglicky v překladu A. Vencovské publikováno jako: Vopěnka, P., What Is the Alternative Set Theory All About. In: *Proceedings of the 1st Symposium Mathematics in the Alternative Set Theory* (held in Stará Lesná on May 28 – June 4, 1989), c.d., s. 28–40. Viz též Vopěnka, P., The Philosophical Foundations of the Alternative Set Theory. *International Journal of General Systems*, 20, 1991, No. 1, s. 115–126.

12 Vopěnka, P., *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*. Praha, Práh 2004.

and Background“[13] nebo monotematický blok „Setkání s Petrem Vopěnkou“ ve *Filosofickém časopise*,[14] editovaný K. Trlifajovou, s příspěvky odrážejícími dobu Vopěnkova působení na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze, zejména v rámci jeho pracovní skupiny věnující se ATM, i nověji rozvíjené směry z doby jeho angažmá na Fakultě filozofické Západočeské univerzity v Plzni. Ze stejné doby pochází i několik neformálních příspěvků, jako je článek K. Trlifajové „Poezie matematiky Petra Vopěnky“,[15] doplněný přetiskem ukázek z *Nové infinitní matematiky*, nebo nekrology od J. Mlčka[16] a J. Chudáčka.[17]

Některé pasáže z Vopěnkových monografií věnovaných ATM, i některé navazující práce, podněcují čtenáře k dichotomickému nazírání matematického světa: na jedné straně stojí Vopěnkova ATM, na druhé tzv. *Cantorova teorie množin* – prosperující, avšak do sebe zahleděná a odtažitá běžné zkušenosti. Tento pojem je ve Vopěnkově díle často užíván, je tedy přirozené se nad ním pozastavit s otázkou: co je Cantorova teorie množin? V Sochorově článku „The Alternative Set Theory“ z r. 1976[18] nacházíme prosté vymezení: jde o *teorii nekonečna*, kterou předestřel G. Cantor a která umožňuje tento pojem studovat a klasifikovat. Toto vymezení má být všeobjímající: přesahuje např. obvyklé meze pojmu *klasická teorie množin*, což není z pouhého označení patrné, oba pojmy jsou proto někdy ztotožňovány. Matematická komunita je pak líčena jakožto homogenní co do pragmatického příklonu k této teorii v roli základů matematiky. Vopěnka sice názorovou pluralitu v moderních základech matematiky občas v rámci výkladu prezentuje, ale téměř výhradně v pohledu zpět, tj. jako již vyřešenou záležitost. V obou Vopěnkových monografiích věnovaných ATM se také hovoří o krizi současné matematiky.[19]

13 Švejdar, V., Vopěnka and Hájek, History and Background. *Journal of Applied Logics*, 5, 2018, No. 6, s. 1261–1271.

14 Téma: Setkání s Petrem Vopěnkou (monotematický blok). Ed. K. Trlifajová. *Filosofický časopis*, 64, 2016, č. 4, s. 491-638.

15 Trlifajová, K., Poezie matematiky Petra Vopěnky. *Vesmír*, 94, 2015, č. 6, s. 342–343.

16 Mlček, J., Odešel Petr Vopěnka. *Filosofický časopis*, 63, 2015, č. 2, s. 315–317.

17 Chudáček, J., Vzpomínka na Petra Vopěnku. Nekrolog z blogu autora převzala Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF). Dostupný na: https://jcmf.cz/?q=en/node/984; 2015; [cit. 11. 7. 2022].

18 Sochor, A., The Alternative Set Theory. In: *Set Theory and Hierarchy Theory: A Memorial Tribute to Andrzej Mostowski*. Eds. W. Marek – M. Srebrny – A. Zarach. Bierutowice, Poland, 1975. Heidelberg – NewYork, Springer-Verlag 1976, s. 259–261.

19 Sekce 3.7–3.12 *Úvodu do matematiky v alternatívnej teórii množín* nastiňují proces, kterým se matematika proměnila v množinovou matematiku a následně množinová matematika v Cantorovu teorii množin. Tento proces sice letmo zmiňuje „různé teorie množin“, avšak neposkytuje čtenáři ani náznak vysvětlení, které teorie jsou míněny (s. 126); ke konci výkladu Vopěnka pouze konstatuje: „Príčiny súčasnej krízy infinitnej matematiky neslobodno hľadať v jej prejavoch, ale v základoch samotného množinového poňatia matematiky. Týmto základom je však Cantorova teória množín.“ Vopěnka, P., *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*, c.d., s. 128.

Zmíněná dichotomie je částečně také dílem *příběhu o ATM*, která měla (a v inkarnaci *Nové infinitní matematiky* stále má) ambice dosavadním nevyhovujícím základům matematiky konkurovat. Podobně velký příběh žila před ATM také teorie polomnožin: „Teorie polomnožin není pomocným technickým aparátem, studuje totiž pojem, který by se mohl ukázat pro matematiku (i metamatematiku) zásadním.“[20] Nejjednodušší verze tohoto příběhu pojímá případné další aktéry, tj. jiné ambiciózní alternativní základy matematiky nebo jen argumenty, proč by se o takových alternativách mělo uvažovat, jako vedlejší. I poněkud nešťastně zvolený anglický název pro tuto teorii, totiž *the alternative set theory*, k tomuto dichotomickému obrazu přispívá.[21] Kontrast mezi očekáváním a vnímanou skutečností pak provází povzdech nad tím, že svět Vopěnkovu ATM neobjevil, nepochopil, nebo nedocenil.

Dichotomický pohled i epiku kolem ATM lze zachytit citacemi; neuvádíme je zde zejména proto, že se často objevují jakoby mimochodem v textech s odlišným nosným tématem. Obraz, ke kterému přispívají, pak přesahuje jakýkoli jednotlivý text a existuje zejména v obecném, nepsaném povědomí. Jako příklad vezměme úryvek z textu „Petr Hájek: A Scientific Biography“ autorky tohoto článku: „Jakkoli se Vopěnkova alternativní teorie množin dosud těší přízni českých logiků, globální pohled naznačuje, že sdílí osud jiných doposud navržených alternativ k hlavnímu proudu matematiky: dav, ubírající se klasickou cestou, ji ušlapal.“[22] V textu, který vznikl jako odborný životopis P. Hájka, a který se tedy P. Vopěnky týká jen zprostředkovaně, je tendence sklouznout ke zjednodušenému pohledu na postavení Vopěnkovy školy ATM; ten je implicitně akceptován.

Nástin dichotomické prezentace ATM je sám o sobě také zjednodušením. Není navíc povinností pracujícího matematika, usilujícího o vymanění z osidel dominantní matematické ontologie, podat vyčerpávající přehled veškerého dění i mimo tuto ontologii. Výklad metodou srovnání klasické teorie množin s ATM ve Vopěnkových textech může být dán také předpokladem o dosavadních znalostech nebo snad i preferencích čtenářů.

20 “The theory of semisets is not an auxiliary technical means but it studies a notion which might prove to be one of fundamental mathematical (and metamathematical) notions.” Hájek, P., Why Semisets? *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 14, 1973, No. 3, s. 397–420.

21 K tomu blíže Chudáček, J., Vzpomínka na Petra Vopěnku, c.d.

22 “While Vopěnka’s alternative set theory is still a popular concept among Czech logicians, from a more global point of view it seems to have shared the fate of many hitherto proposed alternatives to the mainstream conception of mathematics: it was trampled underfoot the crowd that pursued the classical direction.” Haniková, Z., Petr Hájek: A Scientific Biography. In: Montagna, F. (ed.), *Petr Hájek on Mathematical Fuzzy Logic*. Vol. 6: Outstanding Contributions to Logic. Cham – Heidelberg – New York – Dordrecht – London, Springer-Verlag 2015.

Práce reflektující Vopěnkův tvůrčí počin však potřebují zpracovat také kontext. Náš pohled na ATM bude vzdálen pohledu dichotomickému: kontextem nám nebude jen klasická teorie množin, nýbrž synchronní a diachronní pohled na relevantní partie matematiky, včetně těch, které lze chápat jako neklasické. Připomeneme, že spíše než osamocenou vlaštovkou je ATM součástí poměrně dobře rozpoznatelných matematických směrů, a to zejména zkoumání nestandardních univerz (ve Skolemově smyslu), striktního finitismu ve smyslu Parikhova článku „Existence and Feasibility in Arithmetic“[23] a snahy eliminovat artefakty axiomatických systémů formálních teorií,[24] reprezentované například reverzní matematikou. Náš záměr je komplementární tomu, co Vopěnka o ATM z historického hlediska obvykle uvádí sám: rozbor Bolzanových *Paradoxů nekonečna*, Leibnizův infinitezimální kalkul, případně vybrané citace francouzské matematické školy přelomu 19. a 20. století a Robinsonova nestandardní analýza.

ATM bývá s Robinsonovou nestandardní analýzou často asociována. Sám Vopěnka glosuje situaci takto: „Po formální a technické stránce má Alternativní teorie množin blízko k nestandardní analýze a lze ji po této stránce za speciální případ nestandardní analýzy považovat.“[25] Hlavní námitku, kterou Vopěnka vůči nestandardní analýze vznesl, uvedeme do kontextu analogických námitek vůči dalším oblastem neklasické matematiky, jako je teorie fuzzy množin nebo intuicionistická logika: jde o *vazalské postavení* vůči Cantorově teorii množin, proti kterému Vopěnka staví odklon (ontologický a následně axiomatický) od této teorie. Připomeneme také, že Vopěnkova práce s nestandardními modely teorie množin začíná přibližně v r. 1960; dříve než mohl mít příležitost seznámit se s Robinsonovými publikacemi o nestandardní analýze.[26]

V míře, ve které byly práce o ATM v angličtině publikovány, jsou také anglicky hovořícími odborníky interpretovány, zařazovány do kontextu, hodnoceny a aplikovány. Příkladem je Fletcherova kapitola „Infinity“,[27] která uvádí

23 Parikh, R., Existence and Feasibility in Arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, 36, 1971, No. 3, s. 494–508.

24 “It is commonly noted that set theory produces far more superstructure than is needed to support classical mathematics.” Holmes, M. R., Alternative Axiomatic Set Theories. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. E. N. Zalta. Stanford, CA, 2017.

25 “From the formal and technical point of view, Alternative Set Theory is rather near to Nonstandard Analysis and can be considered, from this point of view, for a particular case of Nonstandard Analysis.” Vopěnka, P., *Mathematics in the Alternative Set Theory*, c.d., s. 3.

26 Tento fakt je již také v publikacích o Vopěnkově práci zmíněn: Sochor, A., Petr Vopěnka (* 16. 5. 1935), c.d.; Švejdar, V., Infinite Natural Numbers: An Unwanted Phenomenon, or a Useful Concept? In: Peliš, M. – Pučochář, V. (eds.), *The Logica Yearbook 2010*. London, College Publications 2011, s. 283–294.

27 Fletcher, P., Infinity. In: *Handbook of the Philosophy of Science*. Vol. 5: Philosophy of Logic. An Anthology. Ed. D. Jacquette. Amsterdam, Elsevier 2007, s. 523–585.

Vopěnkovu a Sochorovu ATM jako propracovaný příklad teorie *proveditelnosti* [*feasibility*], nebo Deanův článek „Strict Finitism, Feasibility, and the Sorites",[28] kde je ATM citována jako patrně singulární případ teorie, která používá nestandardnost k modelování vágnosti. Novější matematické práce v ATM jsou patrně výjimkou; jmenujme práci E. Jeřábka *Provability Logic of the Alternative Set Theory*.[29] Díky úsilí M. R. Holmese je dostupné encyklopedické shrnutí alternativních teorií množin v *Stanford Encyclopedia of Philosophy*,[30] variantou je článek se spoluautory T. Forsterem a T. Libertem.[31] Není tedy správné tvrdit, že Vopěnkova ATM zapadla. Společně s jeho prací v oboru klasické teorie množin, zejména boolovských modelů a velkých kardinálů, je součástí všeobecného povědomí.

2. O matematické podobě Alternativní teorie množin[32]

ATM nabízí svébytné základy matematiky bez nutné opory Zermelovy–Fraenkelovy teorie množin s axiomem výběru (ZFC) či jiné již rozvinuté teorie. Výklad matematického světa, podepřený vhodně zvolenými axiomy, je tedy možný bez poukazů k ontologii zprostředkované klasickou teorií množin, potažmo k modelům ATM v ZFC.[33] Mohli bychom říci, že jde o *axiomatické* budování neklasické matematiky nad klasickou logikou, s poznámkou, že ATM je někdy prezentována jako neformální teorie, určená spíše principy než souborem axiomů. Nicméně je k dispozici také několik variant axiomatické teorie, která je nastíněna ve Vopěnkově monografii *Mathematics in the Alternative Set Theory*, přičemž navazující Sochorovy práce „Metamathematics of the Alternative Set Theory I–III"[34] jsou precizním rozborem formulací jednotlivých axiomů ATM, jejich variant a interakce.

Monografie *Mathematics in the Alternative Set Theory* předkládá důkaz axiomů teorie ZF_{fin} – varianty Zermelovy–Fraenkelovy teorie, ve které je

28 Dean, W., Strict Finitism, Feasibility, and the Sorites. *The Review of Symbolic Logic*, 11, 2018, No. 2, s. 295–346.

29 Jeřábek, E., *Provability Logic of the Alternative Set Theory.* Diplomová práce. Filozofická fakulta Univerzity Karlovy v Praze, 2001.

30 Holmes, M. R., Alternative Axiomatic Set Theories, c.d.

31 Holmes, M. R. – Forster, T. – Libert, T., Alternative Set Theories. In: *Handbook of the History of Logic*. Vol. 6: Sets and Extensions in the Twentieth Century. Eds. D. M. Gabbay – A. Kanamori – J. Woods. Amsterdam et al., Elsevier 2012.

32 Prameny, o které se opírá tato část zde předkládaného článku, jsou obě výše zmíněné Vopěnkovy monografie věnované ATM: *Mathematics in the Alternative Set Theory* a *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín.*

33 A nejen možný: v převážné části obou monografií je výklad, ku prospěchu věci, takto veden.

34 Sochor, A., Metamathematics of the Alternative Set Theory I, II, III. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 20, 1979, No. 4, s. 697–722; 23, 1982, No. 1, s. 55–79; 24, 1983, No. 1, s. 137–154.

axiom nekonečna nahrazen svou negací – v ATM, je tedy k dispozici veškerý matematický aparát teorie dědičně konečných množin:[35] například lze zavést třídu přirozených čísel *N*.

ATM pracuje s třídami jako se svébytným typem objektů. Je nasnadě, že třídy budou pro formulaci zajímavých a pro ATM charakteristických tezí nepostradatelným jazykovým prostředkem. ATM se neomezuje na třídy definovatelné množinovými formulemi. *Polomnožiny* jsou třídové části množin; vlastní polomnožiny (ty, které nejsou množinami) množinově definovatelné nejsou.

Příkladem třídy, která není množinově definovatelná, je třída *Fin* množin konečných ve smyslu ATM: tedy těch, *jejichž každá podtřída je množinou*. Tato definice je podkladem pojmu *přirozeného nekonečna*, samého *raison d'être* ATM. Všechny vlastní třídy jsou (vopěnkovsky, tj. přirozeně) nekonečné: „pri stretnutí s nejakou takou vlastnou triedou sa vždy na množstve jej prvkov stretávame s javom neostrosti. (…) Nositeľmi prirodzeného nekonečna sú teda predovšetkým vlastné triedy." Všimněme si, že pojem nekonečna je již ve své definici s pojmem neostrosti svázán. Množina zahrnující vlastní podtřídu je ve smyslu definice uvedené výše nekonečná: „s javom neostrosti sa však stretávame aj na množstve prvkov niektorých množín, a to vtedy, keď sa nám pri stretnutí s takouto množinou vydelí z množstva jej prvkov nejaká neostrá časť."[36] Výstižně zachycuje podstatu vopěnkovského přirozeného nekonečna A. Sochor: „Klasická teorie množin klade nekonečno jen ‚za' konečné množiny, kdežto alternativní teorie množin je klade také mezi množiny formálně konečné."[37]

Průnikem tříd *N* a *Fin* je třída *FN* všech konečných přirozených čísel; ta je prototypem vlastní polomnožiny. Dle axiomu prodloužení je (třídová) funkce na *FN* podtřídou nějaké množinové funkce. To implikuje existenci

35 Sochorův článek „Metamathematics of the Alternative Set Theory III", § 9 o modelech ATM v ZF (Zermelovy–Fraenkelovy teorie množin), ukazuje, že ATM je konzervativním rozšířením ZF_{fin}. To znamená, že libovolné tvrzení v jazyce množin je dokazatelné v ZF_{fin} tehdy a jen tehdy, když je dokazatelné v ATM. Předchozí § 6 v „Metamathematics of the Alternative Set Theory II" ukazuje, že ATM je ekvikonzistentní aritmetice 3. řádu.

36 Obě citace viz v: Vopěnka, P., *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*, c.d., s. 137–138.

37 "III. *Every countable function is a subclass of a function which is a set.* This thesis can be held for an expression of the human aspiration of going beyond horizons – to transcend them mentally. It appears to be the most important and powerful thesis of the alternative set theory. General mathematics works with infinity, therefore, admitting only formally finite sets, we must be able to reach infinity through finite sets. Our third thesis expresses exactly a formalization of this approach (which is, in fact, the only possible in our case). Moreover, it makes possible to pass from investigation of infinite structures to investigations of formally finite sets with convenient structures. The classical set theory puts infinity only 'beyond' finite sets while the alternative set theory puts it also among formally finite sets." Sochor, A., Bases of Alternative Set Theory. In: *Proceedings of the 1st Symposium Mathematics in the Alternative Set Theory* (held in Stará Lesná on May 28 – June 4, 1989), c.d., s. 43–70.

vlastních polomnožin: zatímco teorie polomnožin existenci vlastních polomnožin připouští, ATM ji postuluje. Třída *FN* je v ATM tradičně chápána jako polomnožina reprezentující *cestu k obzoru*. Jak *N*, tak *FN* interpretují Peanovu aritmetiku a jsou základem pro budování nestandardního rozšíření racionálních čísel. I nekonečná přirozená čísla jsou množiny, a spadají tedy v množinovém smyslu do gesce teorie ZF_{fin}: mezi dvěma různými přirozenými čísly neexistuje množinová bijekce, zatímco třídová nadstavba umožňuje variantu tzv. Hilbertova hotelu, totiž konstrukci bijektivního třídového zobrazení x na $x \cup \{y\}$ pro nekonečnou množinu x a libovolnou množinu y.

Neformální vyjádření myšlenkového obratu realizovaného popsanými konstrukcemi najdeme v recenzi publikace *The Theory of Semisets* z pera Azriela Lévyho: „V jednotlivých modelech teorie množin mohou existovat další soubory množin [vedle těch příliš velkých; pozn. aut.], které nelze považovat za množiny, má-li model splňovat axiomy teorie množin. Příkladem je soubor přirozených čísel bez prvního prvku v nestandardním modelu teorie množin. Takové soubory ‚vědí příliš mnoho', aniž by nutně byly příliš velké. Konvenční teorie množin existenci takových souborů nepřipouští, ani jako množin, ani jako tříd. V teorii o nich nelze nic říci – nejsou ‚občané'. Výchozí myšlenkou knihy je přijetí takových souborů jako dalších tříd."[38]

ATM počítá pouze se dvěma nekonečnými mohutnostmi tříd, a to spočetnými třídami (které jsou vlastními polomnožinami) a třídami nespočetnými. Existenci třídové bijekce mezi libovolnými dvěma nespočetnými třídami postuluje ATM jako axiom a prezentuje ji jako nejjednodušší postoj, který lze zaujmout ke kardinalitám tříd, a jako maximální co do existence možných (bijektivních, třídových) zobrazení.[39]

3. Geneze Alternativní teorie množin

V roce 1962 Vopěnka publikuje soubor prací věnovaný konstrukci nestandardního modelu teorie množin,[40] v němž navazuje na Skolemovu konstruk-

38 "For a particular model of set theory, there may be other collections of sets of the model that cannot be admitted as sets of the model because they could cause the model to disobey the axioms of set theory. A simple example is a collection of natural numbers without a least member in a non-standard model of set theory. Such collections 'know too much' even though they are not necessarily very big. Conventional set theory does not admit the existence of such collections either as sets or as classes. There is no way to speak about them in the theory–they are 'nonpersons'. The main idea of the book is to admit such collections as additional classes." Levy, A., Review: The Theory of Semisets by Petr Vopěnka and Petr Hájek. *The Journal of Symbolic Logic*, 49, 1984, No. 4, s. 1422–1423.

39 Vopěnka, P., *Mathematics in the Alternative Set Theory*, c.d., s. 52.

40 Počínaje prací: Vopěnka, P., Odin metod postroenija něstandardnoj modeli aksiomatičeskoj teorii množestv Bernaysa-Gödela. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 143, 1962, No. 1, s. 11–12.

ci nestandardního modelu Peanovy aritmetiky z r. 1934,[41] se kterou ho seznámil L. S. Rieger.[42] V příspěvku „Pražský seminář teorie množin" Vopěnka explicitně píše: „V té době jsem také začal navštěvovat Riegerův seminář z matematické logiky, odkud jsem si odnesl znalost Skolemova nestandardního modelu aritmetiky přirozených čísel. Takto vyzbrojen jsem pak na začátku roku 1961 vytvořil nestandardní model Gödelovy–Bernaysovy teorie množin, a sice metodou ultraproduktu."[43] Vopěnka výslovnou citaci Skolemova článku neuvádí. Není zmíněna např. ani Łośova věta o ultraproduktu z r. 1955;[44] v souvislosti s ní Vopěnka o mnoho let později ve *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky* potvrdil, že jeho výsledky jsou na ní nezávislé: „Tuto práci [Łośův článek; pozn. aut.] jsem neznal a neznali ji ani Tarského žáci ve Spojených státech, kteří pracovali na podobné problematice jako já, a sice přesně v téže době. (Alespoň Dana Scott ji v práci, o níž pojednáváme v následujícím oddílu, necituje.)"[45] A. Sochor v článku „Petr Vopěnka (*16. 5. 1935)"[46] připojil v diskuzi těchto Vopěnkových prací z počátku 60. let k letopočtu vykřičník, který snad lze vztahovat k Robinsonově nestandardní analýze,[47] na níž jsou zmíněné Vopěnkovy práce nezávislé; společným pramenem je Skolemova práce z r. 1934.

V roce 1972 Vopěnka se spoluautorem P. Hájkem v nakladatelstvích Academia a North-Holland Publishing Company publikovali monografii *The Theory of Semisets*.[48] Teorie polomnožin připouští existenci vlastních polomnožin, tj. vlastních podtříd množin. Práce s nestandardními obory [the domain of nonstandardness] byla jedním z výchozích pohledů na univerza množin, které k zavedení pojmu polomnožiny a jemu příslušné axiomatiky vedly: „I některé další axiomy pro polomnožiny rozšiřují teorii polomnožin konzervativně vůči tvrzením o množinách. Příklady takového rozšíření jsou axiom standardnosti a jeho negace. Axiom standardnosti říká, že každá neprázdná

41 Skolem, Th., Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschlieslich Zahlvariablen. *Fundamenta Mathematicae*, 23, 1934, Nr. 1, s. 150–161.

42 Viz Vopěnka, P., *Nová infinitní matematika*, c.d., Prolegomena, s. 26.

43 Anglický překlad tohoto příspěvku byl publikován pod názvem: Vopěnka, P., Prague Set Theory Seminar. In: Cintula, P. – Haniková, Z. – Švejdar, V. (eds.), *Witnessed Years: Essays in Honour of Petr Hájek*. Serie: Tributes, vol. 10. London, College Publications 2010, s. 5–8.

44 Łoś, J., Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres. *Mathematical Interpretations of Formal Systems*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company 1955, s. 98–113.

45 Vopěnka, P., *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*, c.d., s. 724.

46 Sochor, A., Petr Vopěnka (* 16. 5. 1935), c.d.

47 Robinson, A., Non-standard analysis. In: *Proceedings of the Royal Academy of Sciences, ser. A*, 64. Amsterdam 1961, s. 432–440; a týž, *Non-standard Analysis*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company 1966.

48 Vopěnka, P. – Hájek, P., *The Theory of Semisets*, c.d.

polomnožina ordinálů má první prvek (…) Teorii polomnožin s negací axiomu standardnosti zde studovat nebudeme, ale lze ji využít například při studiu nestandardní analýzy."[49] Dalším takovým oborem jsou pak například generická rozšíření nebo naopak poduniverzum konstruovatelných množin. Teorie polomnožin si kladla vysoké cíle v oblasti základů matematiky: „Autoři chovají naději, že výkladem teorie polomnožin přispějí k úkolu prolomit mříže vězení, ve kterém se matematici nacházejí. Tím vězením je teorie množin a autoři věří, že z něj matematici uniknou tak, jako unikli z vězení třírozměrného prostoru."[50]

Již zmíněný množinový seminář na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, někdy označovaný jako (Vopěnkova) pražská škola teorie množin, navázal na seminář, který vedl v Praze L. S. Rieger; po jeho smrti v roce 1963 běžel seminář pod Vopěnkovým vedením až do roku 1968 a významné výsledky v něm dosažené jsou součástí klasického množinového kánonu. Kniha *The Theory of Semisets* je prezentuje v polomnožinovém paradigmatu. Lévyho recenze,[51] ze které jsme si vypůjčili návod, jak nahlížet na polomnožiny, nakonec tuto fúzi výsledků pražské množinové školy a polomnožinového rámce jejich prezentace hodnotí jako hlavní slabinu celého projektu.

Robinsonova nestandardní analýza má v pramenech, o něž se opírá Vopěnkova práce vztahující se k ATM, výsadní postavení, mj. proto, že se k ní jak sám odkazuje, tak se i vymezuje vůči způsobu, kterým je nestandardní analýza předkládána a který bychom mohli snad označit za sémantický. Robinson pracuje s nestandardní strukturou a její standardní (elementární) podstrukturou; v článku z r. 1961 jde o nestandardní rozšíření struktury reálných čísel, kniha z r. 1966 zavedené techniky rozšiřuje i na další struktury.[52] Citát z úvodní sekce doplňme ještě jedním obšírnějším z *Úvodu do matematiky v alternatívnej teórii množín*: „Autor alternatívnej teórie množín priznáva, že i jemu pri vytváraní tejto teórie dodávala odvahu Robinsonova neštandardná analýza, ktorej prostredníctvom možno kostru tejto teórie modelovať v Can-

49 "There are also other axioms on semisets which extend the theory of semisets conservatively w.r.t. statements which concern sets alone. For example, both the axiom of standardness and its negation extend the theory of semisets in this way. The axiom of standardness asserts that every non-empty semiset of ordinals has a first element (…) The theory of semisets with the negation of the axiom of standardness will not be studied in the present work, but it can be used in the study of non-standard analysis for example." Tamtéž, s. 12.

50 "In presenting the theory of semisets the authors hope to make some contribution to the task of breaking through the bars of the prison in which mathematicians find themselves. The prison is set theory and the authors believe that mathematicians will escape from it just as they escaped from the prison of three-dimensional space." Tamtéž, s. 12.

51 Levy, A., Review: The Theory of Semisets by Petr Vopěnka and Petr Hájek, c.d.

52 Viz článek: Robinson, A., Non-standard Analysis, c.d.; a knihu: Robinson, A., *Non-standard Analysis*, c.d.

torovej teórii množín. Zároveň však získal skúsenosť, že kedykoľvek podľahol zvodom napodobňovat postupy obvyklé v neštandardnej analýze, vždy ho to strhávalo do vyšliapaných ciest matematiky opierajúcej sa o Cantorovu teóriu množín, ktoré ho zavádzali nežiadúcim, t.j. duchu alternatívnej teórie množín sa priečiacim smerom.“[53] Naproti tomu Vopěnka volí metodu axiomatickou; následující dva úryvky nabízejí pohledy na genezi ATM v souvislosti s Robinsonovou nestandardní analýzou. První pochází z Hájkova článku „Why Semisets“ publikovaného v r. 1973: „Nicméně užití polomnožin, tak jak jej popisují ty polomnožinové axiomatické systémy, které nelze konzistentně rozšířit na teorii množin, *popisuje a zkoumá věci* (objekty, situace), *které jsou teorii množin nedostupné*. (i) (…) (ii) Různé podoby axiomatické nestandardní analýzy. (iii) (…)“; následuje poznámka pod čarou „Vopěnka; nepublikováno, nicméně Vopěnka prezentoval tyto pokusy v několika přednáškách při rozličných příležitostech.“[54] Dle Hájka se tedy Vopěnka v této době pokouší axiomatizovat nestandardní analýzu. V podobném duchu, avšak o čtyři dekády později, poznamenává P. Pudlák: „(…) Vopěnkovým záměrem bylo použít nestandardní analýzu jako základy matematiky. Namísto studia nestandardních modelů teorie množin navrhl formulovat principy nestandardní analýzy jako axiomy a pracovat v takto získaném axiomatickém systému.“[55] V. Švejdar v práci „Vopěnka and Hájek, History and Background“ uvádí ještě obecnější tvrzení: „Vopěnka a Hájek byli přesvědčeni, že máme (mít) volnou ruku při práci s abstraktními axiomatickými teoriemi.“[56]

Dvě další nestandardní teorie množin jsou analyzovány v monografii *Nonstandard Analysis, Axiomatically*.[57] Jde o Nelsonovu *Internal Set Theory* (IST)[58] a Hrbáčkův axiomatický systém *Nonstandard Set Theory* (HST),[59] na kterém

53 Vopěnka, P., *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*, c.d., s. 128.

54 “But the use of semisets described by semiset theoretical axiom systems not consistently extendible to Set theory consists of a *description and investigation of things* (objects, situations) *set-theoretically not available*. (i) (…) (ii) Various forms of axiomatic non-standard analysis. (iii) (…)”; a v poznámce pod čarou: “Vopěnka; not published, but Vopěnka presented his attempts in several lectures on various occasions.” Hájek, P., Why Semisets?, c.d.

55 “(…) Vopěnka proposed to use nonstandard analysis as the foundations of mathematics. Instead of studying nonstandard models in Zermelo–Fraenkel theory, he suggested stating the principles of nonstandard analysis as axioms and working in such an axiomatic system.” Pudlák, P., *Logical Foundations of Mathematics and Computational Complexity: A Gentle Introduction*. Cham – Heidelberg – New York – Dordrecht – London, Springer-Verlag 2013, s. 237.

56 “Vopěnka and Hájek believed that we (should) have the freedom to work with abstract axiomatic theories.” Švejdar, V., Vopěnka and Hájek, History and Background, c.d.

57 Kanovei, V. – Reeken, M., *Nonstandard Analysis, Axiomatically*. Berlin – Heidelberg – New York, Springer-Verlag 2004.

58 Nelson, E., Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83, 1977, No. 6, s. 1165–1198.

59 Hrbacek, K., Nonstandard Set Theory. *The American Mathematical Monthly*, 86, 1979, No. 8, s. 659–677.

je monografie založena. Obě teorie vycházejí ze ZFC, čímž se od ATM výrazně odlišují (ta rozšiřuje ZF_{fin}); označení „nestandardní analýza" je volně používáno pro práci s explicitně nestandardními univerzy. Autoři monografie na Vopěnkovu ATM pamatují v předmluvě, při analýze posloupnosti vzniku zmíněných teorií: „Tyto tři výchozí pokusy [tj. Hrbáčkův, Nelsonův a Vopěnkův; pozn. aut.] o plnou axiomatizaci nestandardní matematiky lze stěží seřadit nebo rozhodnout o otázkách priority. Na základě dostupných pramenů lze tvrdit, že všechny tři se odehrály nezávisle a vedly k výsledkům srovnatelné kvality (i když nikoli srovnatelného dopadu v nestandardní matematice, kde se uplatnila hlavně IST), a navíc všechny tři byly založeny na předchozím vývoji v základech nestandardní analýzy."[60] Jiný příklad nestandardní teorie množin prezentuje Fletcherův článek „Nonstandard Set Theory",[61] který je již zase reakcí na teorie mj. Hrbáčka a Nelsona.

Dalším vlivem, který lze ve Vopěnkově práci v ATM vysledovat, ačkoli není explicitně zmíněn, je Parikhův článek o proveditelné aritmetice [feasible arithmetic],[62] zejména tzv. *téměř konzistentních teoriích*. Zhruba řečeno, jde o teorie, které jsou rozšířením Peanovy aritmetiky o primitivně rekurzivní funkce a navíc postulují existenci takového řezu (unárního predikátu *proveditelnosti*), že hodnota jistého primitivně rekurzivního termu bez proměnných t do řezu nenáleží. Jde o spornou teorii; článek ukazuje, že spor nelze získat z důkazů omezené délky. Přesněji, spodní odhad pro hodnotu t lze získat jako hodnotu jisté primitivně rekurzivní funkce aplikované na libovolné dané omezení pro délku důkazů, přičemž důkazy této omezené délky nepovedou ke sporu s předpokladem neproveditelnosti t. Tento Parikhův materiál byl okruhu Vopěnkových spolupracovníků dostupný: v Hájkově článku „Why Semisets" z r. 1973 se konstruuje obor proveditelných čísel jako polomnožina. Ve Vopěnkově práci narážíme na zmínky o tzv. dosvědčených univerzech:[63] takových, ve kterých lze vlastní polomnožinu najít v konkrétní množině.[64] Můžeme se domýšlet, co je *konkrétní* množina. Uvedený Vopěnkův text však požaduje po čtenáři ochotu pracovat s představou, že některá velká standardní čísla, opět zapsaná jako hodnoty primitivně rekurzivních

60 "These three initial attempts to fully axiomatize nonstandard mathematics can hardly be linearly ordered in any reasonable sense, with any sort of preference assigned in some sound manner. It is fair to assert, on the basis of available records, that all three were undertaken independently of each other and led to results of comparable quality (although not of comparable impact on the practice of nonstandard mathematics, where IST has preference), in addition all three were based upon earlier development in foundations of nonstandard analysis." Kanovei, V. – Reeken, M., *Nonstandard Analysis, Axiomatically*, c.d., s. VII.

61 Fletcher, P., Nonstandard Set Theory. *The Journal of Symbolic Logic*, 54, 1989, No. 3, s. 1000–1008.

62 Parikh, R., Existence and Feasibility in Arithmetic, c.d.

63 "witnessed universe"; český termín se v písemných pramenech nepodařilo doložit.

64 Vopěnka, P., *Mathematics in the Alternative Set Theory*, c.d., s. 37.

funkcí (např. $67^{(293^{159})}$), mohou jako množiny obsahovat vlastní polomnožiny, a být tedy ve smyslu ATM nekonečná. Jak Vopěnka sám poznamenává, nejsou tyto úvahy matematicky zpracovány; axiomatická ATM může být chápána jako „limitní případ" těchto úvah.[65]

Vopěnkova práce v ATM bývá někdy referována jako modelování proveditelnosti pomocí standardnosti,[66] přičemž je tendence pojmy „standardnost" a „proveditelnost" obsahově ztotožnit a ATM chápat jako (konzistentní) matematický model pojmu proveditelnosti, kde otázka neproveditelnosti velkých standardních přirozených čísel není vůbec diskutována. Jiní autoři chápou Vopěnkovu práci v ATM jako snahu o modelování vágnosti.[67]

4. Kontext Alternativní teorie množin

Rozborem matematických pramenů ATM se chceme dobrat k několika závěrům. Za prvé, uvedené teorie, pojmy a výsledky jsou samy o sobě příspěvkem do mapy matematického světa, kterou preferujeme před dichotomickým pohledem. ATM matematicky přímo navazuje na Vopěnkovu aktivní a dlouhodobou zkušenost s výsledky klasické matematiky, popř. vybraných směrů matematiky neklasické, rozhodneme-li se vnímat např. nestandardní univerza nebo Parikhovu práci o téměř konzistentních teoriích jako neklasickou matematiku.[68] A zejména: ATM využívá pojmu polomnožiny, zavedeného v monografii *The Theory of Semisets*, zpracovává Vopěnkovu zkušenost s prací v nestandardních modelech teorie množin a přináší jeho vlastní axiomatické pojetí nestandardní analýzy.

V období, které je pro vznik ATM klíčové, tj. přelom 60. a 70. let minulého století, nesměl Vopěnka dle údajů pamětníků z politických důvodů publikovat.[69] Vyznačuje se absencí primárních pramenů o ATM, které by bylo za normálnějších okolností možné očekávat a které by její genezi doložily. Z tohoto hlediska se jeví jako cenný již zmiňovaný Hájkův článek z r. 1973, který

65 "The axiom of existence of proper semisets does not imply that there are proper semisets included in any specific set. If we guarantee the existence of a proper semiset included in a certain concrete set then we say we are studying a witnessed universe. When we restrict the family of properties admitted in the axiom of class existence in such a way that proper subsemisets of all concrete sets are eliminated we say that we are studying a limit universe." Tamtéž.

66 Viz např. Fletcher, P., Infinity, c.d.

67 Např. Dean, W., Strict Finitism, Feasibility, and the Sorites, c.d.; nebo Bellotti, L., Some Attempts at a Direct Reduction of the Infinite to the (Large) Finite. *Logique et Analyse*, 51, 2008, No. 201, s. 3–27.

68 Parikhův článek „Existence and Feasibility in Arithmetic" (c.d.) byl impulzem, který podnítil studium omezené aritmetiky; viz Buss, S. R., Bounded Arithmetic, Proof Complexity and Two Papers of Parikh. *Annals of Pure and Applied Logic*, 96, 1999, No. 1–3, s. 43–55.

69 Viz Chudáček, J., Vzpomínka na Petra Vopěnku, c.d.

do klíčového období zařazuje Vopěnkovy pokusy axiomatizovat Robinsonovu nestandardní analýzu.

Za druhé, nelze se bez diskuze spokojit s tezí, že ATM byla vyústěním Vopěnkovy snahy o fenomenologickou očistu matematiky. S variantami poznámek o filosofických motivacích ATM se při studiu primární a sekundární literatury nelze nesetkat. Namátkou citujme P. Zlatoše ve *Filosofickém časopise*: „Za ten svet mi nešlo do hlavy, ako sa Vopěnka na základe takých nezrozumiteľných, odstrašujúcich traktátov [práce Husserla a Heideggera; pozn. aut.] mohol dopracovať k tým nádherným a priezračne jasným úvahám o obzore a jeho úlohe pri našom porozumení svetu,“[70] nebo: „Čo teda máme považovať za trvalý prínos alternatívky a filozofických úvah, z ktorých vyrástla?“[71] Jiným příkladem je text A. Vencovské ze stejného čísla: „Zásadním kritériem správnosti úvah o nekonečně malých veličinách v nestandardní analýze je, zda se chovají jako ony entity v ultraproduktu, které je reprezentují. Proto je v nestandardní analýze stále rozhodující cantorovská intuice o nekonečnu, tak jak je dnes zachycená v klasické teorii množin. Naproti tomu Vopěnka čerpal intuici ze svých filosofických úvah. I když si byl vědom vlivu, který na něj mělo Robinsonovo dílo, k principům, jež přijal pro svoji novou infinitní matematiku, se dopracovával na základě své filosofie.“[72] Nejvýraznějším proponentem této teze je patrně, ovšem v retrospektivě, Vopěnka sám. Např. v eseji „O co jde v alternativní teorii množin“ se lze dočíst: „V knize *Mathematics of the Alternative Set Theory* jsem přecenil čtenáře. Domníval jsem se, že filosofie alternativní teorie množin jim bude okamžitě jasná, a proto jsem se zaměřil spíše na ukázky některých technik. Tradiční matematické myšlení je však natolik vžité – a to i v době, kdy fyzika své tradiční myšlení přehodnocuje – že většina matematiků není schopna provést fenomenologickou kritiku klasických představ, natož z ní vyvodit důsledky. Proto se v této přednášce pokusím alespoň stručně naznačit filosofické základy alternativní teorie množin.“[73]

Od případné fenomenologické kritiky základů matematiky nevede nikterak přímá cesta až k Vopěnkou navržené ATM a matematizaci klíčových pojmů, např. pojmu nekonečna. Vopěnka (se spolupracovníky) učinil, rozpracoval a prosadil objev afinity středoevropské fenomenologické tradice a matematických metod axiomatického zpracování nestandardních univerz. Tyto dva vlivy se šťastně prolnuly v čase a místě. Cílem zde předkládaného článku není zpochybňovat důležitost tohoto objevu ani Vopěnkův boj o něj

70 Zlatoš, P., Vopěnkova alternatívna teória množín alebo ťažký údel génia mimo hlavného prúdu. *Filosofický časopis*, 64, 2016, č. 4, s. 520.

71 Tamtéž, s. 531.

72 Vencovská, A., Mnoho povyku pro nekonečně málo? *Filosofický časopis*, 64, 2016, č. 4, s. 585.

73 Vopěnka, P., O co jde v alternativní teorii množin, c.d., s. 51; a velmi podobně týž, The Philosophical Foundations of the Alternative Set Theory, c.d., s. 115–126.

tváří v tvář počáteční prázdnotě, tolik vlastní svobodnému a tvůrčímu bádání. Je však namístě připomenout, že šlo o postupný proces zásnub zmíněných dvou vlivů, do kterého Vopěnka vstupuje vybaven přibližně dekádou vlastní špičkové práce v teorii množin, potažmo aktivní prací přímo v teorii nestandardních univerz.

Filosofické souvislosti ATM lze nahlížet jako *validace* možných matematických postupů. Kupříkladu v monografii *Mathematics in the Alternative Set Theory* čteme: „Autor vypracoval obecnou topologii v Alternativní teorii množin; J. Chudáček v ní dokázal zajímavé výsledky. Zde však obecnou topologii rozvíjet nebudeme, dokud nebudou předvedeny hlubší motivace pro její studium v alternativní teorii množin.“[74] Jiný příklad nalezneme v jedné z předchozích pasáží téže monografie: „Naše teorie nabízí různé možnosti pro teorii nekonečna. Například bychom mohli napodobit celou Cantorovu teorii. (…) Mohli bychom přijmout axiomy i pro kteroukoli další teorii nekonečna, pokud nejsou ve sporu s ostatními axiomy. Cantorova teorie je jen jednou z mnoha možností. Momentálně nejsou známy žádné důvody, jež by vedly k přijetí netriviální teorie nekonečna. Každá taková teorie musí mít spekulativní povahu. Proto její výsledky týkající se nekonečných kardinalit budou bezobsažné, bude-li její spekulativní pozadí zamítnuto. Ve snaze tomu předejít jsme přistoupili k přijetí triviální teorie nekonečných kardinalit.“[75] Tyto ukázky naznačují, že matematické zpracování tématu Vopěnkovi nestačilo, pokud nezapadalo do koncepce, která se vyvíjela patrně paralelně k matematickým úvahám. V úvodu zmíněné monografie Vopěnka píše: „Kolega J. Polívka pomohl vylepšit rozličné motivace.“[76] J. Polívka byl externím zaměstnancem katedry matematické logiky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy od r. 1969 do r. 1980 a žákem J. Patočky od r. 1968. Příkladem validace matematických postupů filosofickými tezemi může být odůvodnění axiomu prodloužení principem překročení obzoru.

74 “We shall not always use all properties of indiscernibility relations and therefore we could study more general topologies as in Cantor‘s set theory. The author has developed general topology in the alternative set theory; interesting results in such topology were obtained by J. Chudáček. But we shall not develop general topology here before deeper motivations for its study in alternative set theory are exhibited.” Vopěnka, P., *Mathematics in the Alternative Set Theory*, c.d., s. 87.

75 “Our theory offers various possibilities of theories of infinity. For example, we could imitate Cantor’s whole theory. (…) We can assume axioms for any other theory of infinity, provided it does not contradict the other axioms. Cantor’s theory is just one possibility. At present, no reasons for the acceptance of a nontrivial theory of infinity are known. All such theories must be speculative in character. Consequently, their results mentioning infinite cardinalities will be vacuous if their speculative background is rejected. To prevent this, we decide to accept a trivial theory of infinite cardinalities.” Citovaný text je úvodem k axiomu dvou kardinalit. Tamtéž, s. 51–52.

76 “My colleague J. Polívka helped me to improve various motivations.” Vopěnka, P., *Mathematics in the Alternative Set Theory*, c.d., s. 3.

Připomínku, že případné fenomenologické motivace ATM mohly přicházet víceméně ex post, dokládá ve svých vzpomínkách v rámci Vopěnkova nekrologu[77] také J. Chudáček, Vopěnkův aspirant v letech 1972–1976: „Vopěnka udělal v matematice prodloužení za horizont podobně jako Husserl, byť, pokud vím, na to přišel nezávisle na Husserlovi. O Husserlovi a jeho práci se myslím dozvěděl až později v 70. letech od filosofa Jiřího Polívky."

Jako paralely Vopěnkově ATM blízkých témat, ale bez příčinné souvislosti s ní, připomeňme stručně dva významné okruhy prací. Vopěnkova studie „O co jde v alternativní teorii množin" nabízí podstatné pasáže týkající se přínosu vopěnkovského nekonečna pro studium jevu neurčitosti. „Přirozené nekonečno je abstrakcí z cest vedoucích k hranicím neurčitých a rozmazaných jevů. Protože různých jevů se zmocňujeme právě uchopováním jejich hranic (srovnej ‚definitio'), je studium přirozeného nekonečna též tím, na čem lze založit vědu o neurčitosti. (…) Ten případ přirozeného nekonečna, jenž se po vyostření stal základem nekonečna klasického, totiž spočetnost, je abstrahován z cesty vedoucí k obzoru."[78] Naproti tomu klasická matematika podle Vopěnky na zpracování jevu neurčitosti rezignovala. Přibližně v době, kdy Vopěnka sepisuje svou práci *Mathematics in the Alternative Set Theory*, píše M. Dummett esej „Wang's paradox",[79] která je dle Deanovy práce „Strict Finitism, Feasibility, and the Sorites" považována za počátek soudobého filosofického studia vágnosti (a zároveň je podrobným rozborem – a odmítnutím – ultrafinitismu).[80]

Ve stejné době publikuje H. Friedman první práce o *reverzní matematice* [reverse mathematics].[81] Ta je založena na principu hledání vhodných axiomů pro dokazování jednotlivých matematických tvrzení, přičemž verifikací správnosti volby axiomů je důkaz axiomů z tvrzení. Pro tento projekt se jako vhodné prostředí etablovaly hlavně fragmenty aritmetiky druhého řádu. Tyto matematické teorie postačují k formalizaci převážné většiny běžné matematiky. Množství výsledků, kterými se reverzní matematika může pochlubit, budí dojem, že je téměř „hotová". Ačkoli není v úzkém vztahu k ATM, zapsala se výrazně do povědomí matematiků jakožto seriózní pokus zbavit se artefaktů axiomatických teorií: v tomto ohledu tedy dotahuje tento Vopěnkův záměr do důsledků. Ani ona nicméně není přijímána jako vážný kandidát

77 Chudáček. J., Vzpomínka na Petra Vopěnku, c.d.

78 Vopěnka, P., O co jde v alternativní teorii množin, c.d., s. 62.

79 Dummett, M., Wang's paradox. *Synthese*, 30, 1975, No. 3/4, s. 301–324. (s. 312)

80 Dean, W., Strict Finitism, Feasibility, and the Sorites, c.d.

81 Viz např. Friedman, H., Some Systems of Second Order Arithmetic and Their Use. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (held in Vancouver on August 28 – June 4, 1974). 2 Vols. Ed. R. D. James. Vancouver, BC, Canadian Mathematical Congress 1975, Vol. 1, s. 235–242.

na roli nových základů matematiky; připouští se sice, že by ji mohla hrát, ale nehraje ji.

5. Alternativní teorie množin a neklasická matematika

O Vopěnkově vnímání práce jeho souputníků na širých pláních neklasické matematiky máme k dispozici pouze roztříštěné písemné záznamy. Výsadnímu postavení se těší Robinsonova nestandardní analýza, která je zmiňována s jistými výhradami. Kniha *Mathematics in the Alternative Set Theory* se staví do poměrně početného zástupu prací, které jen letmo zmiňují publikace Jesenina-Volpina.[82] Monografie *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky* podává vlastní rozsáhlý přehled historie teorie množin, včetně výkladu některých jejích neortodoxních větví, jako je axiom determinovanosti.

Odklon od klasické matematiky může být indukován už logikou, ve které jsou teorie budovány. Dělení na „logiku“ a „axiomatickou teorii“ se může jevit jako zbytečně formalistické, nicméně u Vopěnky lze stopy takového vnímání vysledovat. ATM žije v logice klasické; Vopěnka snad zamýšlel blíže nespecifikovaný odklon od klasické logiky, ale nebyl pro něj do té míry prioritou, aby mu dal explicitní podobu. První zmínku o něm nacházíme už v monografii *Mathematics in the Alternative Set Theory*: „Bedlivý čtenář si všimne, že naše teorie není výhradně založena na klasicky pojatých konečných množinách. Jde o implicitní sdělení této knihy, vzhledem k tomu, že jeho systematické zpracování by knihu značně prodloužilo a zdůraznilo témata, která nejsou vhodná pro první seznámení s naší teorií. Ze stejného důvodu rozvíjíme naši teorii v klasické logice.“[83] Další letmou zmínku najdeme v *Nové infinitní matematice*: „Při studiu polomnožiny *FN*, jejích vlastností a vztahů mezi nimi, můžeme tedy používat predikátový kalkul. S kvantifikátory však musíme zacházet velmi opatrně, neboť ve směru k obzoru ohraničujícímu velikosti konečných přirozených čísel není polomnožina *FN* ostře vymezena.“[84]

Zajímavý je Vopěnkův postoj k intuicionismu a intuicionistické logice.[85] Vopěnka ji chápal jako omezení logiky klasické co do povolených postupů.

82 K nim se řadí například i Parikhův článek o proveditelné aritmetice (Existence and Feasibility in Arithmetic, c.d.)e naproti tomu Dummettův „Wang’s paradox“ (c.d.) podává poměrně podrobnou analýzu ultrafinitismu reprezentovaného právě Jeseninem-Volpinem.

83 “The careful reader will realize that our theory is not even fully based on the classical concept of finite sets. This is only implicit in the present book since systematic development in this direction would make the book considerably longer and would stress topics not suitable for first acquaintance with our theory. We have the same reason for development of our theory inside classical logic.” Vopěnka, P., *Mathematics in the Alternative Set Theory*, c.d., s. 11.

84 Vopěnka, P., *Nová infinitní matematika. Prolegomena*, c.d., s. 41.

85 K tomu viz též poznámky v závěru Švejdarova článku „Vopěnka and Hájek: History and Background“, c.d.

V *Úvodu do matematiky v alternatívnej teórii množín* ji hodnotí takto: „Radikálne východisko z krízy [způsobené doložením sporů a paradoxů v naivní teorii množin; pozn. aut.] ponúkol Brouwerov intuicionizmus, ktorý úplne zavrhol aktualizáciu nekonečných oborov objektov ako neoprávnenú, čím sa načisto odpútal nielen od Cantorovej teórie množín, ale aj od všeobecnej časti Bolzanovho výkladu nekonečna. (…) Žiaľ, takáto revízia logiky je nezlučiteľná s vedúcim zámerom teórie množín usilujúcim práve o aktualizáciu nekonečných oborov objektov.“[86] V kontextu klasické teorie množin je intuicionismus prezentován jako slepá ulička. O mnoho let později Vopěnka uvádí ve *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*: „Jakmile intuicionisté jasně stanovili zákony logiky, kterou používali, pak se již dalo očekávat, že si jich povšimnou i ti matematici, kteří se pokoušeli vykládat matematiku jako součást teorie množin. Vskutku, zanedlouho po uveřejnění uvedené Heytingovy práce došlo k překvapivé kolonizaci intuicionistické logiky množinovým impériem. (…) Stoneovy pravdivostní hodnoty výroků v intuicionistické logice jsou velkým vítězstvím množinového impéria nad intuicionismem.“[87] Připomínky jsou stejného rázu jako vůči nestandardní analýze: je tu sémantika, která se odehrává uvnitř klasické teorie množin. Podobně jako ATM vychází však intuicionismus z principů, po kterých následuje axiomatizace, a ve světle této paralely není jasné, proč by topologická sémantika intuicionistické logiky v klasické teorii množin měla být vážnou námitkou vůči intuicionismu.

Vzhledem ke klíčové vazbě mezi neostrostí a ATM se ještě zastavme u fuzzy logiky a fuzzy množin, které nabízejí její jiné modelování. Není zřejmé, zda byl Vopěnka s fuzzy logikou jakožto formálním neklasickým logickým systémem obeznámen (i když mj. právě v době vzniku publikace o ATM sepisoval na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy J. Pavelka, pod vedením A. Pultra, svou disertační práci o fuzzy logice; tato práce[88] nyní patří ke kanonickým textům oboru). Teorii fuzzy množin se dle Vopěnky nedaří uniknout ze spárů klasického matematického světa, protože používá reálněhodnotové množiny: „V skutočnosti však klasická matematika preukazuje teórii fuzzy množín medvediu službu a vedie ju tam, kam by sa jej samotnej nemalo chcieť ísť.“[89] Tato námitka ale nejspíš zaměňuje teorii s jejím modelem v klasickém množinovém univerzu. Zadehův průkopnický článek[90] skutečně zpopularizoval pojem fuzzy množiny jakožto funkce, která objektům z pevně zvoleného univerza přiřazuje reálná čísla jednotkového intervalu.

86 Vopěnka, P., *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*, c.d., s. 103.
87 Vopěnka, P., *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*, c.d., s. 698–700.
88 Pavelka, J., On Fuzzy Logic I, II, III. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 25, 1979, s. 45–52; s. 119–134; s. 447–464.
89 Vopěnka, P., *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*, c.d., s. 94.
90 Zadeh, L. A., Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 1965, No. 3, s. 338–353.

Reálná sémantika určuje i množinové operace. Nicméně i Zadehův přístup připouští obecné, tj. nikoli pouze reálné funkce. V tom pak pokračuje J. A. Goguen ve své eseji „The Logic of Inexact Concepts“[91] – a právě na něj navázal Pavelka axiomatizací potřebného formalismu. Řada prací o axiomatické teorii množin ve fuzzy logice pak klasickou logiku a teorii množin v zásadě k ničemu nepotřebuje; za všechny zde uveďme článek „Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom“ z r. 1957, jehož autorem není nikdo jiný než Th. Skolem.[92]

Tyto exkurzy dále ilustrují, že Vopěnka přikládá nezávislosti *axiomatické* teorie na její případné *klasické* interpretaci zásadní význam. Naše matematické úvahy se mají opírat spíše o principy a neohlížet se na případnou interpretaci vybudovanou „pro představu“ v klasické teorii množin: opačný postup uvádí nové teorie do služebného postavení. Viz např. Bellottiho tezi: „(…) nejpřirozenější interpretace ATM získáme z nestandardních modelů aritmetiky, čímž vzniká pokušení konceptuálně tento přístup zredukovat na nějaké nestandardní metody, nicméně Vopěnka by namítl, že tím převracíme konceptuální prioritu, protože nestandardní analýza je pro něj (poněkud krkolomným) ‚cantorovským‘ pojednáním ‚přirozeného‘ nekonečna.“[93] Jak intuicionistická logika a intuicionistická teorie množin, tak i fuzzy logika a fuzzy teorie množin ovšem takto pojaté nezávislosti na klasické matematice dosáhly.

6. Závěr

ATM je částí mozaiky matematického světa: předkládáme alternativu k představě, že tento svět je natolik homogenní a vyhraněný, že se ATM do něj nevejde, zůstává opodál a dívá se zvenčí. Popsali jsme matematické podhoubí 20. století, ze kterého ATM vychází, a poukázali na některé paralelní vývojové větve, které sdílejí některá její východiska a podtrhují mnohotvárnost základů matematiky. Připomněli jsme také, v několika reflexích, Vopěnkovu preferenci axiomatického přístupu.

Tento příspěvek se týká struktury matematického okolí ATM, přičemž snahou autorky je držet se písemných pramenů. Jaká je vnitřní struktura jejího okolí filosofického? Jaká je geneze filosofické osnovy ATM a její ukotvení

91 Goguen, J. A., The Logic of Inexact Concepts. *Synthese*, 19, 1969, No. 3–4, s. 325–373.

92 Skolem, Th., Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 3, 1957, Nr. 1–5, s. 1–17.

93 “(…) the most natural interpretations of AST are in terms of non-standard models of arithmetic, so that one is strongly tempted to reduce this approach conceptually to some non-standard background, although Vopěnka would reply that this would reverse the conceptual priority, since non-standard analysis is for him a (rather artificial) ‘Cantorian’ way to treat ‘natural’ infinity.” Bellotti, L., Some Attempts at a Direct Reduction of the Infinite to the (Large) Finite, c.d.

na časové ose? Jak jednotlivá nosná témata této geneze pojmenovat, popř. opatřit komparativním komentářem či citacemi příslušných pasáží z textů jiných autorů?

Text „O co jde v alternativní teorii množin",[94] publikovaný v roce 1989 nejprve anglicky pod názvem „What Is the Alternative Set Theory All About", je patrně jedním z nejpodnětnějších zdrojů pro takovéto zamyšlení.[95] Filosofické základy ATM deklaruje jako svou agendu a nabízí mj. podrobný výklad vopěnkovského přirozeného nekonečna v kontrastu s nekonečnem klasickým. Zároveň dokumentuje problémy, na které by mohl badatel narazit (například neodkazuje na jiné práce). Text je také poměrně pozdní vzhledem ke klíčovému období ATM, kterým byl počátek 70. let 20. století. V geologii ATM se tedy jedná o jakýsi uhlazený říční balvan, na kterém už nezkušeným okem jen podle tvaru nemusíme poznat, ze které skály ho kdysi živly vyrvaly. Přesto však existuje naděje, že zkušení geologové by o cestách, kterými se tento a další balvany ubíraly, mohli podat zajímavá dobrozdání.

94 Vopěnka, P., O co jde v alternativní teorii množin, c.d.

95 Jedním z dalších zdrojů je kupř. článek: Trlifajová, K., Nekonečno a kontinuum v pojetí Petra Vopěnky (*Filosofický časopis*, 64, 2016, č. 4, s. 561–574) a v něm mnohokrát odkazovaná monografie: Vopěnka, P., *Meditace o základech vědy*. Praha, Práh 2001.