

Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana



Revestimiento de bolas 2D con spline

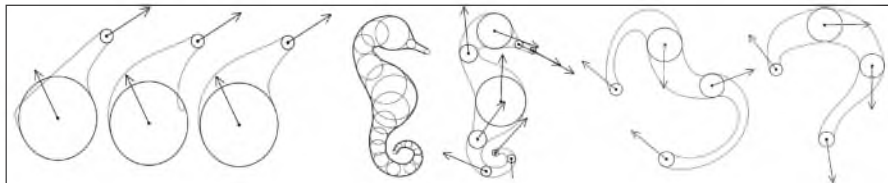
Tesis

presentada en opción al grado de
Maestro en Ciencias

Ana Isis Toledo Marrero

Tutores:

Dra. Sofía Behar Jequín
Dr. Jorge Estrada Sarlabous
M.C. Wilfredo Morales Lezca



La Habana, Cuba
Julio, 2016

*... con todo el verde de este mundo,
a quienes son parte de mi vida
y a quienes lo serán.*

Agradecimientos

Gracias a mi mami y a mi familia, por quererme tal y como soy.

Mi infinito agradecimiento a Sofi, Estradita, Wilfre y Armando, porque siempre pensaron que sí cuando yo misma dudé, por los consejos, la compañía y la guía certera.

Agradezco a los amigos, por confiar en mí y alegrarme los días y en especial a Aylin, porque ya es de mi sangre.

Mil gracias también a mis niñitos, porque hacen que me esfuerce cada día por ser una mejor persona.

Resumen

Recientemente, el problema del forrado de conjuntos ordenados de círculos, ha despertado un interés considerable en el campo de la modelación geométrica. Por lo general, se entiende por forro un objeto geométrico conformado por dos curvas G^1 -continuas y conexas, que contactan de forma tangente a cada uno de los círculos y tales que éstos se encuentran contenidos en la región determinada por dichas curvas.

Nuestra aproximación al problema permite proveer al diseñador de una nueva e interactiva asa geométrica: la selección de los puntos de contacto con los círculos. El forro propuesto es susceptible de ser representado para visualización y transmisión en entornos virtuales distribuidos.

Palabras clave: Spline, forro, contorno, bolas orientadas, interpolación, offset, modelación geométrica, entornos virtuales distribuidos.

Abstract

Recently, there has been considerable interest in skinning of a finite ordered set of circles. By skinning we mean the geometric construction of two G^1 -continuous connected curves touching each of the circles at a point, separately, in such a way that the circles are completely contained in the region enclosed by these curves.

Our novel approach allows to provide the designer with a very useful interactive geometric handle, which is not given by any of the known approaches: the selection of the position of the touching points on each circle. The proposed new skinning scheme may be conveniently represented in order to be used for visualisation and also for transmission in distributed virtual environments.

Key words: spline, skinning, ball, directed balls, A-spline, interpolation, offset, geometric modeling, distributed virtual environments.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	6
1.1. Curvas algebraicas planas. Generalidades	6
1.2. Normal, tangente y curvatura de la curva en un punto	8
1.3. A-spline. Continuidad geométrica	10
1.4. Un esquema A-spline para CAGD	11
1.5. Curvas d -offset. Generalidades	14
1.6. Interpolador cúbico de Hermite	15
2. Construcción del forro	17
2.1. Un marco de trabajo	18
2.2. Forro “ingenuo”	21
2.3. Forro offset	24
2.3.1. Curvas d -offset con d variable	25
2.3.2. Construcción del forro offset	29
2.4. Forro híbrido	34
2.4.1. Representación para transmisión e intercambio	36
Conclusiones y Recomendaciones	39

Introducción

Durante los años 60 y 70 del siglo XX el desarrollo de la industria automotriz alcanzó un gran auge, principalmente en el continente europeo. Un factor impulsor en este fenómeno fue la incorporación al proceso de diseño de elementos de modelación geométrica. La propia competencia y las exigencias del mercado internacional llevaron a esta rama de la matemática a un nivel superior.

Durante mucho tiempo, las aplicaciones de la modelación geométrica se limitaron a los contextos de la ingeniería. Uno de los principales requisitos de estas aplicaciones era generar modelos que especificaran con precisión la geometría del objeto manufacturado. Luego la modelación geométrica comenzó a ser utilizada con otros propósitos; además de los ingenieros que diseñaban herramientas, piezas, equipos y otros objetos de ingeniería, los software de modelación comenzaron a ser aplicados por otros profesionales como arquitectos, estilistas, diseñadores y artistas. En estas profesiones, los fines de la modelación son crear animaciones digitales, juegos, croquis de plantas arquitectónicas, piezas de vestuario, escenografías, entre muchas otras. Por este motivo, las exigencias del modelo matemático cambian; en este caso el objetivo es comunicar, transmitiendo la esencia de la forma de los objetos, sin necesidad de una gran precisión geométrica.

Actualmente, el número de herramientas computacionales que asisten cotidianamente a ingenieros, arquitectos y profesionales del diseño se ha multiplicado, pues el Diseño Geométrico Asistido por Computadoras (CAGD), como se le conoce a esta rama de la Matemática y la Computación, ha evolucionado a la par del desarrollo tecnológico y científico en los últimos años.

Durante mucho tiempo los software de diseño se basaron únicamente en el paradigma WIMP (ventana, ícono, menú, puntero). En estos sistemas, los dispositivos de entrada de datos más comunes son el mouse y el teclado. Estas aplicaciones son poderosas y precisas, en este paradigma el usuario consigue

un alto control de la aplicación (cuando desea ejecutar una operación cliquea un botón, selecciona una opción en el menú o abre una ventana auxiliar). Sin embargo, con el desarrollo y la complejidad de este tipo de interfaces, la interacción entre el usuario y la aplicación tiende a ser poco intuitiva, alargando el tiempo de producción y demorando el proceso de aprendizaje para usuarios novatos.

Al mismo tiempo se ha ido desarrollando una nueva tendencia muy asociada al avance de nuevas tecnologías, ésta es la rama de la modelación actualmente reconocida como Diseño Basado en Esbozos (SBM-por sus siglas en inglés). Como objetivo fundamental, persigue desarrollar nuevos métodos que permitan la modelación a partir de diseños realizados por el usuario, de manera que sea posible transmitir una idea con sólo algunos trazos que reproduzcan patrones reconocibles e interpretables como un modelo 2D o 3D. Se percibe que el SBM es una buena herramienta que facilita la interacción entre el usuario y la aplicación, estos software por lo general son más intuitivos y naturales. En los últimos años su popularidad ha aumentado, pues permite aprovechar las tan difundidas y populares interfaces naturales (iPhone y Tablet).

El proceso de diseño basado en esbozos se inicia con la adquisición de los modelos realizados por el usuario en el dispositivo de entrada. Para lograr manipular computacionalmente este objeto, es necesaria una representación finita del mismo. En la actualidad, la búsqueda de representaciones sencillas se ha convertido una necesidad propia del desarrollo de nuevas plataformas virtuales de intercambio de información, en las que el reto fundamental es proveer un servicio de calidad, que permita a un gran número de usuarios interactuar con la plataforma y entre ellos en tiempo real.

Entre las representaciones más populares, destacan las mallas triangulares, las cuales pueden ser obtenidas con relativa facilidad y cuya visualización es bastante rápida en los dispositivos modernos de imágenes. Sin embargo, desde el punto de vista del almacenamiento de información, constituyen un conjunto demasiado extenso de datos, en los que el cálculo con precisión de atributos geométricos, como tangentes y curvaturas, es relativamente costoso. La manipulación y deformación de objetos mediante su triangulación no es muy intuitiva, por lo que una edición interactiva de los mismos en escenarios de CAGD, no se logra de manera sencilla.

Como una alternativa a la utilización de mallas triangulares, en algunos escenarios de diseño se trabaja con representaciones de objetos basadas en su esqueleto. O sea, se diseña la curva esqueleto 2D o 3D y el objeto geométrico



Figura 1: *Uso del esqueleto como asa geométrica.*

se define como una especie de d -offset con d variable, el cual describe el contorno o superficie que se desea diseñar. Este tipo de representación permite la manipulación y deformación del objeto de forma muy intuitiva a partir de la manipulación de su esqueleto, que matemática y geoméricamente constituye un objeto menos complejo [Sea05], [Rou11], [Liu14].

En este trabajo, se propone una alternativa para el diseño y representación de regiones planas, que se basa en la descripción de contornos cerrados a partir de configuraciones de círculos. En esencia, se trata de *determinar un contorno cerrado conexo que cubra una región plana definida por un conjunto ordenado de bolas 2D, contactando de forma tangente a cada una de estas bolas, figura 2.*

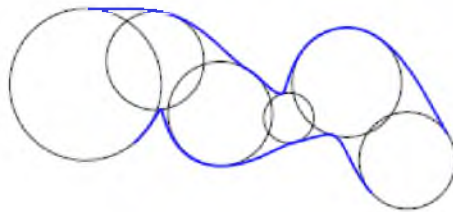


Figura 2: *Generación de un forro a partir de bolas 2D*

Este no constituye el primer acercamiento al problema del *skinning* (como se le reconoce en la literatura) o forro (por su traducción al español), en varios artículos recientes se han presentado algoritmos para la resolución del mismo.

- En [Sea05] se propone una representación para curvas y superficies a partir de estructuras que denominan B-splines bolas. Las curvas o superficies son construidas a partir de puntos y radios de control, los cuales generan superficies en forma tubular con un esqueleto B-spline. Esta representación se usa tanto para visualización como para manipulación y los autores recalcan las ventajas de la misma como alternativa a las mallas triangulares.

- En [Sla08] se brinda una solución al problema mediante la minimización de un funcional de energía, que toma en cuenta la curvatura media y la longitud de arco del contorno. La solución se obtiene iterativamente mediante un sistema de ecuaciones diferenciales, los puntos de contacto se escogen de forma antipodal y deben ser inicialmente señalados por el usuario. Puesto que la solución es iterativa, la generación del forro no es inmediata y no es, por tanto, ajustable a escenarios de diseño interactivos.
- En [Kun09] se proponen dos métodos para la selección no supervisada de los puntos de contacto del forro con cada una de las bolas; el primero propone interpolar los centros de los círculos y seleccionar los puntos que tengan tangente en la misma dirección que la curva de interpolación; el otro es un algoritmo que utiliza la proyección ciclográfica para transformar el problema en el plano a un problema en el espacio.
- Roland Kunkli propone, en [KuHo10], un método que selecciona los puntos de contacto tomando los círculos tres a tres y resolviendo el problema de Apolonio. La generación del forro se logra por medio de un interpolador cúbico de Hermite.
- Más recientemente, en 2015, se propone una estrategia de forrado que se basa en la reproducción de arcos de círculos y utiliza las bitangentes asociadas a los círculos, dos a dos, como contorno del forro [Bas15].

En la mayoría de estos artículos, se proponen regiones de admisibilidad para las configuraciones de círculos, que garanticen la existencia del forro. En algunos, se acepta que el contorno generado puede no cubrir completamente a las bolas y en otros no se hace referencia a esta cuestión. En general, los resultados del forro son evaluados por su comportamiento para configuraciones razonables de los círculos.

Algunos de estos resultados han constituido la base teórica para la extensión del problema del forrado a 3D, [Sla10], [Sea05], [KuHo10]. Es claro que el estudio del comportamiento del forro propuesto para el caso plano, constituye un paso fundamental para la resolución del problema homólogo en el espacio.

El lo que sigue, este documento queda estructurado de la siguiente manera: En el capítulo *Preliminares*, se retoman definiciones y propiedades de las curvas planas que serán importantes para el estudio del problema propuesto. En el capítulo *Construcción del forro* luego de describir el marco teórico de

trabajo, se proponen tres métodos para la construcción del forro, analizando críticamente sus propiedades y potencialidades. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo y se hacen algunas recomendaciones para trabajos futuros.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introduce un conjunto de definiciones y resultados básicos relacionados con las curvas planas tanto implícitas como paramétricas, que serán utilizados a lo largo de todo el desarrollo de esta tesis. Además, se hace un recuento de los resultados más importantes obtenidos hasta el momento relativos a la utilización de curvas A-spline para el diseño geométrico asistido por computadoras.

1.1. Curvas algebraicas planas. Generalidades

Las curvas algebraicas pueden ser representadas tanto de forma implícita como de forma racional paramétrica. A continuación se presenta el concepto de curva algebraica plana, con el fin de analizar las interrelaciones existentes entre ambas representaciones.

Definición 1.1. *Una curva algebraica plana de grado n definida implícitamente es el conjunto*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

donde

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} c_{ij} x^i y^j$$

es un polinomio de grado n con coeficientes reales c_{ij} . Dicha curva es reducible o irreducible en dependencia de que el polinomio lo sea.

Abusando de la notación, es usual referirse a una curva algebraica con el mismo nombre del polinomio que define su ecuación implícita.

Definición 1.2. Sea la curva algebraica $f(x, y) = 0$, se dice que un **punto** P_0 sobre dicha curva es **singular** si $\nabla f(P_0) = (0, 0)$ (∇ representa el operador gradiente). En otro caso, se dice que P_0 es un **punto regular**. Una curva singular es aquella que posee al menos un punto singular.

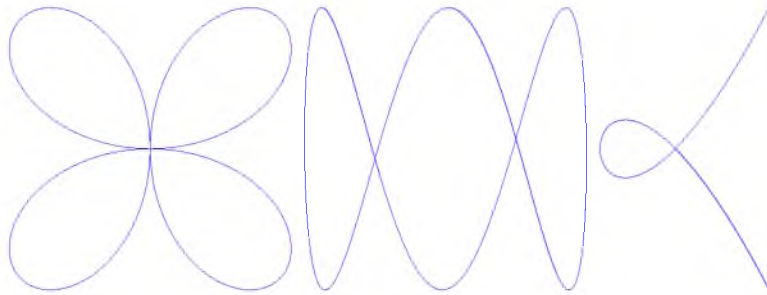


Figura 1.1: Curvas algebraicas con puntos singulares

En [Walk78] se demuestra que una curva algebraica de grado n posee a lo sumo $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ puntos singulares. Una subfamilia muy importante, empleada con frecuencia en la modelación geométrica, es la de las curvas algebraicas que poseen una parametrización racional. En lo adelante, nos referiremos a estas curvas simplemente como *curvas paramétricas*.

Definición 1.3. Una **curva racional paramétrica de grado n** es el conjunto

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{f(t)}{h(t)}, y = \frac{g(t)}{h(t)} \right\}$$

donde f, g y h son polinomios de grado n con coeficientes reales, tales que

$$\text{mcd}(f(t), g(t), h(t)) = 1$$

Dado que la complejidad de muchos algoritmos depende del grado geométrico de la curva con la que trabajan, usualmente es empleado el concepto de *grado geométrico* (muy vinculado al concepto de *grado*).

Definición 1.4. El **grado geométrico de una curva plana** es el máximo número de intersecciones entre la curva y una recta arbitraria, contando los puntos de intersección con coordenadas reales o complejas y las intersecciones múltiples.

Usando la teoría de eliminación se demuestra que toda curva paramétrica racional posee una representación implícita [Sed84]. El recíproco, sin embargo, no es cierto: No toda curva definida implícitamente puede ser parametrizada racionalmente.

1.2. Normal, tangente y curvatura de la curva en un punto

Del Análisis Matemático se conoce que, siendo $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto regular sobre la curva algebraica $f(x, y) = 0$, el vector normal o simplemente la normal a la curva en el punto P_0 es

$$\frac{\nabla f(x, y)(P_0)}{\|\nabla f(x, y)(P_0)\|}$$

Para una curva dada en forma paramétrica $r(t) = (x(t), y(t))$, la normal a la curva en el punto $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$ es el vector

$$\mathbf{n} = \frac{(-\dot{y}(t_0), \dot{x}(t_0))}{\|(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0))\|} \quad (1.1)$$

A partir del vector normal $n_0 = (n_{x_0}, n_{y_0})$ a la curva $f(x, y) = 0$ en P_0 , se define la recta tangente como aquella que pasa por P_0 con dirección perpendicular a n_0 . Su ecuación implícita es

$$n_{x_0}(x - x_0) + n_{y_0}(y - y_0) = 0$$

y en forma paramétrica se puede escribir como

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - tn_{y_0} \\ y(t) &= y_0 + tn_{x_0} \end{aligned}$$

Debe tenerse en cuenta que el vector normal n_0 a una curva en un punto P_0 y, en consecuencia la recta tangente en ese punto, están unívocamente definidos siempre y cuando n_0 no sea el vector nulo, es decir siempre que P_0 no sea un punto singular de la curva.

En cuanto a la curvatura en un punto, si la expresión de la curva está dada en forma implícita, ésta se calcula como

$$|\kappa| = \left| \frac{f_{yy}f_x^2 - 2f_x f_y f_{xy} + f_{xx}f_y^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right|, \quad (1.2)$$

y para el caso paramétrico la expresión es

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.3)$$

El signo de la curvatura en un punto P es positivo si, dada una parametrización de la curva, el vector normal y el vector \overrightarrow{PC} tienen sentido opuesto, en otro caso, el signo será negativo. Con C , se denota al centro de curvatura para el punto P , es decir, el centro del círculo osculatorio, que pasa por P , es tangente a la curva en este punto y posee igual curvatura que la curva en P , figura 1.2.

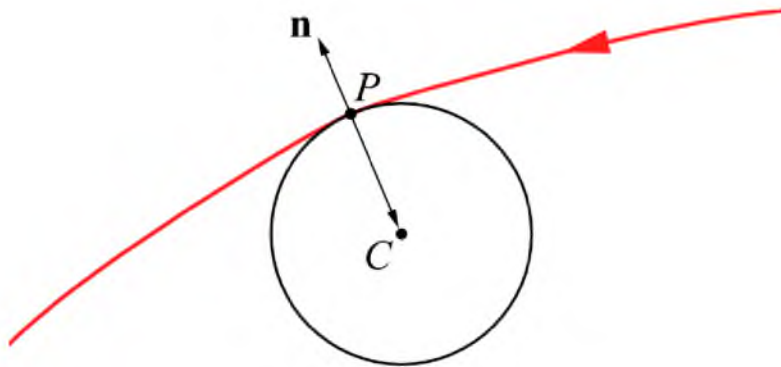


Figura 1.2: Curvatura con signo positivo

Una curva plana $r : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, que verifica la condición $|\dot{r}(s)| = 1$, se dice que está parametrizada con respecto a la longitud de arco.

De la teoría de la Geometría Diferencial [dCar97], se conocen las siguientes relaciones que se satisfacen para curvas planas C^2 -continuas definidas paramétricamente con respecto a la longitud de arco, conocidas como *Fórmulas de Frénet*:

$$\dot{\mathbf{t}} = -\kappa \mathbf{n} \quad (1.4)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \kappa \mathbf{t}. \quad (1.5)$$

donde κ es la curvatura dada por (1.3) y \mathbf{n} es la normal que se calcula como en (1.1).

1.3. A-spline. Continuidad geométrica

Definición 1.5. Una *curva A-spline de grado n* es una curva continua, definida por tramos, donde cada sección es una curva implícita de grado n . Los puntos donde se unen dos tramos consecutivos del A-spline se llaman *nodos o puntos de ruptura*.

En la solución de múltiples problemas de modelación no basta con la continuidad de estas curvas. La *suavidad* de las mismas resulta ser también una exigencia estándar. Cuando se trabaja con curvas funcionales o paramétricas, dicha *suavidad* se logra exigiendo, usualmente para k pequeño, que las mismas sean \mathcal{C}^k -continuas.

Las curvas spline más populares son los spline cúbicos paramétricos. Estos son curvas definidas a trozos, donde cada sección es un polinomio de grado 3. Lo más usual en las aplicaciones es exigir que este tipo de curvas sean de clase \mathcal{C}^2 (que es la máxima suavidad que se puede pedir sin que todos los tramos se reduzcan al mismo polinomio), lo que es equivalente a pedir que esta condición se cumpla en los nodos.

Puesto que en el caso de curvas A-spline no se presupone ningún tipo de parametrización de las curvas, lo realmente interesante es el comportamiento geométrico de la misma. De este modo, el concepto de \mathcal{C}^k -continuidad es sustituido por el de G^k -continuidad o *continuidad geométrica de orden k* .

El concepto de G^k -continuidad está estrechamente vinculado a la noción de Geometría Algebraica de la multiplicidad de la intersección entre dos curvas algebraicas. Intuitivamente hablando, un punto P situado sobre las curvas f y g es un punto de intersección de multiplicidad k , si al perturbar ligeramente los coeficientes de f y g resulta que P da lugar a k puntos de intersección entre las curvas perturbadas. (Por ejemplo, si f es un círculo y P es un punto situado sobre f , entonces f y su recta tangente g en el punto P se intersecan con multiplicidad 2, ya que si son perturbados ligeramente los coeficientes de la recta, entonces resulta que ésta y el círculo se cortan en dos puntos). Para una definición formal de multiplicidad de la intersección entre dos curvas algebraicas pueden ser consultados [Hart77] y [Ful84].

Definición 1.6. Sean $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$ dos curvas algebraicas planas y $P \in \mathbb{R}^2$ un punto situado sobre ambas curvas. Diremos que f y g se unen con *continuidad geométrica de orden k* en el punto P si la multiplicidad de la intersección entre f y g en el punto P es exactamente $k + 1$.

Para más detalles acerca del concepto de continuidad geométrica se puede consultar [Garr91], [Warr86], [Warr90]. En la práctica se utilizan las siguientes definiciones equivalentes de G^1 y G^2 -continuidad para una curva A-spline:

Definición 1.7. *Siendo S una curva A-spline plana, si para todo punto P sobre la curva se cumple que S y su recta tangente son funciones continuas en P , se dice entonces que S es G^1 -continua.*

Nótese que la definición de G^1 -continuidad enfatiza el hecho geométrico de que la tangente a la curva varía continuamente a lo largo de la misma. Por supuesto, toda curva spline paramétrica C^1 -continua, es una curva G^1 -continua; sin embargo, el recíproco depende de la parametrización del spline. En otras palabras, la C^1 -continuidad depende adicionalmente de la parametrización introducida, de modo que la misma curva puede ser C^1 -continua con respecto a una parametrización y no serlo con respecto a otra. Sin embargo, para todo spline paramétrico G^1 -continuo es posible encontrar una reparametrización tal que la curva sea C^1 -continua (vea [Garr91]).

Definición 1.8. *Dada una curva spline plana S , si S es G^1 -continua y, para todo punto P sobre S , la curvatura es una función continua en P , se dice entonces que S es G^2 -continua.*

El concepto de G^2 -continuidad que se acaba de introducir se refiere exclusivamente a curvas planas, pues para curvas en el espacio es necesario exigir adicionalmente la variación continua del vector binormal [Far97].

1.4. Un esquema A-spline para CAGD

En [Beh09] se desarrollan las bases teóricas que garantizan la existencia de un esquema A-spline cúbico, a partir del cual, se aporta un conjunto de algoritmos que resuelven eficientemente disímiles problemas de CAGD. Esta familia de curvas algebraicas es capaz de interpolar una configuración prefijada de puntos, vectores tangentes y valores de curvatura asociados a cada uno de éstos, y lo hace sin la imposición de restricciones como las que se exigen en trabajos anteriores publicados por [Baj01], [Mee03], entre otros. La expresión de la curva en cada sección, en coordenadas baricéntricas¹ respecto

¹Fijado un triángulo T de vértices A , B y C , todo punto P del plano puede ser escrito de forma única como combinación lineal baricéntrica de los vértices del triángulo, es decir, existen valores únicos de u , v y w tales que $P = uA + vB + wC$. A estos valores (u, v, w) se les denomina coordenadas baricéntricas del punto P respecto al triángulo T .

al triángulo de referencia asociado a ésta, queda implícitamente definida por la ecuación:

$$A_i : -v^3 + \frac{uw(u+w) + (\kappa_2^i w + \kappa_0^i u)v^2}{2} \delta_i^3 + \frac{(\kappa_2^i + \kappa_0^i)uvw}{2} \delta_i^4 = 0 \quad (1.6)$$

La cúbica descrita por la fórmula (1.6) resulta ser conca, convexa y no singular en cada tramo. Adicionalmente, posee un parámetro libre δ , cuya manipulación permite interpolar un punto arbitrario en la región de interés y que por tanto funciona como asa geométrica.

La referida región de interés, varía en dependencia de los sentidos que posean los vectores tangentes a cada uno de los nodos en su correspondiente sección. De acuerdo a esta característica se analizan dos casos por separado: caso interior, donde la región de interés no es más que el triángulo cuyos vértices son los nodos asociados a la sección en cuestión y el punto donde se cortan las rectas tangentes a estos nodos; y el caso exterior, donde la región de interés es ahora el triángulo formado por los nodos y el punto de coordenadas baricéntricas $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$. Los casos exterior e interior pueden ser visualizados en la figura 1.3, para un análisis más profundo sobre estas cuestiones puede consultarse [Beh09], sección 2.3.5.

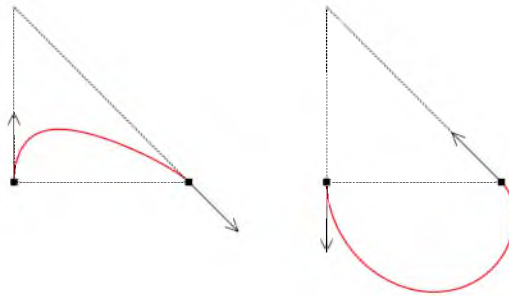


Figura 1.3: *Caso interior a la izquierda, caso exterior a la derecha*

Se entiende por polígono de control del esquema A-spline propuesto, a una línea poligonal formada por una serie de triángulos y trapecios consecutivos, cada uno de los cuales posee solamente un vértice en común con sus dos vecinos más cercanos, ver figura 1.4. La manera en que se escogen estos triángulos y trapecios depende de la configuración de nodos y vectores tangentes inicial, para más detalle sobre su construcción se puede estudiar la sección 2.3.1 de [Beh09].

La modificación e interpolación a posteriori de alguno de los datos locales correspondientes a una sección, resulta factible sin que tales cambios se

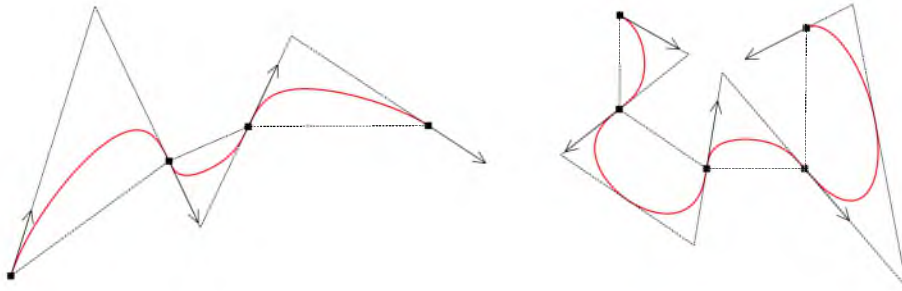


Figura 1.4: *Polígonos de control*

propaguen por todas las secciones del A-spline. A diferencia de cuando se usan spline cúbicos racionales G^2 -continuos, no es preciso esperar a calcular los datos de todas las secciones para obtener la expresión general del mismo. Esto facilita que en la medida que se van actualizando los datos que definen la curva en cada tramo, éstos puedan graficarse secuencialmente en tiempo real. Todo lo anterior proporciona un control más directo e intuitivo de la geometría local de cada sección del A-spline y, en consecuencia, de la propia curva A-spline.

Entre las propiedades que satisface este esquema, en [Mora12] y [Tol14] se demuestran los siguientes resultados:

- Para cada sección \mathcal{A}_i , existe un valor del parámetro δ_i que garantiza que si los datos de puntos, tangentes y curvaturas provienen de una circunferencia, la curva A-spline que los interpola es un arco de dicha circunferencia; en otras palabras, que el esquema A-spline propuesto es capaz de reproducir arcos de circunferencia.
- Es posible, en cada una de las secciones del A-spline, interpolar un punto adicional con tangente prefijada, situado en el interior de la región de interés. Esto se traduce en un mayor dominio sobre el comportamiento de la curva no solo en los nodos del A-spline, sino también en el interior de las secciones del mismo.
- Fijada una recta que corta a la región de interés de una de las secciones del A-spline, se garantiza la existencia de una curva dentro de la familia propuesta que contacte una y solo una vez a dicha recta y lo haga de forma tangencial.

Una implementación eficiente y robusta de todos los algoritmos propuestos en [Beh09] y [Tol14], será presentada en [Arr16] con lo cual se garantizará

la existencia de un software que permita la utilización del esquema A-spline propuesto en [Beh09] como una herramienta amigable y útil para el diseño basado en esbozos.

1.5. Curvas d -offset. Generalidades

Sea $\mathbf{r}(s)$ una curva plana definida paramétricamente para el parámetro $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s)) \quad (1.7)$$

donde x y y son funciones diferenciables del parámetro s .

Definición 1.9. Una *curva offset plana* con distancia d a la curva $\mathbf{r}(s)$ es definida como:

$$\hat{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) + d\mathbf{n}(s) \quad (1.8)$$

donde $d > 0$ corresponde a un lado del offset y $d < 0$ corresponde al otro. Generalmente, en la literatura, a ambos lados del offset se les denomina curvas d -offset. A la curva $\mathbf{r}(s)$ se le conoce como *curva madre* o *generatriz del offset*.

Se denotará por $\hat{\mathbf{t}}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ a los vectores tangente y normal unitarios a la curva offset, respectivamente y por $\hat{\kappa}$ a su curvatura. Por medio de las expresiones (1.1), (1.3) y las relaciones (1.5) se tienen las siguientes igualdades, que relacionan la normal, tangente y curvatura de la curva madre con la normal, tangente y curvatura del offset, respectivamente:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} &= \frac{1 + \kappa d}{|1 + \kappa d|} \mathbf{t} \\ \hat{\mathbf{n}} &= \frac{1 + \kappa d}{|1 + \kappa d|} \mathbf{n} \\ \hat{\kappa} &= \frac{\kappa}{|1 + \kappa d|} \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que la tangente y la normal a la curva offset son colineales a la tangente y normal de la curva madre, respectivamente, en iguales valores paramétricos.

Existen dos tipos de singularidades que se pueden presentar en las curvas d -offset, éstas son: *puntos irregulares* y *autointersecciones*.

Los puntos irregulares se presentan en los valores paramétricos para los cuales $\kappa = -\frac{1}{d}$ y dentro de éstos se destacan los puntos aislados, que se producen cuando la curva madre es un círculo de radio R y la distancia d coincide con el opuesto de R .

Las autointersecciones ocurren cuando para diferentes valores del parámetro se alcanzan iguales valores de la curva offset, esto es

$$\exists s_1, s_2, s_1 \neq s_2, : \hat{\mathbf{r}}(s_1) = \hat{\mathbf{r}}(s_2)$$

Si $\mathbf{r}(s)$ es una curva polinomial racional, la búsqueda de estos puntos se traduce en la resolución de un sistema de ecuaciones, en general, no lineales, [Pat03].

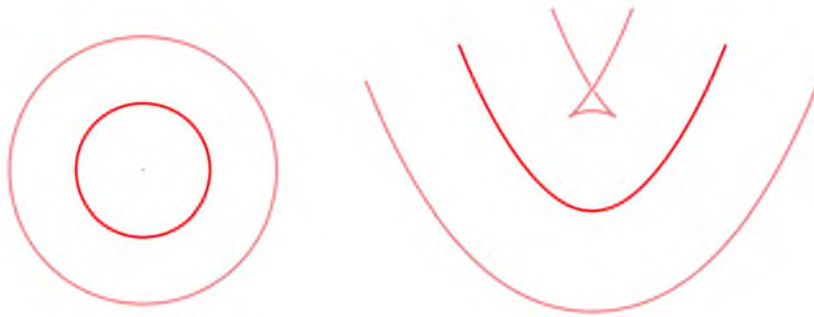


Figura 1.5: *Puntos singulares: A la izquierda un punto aislado, a la derecha autointersección del offset y puntos irregulares.*

1.6. Interpolador cúbico de Hermite

En análisis numérico, la interpolación de Hermite (cuyo nombre se debe al matemático francés Charles Hermite), es un método para interpolar conjuntos de datos con una función polinomial.

Un *spline cúbico de Hermite* o *interpolador cúbico de Hermite*, es una curva spline en la cual cada sección es un polinomio de tercer grado dado en su forma de Hermite, es decir determinado por los valores de la función y sus derivadas en los puntos muestrales s_1, s_2, \dots, s_n del espacio paramétrico. La fórmula de Hermite es aplicada a cada intervalo (s_k, s_{k+1}) con $k = 1 \dots n - 1$ separadamente y la curva spline que se obtiene resulta ser de clase \mathcal{C}^1 en todo su dominio.

Los spline cúbicos de Hermite son extensivamente usados en modelación geométrica para la obtención de curvas o trayectorias de movimiento que deben pasar a través de puntos específicos del plano o el espacio.

En el intervalo paramétrico unitario $s \in (0, 1)$ dado que el punto inicial sea p_0 correspondiente a $s = 0$ y el punto final sea p_1 asociado a $s = 1$ con tangentes m_0 y m_1 , respectivamente, el polinomio cúbico que interpola esos datos queda unívocamente definido por

$$p(s) = \underbrace{(2s^3 - 3s^2 + 1)}_{h_{00}} p_0 + \underbrace{(s^3 - 2s^2 + 3)}_{h_{10}} m_0 + \underbrace{(-2s^3 + 3s^2)}_{h_{01}} p_1 + \underbrace{(s^3 - s^2)}_{h_{11}} m_1$$

donde las funciones del parámetro s dadas por h_{00} , h_{10} , h_{01} y h_{11} son conocidas como base de Hermite.

En un intervalo paramétrico arbitrario $s \in (s_k, s_{k+1})$ la fórmula del polinomio de interpolación se obtiene aplicando un cambio afín de coordenadas a la expresión anterior, correspondiente al mapeo del intervalo paramétrico dado sobre el intervalo $(0, 1)$; en este caso la expresión del polinomio de interpolación es

$$p(t) = h_{00}(t)p_k + h_{10}(t)(s_{k+1} - s_k)m_k + h_{01}(t)p_{k+1} + h_{11}(t)(s_{k+1} - s_k)m_{k+1}$$

donde $t = \frac{s-s_k}{s_{k+1}-s_k}$ corresponde al cambio de variables adecuado.

Para la obtención de un spline de interpolación de Hermite, que interpole un conjunto $(s_k, p_k, m_k)_{k=1}^n$ de datos de valores paramétricos con puntos y tangentes asociados solo será necesario aplicar las fórmulas anteriores a cada uno de los intervalos (s_k, s_{k+1}) para $k = 1 \dots n - 1$.

Se demuestra en [Far97] que para el caso cúbico, el polinomio de Hermite que interpola los datos dados en un intervalo arbitrario es único y que el mismo no introduce más cambios de monotonía que los que originalmente presenten los datos. Además, por la unicidad, se tiene que este spline es extensional, o sea, si se adiciona un punto de interpolación sobre una de las secciones del spline y se le asigna la pendiente del spline en este punto, entonces la forma del mismo no varía [LeSe09].

Capítulo 2

Construcción del forro

En el capítulo introductorio se discutieron las cuestiones generales que motivaron al planteamiento del problema cuyo análisis constituye el objeto de esta tesis. Un primer enunciado informal del problema puede ser el siguiente

Problema: *Dado un conjunto finito y ordenado de bolas en el plano, cada una con un vector de dirección asociado, estudiar cómo generar un contorno que las forre, que sea conexo, G^1 -continuo y que cubra cada una de las bolas tangencialmente, figura 2.1*

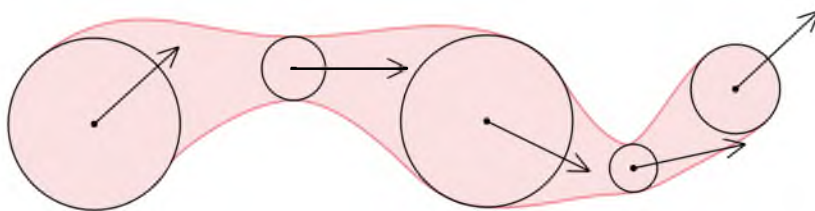


Figura 2.1: *Ejemplo de forro que satisface las condiciones del problema*

En el enunciado anterior no se precisa qué se entiende por *forro* o qué significa *cubrir tangencialmente* un conjunto de bolas. En el presente capítulo, luego de definir estas cuestiones y establecer un marco teórico para el estudio del problema propuesto, se analizan varias estrategias que de forma constructiva describen posibles soluciones al mismo. En cada caso se mencionan las ventajas y deficiencias que puedan presentar dichas soluciones, de manera que en la propuesta final se puedan explotar las potencialidades de cada una de las estrategias analizadas.

2.1. Un marco de trabajo

Para formalizar las características del problema propuesto, es necesario definir qué se entiende por forro y establecer las notaciones y definiciones con las cuales se trabajará a lo largo de todo el capítulo.

Una primera noción que es necesario precisar es la de bola orientada:

Definición 2.1. Se dice que la circunferencia B_i con centro en C_i y radio r_i es una **bola orientada** si tiene asociado un vector de dirección \mathbf{t}_i . Dada la parametrización $\mathbf{B}_i(t) = C_i + r_i(\cos(t), \sin(t))$, se designan los puntos P_i^+ y P_i^- como aquellos donde el producto escalar $\frac{\dot{\mathbf{B}}_i(t)}{\|\dot{\mathbf{B}}_i(t)\|} \cdot \frac{\mathbf{t}_i}{\|\mathbf{t}_i\|}$ es 1 y -1, respectivamente, figura 2.2.

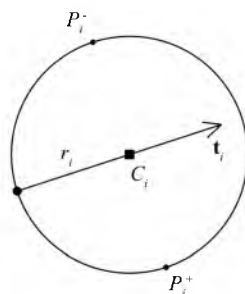


Figura 2.2: Bola orientada

A continuación se define qué se entiende por contorno asociado a dos bolas orientadas y qué características se espera que, de manera natural, satisfaga un contorno:

Definición 2.2. Dadas dos bolas orientadas B_0 y B_1 , se dice que $\mathfrak{c}_{0,1}$ es un **contorno** asociado a estas bolas si $\mathfrak{c}_{0,1} = \mathfrak{c}_{0,1}^+ \cup \mathfrak{c}_{0,1}^-$ donde:

- $\mathfrak{c}_{0,1}^\pm$ es una curva al menos G^1 -continua, plana, conexa y acotada, que tiene como puntos extremales a P_0^\pm y P_1^\pm .
- $\mathfrak{c}_{0,1}^\pm$ es tangente a las bolas B_0 y B_1 en los puntos P_0^\pm y P_1^\pm , respectivamente.

Definición 2.3. Dadas dos bolas orientadas B_0 y B_1 , y un contorno $\mathfrak{c}_{0,1}$ asociado a éstas, se define como **contorno cerrado** asociado a $\mathfrak{c}_{0,1}$ y se denota por $\bar{\mathfrak{c}}_{0,1}$ a la unión del contorno con las semicircunferencias $P_0^-P_0^+$ y $P_1^+P_1^-$, recorridas en sentido positivo, figura 2.3.

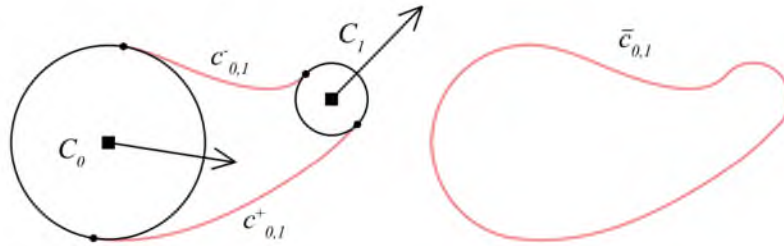


Figura 2.3: Contorno y contorno cerrado

Nótese que, por construcción, un contorno cerrado es una curva cerrada y conexa definida por tramos.

Un importante resultado del Análisis Matemático, el *Teorema de Jordán* [Val06], garantiza que toda curva cerrada simple del plano divide al mismo en dos componentes conexas disjuntas, las cuales tienen a la curva como frontera común; una de estas componentes está acotada, la cual se denomina interior de la curva y la otra es no acotada y se le llama exterior.

Apoyados en el *Teorema de Jordán*, se puede garantizar que si un contorno cerrado es simple, entonces se puede definir unívocamente su interior y su exterior como conjuntos disjuntos del plano.

Definición 2.4. Dado un contorno cerrado $\bar{c}_{0,1}$ de las bolas orientadas B_0 y B_1 , si $\bar{c}_{0,1}$ es una curva simple, se dice que este contorno forra parcialmente a las bolas B_0 y B_1 . Se define como **forro parcial** asociado a $\bar{c}_{0,1}$, y se denota por $\mathfrak{F}_{0,1}$, al interior de dicho contorno cerrado, figura 2.4.

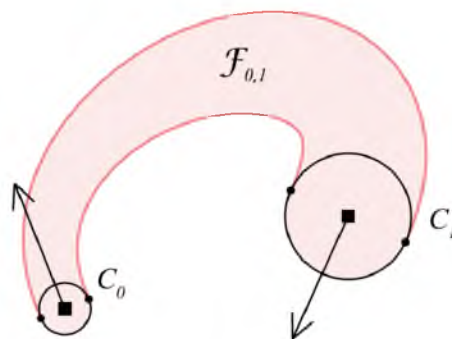


Figura 2.4: Forro parcial

Ya ha sido mencionado que en la bibliografía consultada en ocasiones se acepta que el forro puede cortar a las bolas o incluso presentar autointersecciones. Sin embargo, como paradigma intuitivo de forro, es deseable que su

contorno no interseque a las bolas, más precisamente, que las contenga en su interior. Esta reflexión motiva a la siguiente definición de *forro total*.

Definición 2.5. Sean B_0 y B_1 dos bolas orientadas con forro parcial asociado $\tilde{\mathfrak{F}}_{0,1}$, se dice que $\tilde{\mathfrak{F}}_{0,1}$ es un **forro total** si se cumple que

$$B_0 \cup B_1 \subset \tilde{\mathfrak{F}}_{0,1}$$

Para generalizar las definiciones de forro parcial y total para un conjunto arbitrario de bolas es necesario tener en cuenta que, en el proceso de diseño, el orden en que se genera el forro para las bolas es determinante en la geometría del contorno que éste define, por tal motivo, en lo que sigue se hace referencia a conjuntos ordenados de bolas. Por otro lado, el problema propuesto puede perder sentido si uno de los puntos de contacto del forro con la bola B_i está contenido en una de sus dos bolas vecinas; esto justifica el planteamiento de la siguiente definición.

Definición 2.6. Un conjunto finito $B = \{B_i\}_{i=0}^n$ de bolas orientadas y ordenadas es **admisibile** si se cumple que

- $P_0^\pm \notin B_1$
- $P_i^\pm \notin B_{i-1} \cup B_{i+1}$, $\forall i = 1 \dots n-1$
- $P_n^\pm \notin B_{n-1}$

A continuación se generalizan los conceptos de forro parcial y total para un conjunto admisibile de bolas.

Definición 2.7. Dado un conjunto admisibile de bolas orientadas $B = \{B_i\}_{i=0}^n$, si los contornos cerrados $\bar{c}_{i-1,i}$ forran parcialmente a las bolas orientadas B_{i-1} y B_i para todo $i = 1 \dots n$, se define el forro parcial del conjunto de bolas orientadas B como:

$$\tilde{\mathfrak{F}}_B = \bigcup_{i=1}^n \tilde{\mathfrak{F}}_{i-1,i}.$$

La curva frontera del conjunto $\tilde{\mathfrak{F}}_B$ se denominará **contorno parcial** de B o contorno que forra parcialmente a B .

Por la forma en que se ha definido el forro parcial para un conjunto admisibile de bolas, si éste existe, es conexo y su contorno parcial es cerrado y G^1 -continuo.

Análogamente a como se definió para el caso de dos bolas orientadas, se puede extender el concepto de forro total para un conjunto admisible de bolas.

Definición 2.8. *Sea $B = \{B_i\}_{i=0}^n$ un conjunto admisible de bolas y \mathfrak{F}_B un forro parcial para este conjunto. Se dice que \mathfrak{F}_B es un **forro total** si para todo i con $i = 1 \dots n$ se cumple que $\mathfrak{F}_{i-1,i}$ es un forro total. Su contorno se denomina **contorno total** o contorno que forra totalmente a B .*

Una vez establecido el marco de trabajo, resulta posible formalizar el problema antes propuesto:

Problema: *Dado un conjunto admisible B de bolas, estudiar cómo generar un forro total \mathfrak{F}_B para dicho conjunto.*

Es de esperar que las estrategias de generación del forro que sean propuestas admitan implementaciones computacionales que puedan correr en tiempo real, pues este problema se presenta como una herramienta de diseño geométrico y es fundamental que el usuario pueda manipular e interactuar con su diseño de manera rápida y natural.

En lo que sigue, para describir las formas propuestas de construir un forro, se trabajará únicamente con dos bolas consecutivas. La extensión del forro a un conjunto arbitrario de bolas admisibles se induce de forma natural teniendo en cuenta las definiciones anteriores.

2.2. Forro “ingenuo”

Un primer acercamiento al estudio de una solución del problema puede ser el siguiente:

Dadas dos bolas admisibles B_0 y B_1 , considérese $\mathbf{c}_{0,1}^+$ como la curva de la familia A-spline propuesta en [Beh09] que interpola los puntos P_0^+ y P_1^+ con tangentes \mathbf{t}_0 y \mathbf{t}_1 y curvaturas $\frac{1}{r_0}$ y $\frac{1}{r_1}$, respectivamente. Análogamente se puede definir $\mathbf{c}_{0,1}^-$ para los puntos P_0^- y P_1^- con vectores y valores de curvatura asociados como en el caso anterior.

Nótese que, si $\mathbf{c}_{0,1}^+$, $\mathbf{c}_{0,1}^-$ y los arcos de circunferencia $P_0^-P_0^+$ y $P_1^+P_1^-$ recorridos en sentido positivo, no se intersecan en ningún punto interior, entonces el contorno cerrado $\bar{\mathbf{c}}_{0,1}$ que estos definen, es simple. Esto se puede afirmar tomando en consideración las buenas propiedades que posee la familia A-spline empleada.

Una condición suficiente para garantizar que los contornos $\mathbf{c}_{0,1}^+$ y $\mathbf{c}_{0,1}^-$ no se intersequen, es que los trapecios de control definidos a continuación a partir del *shoulder point* sean disjuntos, figura 2.5a.

El trapecio de control definido a partir del *shoulder point* (el punto cuyas coordenadas baricéntricas son $(\frac{1}{2+\delta}, \frac{\delta}{2+\delta}, \frac{1}{2+\delta})$) es aquel que se forma al intersecar el triángulo de control con la recta tangente a la curva en dicho punto.

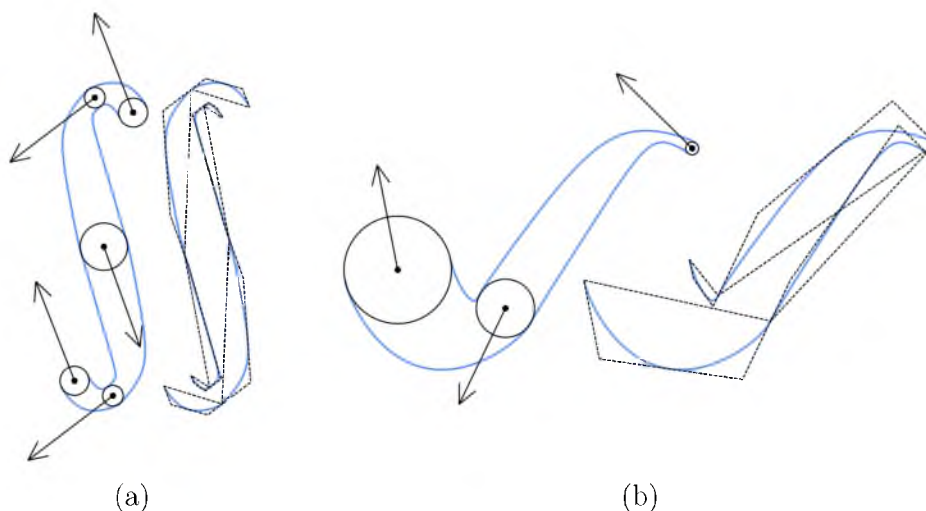


Figura 2.5: Forros con sus trapecios de control. Nótese que en (a) los trapecios de control no se superponen, mientras que en (b) esto sí sucede, aún así en ambos casos existe el forro.

En la práctica, esta condición resulta ser demasiado restrictiva, figura 2.5b. Usualmente, este problema se presenta cuando se induce la aparición de un punto de inflexión en el contorno, figura 2.6a.

Si dado un conjunto finito de bolas admisibles $B = \{B_i\}_{i=0}^n$ existe un forro parcial $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ construido mediante la unión de los forros parciales $\mathfrak{F}_{i-1,i}$ con $i = 1 \dots n$ de la manera antes propuesta, el contorno parcial en cuestión es G^2 -continuo, pues sería una curva A-spline cerrada de la familia definida en (1.4). El forro parcial así generado, en lo que sigue, se identificará por el nombre de *forro ingenuo*.

Aun en conjuntos admisibles para los que exista un forro ingenuo, garantizar que el forro sea total no es posible en general, figura 2.6b. Podría pensarse en soluciones supervisadas por el diseñador que, para generar las secciones del contorno, exploten las potencialidades del esquema empleado.

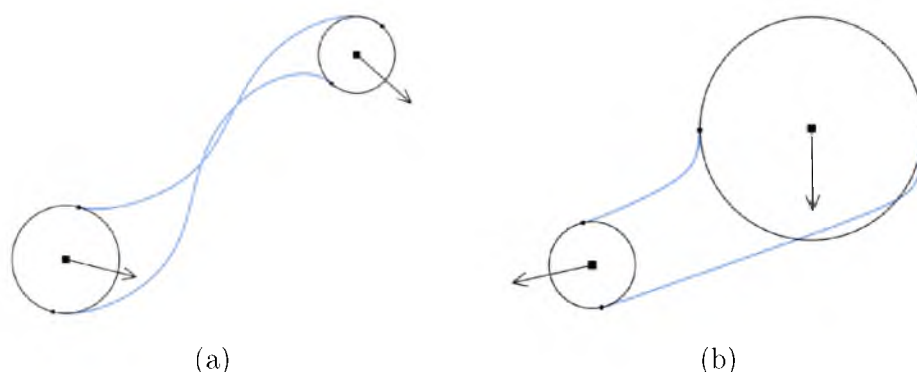


Figura 2.6: Problemas que puede presentar el forro ingenuo

Por ejemplo:

- este esquema posee un parámetro libre δ , que funciona como asa geométrica en cada sección; una posibilidad que permitiría al diseñador obtener un forro con las características deseadas, es modificar el valor por defecto de este parámetro y visualmente seleccionar aquel que satisface sus expectativas desde el punto de vista del diseño.
- Otra alternativa que puede ser aprovechada es la ubicación del punto de inflexión en los casos en que la configuración de las tangentes induzcan un cambio de concavidad en el contorno. Una ubicación adecuada de este punto puede garantizar la existencia de un forro total.

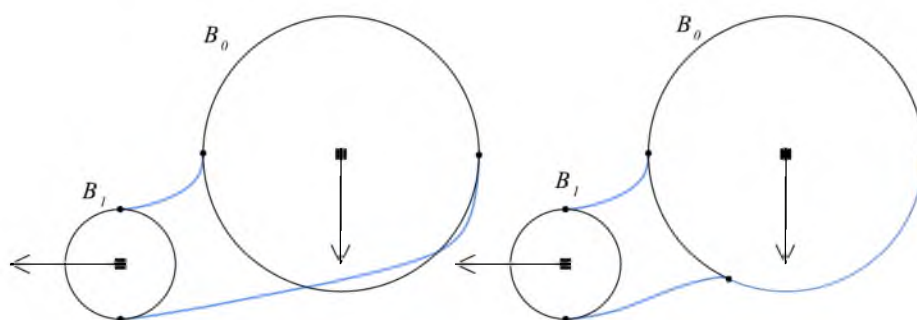


Figura 2.7: Anclar el punto de inflexión sobre la circunferencia.

Una variante a esta alternativa, que fue estudiada durante el proceso de construcción del forro “ingenuo” es, por ejemplo, agregar un punto de interpolación sobre dicha bola y reproducir el arco de circunferencia hasta el punto de contacto correspondiente. En este caso, sería crucial

garantizar que la nueva restricción impuesta al contorno parcial resuelve completamente el problema sin generar comportamientos no deseados en el nuevo forro parcial, figura 2.7.

- Para usuarios más experimentados en el diseño geométrico, la asignación del valor de curvatura en los puntos de contacto del forro con cada una de las bolas también puede resultar un asa geométrica interesante, que les permitiría controlar el comportamiento local del forro en los puntos de contacto con cada bola, figura 2.8.

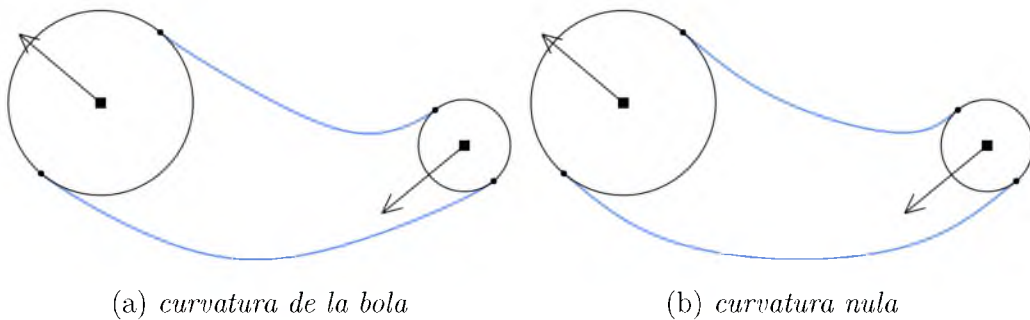


Figura 2.8: Valores de curvatura asignados en los puntos de contacto

En cualquier caso, la generación *no supervisada* de un forro “*ingenuo*” no es, para nada, un problema con una solución “*ingenua*”. De existir, un forro así obtenido sería G^2 -continuo y además, a los efectos de su manipulación y diseño, brindaría todas las prestaciones que poseen las curvas de la familia definida en (1.4), por lo cual, para trabajos futuros, valdría la pena continuar investigando en esta dirección.

2.3. Forro offset

En este epígrafe se presenta un acercamiento al problema de generar el forro desde un enfoque diferente, que toma en cuenta algunos trabajos encontrados en la literatura como [Sea05] y tendencias actuales de diseño y representación de objetos gráficos basados en su esqueleto [Liu14].

Dadas dos bolas admisibles B_0 y B_1 , la idea es considerar una curva esqueleto o madre a partir de la cual se pueda definir el contorno $\mathfrak{c}_{0,1}$ como sus curvas d -offset. Recuérdese que los puntos de contacto del contorno con las bolas son P_i^+ y P_i^- con $i = 0, 1$.

Si se impone la condición de que la curva madre o esqueleto del forro interpole los puntos C_0 y C_1 , centros de las bolas, entonces en los puntos extremales del contorno la distancia d de la curva madre al offset debe coincidir con el radio de la circunferencia a la que pertenecen.

Como en general los radios de las bolas dadas inicialmente por el diseñador no tienen que coincidir, es necesario estudiar qué propiedades posee una curva d -offset en el caso en que la distancia d de la curva a la madre no sea constante, sino que sea una función $d = d(s)$ que depende del parámetro s .

En la literatura consultada no se encontraron resultados relativos al comportamiento de curvas d -offset con d variable; por tal motivo, se considera necesario dedicar una sección de este epígrafe a la profundización, desde el punto de vista teórico, de algunas propiedades de este tipo de curvas, las cuales son demostradas para su posterior utilización en este trabajo.

2.3.1. Curvas d -offset con d variable

Sea $\mathbf{r}(s)$ una curva plana \mathcal{C}^2 -continua, definida paramétricamente con respecto a la longitud de arco como

$$\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s)) \quad s \in I \subseteq \mathbb{R}$$

donde x y y son funciones reales del parámetro s .

Definición 2.9. Una **curva offset plana** con distancia variable $d = d(s)$ a la curva $\mathbf{r}(s)$ es definida como:

$$\hat{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) + d(s)\mathbf{n}(s) \tag{2.1}$$

donde $d : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. A $\mathbf{r}(s)$ usualmente se le llama *curva generatriz o madre del offset*.

Usando la fórmula de Frénet dada por la expresión (1.5) y la definición del vector normal dada en (1.1), se tiene que

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s) + \dot{d}(s)\mathbf{n}(s) + d(s)\dot{\mathbf{n}}(s) \tag{2.2}$$

$$= \mathbf{t}(s) + d(s)\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \dot{d}(s)\mathbf{n}(s) \tag{2.3}$$

$$= \mathbf{t}(s)(1 + d(s)\kappa(s)) + \dot{d}(s)\mathbf{n}(s) \tag{2.4}$$

Nótese que en este caso, a diferencia del caso d constante, en cada valor paramétrico la tangente al offset no guarda relación de colinealidad con la

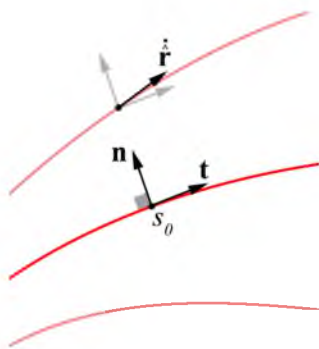


Figura 2.9: Vector tangente a la curva offset.

tangente a la curva madre, sino que es una combinación lineal de la normal y la tangente a dicha curva madre, figura 2.9.

Sin embargo, la expresión obtenida para la derivada del offset indica que, en aquellos valores paramétricos en cuyas vecindades la función distancia sea “cuasiconstante”, o sea, donde $\dot{d}(s) = 0$, se cumple la relación

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}}(s) = (1 + d(s)\kappa(s)) \mathbf{t}(s) \quad (2.5)$$

lo que demuestra la siguiente propiedad de las curvas d -offset con d variable:

Teorema 2.1. *Siendo $\hat{\mathbf{r}}(s)$ una curva offset definida a partir de la curva $\mathbf{r}(s) \in \mathcal{C}^2(I)$ por la función de distancia $d(s) \in \mathcal{C}^1(I)$, se cumple que en los puntos donde $d(s)$ posea derivada nula, la recta tangente a la curva offset y a la curva madre son paralelas.*

A continuación se intentará caracterizar los puntos singulares de una curva d -offset para el caso d variable.

En los preliminares se obtuvo que los puntos singulares de una curva d -offset con d constante, se alcanzan cuando el radio de curvatura coincide con la distancia d hasta la curva madre. A continuación se demuestra que un resultado análogo puede ser enunciado para el caso d variable.

Los puntos singulares del offset $\hat{\mathbf{r}}(s)$ se alcanzan para los valores del parámetro para los cuales $\hat{\mathbf{t}} = \frac{\dot{\hat{\mathbf{r}}}(s)}{\|\dot{\hat{\mathbf{r}}}(s)\|}$ no está definido. De la expresión obtenida en (2.4) se tiene que ésto se cumple siempre que la curva madre tenga singularidades o para aquellos valores paramétricos en los que se satisfagan simultáneamente las siguientes dos condiciones:

$$\begin{aligned} 1 + d(s)\kappa(s) &= 0 \\ \dot{d}(s) &= 0 \end{aligned}$$

Lo anterior se deduce del hecho de que en (2.4) se obtuvo que $\hat{\mathbf{r}}(s)$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores ortogonales $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$, que al ser linealmente independientes, sólo se anula si cada uno de los coeficientes de la combinación lineal se anula.

El resultado anterior constituye una importante caracterización de los puntos singulares para el caso de curvas d -offset con d variable:

Teorema 2.2. *Una curva d -offset con d variable, presenta singularidades en aquellos puntos donde la curva madre posea singularidades y en los puntos asociados a los valores del parámetro que satisfagan simultáneamente las siguientes dos condiciones*

$$1 + d(s)\kappa(s) = 0, \quad \dot{d}(s) = 0 \quad (2.6)$$

En el caso particular en el que la curva madre sea regular, es decir, que no posea singularidades, las ecuaciones (2.6) caracterizan las singularidades de la curva offset. Si en particular, se conoce que $d(s)$ no es constante y su derivada no se anula en un abierto U del espacio de parámetros, entonces no hay singularidades del offset de una madre no singular en U .

Un fenómeno que sería importante estudiar es la aparición de autointersecciones en la curva offset. Teóricamente hablando, como quedó expuesto en el epígrafe 1.5, se trata de encontrar valores diferentes del parámetro para los cuales el offset alcance el mismo punto. Estas condiciones conducen a la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales que, desde el punto de vista analítico y práctico es costoso. Sin embargo, existen otras formas de analizar este fenómeno desde el punto de vista geométrico.

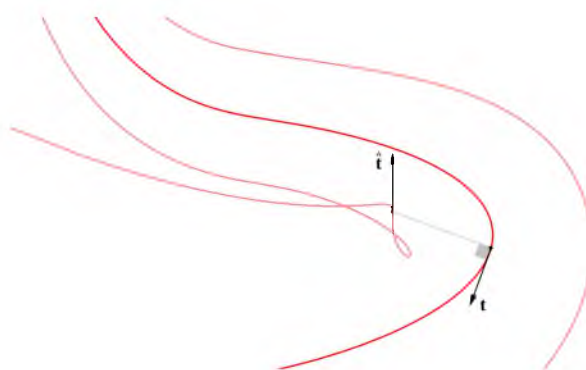


Figura 2.10: Autointersección

En efecto, cuando los vectores tangentes a la curva offset $\hat{\mathbf{t}}$ y a la curva madre \mathbf{t} , forman un ángulo θ mayor que $\frac{\pi}{2}$, o sea, que toma valores en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ se produce una autointersección, figura 2.10.

Nótese que para $\theta \in [0, 2\pi]$ se cumple que

$$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos \theta < 0$$

y de la geometría plana se conoce que $\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \|\mathbf{t}\| \|\hat{\mathbf{t}}\| \cos \theta$ por tanto, se tiene la siguiente relación de equivalencia

$$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{t}} < 0$$

Se analizará a continuación el miembro derecho de la equivalencia anterior. La dependencia de cada una de las funciones del parámetro s se omitirá en aras de lograr una mayor sencillez en las expresiones, pero no debe pasarse por alto que se está trabajando con funciones que dependen de la longitud de arco.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t} &= \frac{\dot{\hat{\mathbf{r}}}}{\|\dot{\hat{\mathbf{r}}}\|} \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{\|\dot{\hat{\mathbf{r}}}\|} \dot{\hat{\mathbf{r}}} \cdot \mathbf{t} \\ &= \frac{1}{\|\dot{\hat{\mathbf{r}}}\|} \left((1 + d\kappa) \mathbf{t} + d\mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{t} \\ &= \frac{1}{\|\dot{\hat{\mathbf{r}}}\|} \left((1 + d\kappa) \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} + d\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \right) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\hat{\mathbf{r}}}\|} (1 + \kappa d) \end{aligned}$$

La última igualdad se puede justificar tomando en cuenta que los vectores \mathbf{n} y \mathbf{t} son ortonormales.

Finalmente, se ha probado que:

Teorema 2.3. *Siendo $\hat{\mathbf{r}}(s)$ una curva offset definida a partir de $\mathbf{r}(s)$ por la función de distancia $d(s)$. Si se cumple que $1 + \kappa(s)d(s) < 0$, siendo κ el valor de curvatura de la curva generatriz en el punto en cuestión, entonces la curva offset tiene autointersecciones.*

Como resultado del teorema anterior, en la práctica, si se desea localizar autointersecciones, una estrategia puede ser buscar para qué valores del parámetro s el signo de la expresión $1 + \kappa d$ es negativo.

Tomando en cuenta la relación de signos entre la función distancia $d(s)$ y curvatura $\kappa(s)$ en cada punto, se pueden diferenciar dos casos fundamentales: caso *exterior*, en el que $d(s)\kappa(s) > 0$ y caso *interior*, en el que $d(s)\kappa(s) \leq 0$.

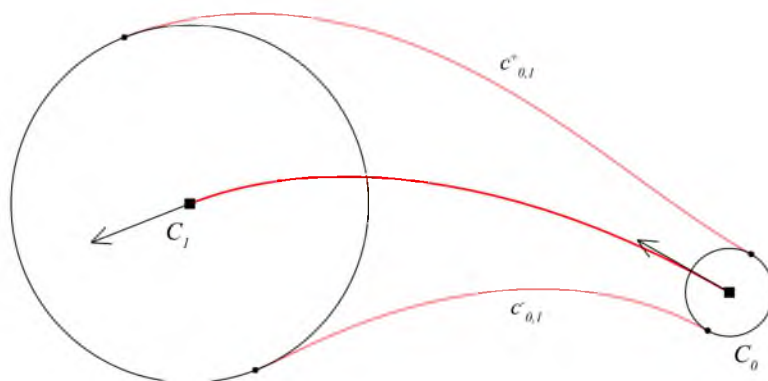


Figura 2.11: $c_{0,1}^+$ caso exterior, $c_{0,1}^-$ caso interior

Geoméricamente estos casos están asociados a los intervalos de convexidad del offset, figura 2.11.

Para el caso exterior se cumple que $1 + \kappa(s)d(s) > 0$ y por la convexidad es claro que el offset no presenta puntos singulares ni autointersecciones. En cambio, el caso interior sí puede presentar este tipo de irregularidades.

Observación: Es importante no confundir estos casos interior y exterior relativos a la geometría del forro offset con los casos interior y exterior relativos al esquema A-spline propuesto en [Beh09] que son mencionados en la sección 1.4 de este documento. En lo adelante, cuando se utilicen caso exterior e interior, se hará en el buen entendido de que se refiere al relativo a la geometría de la curva madre, salvo que se indique lo contrario.

Habiéndose estudiado las propiedades generales de las curvas d -offset con d variable, se está en condiciones de presentar un algoritmo para generar un forro parcial o total a partir de curvas offset.

2.3.2. Construcción del forro offset

Sean B_0 y B_1 dos bolas admisibles, los dos pasos fundamentales para la construcción de un forro parcial como curva d -offset es definir la curva madre y la función $d = d(s)$ de distancia variable de la curva madre al offset. Acorde con las ideas comentadas a inicios del epígrafe, se exigirá que la curva generatriz interpole los centros C_0 y C_1 de dichas bolas y que el offset interpole los puntos P_0^+ y P_1^+ por un lado y P_0^- y P_1^- por el otro, contactando de forma tangente a cada una de las circunferencias en estos puntos. El teorema 2.1 será fundamental para lograr ambos objetivos.

Sea una curva madre o generatriz $\mathbf{r}(s)$ y denótese por s_0 y s_1 los valores paramétricos asociados a los centros de cada una de las bolas. Si se imponen las siguientes dos condiciones sobre la curva madre

$$\mathbf{r}(s_i) = C_i \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(s_i) = \frac{\mathbf{t}_i}{\|\mathbf{t}_i\|} \quad (2.8)$$

y las siguientes dos sobre la función distancia,

$$d(s_i) = r_i \quad (2.9)$$

$$\dot{d}(s_i) = 0 \quad (2.10)$$

se puede garantizar que el offset interpola los puntos P_i^\pm con $i = 0, 1$ de forma tangente a las bolas: siendo r_i el radio de la bola B_i y \mathbf{t}_i el vector de orientación asociado a dicha bola.

En efecto, por la forma en que han sido seleccionados los puntos P_i^\pm para $i = 0, 1$ éstos están sobre la bola B_i y la dirección tangente a la bola en este punto coincide con \mathbf{t}_i ; por tanto, es claro que la distancia del centro de la bola al punto de contacto con el forro coincide con el radio de la bola. Las condiciones (2.8) y (2.9) garantizan que P_i^\pm se encuentra sobre la recta normal a la curva madre trazada desde el punto C_i , por tanto se garantiza que

$$\hat{\mathbf{r}}(s_i) = \mathbf{r}(s_i) + d(s_i)\mathbf{n}(s_i) = C_i \pm r_i\mathbf{n}(s_i) = P_i^\pm$$

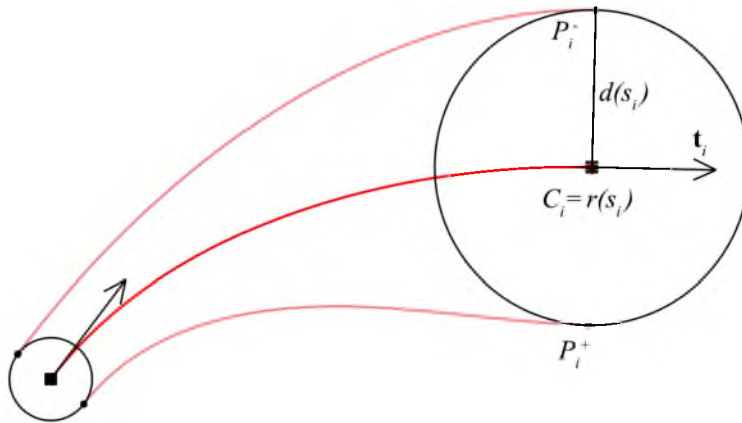


Figura 2.12: Construcción del offset

Por otro lado, las condiciones (2.10), (2.8) y el teorema 2.1 garantizan que $\hat{\mathbf{t}}(s_i)$ es colineal con \mathbf{t}_i , o sea que, el forro offset contacta a la bola B_i de forma tangente en los puntos P_i^\pm para $i = 0, 1$.

Hasta este punto, se han impuesto dos condiciones sobre la curva madre (2.7) y (2.8) y dos condiciones sobre la función distancia (2.9) y (2.10). Es preciso entonces, definir ambas funciones de manera que satisfagan las condiciones impuestas.

En este documento se presenta la propuesta de utilizar un interpolador cúbico de Hermite para generar tanto la función distancia, como la curva madre. En el caso de esta última, la selección de los valores paramétricos será $s_0 = 0$, $s_1 = \|C_1 - C_0\|$.

Fijadas las condiciones para la curva madre y la función distancia, se puede garantizar la existencia y unicidad de interpoladores cúbicos de esta familia que satisfagan las condiciones impuestas, los cuales poseerán todas las buenas propiedades mencionadas en la sección 1.6 de los Preliminares.

Una vez construido el contorno $\mathbf{c}_{0,1}$, es preciso analizar cuándo $\bar{\mathbf{c}}_{0,1}$ es una curva cerrada simple, o sea, cuándo el contorno generado define un forro parcial para las bolas B_0 y B_1 .

Para que la curva cerrada $\bar{\mathbf{c}}_{0,1}$ sea simple, es necesario garantizar que las curvas d -offset no presenten autointersecciones y no se corten una a la otra.

Teniendo en cuenta que los polinomios de Hermite no inducen cambios de monotonía no intrínsecos en los datos y que la función $d(s)$ debe cumplir las condiciones (2.9) y (2.10) con valores r_i siempre positivos, es claro que la función de distancia así generada será siempre positiva y en consecuencia los lados del offset no se cortarán uno al otro.

A su vez, se ha visto que el lado del offset asociado al caso exterior, no presentará autointersecciones; sin embargo, los teoremas 2.2 y 2.3 indican la posible aparición de singularidades y autointersecciones en las curvas offset para el caso interior. En la práctica, dadas dos bolas, es posible que el contorno interior definido a partir del offset se autointerseque, figura 2.13.

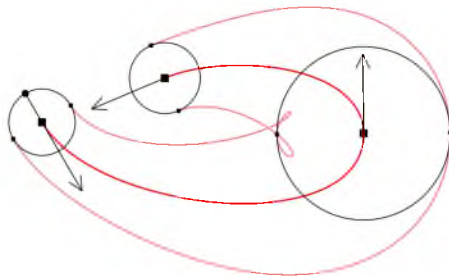


Figura 2.13: Autointersecciones en el contorno interior del offset

Una alternativa para evitar la aparición de autointersecciones en el contorno $c_{0,1}$ es la siguiente:

Numéricamente es posible localizar dónde $1 + \kappa(s)d(s) \leq 0$, lo cual constituye una condición suficiente para la presencia de autointersecciones. Con el fin de remediar esta situación, pudieran insertarse nodos de Hermite adicionales a la función de distancia, en los valores del parámetro donde $1 + \kappa(s)d(s)$ alcance valores mínimos negativos. El valor y la pendiente de estos nodos se hace coincidir con el de la función radio de curvatura $\frac{1}{\kappa(s)}$ evaluada en el valor paramétrico encontrado. Esta condición garantizaría que $1 + \kappa(s)d(s) \geq 0$.

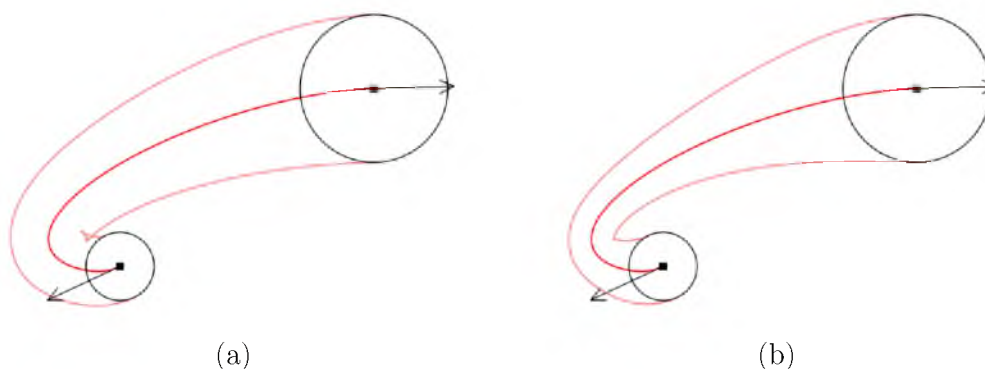


Figura 2.14: En (a) se muestra una autointersección en el contorno interior del offset, y en (b) se muestra cómo se puede evitar este problema

En la práctica, esta alternativa evita con éxito la aparición de lazos en la parte interior del offset siempre que este problema se localice suficientemente alejado de las bolas, figura 2.14. Sin embargo, esta propuesta no es infalible:

- En el caso de que la función $1 + \kappa(s)d(s)$ alcance mínimos locales en los extremos del intervalo no es posible aplicar el método descrito anteriormente, dadas las condiciones (2.9) y (2.10).
- al insertar un nuevo nodo de Hermite, aunque es poco usual, se puede generar la aparición de valores negativos para la función de distancia $d(s)$, con lo cual estaría induciéndose a intersecciones entre los lados interior y exterior del offset.

En lo adelante, si la configuración de bolas admisibles B es tal que admite un forro parcial construido a partir de los algoritmos antes propuestos, entonces este forro parcial será referido, como “forro offset”.

Para garantizar que un forro offset sea, por definición, un forro total, sería importante garantizar que las curvas offset que lo generan no intersecan a las circunferencias de las bolas en B ; sin embargo, en la práctica se detectó que existen casos patológicos para los cuales es imposible generar un forro offset que no corte a las bolas, figura 2.15.

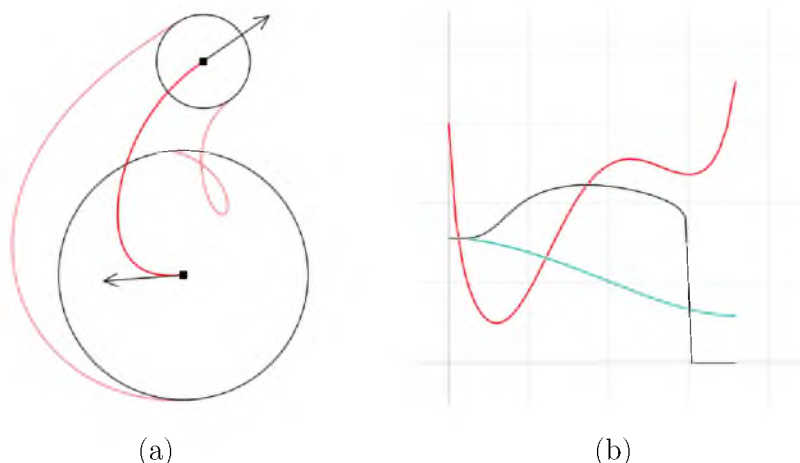


Figura 2.15: En (b) se presentan los ploteos de $\frac{1}{\kappa(s)}$ (rojo), la función $d(s)$ (verde) y la distancia de la madre a la circunferencia en la dirección normal, denotémosla por $\sigma(s)$ (negro), para el offset que se muestra en (a). Nótese que para evitar la autointersección en este caso es necesario que $d(s) \leq \frac{1}{\kappa(s)}$ y para evitar que el forro corte a la bola es necesario que $d(s) > \sigma(s)$, pero $\sigma(s) > \frac{1}{\kappa(s)}$ luego, el problema no tiene solución.

Cuando existe, el contorno del forro offset es G^1 -continuo y visualmente se comporta bien, figura 2.16; sin embargo, las autointersecciones que se presentan comúnmente para el caso interior, motivan al análisis de nuevas variantes.

Una variante que queda propuesta para trabajos futuros es utilizar esquemas con grados de libertad para la generación de la curva madre, lo cual permitiría realizar un análisis de cómo aprovechar dichos grados de libertad para evitar variaciones bruscas de la curvatura y por tanto disminuir las posibilidades de autointersecciones en el offset. Una opción a valorar sería la utilización de la familia propuesta en [Beh09], pues no sólo posee un parámetro libre, sino que también puede interpolar valores arbitrarios de curvatura en los nodos prefijados.

Otra propuesta, es la que se presenta en la siguiente sección.

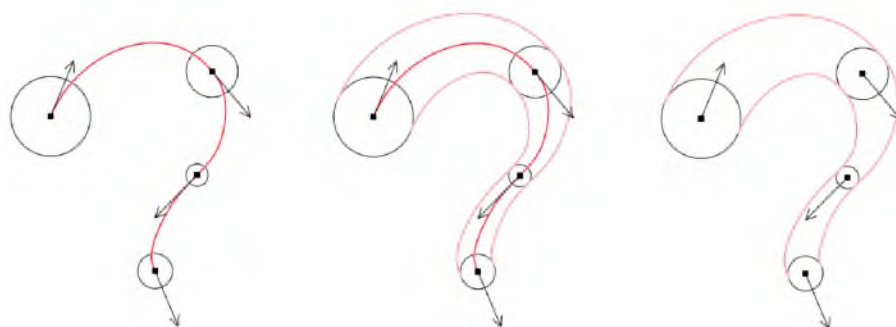


Figura 2.16: Contorno generado por el forro *offset*.

2.4. Forro híbrido

El análisis de los dos métodos propuestos para la generación de forros, motiva la presentación de una nueva propuesta que, teóricamente, explota las mejores propiedades de los forros *ingenuo* y *offset*.

Dadas dos bolas admisibles B_0 y B_1 , la idea es generar su contorno *offset* de la misma manera que en la sección anterior, pero solo tomar en cuenta la parte del contorno que corresponde al caso exterior. Esta decisión garantiza que la porción del contorno así generada no presenta singularidades ni autointersecciones.

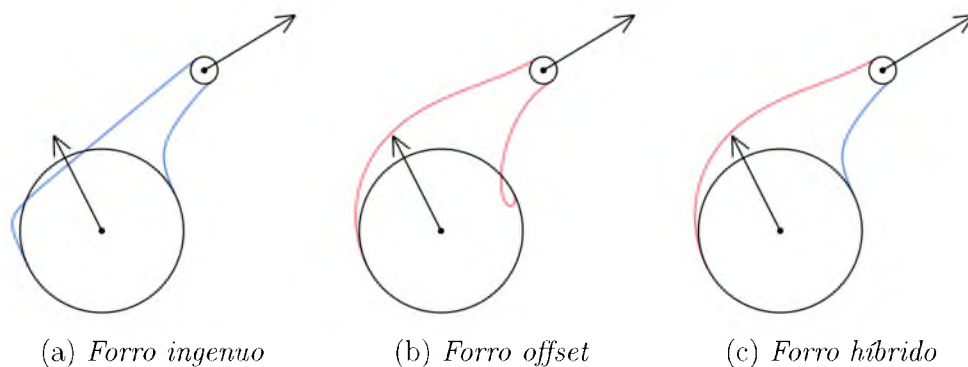


Figura 2.17: El forro híbrido evita problemas comunes en los forros *ingenuo* y *offset*.

Para generar un contorno interior la idea es utilizar el método propuesto en la sección del forro *ingenuo*. Las propiedades de la familia A-spline utilizada para generar el forro *ingenuo*, garantizan la no aparición de autointersecciones o puntos singulares, (ver figura 2.17). En este caso se propone

asignar al punto de interpolación la curvatura de la curva madre y no la de la bola correspondiente, pues para radios muy pequeños la curvatura sería muy elevada, provocando secciones “cuasitriangulares”.

Es importante precisar cómo construir el forro híbrido cuando las direcciones asociadas a las bolas inducen la aparición de un punto de inflexión en la curva madre. En este caso, no se puede distinguir entre parte interior del forro y parte exterior del forro, pues la concavidad cambia.

La propuesta que se presenta es la de incluir una bola $B_{\frac{1}{2}}$ intermedia, no visible al usuario, entre B_0 y B_1 con centro en el punto de inflexión de la curva madre, figura 2.18. Este valor paramétrico $s_{\frac{1}{2}}$ puede ser calculado analíticamente teniendo en cuenta la expresión (1.6), así como la pendiente de la recta tangente a la madre en el mismo, denotada por $\mathbf{t}_{\frac{1}{2}}$, que aportaría la orientación a esta nueva bola. La propiedad de extensionalidad del interpolador cúbico de Hermite, garantiza que no habrá cambios en la curva madre.

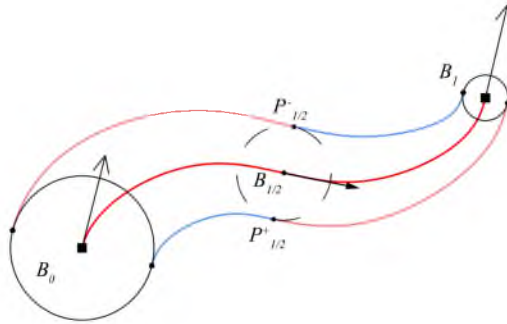


Figura 2.18: Inserción de una nueva bola en los puntos de inflexión.

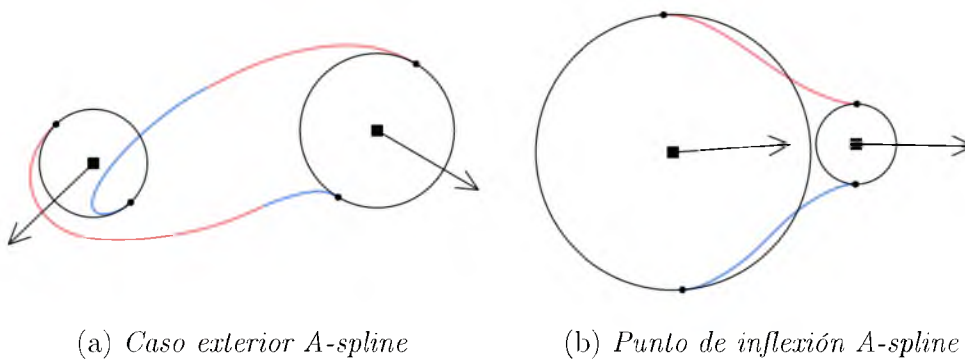
El radio de la nueva bola deberá coincidir con el valor de la función distancia asociada a las bolas B_0 y B_1 en este punto, o sea, $r_{\frac{1}{2}} = d(s_{\frac{1}{2}})$.

Faltaría por precisar qué condiciones de interpolación se impondrá para la construcción de los segmentos A-spline de la parte interior. Los puntos de interpolación o contacto con la bola $B_{\frac{1}{2}}$, denotados por $P_{\frac{1}{2}}^{\pm}$ quedan determinados una vez fijada la dirección de dicha bola. Para que las secciones interior y exterior empaten de forma G^1 -continua, es preciso que se exija que la dirección tangente asignada al A-spline en $P_{\frac{1}{2}}^{\pm}$ coincida con la del offset dada por $\dot{\mathbf{r}}(s_{\frac{1}{2}}) = \dot{\mathbf{r}}(s_{\frac{1}{2}}) + \dot{d}(s_{\frac{1}{2}})\mathbf{n}(s_{\frac{1}{2}}) + d(s_{\frac{1}{2}})\dot{\mathbf{n}}(s_{\frac{1}{2}})$, donde $\mathbf{n}(s_{\frac{1}{2}})$ es la normal a la curva madre en $s_{\frac{1}{2}}$; finalmente, como los valores de curvatura deben coincidir con los de la curva madre y $s_{\frac{1}{2}}$ es un punto de inflexión, el valor

asociado debe ser cero.

Si bien la posibilidad de orientar las bolas brinda al usuario un asa geométrica muy poderosa, puede provocar la aparición de configuraciones sin sentido, que inevitablemente generarán malos comportamientos del forro.

Estos comportamientos no deseados, generalmente, aparecen cuando las condiciones de interpolación en la parte asociada al forro ingenuo inducen la aparición de un punto de inflexión (figura 2.19b) o un caso exterior para el esquema A-spline, (figura 2.19a).



(a) Caso exterior A-spline

(b) Punto de inflexión A-spline

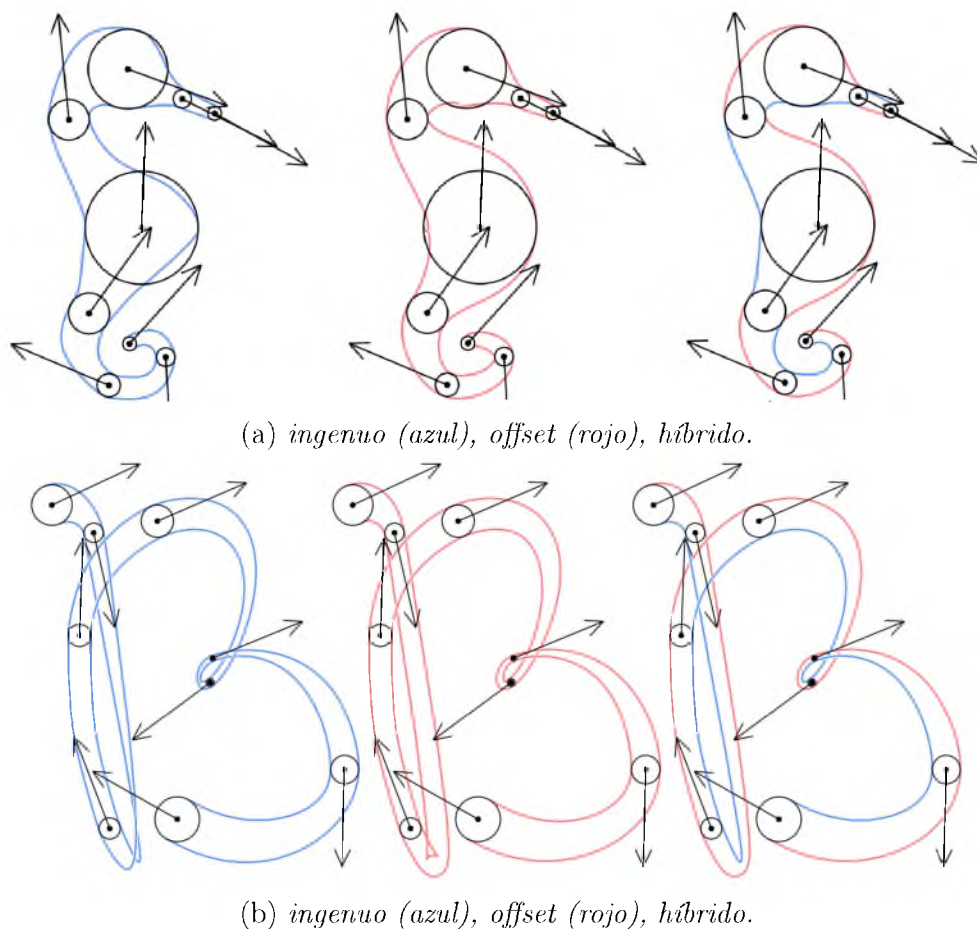
Figura 2.19: Comportamientos no deseados del forro híbrido

Quedarían por determinar condiciones sobre las bolas y sus orientaciones que eviten la aparición de estas configuraciones patológicas, de esta manera se garantizaría además que el contorno generado por el A-spline no cortaría a las bolas pues su triángulo de control viviría fuera de estas.

No obstante las observaciones anteriores, en comparación con las propuestas ingenuo y offset, los resultados que se obtienen por el forro híbrido son superiores. En el proceso de experimentación con este método híbrido, frecuentemente se logra generar un forro total. De manera general, esta solución evita más fácilmente autointersecciones y visualmente, las curvas obtenidas son atractivas. En la figura 2.20 se comparan contornos generados como forro híbrido con los obtenidos por ingenuo puro y offset puro.

2.4.1. Representación para transmisión e intercambio

Una vez construido el forro, es fundamental encontrar una representación del mismo que permita caracterizarlo completamente como objeto geométrico y cuyo formato pueda ser transmitido e interpretado de forma sencilla en



(a) *ingenuo (azul), offset (rojo), híbrido.*

(b) *ingenuo (azul), offset (rojo), híbrido.*

Figura 2.20: *Comparación de las tres propuestas*

plataformas comunes de diseño geométrico asistido por computadoras.

Es claro que, si se desarrollara una aplicación a partir de los algoritmos descritos en este documento, que permitiera construir el forro para una configuración admisible de bolas, dicho forro quedaría completamente descrito por una lista de puntos (centros de las bolas), radios y vectores (orientación de las bolas), con tantos elementos como bolas en la configuración. Sin embargo, para un usuario sin acceso a esta aplicación, esta información no resultaría suficiente para describir geoméricamente la región plana determinada por el forro.

Nótese que el forro queda totalmente descrito a partir de la descripción de $\mathbf{c}_{i,i+1}^+$ y $\mathbf{c}_{i,i+1}^-$ para cada par de bolas consecutivas B_i, B_{i+1} :

La variante que se propone en este documento es la de caracterizar cada uno de los contornos por una muestra densa de puntos, cuya densidad puede ser establecida de antemano por el usuario; de esta manera se tendrá una aproximación poligonal con tanta precisión como se desee.

Para lograr este objetivo se conoce que, la parte del contorno definida como forro offset, tiene una representación paramétrica en función de la longitud de arco; en virtud de esto, la generación de puntos con cualquier densidad puede realizarse de forma simple. En el caso del contorno definido como forro ingenuo, al ser una representación implícita, es necesario precisar cómo generar los puntos sobre el contorno. En [Mora12] ya se proponen algoritmos para la generación jerárquica de puntos sobre el A-spline y en [Arr16] pronto se tendrá una nueva propuesta más eficiente y robusta computacionalmente.

Finalmente, según esta propuesta, el forro quedaría descrito con tanta precisión como se desee por dos listas de puntos: la correspondiente a la unión ordenada de los puntos sobre los contornos $\mathbf{c}_{i-1,i}^+$ con $i = 1 \dots n$ de forma consecutiva, que describiría la parte del contorno del forro dada por $\cup_{i=1}^n \mathbf{c}_{i-1,i}^+$ y la correspondiente a la parte $\cup_{i=1}^n \mathbf{c}_{i-1,i}^-$ construida de forma análoga.

Esta propuesta está concebida de manera que pueda ser interpretada desde cualquier aplicación básica de diseño geométrico. El hecho de que la densidad de las muestras seleccionadas puede ser escogida por el usuario, permite que el modelo pueda ser transmitido con tanta precisión como requiera el usuario o la aplicación utilizada.

Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

El problema de revestir regiones determinadas por bolas 2D es reconocido en la literatura como un problema mal planteado, fijadas la configuración de las bolas y las condiciones que debe satisfacer el forro, puede no existir una única solución o incluso, puede no existir solución. En ese sentido, los métodos propuestos en este trabajo constituyen aproximaciones al estudio de la solución de este problema y por tanto representan un buen referente para quienes se propongan este objetivo.

Como parte de la investigación, se logró caracterizar teóricamente la existencia de puntos singulares para curvas d -offset con d variable, así como enunciar y demostrar una condición suficiente para la aparición de autointersecciones del offset.

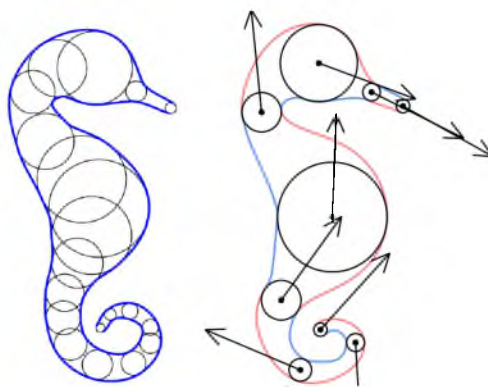


Figura 2.21: *Propuesta de [KuHo10] vs nuestra propuesta*

Un aporte fundamental de este trabajo lo constituye, sobre todo, la incorporación de orientaciones a las bolas. Con este nuevo parámetro, o asa

geométrica local, se logran buenas descripciones de la geometría del forro con una menor cantidad de datos. Esto implica una mejora significativa en cuanto a la representación del objeto geométrico en escenarios de almacenamiento y transmisión de información, figura 2.21.

Por otro lado, la determinación y orientación de las bolas se convierte en una novedosa herramienta para modelación de regiones planas, que de manera muy natural e intuitiva, permite a los usuarios describir las características del modelo descado. Una misma configuración de bolas con diferentes orientaciones asociadas, produce resultados completamente diferentes, en este sentido, el problema propuesto es más flexible y rico para la modelación geométrica, figura 2.22.

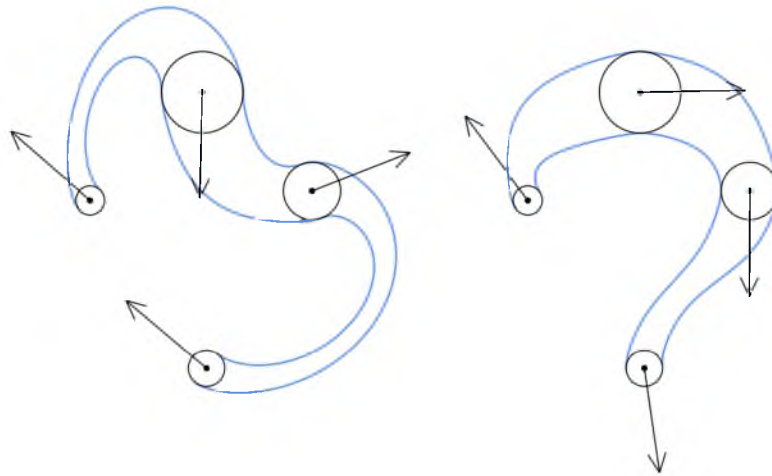


Figura 2.22: Igual configuración de bolas, diferentes orientaciones.

En particular, las regiones generadas mediante el forro híbrido constituyen buenas soluciones al problema propuesto en la mayoría de los casos, los contornos así definidos resultan ser G^1 -continuos y no poseen autointersecciones por tramos.

Los algoritmos propuestos son susceptibles de ser implementados de forma sencilla y eficiente, pues si bien el costo computacional de la generación del forro para n bolas sería $\mathcal{O}(n)$, el costo de actualizarlo luego de modificar una bola es $\mathcal{O}(1)$ pues solo es necesario reconstruir a lo sumo dos secciones. Esto significa que permitiría la manipulación en tiempo real de los datos del problema y por tanto, que es posible implementar una aplicación de diseño geométrico que promueva una edición interactiva, intuitiva y muy natural de contornos y regiones planas. Los detalles de dicha implementación eficiente no son discutidos en el documento, pues escapan a los objetivos de este trabajo

y serán presentados en [Arr16].

Además, se valora la factibilidad de representar los diseños propuestos de forma que puedan ser transmitidos y compartidos en entornos virtuales sin presuponer que el receptor posea el software que se presentará en [Arr16].

Recomendaciones

Se recomienda continuar el estudio de condiciones de admisibilidad para las configuraciones de bolas orientadas, de manera que se puedan dar condiciones suficientes y poco restrictivas de existencia del forro híbrido total.

Además, para la generación de la curva madre en el caso del forro offset, se recomienda el estudio de esquemas de interpolación con más parámetros libres y aprovechar dichos parámetros para disminuir al máximo los cambios bruscos de curvatura y con esto controlar la aparición de singularidades o autointersecciones.

Para el caso ingenuo, es recomendable estudiar las potencialidades del parámetro δ como posible asa geométrica, útil para la obtención de un forro ingenuo total. Adicionalmente, sería importante estudiar dónde ubicar el punto de inflexión en los casos en los que las direcciones tangentes induzcan un cambio de concavidad del A-spline, de manera que se eviten intersecciones de los contornos inferior y superior o cortes a las bolas.

Se recomienda, además, trabajar en una implementación amigable de los algoritmos propuestos y estudiar formas de extender a tres dimensiones los forros que se generan en el plano, de manera que se obtenga una superficie 3D continua, conexa, que contenga en su interior a las bolas 2D *extendidas* a bolas 3D y que no posea autointersecciones indeseadas.

Bibliografía

- [Arr16] Arredondo, A., *Diseño geométrico con A-splines cúbicos*, Tesis en opción al grado de Maestro en Ciencias (*trabajo en progreso*), Universidad de la Habana, (2016).
- [Baj01] Bajaj, C., Xu, G., *Regular algebraic curve sections (III)-Applications in interactive design and data fitting*. Computer Aided Geometric Desing, 18, (2001), 149-173.
- [Bas15] Bastl, B. et al., *Simple and branched skins of circles and convex shapes*, Graphical Models 78, (2015), 1-9.
- [Beh09] Behar, S., *Construcción de una familia de A-spline cúbicos G2-continuos para la solución de diversos problemas de CAGD*. Tesis presentada en opción del grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, La Habana, (2009).
- [dCar97] do Carmo, M., *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, (1997).
- [Far97] Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: a practical guide*, Academic Press Inc., (1997), 87-91.
- [Ful84] Fulton, W., *Intersection Theory*, Springer Verlag, Berlin, (1984).
- [Garr91] Garrity, T., Warren J., *Geometric continuity*, Computer Aided Geometric Design 8 (1991), 51-65.
- [Hart77] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, Berlin, (1977).
- [KuHo10] Kunkli, R., Hoffmann, M., *Skinning of circles and spheres*, Journal Computer Aided Geometric Design 27, (2010), 611-621.

- [Kun09] Kunkly, R., *Localization of touching points for interpolation of discrete circles*, *Annales Mathematicae et Informaticae* 36, (2009), 103-110.
- [LeSe09] Levien, R., Séquin, C.H., *Interpolating Splines: Which is de fairest of them all?*, *Computer-Aided Design and Applications* 6, (2009), 1-4.
- [Liu14] Liu, S. et al, *Skinning Cubic Bézier Splines and Catmull-Clark Subdivision Surfaces*, George Mason University, (2014).
- [Mee03] Meek, D.S., Ong, B.H. , Walton, D.J. *Constrained interpolation with rational cubics*. *CAGD* 20, (2003), 253-275.
- [Mora12] Morales Lezca, W., *Generación jerárquica de puntos, curvas d-offset y ploteos de curvaturas asociados a un A-spline cúbico*, Tesis de Maestría, Universidad de la Habana, (2012).
- [Pat03] Patrikalakis, N., *2.158J Computational Geometry*, MIT OpenCourseWare, <http://ocw.mit.edu> . License: Creative Commons BY-NC-SA, Spring, (2003).
- [Rou11] Rouiller, O., *Real time rendering of skeletal implicit surfaces*, Technical University of Denmark, (2011).
- [Sea05] Seah, H.S., Wu Z., *Ball B-Spline Based Geometric Models in Distributed Virtual Environments*. In Workshop towards Semantic Virtual Environments, Villars, Switzerland, (2005), 1-8.
- [Sed84] Sederberg, T.W., *Implicit and Parametric Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Ph.D. Thesis, Purdue University, (1984).
- [Sla08] Slabaugh, G. et al., *Variational skinning of an ordered set of 2D balls*, *Lecture Notes on Computer Science* 4795, (2008), 450-461.
- [Sla10] Slabaugh, G. et al, *3D ball skinning using PDEs for generation of smooth tubular surfaces*, *Journal Computer-Aided Design*, Volume 42 Issue 1, (2010), 18-26.
- [Tol14] Toledo Marrero, A.I., *Manipulación de A-splines cúbicos basada en restricciones*, Tesis de Licenciatura, Universidad de la Habana, (2014).
- [Val06] Valdés Castro, C., *Análisis de Funciones de Varias Variables*, Análisis de Funciones de Varias Variables, Universidad de la Habana, (2006).

- [VaVe10] Valle, L.M., Velho, L., *Um sketch sobre Sketch-Based Modeling*, Reporte Técnico, IMPA, (2010).
- [Walk78] Walker, R., *Algebraic Curves*, Springer Verlag, New York, (1978).
- [Warr86] Warren, J., *On algebraic surfaces meeting with geometric continuity*, Ph.D. Thesis, Department of Computer Science, Cornell University, (1986).
- [Warr90] Warren, J., *Several notions of geometric continuity for implicit plane curves*, Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza 2, (1990).