24. ročník, úloha III . S ... *hluboká orba* *(6 bodů; průměr 4,33; řešili 3 studenti)*

a) *Dopočtěte fyzikální význam konstanty a pro funkci $f(z) = ai/z$, znáte-li délkovou hustotu náboje τ.*
b) *Vypočítejte a nakreslete ekvipotenciály a silokřivky pole v okolí rohu, který má vrcholový úhel ϑ. Nápověda: použijte funkci tvaru $w(z) = Az^s$, kde s je vhodná reálná konstanta.*
c) *Určete pole, které generuje elektrický dublet. Dublet jsou dvě tyče vzdálené d s opačnou nábojovou hustotou, přičemž $d\tau =$ konst. Zajímá nás limita $d \to 0$. Malá nápověda: platí $\ln(1 + x) \approx x$ pro x blízké 0.*
d) *Rozmyslete si, co se stane, pokud existující komplexní potenciál $w(z)$ zobrazíme jinou holomorfní funkcí $v(z)$. Bude potenciál tvaru $v(w(z))$ i nadále řešit rovnice elektrostatiky?*

Vymyslel Lukáš z dlouhé chvíle

Neznámá konstanta

Podle zadání odpovídá $f(z)$ vodiči s konstantní délkovou hustotou náboje, pro který platí podle posledního vzorce $E = a/r$, kde r je vzdálenost od vodiče. U takového vodiče však snadno spočteme z Gaussova zákona. Představme si válec délky l, jehož osou je nabitá přímka. Náboj v tomto válci je $l\tau$, kde τ značí délkovou hustotu náboje na přímce. Z translační symetrie má pak elektrické pole na podstavách stejný směr, ale kvůli opačným normálám se při průmětu na normálu plochy vyruší. Zbude tak jen člen na plášti, kde má pole E stejnou velikost a normálový směr, takže platí

$$\frac{l\tau}{\varepsilon_0} = 2\pi r E \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \,.$$

Ekvipotenciály v koutě

Podle zadání by měl být vhodný komplexní potenciál $w(z) = Az^s$. Pro klasický potenciál by tudíž platilo

$$\varphi = -\operatorname{Im} w(z) = -\operatorname{Im} A|z|^s(\cos s\alpha + \mathrm{i}\sin s\alpha) = -A|z|^s \sin s\alpha \,,$$

takže ekvipotenciály by měly tvar

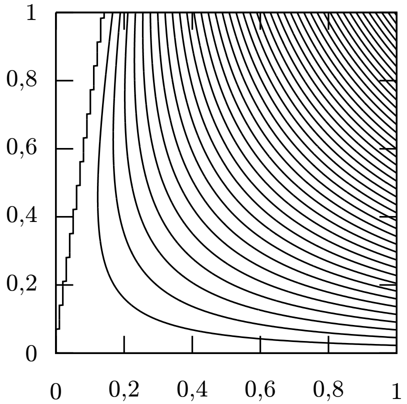
$$C = |z|^s \sin s\alpha \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt[s]{\frac{C}{\sin s\alpha}} \,.$$

s-tá odmocnina je ovšem prostá funkce a závislost $|z| = |z|(\alpha)$ si můžeme představit v polárním grafu. Pokud se jmenovatel blíží k nule (uvažujme jen úhly, kde je $\sin s\alpha > 0$), vzdálenost roste nade všechny meze. Závislost má tedy tyto vlastnosti:

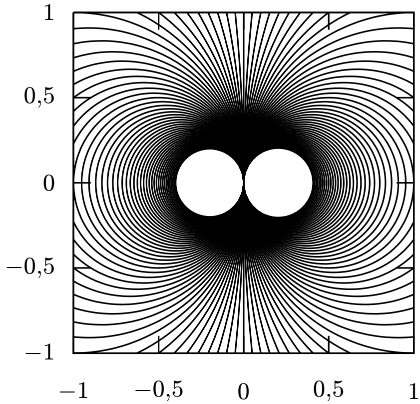
a) roste nade všechny meze pro $\alpha \to 0^+$ a $\alpha \to \pi/s^-$,
b) je monotónní v intervalech $(0, \pi/2s)$ a $(\pi/2s, \pi/s)$,
c) minima nabývá tudíž pro $\alpha = \pi/2s$, kdy $|z|_{\min} = \sqrt[s]{C}$ a platí, že pro $C \to 0$ je i $|z|_{\min} \to 0$.

Z těchto tří vlastností plyne, že uvažovaná funkce je skutečně tím správným potenciálem, který odpovídá potenciálu v rohu o vrcholovém úhlu ϑ, pokud volíme $\vartheta = \pi/s$. Silokřivky se pak spočtou z původního potenciálu jako komplexní derivace, čili $f(z) = w'(z) = E_y + \mathrm{i}E_x$. V tomto případě je

$$f(z) = E_y + \mathrm{i}E_x = As|z|^{s-1} \left(\cos(s-1)\alpha + \mathrm{i}\sin(s-1)\alpha\right) \,.$$



Obr. 1. Ekvipotenciály v koutě



Obr. 2. Ekvipotenciály v okolí dubletu

Dublet

Umístíme obě tyče tak, aby protnuly komplexní rovinu v reálných bodech $\pm d/2$. Nechť mají tyče délkovou hustotu náboje $\pm\tau$. Podle zadání máme zřejmě vypočítat ekvipotenciály elektrického pole. Potenciál pro obě tyče je dán

$$w = w_+ + w_- = \mathrm{i}a\ln(z - d/2) - \mathrm{i}a\ln\left(z + \frac{d}{2}\right) = \mathrm{i}a\ln\left(1 - \frac{d}{z + \frac{d}{2}}\right),$$

kde lze pro $d \ll |z|$ použít přiblížení $\ln(1 + x) \approx x$ platné pro $x \to 0$ uvedené v zadání (to lze splnit, pokud budeme tyče blížit k sobě $d \mapsto d/N$ a zároveň zvyšovat délkovou hustotu $\tau \mapsto N\tau$, přičemž $d\tau$ zůstává konstanta a přejdeme $N \to \infty$. Pak platí

$$w = \mathrm{i}a\left(-\frac{d}{z + \frac{d}{2}}\right) \approx -\frac{\mathrm{i}ad}{z}.$$

Použijeme-li výsledek z první části úlohy $a = \tau/(2\pi\varepsilon)$, pro potenciál plyne

$$\varphi = -\operatorname{Im} w(z) = \operatorname{Im}\frac{\mathrm{i}ad\bar{z}}{|z|^2} = \frac{d\tau}{2\pi\varepsilon}\frac{x}{|z|^2}.$$

čili ekvipotenciály mají tvar kružnic lokalizovaných vždy v jedné polorovině, pro které se se zvětšujícím poloměrem posouvá střed směrem od druhé tyče.

Skládání holomorfních potenciálů

Není pochyb o tom, že složením holomorfních funkcí dostaneme opět holomorfní funkci (připomeňme si, že holomorfní funkce má kroutivou vlastnost a že složením dvou funkcí dostaneme opět funkci s kroutivou vlastností, takže malé čtverečky se opět zobrazí na malé čtverečky).

Ovšem v diskuzi ve třetí kapitole jsme ukázali, že jakákoliv holomorfní funkce $f(z)$ splňuje rovnice elektrostatiky (až na okrajové podmínky, tj. potenciál na vodičích). Ale teď máme zadaný holomorfní komplexní potenciál $w(z)$, který má z definice holomorfnosti i holomorfní derivaci $f(z)$ a tudíž příslušná elektrická intenzita opět splňuje rovnice elektrostatiky. Jediná věc, na kterou si musíme dát pozor, aby rovněž splňovala okrajové podmínky, tj. potenciály na vodičích.

Jakub Michálek
`jmi@fykos.cz`