Intersecciones completas en variedades tóricas simpliciales

Ignacio García Marco

Universidad de La Laguna.

iggarcia@ull.es

Basado en:

I. Bermejo, I. García-Marco, Complete intersections in simplicial toric varieties, arXiv:1302.6706.

Esquema

1. **¿Cuándo un ideal tórico simplicial es intersección completa?**
    - Ideales tóricos intersección completa
        - De $I_{\mathcal{A}}$ a $I_{\mathcal{A}_{red}}$
        - De $I_{\mathcal{A}}$ a $I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}$
    - Ideales tóricos simpliciales
        - El Algoritmo IC-simplicial
    - Ideales tóricos simpliciales homogéneos y sus variedades.
2. **Implementación**

Ideales tóricos: Introducción

Sea k un cuerpo cualquiera y $k[x] = k[x_1, \ldots, x_n]$ y $k[t] = k[t_1, \ldots, t_m]$ dos anillos de polinomios sobre k.

Un **binomio** en $k[x]$ es una diferencia de dos monomios y un ideal generado por binomios se denomina un **ideal binomial**.

Sea $\boldsymbol{\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}}$ un conjunto de vectores no nulos de $\mathbb{N}^m$, cada $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im}) \in \mathbb{N}^m$ se corresponde con un monomio $t^{a_i} = t_1^{a_{i1}} \cdots t_m^{a_{im}} \in k[t]$. El **ideal tórico asociado a $\mathcal{A}$** es el núcleo del homomorfismo de k-álgebras

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbf{k[x]} & \longrightarrow & \mathbf{k[t]} \\ \mathbf{x_i} & \longmapsto & \mathbf{t^{a_i}} \end{array}$$

y lo denotaremos por $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$.

Ideales tóricos: Introducción

- $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ es un ideal primo, binomial y $\mathcal{A}$-homogéneo.
- $\mathrm{ht}(\mathbf{I}_{\mathcal{A}}) = n - \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$.

$\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ se dice que es una **intersección completa (IC)** si existe un sistema de binomios $\mathcal{A}-$homogéneos $g_1, \ldots, g_s$ con $s = \mathrm{ht}(I_{\mathcal{A}})$ tales que

$$\mathbf{I}_{\mathcal{A}} = (g_1, \ldots, g_s).$$

Se satisfacen las siguientes propiedades para $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$:

- Si $a_i \notin \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q}\, a_j$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ es IC $\Leftrightarrow$ $I_{\mathcal{A} \setminus \{a_i\}}$ es IC.
- Si $a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,n\} \\ j \neq i}} \mathbb{N}\, a_j$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ es IC $\Leftrightarrow$ $I_{\mathcal{A} \setminus \{a_i\}}$ es IC.

Proposición

Sea $a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q}\, a_j$ y sean

$B_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b\, a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Z} a_j\}$ y

$\mathcal{A}' := \{a_1, \ldots, a_{i-1}, B_i a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$, entonces

$$I_{\mathcal{A}} \text{ es IC} \Longleftrightarrow I_{\mathcal{A}'} \text{ es IC}.$$

Aplicando iterativamente estos resultados, al conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^m$ se le asocia otro conjunto $\mathcal{A}_{red} \subset \mathbb{N}^m$ que es o bien el conjunto vacío o cumple que $\mathcal{A}_{red} = \{\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_r\}$, con $r \leq n$, y que $\mathbf{a}'_i \in \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Z}\, \mathbf{a}'_j \setminus \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,n\} \\ j \neq i}} \mathbb{N}\, \mathbf{a}'_j$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Como consecuencia de esta construcción tenemos el siguiente resulado.

Teorema 1

$$I_{\mathcal{A}} \text{ es IC} \iff \mathcal{A}_{red} = \emptyset \text{ o } I_{\mathcal{A}_{red}} \text{ es IC}.$$

Ideales tóricos: de $I_{\mathcal{A}}$ a $I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}$

Para ciertos $i \in \{1, \ldots, n\}$ se puede definir

$$\mathbf{m_i := \min\left\{ b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,n\} \\ j \neq i}} \mathbb{N} a_j \right\}}.$$

Para todo $b = (b_1, \ldots, b_m), c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{N}^m$, denotamos por $\mathbf{\gcd(b, c) \in \mathbb{N}^m}$ al vector cuya i-ésima coordenada es $\mathbf{0}$ si $\mathbf{b_i}$ o $\mathbf{c_i = 0}$ y $\mathbf{\gcd(b_i, c_i)}$ en caso contrario.

Teorema 2

Supongamos que existen $i, j : 1 \leq i < j \leq n$ tales que $\mathbf{m_i\, a_i = m_j\, a_j}$.

$$\text{Si } \mathbf{I_{\mathcal{A}}} \textbf{ es IC} \Longrightarrow \mathbf{I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}} \textbf{ es IC},$$

donde $\mathcal{A}_{(i,j)} := (\mathcal{A} \setminus \{\mathbf{a_i}, \mathbf{a_j}\}) \cup \{\gcd(\mathbf{a_i}, \mathbf{a_j})\}$.

Nota importante: El opuesto a este Teorema no es cierto en general. No obstante, si $\mathbf{I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}}$ es IC, se puede comprobar si $\mathbf{I_{\mathcal{A}}}$ es IC comprobando si ciertos elementos pertenecen a ciertos subsemigrupos de $\mathbb{N}^m$.

Teorema 2

Supongamos que existen $i, j : 1 \leq i < j \leq n$ tales que $\mathbf{m_i\, a_i = m_j\, a_j}$.

$$\text{Si } \mathbf{I_{\mathcal{A}}} \textbf{ es IC} \Longrightarrow \mathbf{I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}} \textbf{ es IC},$$

donde $\mathcal{A}_{(\mathbf{i,j})} := (\mathcal{A} \setminus \{\mathbf{a_i}, \mathbf{a_j}\}) \cup \{\gcd(\mathbf{a_i}, \mathbf{a_j})\}$.

Nota importante: El opuesto a este Teorema no es cierto en general. No obstante, si $\mathbf{I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}}$ es IC, se puede comprobar si $\mathbf{I_{\mathcal{A}}}$ es IC comprobando si ciertos elementos pertenecen a ciertos subsemigrupos de $\mathbb{N}^m$.

Ideales tóricos simpliciales: Introducción

Sea $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\} \subset \mathbb{N}^m$, el **cono de $\mathcal{B}$** es el conjunto:

$$\mathrm{Cone}(\mathcal{B}) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

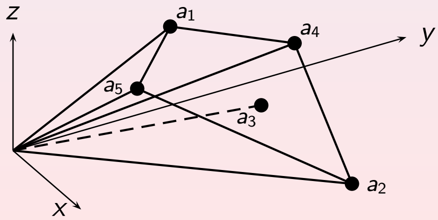
Sea $\boldsymbol{\mathcal{A} = \{\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}\}} \subset \mathbb{N}^{\mathbf{m}}$, si existen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ con $r = \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ tales que $\mathbf{Cone}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) = \mathbf{Cone}(\{\mathbf{a_{i_1}}, \ldots, \mathbf{a_{i_r}}\})$, entonces $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ es un **ideal tórico simplicial** y $\mathbf{V}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}) \subset \mathbb{A}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{n}}$ es una **variedad tórica simplicial**.

Si $m = 1$ o $m = 2$, entonces $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ es un ideal tórico simplicial.

Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \subset \mathbb{N}^3$, con
$a_1 = (0, 2, 1)$, $a_2 = (4, 2, 1)$, $a_3 = (2, 2, 1)$, $a_4 = (1, 3, 1)$ y
$a_5 = (1, 1, 1)$.

$\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ **no es simplicial** porque $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}) = 3$ y $\{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ es un sistema minimal de generadores de $\mathrm{Cone}(\mathcal{A})$.

En cambio, $\mathbf{I}_{\mathcal{A}\setminus\{a_1\}}$ **sí es simplicial**.



Teorema 3

Sea $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ un ideal tórico simplicial. Si $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ **es IC**, entonces se cumple alguna de las siguientes propiedades:

- existen i, j tales que $\mathbf{m_i a_i = m_j a_j}$
- $\mathcal{A}_{\mathbf{red}} = \emptyset$.

$$\left.\begin{array}{c} \boxed{\text{Teorema 1}} \\ + \\ \boxed{\text{Teorema 2}} \\ + \\ \boxed{\text{Nota importante}} \\ + \\ \boxed{\text{Teorema 3}} \end{array}\right\} = \boxed{\textbf{Algoritmo IC-simplicial}}$$

Teorema 3

Sea $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ un ideal tórico simplicial. Si $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ **es IC**, entonces se cumple alguna de las siguientes propiedades:

- existen i, j tales que $\mathbf{m_i a_i = m_j a_j}$
- $\mathcal{A}_{\mathbf{red}} = \emptyset$.

$$\left.\begin{array}{c} \boxed{\text{Teorema 1}} \\ + \\ \boxed{\text{Teorema 2}} \\ + \\ \boxed{\text{Nota importante}} \\ + \\ \boxed{\text{Teorema 3}} \end{array}\right\} = \boxed{\textbf{Algoritmo IC-simplicial}}$$

Ideales tóricos simpliciales: El Algoritmo IC-simplicial

Consideremos el conjunto $\mathcal{A} := \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{a_4}\} \subset \mathbb{N}^{\mathbf{2}}$ con

$$a_1 := (5, 0),\ a_2 := (0, 25),\ a_3 := (2, 10) \text{ y } a_4 := (3, 15),$$

que define un ideal tórico simplicial.

Primer paso:

- $m_3 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b\, a_3 \in \sum_{j \in \{1,2,4,5\}} \mathbb{N} a_j\} = 3$
- $m_4 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b\, a_4 \in \sum_{j \in \{1,2,3,5\}} \mathbb{N} a_j\} = 2$
- Observamos que $m_3 a_3 = m_4 a_4$. Entonces definimos

$$\boxed{a_5 := (\gcd\{2, 3\}, \gcd\{5, 10\}) = (1, 5)} \text{ y } \mathcal{A}_1 := \{a_1, a_2, a_5\}$$

Segundo paso:

- Calculamos $B_5 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b\, a_5 \in \mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2\}$ y obtenemos $B_5 = 5$.
- Ahora tomamos $\boxed{a_6 := 5a_5}$ y observamos que $a_6 = (5, 25) = a_1 + a_2 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, entonces tomamos $\mathcal{A}_2 := \{a_1, a_2\}$.

Tercer paso:

- Como a_1 y a_2 son $\mathbb{Q}$-linealmente independientes, entonces llegamos a que $\mathcal{A}_3 := \emptyset$.

Cuarto paso (Nota importante):

- Tenemos que comprobar si $B_5 a_5 \in \mathbb{N}\{a_3, a_4\}$; en efecto, $B_5 a_5 = 5a_5 = a_3 + a_4$. Entonces $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ **es IC**.

Ideales tóricos simpliciales: El Algoritmo IC-simplicial

Cuando $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, durante la ejecución del Algoritmo IC-simplicial se obtiene sin ningún esfuerzo adicional un **sistema de $\mathbf{ht(I_{\mathcal{A}})}$ binomios $\mathcal{A}$-homogéneos** que generan $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$.

En el ejemplo anterior:

> $\{\mathbf{x_3^3 - x_4^2, x_1x_2 - x_3x_4}\}$ *es un sistema minimal de generadores de* $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$.

$$x_3^3 - x_4^2 \quad \Leftarrow \quad \underline{3} \cdot a_3 = \underline{2} \cdot a_4$$

$$x_1x_2 - x_3x_4 \quad \Leftarrow \quad a_6 = 5a_5 = \underline{1} \cdot a_1 + \underline{1} \cdot a_2 = \underline{1} \cdot a_3 + \underline{1} \cdot a_4$$

Si $I_{\mathcal{A}}$ es un ideal tórico simplicial homogéneo, entonces la variedad $V(I_{\mathcal{A}}) \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ se dice que es una **variedad tórica simplicial proyectiva**.

Corolario Si $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ es un ideal tórico simplicial homogéneo, entonces,

$$\mathbf{I}_{\mathcal{A}} \text{ es IC} \Longleftrightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{red}} = \emptyset.$$

Si $I_{\mathcal{A}}$ es un ideal tórico simplicial homogéneo, entonces la variedad $V(I_{\mathcal{A}}) \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ se dice que es una **variedad tórica simplicial proyectiva**.

Corolario Si $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ es un ideal tórico simplicial homogéneo, entonces,

$$\mathbf{I}_{\mathcal{A}} \text{ es IC} \iff \mathcal{A}_{\mathbf{red}} = \emptyset.$$

Una variedad $\mathbf{X}$ se dice que es **intersección completa idealista** si $\mathbf{I(X)}$ es intersección completa.

Teorema

Sean $k = \overline{k}$ y $\mathbf{X} \subset \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{n-1}}$ una variedad tórica simplicial proyectiva **lisa**. Entonces, $\mathbf{X}$ es intersección completa idealista $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{X}$ es la curva monomial plana definida paramétricamente por

$$\mathbf{x_1 = u_1^2,\ x_2 = u_2^2,\ x_3 = u_1 u_2.}$$

Teorema

Sean $k = \overline{k}$ y $\mathbf{X} \subset \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{n}-1}$ una variedad tórica simplicial proyectiva **con un único punto singular**. Entonces, $\mathbf{X}$ es intersección completa idealista si y solo si

- $\mathbf{X}$ es la superficie en $\mathbb{P}_k^3$ definida por

$$\mathbf{x_1 = u_1^2,\ x_2 = u_2^2,\ x_3 = u_3^2,\ x_4 = u_1 u_2,}$$

- $\mathbf{X}$ es la curva monomial proyectiva en $\mathbb{P}_k^{n-1}$, $n \geq 3$,

$$\mathbf{x_1 = u_1^d,\ x_2 = u_2^d,\ x_3 = u_1^{d-1} u_2,\ x_i = u_1^{d-d_i} u_2^{d_i}; 4 \leq i \leq n}$$

donde $\mathbf{1 < d_4 < \cdots < d_n < d}$ y $\mathbf{d_4 \mid d_5 \mid \cdots \mid d_n \mid d}$

Implementación

La implementación de Algoritmo IC-simplicial requiere el diseño de procedimientos que resuelvan los siguientes problemas:

- **Determinar si un elemento pertenece a un subsemigrupo $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{N}a_j$ de $\mathbb{N}^m$.**
- **Calcular $B_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Z}a_j\}$.**
- **Comprobar si existen i, j tales que $m_i a_i = m_j a_j$.**

Lema

$$B_i := \frac{\mathrm{Card}(T(\mathbb{Z}^m / \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Z}a_j))}{\mathrm{Card}(T(\mathbb{Z}^m / \sum_{j \in \{1,\dots,n\}} \mathbb{Z}a_j))},$$

donde $T(-)$ denota el subgrupo de torsión de un grupo abeliano.

Implementación

La implementación de Algoritmo IC-simplicial requiere el diseño de procedimientos que resuelvan los siguientes problemas:

- **Determinar si un elemento pertenece a un subsemigrupo $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{N}\mathbf{a_j}$ de $\mathbb{N}^{\mathbf{m}}$.**
- **Calcular $\mathbf{B_i} := \min\{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^+ \mid \mathbf{b}\mathbf{a_i} \in \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,n\}\\ j\neq i}} \mathbb{Z}\mathbf{a_j}\}$.**
- **Comprobar si existen i, j tales que $\mathbf{m_i a_i} = \mathbf{m_j a_j}$.**

Lema

$$\mathbf{B_i} := \frac{\mathrm{Card}(\mathbf{T}(\mathbb{Z}^{\mathbf{m}}/\sum_{\substack{j\in\{1,\dots,n\}\\ j\neq i}} \mathbb{Z}\mathbf{a_j}))}{\mathrm{Card}(\mathbf{T}(\mathbb{Z}^{\mathbf{m}}/\sum_{j\in\{1,\dots,n\}} \mathbb{Z}\mathbf{a_j}))},$$

donde $T(-)$ denota el subgrupo de torsión de un grupo abeliano.

Implementación

Supongamos que $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$

El cálculo de

$$\overline{m}_1 = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_1 \in \sum_{j \in \{2,\ldots,n\}} \mathbb{N}\, a_j\}$$

se puede formular con el siguiente modelo de Programación Lineal Entera:

$$\begin{array}{ll} \overline{m}_1 := \min & x_1 \\ & a_1 x_1 = a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \\ & x_1 \geq 1;\ x_2, \ldots, x_n \geq 0 \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Por tanto, el cálculo de $\overline{m}_1$ es un problema $\mathcal{NP}$-**duro**.

Implementación

Para calcular $\overline{\mathbf{m}}_1$ usamos una representación del problema por medio de la **Teoría de Grafos**, siguiendo una idea similar a la que usan Clausen & Fortenbacher para resolver ecuaciones diofánticas lineales.

La idea es representar cada solución

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ de } x_1 a_1 = \sum_{j=2}^{n} x_j a_j$$

como un camino cerrado de peso x_1 en un **grafo dirigido y pesado**.

Entonces, el problema de calcular $\overline{\mathbf{m}}_1$ se reduce a **calcular el peso del camino de mínimo peso** en este grafo.

Implementación

Consideremos el grafo dirigido pesado $\mathcal{G} = (V, A)$ cuyo **conjunto de nodos** es

$$V := \{0, 1, \ldots, a_1 - 1\},$$

y cuyo **conjunto de arcos** es

$$A := \bigcup_{i=2}^{n} \{(v, (v + a_i) \text{ mód } a_1) \mid v \in V\},$$

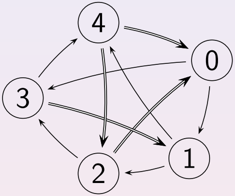
y, para todo $v \in V$ y todo $i \in \{2, \ldots, n\}$, el **peso del arco** $(v, (v + a_i) \text{ mód } a_1)$ es

$$w_{(v,i)} := (v + a_i) \div a_1 .$$

Proposición. Hay una aplicación sobre desde el conjunto de caminos cerrados en $\mathcal{G}$ que empiezan en 0 con peso x_1 al conjunto de soluciones $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $x_1 a_1 = \sum_{j=2}^{n} x_j a_j$.

Implementación

Para $\mathcal{A} = \{a_1 = 5\,, a_2 = 6\,, a_3 = 8\}$, tenemos el siguiente grafo:



donde los arcos representados con líneas simples tienen peso 1 y los arcos representados por líneas dobles tienen peso 2.

El ciclo

$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 0$$

se corresponde con la sulución $(4, 2, 1)$ de $5x_1 = 6x_2 + 8x_3$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 + a_3 - 1 \cdot a_1 = 3 \\ 3 + a_2 - 1 \cdot a_1 = 4 \\ 4 + a_2 - 2 \cdot a_1 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow 4a_1 = 2a_2 + a_3$$

Implementación

Para calcular $\overline{m}_1$ se puede aplicar el **algoritmo de Dijkstra** para encontrar el ciclo mínimo que empieza (y acaba) en $0 \in V(\mathcal{G})$.

La complejidad del Algoritmo de Dijkstra es polinomial en el número de nodos y arcos del grafo. En nuestro caso, como el número de nodos de $\mathcal{G}$ es a_1 y el número de arcos es $(n-1)a_1$, el cálculo de $\overline{m}_1$ se puede resolver en $\mathcal{O}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d_1} + \mathbf{d_1} \cdot \mathbf{log}(\mathbf{d_1}))$ operaciones.

Corolario. Se puede calcular $\overline{\mathbf{m}}_\mathbf{1}$ en **tiempo pseudo-polinomial**.

Implementación

Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, consideramos

- $k(i) \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $a_{i\,k(i)} \neq 0$
- $\mathcal{L} := \{j \in \{1, \ldots, n\} \,|\, j \neq i \text{ y } \exists \lambda \in \mathbb{Q}$ tal que $\lambda a_i = a_j\}$

y, si $\mathcal{L} \neq \emptyset$, definimos

$$\overline{\mathbf{m}}_{\mathbf{i}} := \min\{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^+ \,|\, \mathbf{b}\, \mathbf{a}_{\mathbf{i\,k(i)}} \in \textstyle\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{L}} \mathbb{N}\, \mathbf{a}_{\mathbf{j\,k(i)}}\}.$$

Además, se tienen las siguientes propiedades:

Lemma

- si $\mathbf{m_i a_i = m_j a_j}$ con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$ entonces $\mathbf{m_i} = \overline{\mathbf{m}}_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{m_j} = \overline{\mathbf{m}}_{\mathbf{j}}$
- $\mathbf{m_i} = \overline{\mathbf{m}}_{\mathbf{i}}$ si y solo si el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = (\overline{m}_i - 1) a_i} \\ \mathbf{x_i + x_{n+1} = \overline{m}_i - 2} \end{array}\right\}$$

NO tiene una solución $(\mathbf{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}}) \in \mathbb{N}^{\mathbf{n+1}}$

Implementación

Por tanto, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, se tiene que:

$$m_i a_i = m_j a_j \iff \begin{cases} \text{(a)} & \overline{m}_i a_i = \overline{m}_j a_j, \\ \text{(b)} & m_i = \overline{m}_i, \text{ y} \\ \text{(c)} & m_j = \overline{m}_j. \end{cases}$$

Implementación

Hemos implementado el algoritmo en C++ y en SINGULAR. La implementación en SINGULAR ha dado lugar a la librería `cisimplicial.lib` que se distribuye con el software.

Nuestros experimentos muestran que el **Algoritmo IC-simplicial** puede resolver **instancias de gran tamaño**.

Por ejemplo, le cuesta menos de un segundo comprobar en un ordenador personal con Intel Pentium IV 3Ghz que el ideal tórico $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ con $\mathcal{A} = \{\mathbf{d_1 e_1}, \ldots, \mathbf{d_8 e_8}, \mathbf{a_9}, \ldots, \mathbf{a_{27}}\} \subset \mathbb{N}^{\mathbf{8}}$ es una **intersección completa**, donde $0 \leq a_{ij} \leq 4000$

Bibliografía

I. Bermejo, I. García-Marco, J. J. Salazar-González, An algorithm for checking whether the toric ideal of an affine monomial curve is a complete intersection, *J. Symbolic Computation* **42** (2007) 971–991.

D. Cox, J. Little, H. Schenck, *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics **124**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

S. Eliahou, R. H. Villarreal, On systems of binomials in the ideal of a toric variety, *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 345–351.

K. Fischer, J. Shapiro, Mixed matrices and binomial ideals, Journal of Pure and Applied Algebra **113** (1996), 39–54.

P. A. García Sánchez, J. C. Rosales, On complete intersection affine semigroups, *Comm. in Algebra* **23 (14)** (1995), 5395–5412.

M. Morales, Noetherian Symbolic Blow-ups, *J. Algebra* **140** (1991), 12–25.

When teaching algebraic geometry and illustrating simple singularities, varieties, and morphisms, one almost invariably tends to choose examples of a "monomial type": i.e., varieties defined by equations $x_1^{b_1} \cdots x_r^{b_r} = x_{r+1}^{b_{r+1}} \cdots x_n^{b_n}$ *and morphisms* f *for which* $f(y_i) = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$.

Mumford et al. (1973)

Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: 'I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvellous machine.'

Michael Atiyah