

О. Н. Граничин

РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПОМЕХАХ

В докладе рассматриваются эффективные последовательные алгоритмы многомерного оценивания и оптимизации, дающие состоятельные оценки без стандартных предположений о независимости и центрированности возмущающих воздействий. Основой нового подхода является использование пробных возмущений. В системах управления пробные воздействия можно доставлять через канал управления, в других случаях роль пробного воздействия может играть рандомизированный план наблюдений или уже присутствующий в системе измеряемый случайный процесс.

Одна из замечательных характеристик такого типа алгоритмов — одно или два измерения на итерации вне зависимости от размерности вектора оцениваемых параметров. Другая отличительная черта алгоритмов — сходимость при почти произвольных возмущениях, в частности, при нерегулярных. Под этим понятием подразумевается достаточно широкий класс возмущений, которые могут не обладать полезными статистическими свойствами. Этот класс содержит, как минимум, неизвестные, но ограниченные детерминированные последовательности.

В последней части доклада обсуждаются возможности использования адаптивных подходов в управлении финансовыми активами. Для примера рассматривается задача организации автоматической купли-продажи опционов на электронной бирже.

Граничин Олег Николаевич,
доктор физ.-матем. наук,
профессор кафедры системного программирования,
математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский гос. университет,
автор более 50 научных работ,

Контакты:

Электронная почта: Oleg_granichin@mail.ru

Интернет: <http://www.math.spbu.ru/user/gran/index.html>

О. Н. Граничин

РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПОМЕХАХ

(Санкт-Петербургский гос. университет)

Содержание

1 Введение	1
2 Предварительный пример	5
3 Функционал среднего риска	9
4 Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации	10
4.1 Постановка задачи и основные предположения	13
4.2 Пробное возмущение и рандомизированные алгоритмы СА	15
4.3 Сходимость оценок с вероятностью единица и в среднеквадратичном смысле	16
4.4 Пошаговое выполнение алгоритма	18
4.5 Программа на языке MATLAB	19
5 Расчет цен опционов	20
6 Результаты имитационного моделирования	24
7 Заключение	27

1 Введение

Точное решение любой проблемы возможно при точной постановке задачи, но связи и отношения в реально существующем мире настолько сложны и многообразны, что практически невозможно строго формализовано описать многие явления. Типичным подходом в теории является выбор близкой к реальным процессам математической модели и включение в нее различных *возмущений (помех)*, относящихся, с одной стороны, к грубости математической модели и, с другой стороны, характеризующих неконтролируемые внешние возмущения на объект или систему. Для всех математических моделей результатом эксперимента является математический объект — число, множество чисел, кривая и т. п. С математической точки зрения значительный круг прикладных задач имеет цель восстановить по экспериментальным данным характеристики (параметры) исследуемого процесса. При этом реальные системы редко исчерпывающе описываются ограниченными математическими моделями. Выбирая модель для решения реальной задачи, принято говорить о так называемой *систематической* погрешности (погрешности модели), которая может быть количественно выражена расстоянием от реального оператора до выбранной модели. Другой тип погрешностей (ошибок), с которыми сталкиваются, связан с ошибками измерения. Такие ошибки называют *статистической* погрешностью (случайной погрешностью). Процесс выбора характеристик (параметров) модели из заданного класса для наилучшего описания результатов представляет собой одно из достаточно общих определений понятия *оценивания*. На практике процесс оценивания часто удаётся связать

с какой-нибудь количественной характеристикой качества оценивания и, естественно, при выборе оценок стараться минимизировать отрицательное влияние погрешностей как статистической, так, по возможности, и систематической.

Во многих задачах погрешности удобно интерпретировать как возмущающие воздействия на систему или как помехи (ошибки) наблюдения. При разработке алгоритмов оценивания в большинстве теоретических исследований возмущениям приписываются какие-либо полезные статистические характеристики. На их основе теоретически исследуются свойства оценок. Наиболее часто предполагается, например, существование функции распределения для возмущений и их центрированность. На практике широко используются алгоритмы, основанные на идеях обычного метода наименьших квадратов (МНК), заключающихся в усреднении данных наблюдения. Если при этом предположение о центрированности возмущений было сделано без достаточных обоснований, то практическое использование алгоритмов такого типа нецелесообразно. Так обстоят дела, например, в условиях возможного противодействия противника. В частности, если возмущение определяется детерминированной (неслучайной) неизвестной функцией, то результат применения к наблюдениям операции усреднения никакой полезной информации в себе не несет. Обычно в такой ситуации последовательность наблюдений называют *вырожденной* и вопрос о получении хорошего решения задачи не рассматривают. Эти трудности в использовании стандартных методов оценивания приводят к необходимости исследовать алгоритмы, обеспечивающие высокое качество работы при минимальных предположениях о статистических свойствах возмущений.

Как математическая наука теория оценивания была основана в 1806 г., когда появилась работа А. М. Лежандра о наименьших квадратах. Честь основателя принадлежит и К. Ф. Гауссу, опубликовавшему свою версию метода наименьших квадратов (МНК) в 1809 г. В 1821 г. он предложил рекуррентный вариант процедуры, позволяющий корректировать ранее вычисленную оценку с учетом вновь поступивших дополнительных измерений без необходимости повтора всех предшествующих вычислений. В этот период стимулом для развития МНК служили запросы развития небесной механики, и метод быстро стал стандартным для определения орбит небесных тел. Неудивительно, что в ряду авторов работ по небесной механике находятся имена Ф. А. Бесселя, Ж. Л. Лагранжа, П. С. Лапласа, С. Д. Пуассона, известных своим вкладом в основания статистики.

В начале XX в. теоретические обоснования метода наименьших квадратов получили значительное развитие в трудах А. А. Маркова. Постепенно методика оценивания была поглощена статистикой, но не сразу в достаточно строгой математической форме. Лишь в середине XX в. теория вероятностей и важнейшие разделы статистики получили соответствующее математическое оформление, прежде всего благодаря использованию концепций теории меры. Фундамент современного состояния теории оценивания заложен Р. Фишером в 20–30-х гг. прошлого века. Р. Фишер предложил метод максимума правдоподобия и показал, что доставляемые им оценки не могут быть существенно улучшены. Р. Фишером также введены ставшие общепринятыми понятия несмещенности, достаточности, состоятельности, эффективности и асимпто-

тической эффективности оценок. Тщательно рассматривая основания теории оценивания, Р. Фишер избавил ее от жестких ограничений, существовавших с момента появления работ К. Ф. Гаусса. Обобщения его теории привели, в частности, к развитию современных методов непараметрического и робастного оценивания, в которых точная природа распределения вероятностей оцениваемых случайных величин не предполагается известной.

Развитие и доступность вычислительной техники оказали воздействие и на классические разделы математической статистики, стимулируя разработку и давая приоритет рекуррентным схемам оценивания. Так получили широкое признание процедуры стохастической аппроксимации Роббинса–Монро (1951) [40] и Кифера–Вольфовица (1952) [34]. К настоящему времени методика исследования свойств оценок, доставляемых рекуррентными алгоритмами оценивания и оптимизации при зашумленных наблюдениях, приобрела в целом достаточно законченный вид.

Теория оценивания в последней четверти прошлого века получила дополнительный импульс в развитии при синтезе адаптивных систем, способных успешно функционировать в условиях априорной неопределенности о свойствах внешней среды. Алгоритмы построения оптимального управления обычно предполагают известными некоторые априорные данные о свойствах системы управления и помех. В большинстве практических задач эта информация недоступна проектировщику, но ее можно в той или иной степени восстановить из анализа получаемых наблюдений. Если такая возможность имеется, то можно синтезировать алгоритмы, в которых совмещены процессы управления и восполнения недостающей информации. Этот подход близок понятию *дуального (двойственного) управления* А. А. Фельдбаума [22]: “управляющие воздействия должны быть в известной мере изучающими, но в известной мере направляющими”. При достаточно эффективном восполнении недостающих сведений система управления приобретает оптимальные свойства либо близкие к ним. Такие системы называют *адаптивными*, поскольку в процессе функционирования они проявляют свойство приспособления к заранее неизвестным возмущениям.

Основой достаточно нового подхода к решению задач оценивания и оптимизации в плохих условиях (например, при вырожденной последовательности наблюдений) является использование *пробных возмущений*. Если при решении задачи через входные каналы системы или алгоритма удастся включить в рассмотрение некоторое новое возмущение с задаваемыми экспериментатором или хорошо известными статистическими свойствами, то его можно использовать для “обогащения” информации в канале наблюдения. Иногда роль пробного возмущения может играть уже присутствующий в системе измеряемый случайный процесс. В системах управления пробные воздействия можно добавлять через канал управления, в других случаях роль пробного воздействия может играть рандомизированный план эксперимента. При исследовании обновленной системы с пробным возмущением, которая иногда является просто в другой форме записанной старой, даже используя традиционные методы, часто удается получить обнадеживающие результаты о сходимости и области применимости новых алгоритмов. Одна из замечательных их характеристик —

состоятельность оценок при “почти произвольных” возмущениях. Существенное ограничение применимости нового подхода — предположение о независимости добавляемого в систему пробного воздействия и собственно возмущения. Во многих задачах это ограничение на свойства пробного воздействия и возмущения системы естественно и выполнимо. Так обстоит дело, если возмущения задаются неизвестной ограниченной детерминированной функцией, либо в их качестве выступает постороннее случайное возмущение, генерируемое не знающим статистических свойств нашего пробного воздействия противником, пытающимся оказать противодействие нашим исследованиям.

Интересна история появления на свет первых существенных теоретических результатов о свойствах рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации, для которых была доказана сходимости при почти произвольных возмущениях. Перед разработчиками последовательных алгоритмов оценивания или оптимизации в той или иной форме всегда стоят три вопроса:

1. Каков самый быстрый алгоритм по числу итераций?
2. Как минимизировать количество измерений и других вычислений на каждой итерации?
3. Какой алгоритм будет сходиться при почти произвольных помехах?

Именно попытки поиска ответов на эти вопросы привели к тому, что на рубеже 80–90-х гг. прошлого века начались активные исследования свойств рандомизированных алгоритмов оценивания и оптимизации. Основы этих исследований базируются на работах автора [4, 5, 6, 7], Б. Т. Поляка с А. Б. Цыбаковым и А. В. Гольденшлюгером [20, 30], предложивших самые эффективные в широком классе алгоритмы, состоятельность которых обоснована при почти произвольных возмущениях в системах, а также Дж. Спала [41], показавшего существенное сокращение необходимого для оптимизации количества измерений исследуемой функции по сравнению с классическими схемами. Новый алгоритм в англоязычной литературе получил название *одновременно возмущаемая стохастическая аппроксимация* (*Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation, SPSA*), в русскоязычной — рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации, алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе или поисковый алгоритм стохастической аппроксимации. В 1993 г. при разработке способов настройки параметров нейронных сетей похожие алгоритмы были предложены в работах Дж. Алспектора [25] и Ю. Мадеды [36] с соавторами. Состоятельность рандомизированных алгоритмов при почти произвольных возмущениях позже исследовалась в работах Л. Льюнга с Л. Гао [35] и Х.-Ф. Чена, Т. Дункана, Б. Пассик–Дункан [27].

При разработке нового алгоритма к положительным ответам на поставленные выше три вопроса желательно было бы добавить и четвертый аспект: представление алгоритма должно быть достаточно простым для понимания и реализации в виде электронного устройства. Такими и получились новые рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации.

На организованном Дж. Спалом веб-сайте: <http://www.jhuapl.edu/SPSA/> можно найти множество ссылок на работы, в которых рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации используются в практических приложениях.

Широкий обзор конкретных практических применений SPSA дан в работе Дж. Спала [42]. Описание применения алгоритма SPSA для определения эффективной макроэкономической политики можно найти в [37]. В последнее время А. Позняк активно занимается статическими и динамическими играми. В докладе [39] на конференции в Москва, посвященной 70-летию Б. Т. Поляка, он выразил уверенность, что схемы стохастической оптимизации предоставляют широкие возможности для решения возникающих вычислительных задач. Например, в конфликтной ситуации с большим количеством участников, среди которых один является лидером и может сделать первый “ход”, использование рандомизированного алгоритма стохастической аппроксимации с одним измерением на каждой итерации позволяет эффективно рассчитывать оптимальную стратегию (равновесие Стаклеберга-Нэша) [39]. В работе [13] предлагается использовать рандомизированные алгоритмы оценивания в задаче автоматической классификации.

При разработке инструментов анализа и управления финансовых рынков рандомизированные алгоритмы многомерной стохастической оптимизации пока используются крайне редко. Наверное, причина этого лежит, с одной стороны, в их относительной новизне, а с другой, в увлеченности специалистов, занимающихся финансовой математикой, попытками дать “строгое” математическое обоснование моделей финансовых рынков и используемых инструментов.

2 Предварительный пример

Пусть на рынке свободно продаются какие-то активы (ценные бумаги) q , $q \in \mathbb{N}$, типов. Обозначим θ — вектор составленный из их текущие цен $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(q)}$.

Рассмотрим достаточно простую по постановке задачу об определении текущих цен активов θ_n при условии, что в каждый момент времени $n = 1, 2, \dots$ мы можем выбрать числа $\varphi_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, q$ и приобрести $\varphi_n^{(i)}$ единиц i -го актива, заплатив при этом сумму денежных средств y_n ,

$$(1) \quad y_n = \varphi_n^T \theta_n + v_n = \sum_{i=1}^q \varphi_n^{(i)} \theta_n^{(i)} + v_n.$$

Здесь v_n — помехи. В случае $v_n = 0$ и при неизменности цен активов на протяжении q тактов ($\theta_n = \theta$) задача имеет простое решение: сделать q закупок, покупая каждый раз по одной единице каждого актива. Если есть дополнительная информации о взаимосвязи между ценами разных активов, то количество закупок можно сократить.

Исследование более сложной модели наблюдений (1) с $v_n \neq 0$ оправдывается жизненными реалиями. Природа помех в уравнении (1) может быть различная: ошибки при расчете, оплата услуг продавца и т. п. Основное предположение, которое будет сделано, заключается в следующем: помехи v_n независимы от φ_n и θ_n . Это предположение достаточно естественно, так как при наличии тех или иных зависимостей помех v_n или их частех от φ_n и θ_n надо рассматривать более сложную модель наблюдений (1).

Одна из основных методик оценивания (определения) неизвестного вектора θ_n заключается в проведении серии закупок и усреднении данных наблюдения (измерений). Пусть $q = 1$ и текущая цена θ_n не меняется со временем ($\theta_n = \theta$). Для наблюдаемых величин $\{y_n\}$ можно записать соотношения:

$$(2) \quad y_n = \varphi_n \theta + v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

С исторической точки зрения эта задача оценивания искомого неизвестного скалярного параметра θ является классической. Большинство методов теории оценивания прежде всего апробировались на ней, поэтому набор возможных способов ее решения при различных предположениях о статистических свойствах $\{\varphi_n\}$ и “хороших” возмущениях $\{v_n\}$ достаточно обширен.

Пусть либо $\varphi_n \equiv M_\varphi \neq 0$, либо последовательность $\{\varphi_n\}$ имеет статистическую природу, представляя собой независимые между собой ограниченные случайные величины с известным ненулевым средним значением M_φ и положительной конечной дисперсией $\sigma_\varphi^2 > 0$. Просуммировав и усреднив n последовательных данных наблюдения, получаем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_k \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k.$$

Последовательность величин $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_k$ либо равна M_φ , либо стремится к среднему значению M_φ в силу усиленного закона больших чисел (см. [23]). Если в качестве очередной оценки взять

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n M_\varphi} \sum_{k=1}^n y_k,$$

то, предполагая независимость помех $\{v_n\}$, их одинаковую распределенность со средним значением M_v и ограниченность вторых статистических моментов, можно доказать сходимость с вероятностью единица последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ к значению $\theta + M_v/M_\varphi$

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \theta + \frac{M_v}{M_\varphi}.$$

Следовательно, при достаточно большом количестве наблюдений и известной величине M_v можно говорить о решении поставленной задачи об определении цены θ .

При неизвестном и значительном по абсолютной величине значении M_v , а тем более при почти произвольных возмущениях, этот простой алгоритм не годится. Как все-таки подступиться к решению такой задачи?

Пусть возмущения $\{v_n\}$ задаются неизвестной, но ограниченной детерминированной функцией $|v_n| \leq C_v$, $n = 1, 2, \dots$, а последовательность $\{\varphi_n\}$ имеет статистическую природу. Обозначим $\Delta_n = \varphi_n - M_\varphi$, $n = 1, 2, \dots$, — центрированные входы (воздействия экспериментатора на систему). Предположим дополнительно ограниченность их четвертого центрального момента:

$E\{|\Delta_n|^4\} < \infty$. Домножим на Δ_n обе части соотношения (2) и, произведя несложные преобразования, получим

$$\Delta_n y_n = \Delta_n^2 \theta + \Delta_n M_\varphi \theta + \Delta_n v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Просуммировав и усреднив, имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k M_\varphi \theta + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k v_k.$$

Первое и второе слагаемое в правой части при сделанных предположениях, в силу усиленного закона больших чисел, при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица стремятся к $\sigma_\varphi^2 \theta$ и нулю соответственно. Последнее слагаемое с вероятностью единица стремится к нулю¹. Отсюда следует, что при $\Delta_1 \neq 0$ последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, формируемых по правилу

$$(3) \quad \hat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_k y_k}{\sum_{k=1}^n \Delta_k^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходится с вероятностью единица к θ .

Если обозначить $\Gamma_n = (\sum_{k=1}^n \Delta_k^2)^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$, то две последовательные оценки связаны соотношением

$$\frac{\hat{\theta}_n}{\Gamma_n} = \frac{\hat{\theta}_{n-1}}{\Gamma_{n-1}} + \Delta_n y_n.$$

Следовательно, при выборе $\hat{\theta}^0 = 0$ алгоритм (3) может быть записан в рекуррентной форме:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_n &= \hat{\theta}_{n-1} - \Delta_n \Gamma_n (\Delta_n \hat{\theta}_{n-1} - y_n), \\ \Gamma_n &= (\Gamma_{n-1}^{-1} + \Delta_n^2)^{-1}. \end{aligned}$$

В случае нескольких активов ($q > 1$) соответствующий алгоритм выглядит так (см. [8], [10], [12], [31]):

$$(4) \quad \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Delta_n \Gamma_n (\Delta_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n).$$

¹Доказательство этого факта сложнее и следует из результатов [8], [12] или [31]. Здесь остановимся на полуинтуитивных рассуждениях. Покажем, что с вероятностью единица при достаточно больших n последнее слагаемое по абсолютной величине не будет превосходить любое заранее выбранное малое число $\varepsilon > 0$, т. е. при $n \rightarrow \infty$ оно будет стремиться к нулю. Пусть $h = \frac{\varepsilon}{2\sigma_\varphi(1+\varepsilon)}$. По предположению, возможные значения помехи v_n лежат в интервале $[-C_v, C_v]$. Разобьем его на $l = [2C_v/h] + 1$ частей $\mathcal{V}_i = [\bar{v}_{i-1}, \bar{v}_i]$, $\bar{v}_0 = -C_v$, $\bar{v}_i = -C_v + ih$, $i = 1, \dots, l$. Обозначим $\epsilon_n = \sum_{i=1}^l \mathbf{1}_{\{v_n \in \mathcal{V}_i\}} (v_n - \bar{v}_i)$, $n \geq 1$. Заметим, что $|\epsilon_n| \leq h$. Так как число l фиксировано, то, в силу усиленного закона больших чисел, при $i = 1, \dots, l$ и достаточно больших n с вероятностью единица

$$\left| \frac{\bar{v}_i}{n} \sum_{k \leq n, k: v_k \in \mathcal{V}_i} \Delta_k \right| \leq \frac{\varepsilon^2}{8C_v \sigma_\varphi (1 + \varepsilon)}, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k^2 \leq \sigma_\varphi^2 (1 + \varepsilon)^2.$$

При этом в силу неравенства Гёльдера получаем

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k v_k \right| = \left| \sum_{i=1}^l \frac{\bar{v}_i}{n} \sum_{k \leq n, k: v_k \in \mathcal{V}_i} \Delta_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k \epsilon_k \right| \leq \frac{l\varepsilon^2}{8C_v \sigma_\varphi (1 + \varepsilon)} + \sigma_\varphi (1 + \varepsilon) h \leq \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

При изменении θ_n со временем с незначительными модификациями такой же алгоритм можно в некоторых случаях использовать и при решении задачи прогнозирования.

Идея использования случайных входных сигналов для устранения эффекта смещения была выдвинута Р. Фишером [29] в виде рандомизированного принципа планирования эксперимента. Помимо задачи планирования эксперимента, в которой входы могут быть рандомизированы экспериментатором, случайные входы возникают во многих задачах идентификации, фильтрации, распознавания и т. д. (см., например, [14]).

Рекуррентные алгоритмы оценивания параметров модели (1) при случайных входных сигналах рассматривались также в книгах [1, 14]. В статьях [17, 21] изучалась скорость сходимости таких алгоритмов и были предложены оптимальные алгоритмы, имеющие наилучшую из возможных скорость сходимости. Во всех этих работах делались стандартные предположения о помехах, а именно считалось, что они представляют собой последовательность случайных величин с нулевым средним, независимых или слабо зависимых. Основная цель работ [4], [7], [8], [12], [31] состояла в отказе от этих предположений. Было показано, что при случайных входных сигналах новые рандомизированные алгоритмы, похожие во многом на стандартные, дают состоятельные оценки и при нецентрированных, коррелированных и даже неслучайных помехах. Кроме того, новые оптимальные алгоритмы имеют ту же самую скорость сходимости, как и оптимальные в стандартном случае.

При случайных входных сигналах новые алгоритмы для обоснования сходимости требуют выполнения достаточно умеренных условий на помехи. В частности, помехи могут быть неизвестной, но ограниченной детерминированной функцией. По этой обнадеживающей причине новые алгоритмы могут быть полезны во многих приложениях. Численное моделирование продемонстрировало эффективность алгоритмов при разнообразных помехах v_n . В частности, в скалярном случае эксперименты были выполнены с неслучайной константой, нецентрированной случайной переменной и различными неслучайными последовательностями помех. В этих экспериментах исследовались траектории оценок стохастической аппроксимации и оценок метода наименьших квадратов. Поведение типичных траекторий оценок рандомизированных алгоритмов при высоком уровне нерегулярной помехи существенно лучше поведения траекторий для обычных алгоритмов. Некоторые примеры этих экспериментов приведены в последнем разделе.

Напомним, что при сделанных предположениях Δ_n — независимые центрированные случайные величины. Обозначив через $\bar{y}_n = \Gamma_n(\Delta_n^T \hat{\theta}_{n-1} - y_n)$ величины, вычисляемые по наблюдаемым к моменту времени n данным, полученный рекуррентный алгоритм оценивания можно переписать в виде

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \Delta_n \bar{y}_n.$$

В алгоритмах такого типа случайные величины Δ_n будем называть *пробным одновременным возмущением*. Выше было приведено интуитивное обоснование сходимости последовательности оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ к истинному значению неизвестного параметра при неслучайной неизвестной, но ограниченной последо-

вательности помех в наблюдении. Алгоритмы такого типа в дальнейшем будем называть *рандомизированными*, так как обоснование их сходимости при почти произвольных помехах существенно использует стохастическую (вероятностную) природу пробного одновременного возмущения.

3 Функционал среднего риска

Приведенный выше пример относится к более широкому классу задач *минимизации функционалов среднего риска*. Пусть задана последовательность p -мерных случайных векторов $\{w_n\}$ из \mathbb{R}^p , порожденная распределением вероятностей $P_w(\cdot)$. Задача минимизации функционала среднего риска состоит в нахождении точки минимума функции $f(\cdot)$, имеющей вид

$$f(x) = E_w\{F(x, w)\} = \int_{\mathbb{R}^p} F(x, w)P_w(dw),$$

где $F(x, w) : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ — заданная *штрафная функция (функция потерь)*. Здесь $E_w\{\cdot\}$ — математическое ожидание (усреднение) по $P_w(\cdot)$.

Функцию $f(\cdot)$ обычно называют *функцией средних потерь*. В том случае, когда функция распределения $P_w(\cdot)$ неизвестна, эта задача выходит за рамки классической теории оптимизации, но ее можно попытаться решить в тех случаях, когда в заданных точках $\{(x_n, w_n)\}$ доступны наблюдению (может быть с дополнительными возмущениями) или величины $F(x_n, w_n)$ — значения функции, или значения вектора-градиента $\nabla_x F(x_n, w_n)$. При этом обычно предполагают, что экспериментатору доступны только процессы формирования и (или) наблюдения последовательности $\{x_n\}$, а соответствующие значения $\{w_n\}$ порождаются распределением $P_w(\cdot)$ и неподконтрольны и даже, может быть, неизвестны.

Для рассмотренного выше примера можно взять $q = p = 1$. Если помеха наблюдения $\{v_n\}$ имеет случайную природу и ее функция распределения $P_v(\cdot)$, то задача об оценивании величины неизвестного параметра θ связана с функционалом

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(w^{(1)}(\theta - x) + w^{(2)})^2 P_{\varphi, v}(dw),$$

где

$$w = \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix},$$

а $P_{\varphi, v}(\cdot)$ — функция совместного распределения полезного сигнала и помехи. Наблюдению в каждый момент времени n доступны значения $\nabla_x F(x_n, w_n)$, которые равны $\varphi_n(\varphi_n x_n - y_n)$, при этом полностью неизвестны только вторые компоненты векторов w_n , $n = 1, 2, \dots$

Если измерения значений функции $F(x_n, w_n)$ фактически делаются с некоторой аддитивной случайной центрированной независимой ошибкой $v_n \in \mathbb{R}$,

то, в силу общности поставленной задачи, это усложнение не принципиально. Расширив вектор w дополнительной компонентой v и обозначив

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix},$$

можно рассматривать вместо $F(x, w)$ новую функцию

$$\bar{F}(x, \bar{w}) = F(x, w) + v$$

со схемой наблюдения без дополнительных возмущений и новое совместное неизвестное распределение $P_{w,v}(\cdot)$ вместо $P_w(\cdot)$, которое все равно и ранее предполагалось неизвестным. Если ошибки измерения не обладают хорошими статистическими свойствами, то упрощать задачу нельзя. Надо рассматривать модель наблюдений с дополнительными возмущениями:

$$y_n = F(x_n, w_n) + v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

4 Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации

Развитие методов стохастической аппроксимации (СА) началось в пятидесятые годы XX в. с алгоритма Роббинса–Монро (РМ) [40] и процедуры Кифера–Вольфовица (КВ) [34].

Рассмотрим для примера задачу о нахождении стационарной точки θ некоторой функции $f(\cdot)$ (точки локального минимума или максимума) при условии, что для каждого значения $x \in \mathbb{R}$ — входа алгоритма (управляемой переменной) — наблюдается случайная величина $Y(x)$, являющаяся зашумленным значением функции $f(\cdot)$ в точке x

$$Y(x) = f(x) + V.$$

Дж. Кифер и Дж. Вольфовиц для решения этой задачи при некоторых дополнительных ограничениях обосновали сходимость к точке θ рекуррентной последовательности, определяемой по правилу (алгоритму)

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \alpha_n \frac{Y(\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n) - Y(\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n)}{2\beta_n},$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — некоторые заданные убывающие числовые последовательности с определенными свойствами.

Основное условие-ограничение на свойства помех наблюдения, которое обычно предполагается выполненным, — это условная центрированность помех наблюдения. Его можно сформулировать таким образом. Для *статистики* (функции, выборочные значения которой точно наблюдаются или вычисляются)

$$g(x, \beta) = \frac{Y(x + \beta) - Y(x - \beta)}{2\beta}$$

математическое ожидание при малом β близко к значению производной функции

$$E\{g(x, \beta)\} \approx f'(x).$$

Поведение последовательности оценок, доставляемых алгоритмом стохастической аппроксимации, зависит от выбора наблюдаемых функций-статистик $g(x, \beta)$. В ряде практических приложений бывает недостаточно информации относительно статистических свойств ошибок измерения, или они могут просто задаваться неизвестной экспериментатору детерминированной функцией. Это ведет к существенным трудностям в обосновании применимости обычной процедуры Кифера–Вольфовица, и часто ее оценки не сходятся к искомой точке. Но это не означает, что, решая такие проблемы, надо вообще отказаться от использования достаточно простых в представлении алгоритмов стохастической аппроксимации. Выше в примере уже предлагалось использовать “другие” наблюдения. Если удачно заменить статистику $g(x, \beta)$ на другую, которая “в среднем” лучше аппроксимирует производную функции $f(\cdot)$, то можно надеяться на получение лучшего качества поведения последовательности оценок. Предположим, что функция $f(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема и задана наблюдаемая реализация некоторой бернуллиевской последовательности независимых случайных величин $\{\Delta_n\}$, равных с одинаковой вероятностью плюс/минус единице, некоррелированных с ошибками наблюдения на шаге n . Тогда процедуру Кифера–Вольфовица можно модифицировать, используя рандомизированную статистику

$$\tilde{g}(x, \beta, \Delta) = g(x, \beta\Delta).$$

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора и воспользовавшись некоррелированностью Δ_n и помех наблюдения, для этой новой статистики имеем

$$E\{\tilde{g}(x, \beta, \Delta)\} = f'(x) + E\left\{\frac{1}{\Delta}V\right\} + \mathcal{O}(\beta) = f'(x) + \mathcal{O}(\beta).$$

Если значения числовой последовательности $\{\beta_n\}$ в алгоритме стремятся к нулю, то в пределе эта статистика “в среднем” совпадает со значением производной функции $f(\cdot)$. Такими же свойствами обладает и более простая статистика

$$\bar{g}(x, \beta, \Delta) = \frac{\Delta}{\beta}Y(x + \beta\Delta),$$

использующая только одно наблюдение на каждой итерации (шаге). Добавление в алгоритм и канал наблюдения нового случайного процесса $\{\Delta_n\}$, называемого *пробным одновременным возмущением*, приводит к обогащению последовательности наблюдений. Пробное возмущение по своей сути является возбуждающим воздействием, так как главная цель его использования заключается в стремлении добиться невырожденности получаемых наблюдений.

В многомерном случае, когда $\theta \in \mathbb{R}^q$, для построения последовательности оценок обычная процедура Кифера–Вольфовица, основанная на конечно-разностных аппроксимациях вектора-градиента функции, использует $2q$ наблюдений на каждой итерации (по два наблюдения для аппроксимации каж-

дой компоненты q -мерного вектора-градиента). Рандомизированные статистики $\tilde{g}(x, \beta, \Delta)$ и $\bar{g}(x, \beta, \Delta)$ допускают более простой с вычислительной точки зрения способ обобщения на многомерный случай, использующий всего два или одно измерение функции на каждой итерации. Пусть $\{\Delta_n\}$ — бернуллиевский q -мерный случайный процесс. Тогда

$$\tilde{g}(x, \beta, \Delta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta^{(1)}} \\ \frac{1}{\Delta^{(2)}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta^{(q)}} \end{pmatrix} \frac{Y(x + \beta\Delta) - Y(x - \beta\Delta)}{2\beta},$$

а вид формулы для $\bar{g}(x, \beta, \Delta)$ такой же, как и в скалярном случае. Использовать статистику $\tilde{g}(x, \beta, \Delta)$ было предложено Дж. Спалом в статье [41]. В его работе, в частности, показано, что для больших n вероятностное распределение соответствующим образом отмасштабированных ошибок оценивания является приблизительно нормальным. Полученная формула для асимптотической дисперсии ошибки вместе с подобной характеристикой обыкновенной процедуры Кифера–Вольфовица была им использована для сравнения двух алгоритмов. Выяснилось, что при прочих равных условиях новый алгоритм имеет ту же скорость сходимости, что и обычная процедура Кифера–Вольфовица, несмотря на то, что в многомерном случае использует существенно меньше наблюдений (в q раз меньше при $n \rightarrow \infty$). Статистика $\bar{g}(x, \beta, \Delta)$ впервые была предложена в работах [5, 20]. В статье [5] она использовалась для построения последовательности оценок, состоятельных при почти произвольных помехах в наблюдении.

Вопрос о скорости сходимости оценок алгоритмов стохастической аппроксимации был, наверное, основным, стимулирующим модификации первоначальных алгоритмов. Свойства оценок обычной процедуры Кифера–Вольфовица и некоторых ее обобщений детально изучены в работах [2, 15, 16, 18, 26] и во многих других. Скорость сходимости зависит от гладкости функции $f(\cdot)$. Если она дважды дифференцируема, то среднеквадратичная ошибка обыкновенного алгоритма КВ убывает как $\mathcal{O}(n^{-\frac{1}{2}})$, если трижды дифференцируема — как $\mathcal{O}(n^{-\frac{2}{3}})$ [2]. В. Фабиан [28] модифицировал процедуру Кифера–Вольфовица, предложив использовать кроме аппроксимации первой производной конечно-разностные аппроксимации производных высших порядков с определенными весами. Если функция $f(\cdot)$ имеет ℓ непрерывных производных, тогда алгоритм Фабиана обеспечивает среднеквадратичную скорость сходимости порядка $\mathcal{O}(n^{-\frac{\ell-1}{\ell}})$ для нечетных ℓ . С вычислительной точки зрения алгоритм Фабиана очень усложнен, число наблюдений на одной итерации быстро увеличивается с ростом гладкости и размерности, кроме этого, на каждом шаге приходится обращать некоторую матрицу. При использовании рандомизированных алгоритмов СА в задачах с достаточно гладкими исследуемыми функциями $f(\cdot)$ добиться увеличения асимптотической среднеквадратичной скорости сходимости удастся без увеличения количества измерений функции на каждой итерации. В том случае, когда некоторый обобщенный показатель гладкости функции $f(\cdot)$ равен γ ($\gamma = \ell + 1$, если все частные производные функции

порядка до ℓ включительно удовлетворяют условию Липшица), в [20] было предложено использовать статистики вида

$$\tilde{g}_\gamma(x, \beta, \Delta) = \mathcal{K}(\Delta) \frac{Y(x + \beta\Delta) - Y(x - \beta\Delta)}{2\beta}$$

и

$$\bar{g}_\gamma(x, \beta, \Delta) = \frac{1}{\beta} \mathcal{K}(\Delta) Y(x + \beta\Delta),$$

где $\mathcal{K}(\cdot)$ — некоторая вектор-функция с конечным носителем (дифференцирующее ядро), определяемая с помощью ортогональных многочленов Лежандра степени меньшей γ . Два соответствующих рандомизированных алгоритма дают среднеквадратичную скорость сходимости последовательности оценок, равную $\mathcal{O}(n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}})$. В той же работе было показано, что для широкого класса алгоритмов эта скорость сходимости оптимальна в некотором асимптотически минимаксном смысле, т. е. не может быть улучшена ни для какого-либо другого алгоритма, ни для любого другого допустимого правила выбора точек измерения.

Сходимость рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации в многомерном случае при почти произвольных возмущениях обоснована в работах [6, 7, 27, 38]. В статье [20] отмечается, что алгоритм с одним измерением в асимптотическом смысле ведет себя хуже, чем алгоритм с двумя измерениями. В [11] показано, что это не совсем так, если при сравнении алгоритмов рассматривать количество итераций, умноженное на количество измерений. Кроме того, во многих практических применениях, в частности, при оптимизации работы систем реального времени, лежащие в основе математической модели динамические процессы могут изменяться слишком быстро, не позволяя успеть получить два последовательных измерения. В некоторых задачах просто невозможно для одного шага алгоритма сделать два измерения таких, чтобы помехи наблюдения в обеих точках $\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n$ и $\hat{\theta}_{n-1} - \beta_n \Delta_n$ были некоррелированы с Δ_n . (Это одно из основных условий применимости алгоритма!) Избежать последнего недостатка позволяет предложенный в [27] алгоритм с двумя последовательными наблюдениями в точках $\hat{\theta}_{n-1}$ и $\hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n$.

4.1 Постановка задачи и основные предположения

Пусть $F(x, w) : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^1$ — дифференцируемая по первому аргументу функция, x_1, x_2, \dots — выбираемая экспериментатором последовательность точек измерения (план наблюдения), в которых в каждый момент времени $n = 1, 2, \dots$ доступно наблюдению с аддитивными помехами v_n значение функции $F(\cdot, w_n)$

$$y_n = F(x_n, w_n) + v_n,$$

где $\{w_n\}$ — неконтролируемая последовательность случайных величин из \mathbb{R}^p , имеющих одинаковое, вообще говоря, неизвестное распределение $P_w(\cdot)$ с конечным носителем.

Постановка задачи. Требуется по наблюдениям y_1, y_2, \dots построить последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ неизвестного вектора θ , минимизирующей функцию

$$f(x) = E_w\{F(x, w)\} = \int_{\mathbb{R}^p} F(x, w)P_w(dw)$$

типа функционала среднего риска.

Обычно рассматривается задача минимизации функции $f(\cdot)$ при более простой модели наблюдений

$$y_n = f(x_n) + v_n,$$

которая легко укладывается в общую схему. Сделанное обобщение в постановке задачи диктуется стремлением учесть случай мультипликативных помех в наблюдениях

$$y_n = w_n f(x_n) + v_n,$$

который входит в общую схему с функцией $F(x, w) = w f(x)$.

Пусть $\rho \in (1, 2]$. Далее будут использоваться обозначения $\|\cdot\|_\rho$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для нормы l_ρ и скалярного произведения в \mathbb{R}^q . Введем функцию

$$V(x) = \|x - \theta\|_\rho^\rho = \sum_{i=1}^q |x^{(i)} - \theta^{(i)}|^\rho,$$

где θ — искомый вектор.

Сформулируем основные предположения.

A.1 Функция $f(x)$ имеет единственный минимум и

$$(\nabla V(x), \nabla f(x)) \geq \mu V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^q$$

с некоторой постоянной $\mu > 0$.

A.2 При любом w градиенты функций $F(\cdot, w)$ удовлетворяют условию

$$\|\nabla_x F(x, w) - \nabla_x F(y, w)\|_{\frac{\rho}{\rho-1}} \leq M \|x - y\|_{\frac{\rho}{\rho-1}}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^q$$

с некоторой постоянной $M > 0$.

Отметим, что при $\rho = 2$ сделанные предположения имеют тот же вид, что и в более ранних работах (см., например, [12]):

(A') Функция $f(\cdot)$ — сильновыпуклая, т. е.

$$\langle x - \theta, \nabla f(x) \rangle \geq \mu \|x - \theta\|_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^q.$$

(B') Условие Липшица градиенты функций $F(\cdot, w)$:

$$\|\nabla_x F(x, w) - \nabla_x F(y, w)\|_2 \leq M \|x - y\|_2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^q.$$

4.2 Пробное возмущение и рандомизированные алгоритмы СА

Пусть пробное одновременное возмущение Δ_n , $n = 1, 2, \dots$, — наблюдаемая последовательность независимых случайных векторов из \mathbb{R}^q с функциями распределения $P_n(\cdot)$; $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — последовательности положительных чисел, стремящиеся к нулю; $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^q$ — фиксированный начальный вектор. Для построения последовательностей точек измерения $\{x_n\}$ и оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ предлагаются три алгоритма. Первый из них использует на каждой итерации одно наблюдение:

$$(5) \quad \begin{cases} x_n = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, & y_n = F(x_n, w_n) + v_n, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n, \end{cases}$$

а второй и третий — по два наблюдения:

$$(6) \quad \begin{cases} x_{2n} = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, & x_{2n-1} = \hat{\theta}_{n-1} - \beta_n \Delta_n, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{2\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1}), \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} x_{2n} = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, & x_{2n-1} = \hat{\theta}_{n-1}, \\ \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n)(y_{2n} - y_{2n-1}). \end{cases}$$

Во всех трех алгоритмах используются некоторые вектор-функции (ядра) $\mathcal{K}_n(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$, с компактным носителем, удовлетворяющие вместе с функциями распределения пробного возмущения $P_n(\cdot)$ условиям

$$(8) \quad \begin{aligned} \int \mathcal{K}_n(x) P_n(dx) &= 0, & \int \mathcal{K}_n(x) x^T P_n(dx) &= I, \\ \sup_n \int \|\mathcal{K}_n(x)\|^2 P_n(dx) &< \infty, & n &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где I — q -мерная единичная матрица.

Алгоритм (5) с функцией $\mathcal{K}_n(\Delta_n) = \Delta_n$ был впервые предложен в статье [5] для построения последовательности оценок, состоятельных при почти произвольных помехах в наблюдении. В работе [20] были рассмотрены оба алгоритма (5) и (6) с вектор-функцией $\mathcal{K}_n(\cdot)$ достаточно общего вида в ситуации равномерно распределенного пробного возмущения и при предположении о независимости и центрированности помех наблюдения. Дж. Спал [41] рассматривал алгоритм (6) для случая распределения пробного возмущения с конечными обратными моментами и вектор-функцией $\mathcal{K}_n(\cdot)$, задаваемой по правилу

$$\mathcal{K}_n(\Delta_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_n^{(1)}} \\ \frac{1}{\Delta_n^{(2)}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\Delta_n^{(q)}} \end{pmatrix}.$$

С теми же вектор-функцией $\mathcal{K}_n(\cdot)$ и ограничениями на вид распределения пробного одновременного возмущения X.-Ф. Ченом и др. в статье [27] было предложено рассматривать алгоритм (7).

4.3 Сходимость оценок с вероятностью единица и в среднеквадратичном смысле

Вместо алгоритма (5) будем рассматривать близкий к нему алгоритм с проектированием

$$(9) \quad \begin{cases} x_n = \hat{\theta}_{n-1} + \beta_n \Delta_n, & y_n = F(x_n, w_n) + v_n, \\ \hat{\theta}_n = \mathcal{P}_{\Theta_n}(\hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \mathcal{K}_n(\Delta_n) y_n), \end{cases}$$

для которого удобнее провести доказательство состоятельности последовательности формируемых оценок. В этом алгоритме $\mathcal{P}_{\Theta_n}(\cdot)$ — операторы проектирования на некоторые выпуклые замкнутые ограниченные подмножества $\Theta_n \subset \mathbb{R}^q$, которые содержат, начиная с некоторого $n \geq 1$, искомую точку θ . Если заранее известно ограниченное замкнутое выпуклое множество $\Theta: \theta \in \Theta$, то можно считать $\Theta_n = \Theta$. В противном случае множества $\{\Theta_n\}$ могут расширяться до бесконечности. Иногда специфика конкретной задачи позволяет построить убывающую последовательность множеств $\{\Theta_n\}$.

Обозначим $\mathbb{W} = \text{supp}(P_w(\cdot)) \subset \mathbb{R}^p$ — носитель распределения $P_w(\cdot)$; \mathcal{F}_{n-1} — σ -алгебру вероятностных событий, порождаемую случайными величинами $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{n-1}$, формируемыми по алгоритму (6) (или (7), или (9)); при использовании алгоритмов (6) или (7)

$$\bar{v}_n = v_{2n} - v_{2n-1}, \quad \bar{w}_n = \begin{pmatrix} w_{2n} \\ w_{2n-1} \end{pmatrix}, \quad d_n = 1,$$

а при построении оценок по алгоритму (9)

$$\bar{v}_n = v_n, \quad \bar{w}_n = w_n, \quad d_n = \text{diam}(\Theta_n),$$

где $\text{diam}(\cdot)$ — евклидовыи диаметр множества.

Доказательство следующей теоремы можно найти в работе [9].

Т е о р е м а 1 [9]. Пусть выполнены условия:

(A') для функции $f(x) = \mathbb{E}_w\{F(x, w)\}$;

(B') для функций $F(\cdot, w)$, $\forall w \in \mathbb{W}$;

$\forall x \in \mathbb{R}^q$ функции $F(x, \cdot)$ и $\nabla_x F(x, \cdot)$ равномерно на \mathbb{W} ограничены;

(8) для функций $\mathcal{K}_n(\cdot)$ и $P_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$;

$\forall n \geq 1 \mathbb{E}\{\bar{v}_n^2\} \leq \sigma_n^2$, случайные величины $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ и векторы $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n-1}$ не зависят от \bar{w}_n, Δ_n , а случайный вектор \bar{w}_n не зависит от Δ_n .

Если $\sum_n \alpha_n = \infty$ и $\alpha_n \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow 0$, $\alpha_n^2 \beta_n^{-2} (1 + d_n^2 + \sigma_n^2) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\mathbb{E}\{\|\hat{\theta}_n - \theta\|^2\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$, доставляемых алгоритмом (6) (или (7), или (9)), сходится к θ в среднеквадратичном смысле.

Если, более того, $\sum_n \alpha_n \beta_n^2 < \infty$ и с вероятностью единица

$$\sum_n \alpha_n^2 \beta_n^{-2} (1 + \mathbb{E}\{\bar{v}_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}\}) < \infty,$$

то $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица.

Замечание 1. Для функции $F(x, w) = wf(x)$ условия теоремы 1 выполняются, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (A'), (B').

Замечание 2. В [3] и [32] сформулированы результаты о точности оценивания и скорости сходимости алгоритмов (9) и (6) соответственно при выполнении для функций $F(x, w)$ и $f(x)$ условий (A), (B).

Замечание 3. Задача об оценке параметров линейной регрессии с моделью наблюдений (1) при $\theta_n = \theta$ соответствует минимизации функционала среднего риска

$$F(x, w) = \frac{1}{2}(x - \theta - w)^T(x - \theta - w).$$

Алгоритм (4) с $\Gamma_n = \alpha_n$ совпадает с (6). Следовательно, при исследовании вопросов о сильной состоятельности оценок алгоритма (4) и их сходимости в среднеквадратичном смысле можно воспользоваться результатами теоремы 1.

Замечание 4. В теореме 1 помехи наблюдения v_n можно условно назвать *почти произвольными*, так как они могут быть неслучайными (детерминированными), но неизвестными и ограниченными, или представлять из себя реализацию некоторого стохастического процесса с произвольной структурой зависимостей. В частности, для доказательства утверждений теоремы 1 нет необходимости предполагать что-либо о зависимости между \bar{v}_n и \mathcal{F}_{n-1} .

Замечание 5. Утверждения теоремы 1 становятся неверными, если помехи \bar{v}_n имеют определенную структуру зависимости от точки наблюдения $\bar{v}_n = \bar{v}_n(x_n)$. Если же такая зависимость имеет место, например, в связи с ошибками округления, то при попытках решения такого типа задач, наверное, целесообразно помеху наблюдения разбить на две части: $\bar{v}_n(x_n) = \tilde{v}_n + \xi(x_n)$, первая из которых, может быть, удовлетворяет условиям теоремы 1. Если вторая — результат ошибок округления, то, как правило, такие помехи обладают хорошими статистическими свойствами и, может быть, их наличие не мешает состоятельности оценок.

Замечание 6. Условие независимости помех наблюдения от пробного возмущения может быть ослаблено. Достаточно потребовать стремление к нулю с вероятностью единица при $n \rightarrow \infty$ условной взаимной корреляции между \bar{v}_n и $\mathcal{K}_n(\Delta_n)$ со скоростью не меньшей, чем $\alpha_n \beta_n^{-1}$:

$$\|\mathbb{E}\{\bar{v}_n \mathcal{K}_n(\Delta_n) | \mathcal{F}_{n-1}\}\| = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right).$$

Замечание 7. Несмотря на кажущуюся близость алгоритмов (6) и (7), в случае произвольных помех в наблюдениях использование второго из них в системах реального времени более оправданно. Для алгоритма (6) выполнение условия о независимости помехи наблюдения v_{2n} от пробного возмущения Δ_n

слишком ограничительно, так как в предыдущий момент времени $2n - 1$ вектор Δ_n уже использовался в системе. При работе с алгоритмом (7) помеха v_{2n} и вектор пробного возмущения Δ_n появляются в системе одновременно, что позволяет надеяться на их независимость.

Замечание 8. Для еще большего обобщения условий сходимости алгоритмов (6), (7) и (9) можно рассматривать случайные, измеримые относительно σ -алгебры \mathcal{F}_n последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Практическая потребность в такого рода обобщении появляется, например, в тех случаях, когда параллельно с вычислением оценок по алгоритму стохастической аппроксимации дополнительные условия задачи позволяют говорить о качестве оценок. Если оценки еще “плохие”, то целесообразно замедлить сходимость к нулю последовательности $\{\alpha_n\}$, а может быть на какое-то время и увеличить ее значения.

4.4 Пошаговое выполнение алгоритма

Следующее резюме на примере алгоритма (7) с одинаково распределенным пробным возмущением Δ_n и с вектор-функцией $\mathcal{K}_n(x) = x$ показывает, как последовательно по итерациям формировать оценки. Пусть функция распределения $P_n(\cdot)$ равномерно сосредоточена в вершинах q -мерного куба $[-1, 1]^q$, компоненты вектора пробного возмущения взаимно независимы и равны ± 1 с одинаковой вероятностью (распределение Бернулли).

Шаг 1: Инициализация и выбор коэффициентов. Установите счетчик алгоритма $n = 1$. Выберите начальное приближение $\hat{\theta}_0$ и значения для неотрицательных коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ν . В алгоритме используются последовательности $\alpha_n = \alpha/(\delta + n)^\nu$ и $\beta_n = \beta/n^\gamma$. Выбор последовательностей α_n и β_n играет критическую роль в работе алгоритма. В ситуации, когда компоненты вектора θ существенно отличаются по величине, желательно использовать матричное масштабирование α_n , если предварительно доступна информация об их относительных величинах.

Шаг 2: Генерация вектора пробного возмущения. Сгенерируйте случайный q -мерный вектор возмущения Δ_n , в котором все q компонент независимо смоделированы по вероятностному распределению Бернулли ± 1 с вероятностью $1/2$ для каждого результата.

Шаг 3: Измерение значений функции. Получите два измерения функции $f(\cdot)$ в точках $\hat{\theta}_{n-1}$ и возмущенной относительно текущей оценки $\hat{\theta}_{n-1} + \beta n^{-\gamma} \Delta_n$: $y(\hat{\theta}_{n-1})$ и $y(\hat{\theta}_{n-1} + \beta n^{-\gamma} \Delta_n)$.

Шаг 4: Аппроксимация градиента. Сгенерируйте компоненты вектора аппроксимации градиента по правилу

$$\hat{g}_n^{(i)}(\hat{\theta}_{n-1}) = n^\gamma \Delta_{ni} \frac{y(\hat{\theta}_{n-1} + \beta n^{-\gamma} \Delta_n) - y(\hat{\theta}_{n-1})}{\beta},$$

где $\Delta_n^{(i)}$ — i -я компонента вектора Δ_n , $i = 1, 2, \dots, q$. Заметим, что второй множитель в формулах для вычисления всех q компонент одинаковый, в отличие от правила аппроксимации градиента по классической процедуре КВ.

Шаг 5: Обновление оценки $\hat{\theta}$. Используйте стандартную форму алгоритма стохастической аппроксимации

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} - \frac{\alpha}{(\delta + n)^\nu} \hat{g}^n(\hat{\theta}_{n-1})$$

для перехода от $\hat{\theta}_{n-1}$ к новому значению $\hat{\theta}_n$.

Иногда желательно наложить ограничения. Если полученное основное значение оценки кажется нежелательным, тогда либо выполняют отдельный блок модификации, либо берут следующую оценку. Один из такого рода простых случаев — когда известны заранее значения максимума и минимума какой-либо из компонент вектора θ .

Шаг 6: Итерация или завершение. Возвратитесь к шагу 2 с заменой n на $n + 1$. Закончите работу по алгоритму, если на нескольких последовательных итерациях оценки изменялись несущественно или после выполнения максимально допустимого количества итераций.

4.5 Программа на языке MATLAB

Приведем образец программы на языке MATLAB, реализующей N итераций алгоритма. Инициализация алгоритма в программе не показана, так как это может быть сделано по-разному в зависимости от конкретной задачи. В программе вызывается внешняя функция $valueY(\cdot)$. Компоненты вектора пробного возмущения $\Delta_n^{(i)}$ генерируются согласно распределению Бернулли ± 1 .

```
FOR n = 1 : N
    an = alpha / (gamma + k)^mu;
    bn = beta / k^nu;
    delta = 2*round(rand(r, 1)) - 1;
    thetaplus = theta + bndelta;
    yminus = valueY(theta);
    yplus = valueY(thetaplus);
    ghat = delta(yplus - yminus) / (2bn);
    theta = theta - anghat;
END;
theta;
```

Если максимально и минимально возможные значения θ известны, тогда опишем их как $thetamax$ и $thetamin$ и добавим к программе две строки, учитывающие эти ограничения:

```
theta = min(theta, thetamax);
theta = max(theta, thetamin);
```

5 Расчет цен опционов

С момента возникновения в обществе товарно-денежных отношений, появления банков, кредитов, а позже фондовых бирж, акций, фьючерсов и опционов, в силу своей специфики, они существенно влияли на развитие новых исследовательских направлений в математике (см., например, [24]).

В последние несколько десятилетий в связи с колоссальным ростом возможностей телекоммуникаций количество участников (агентов) в товарно-денежных операциях существенно выросло. Если на заре становления товарно-денежных отношений во многих операциях (сделках) участвовало в основном два или несколько агентов, то сейчас, например, при торговле через биржу в одной по сути сделке может участвовать достаточно много продавцов и покупателей. При большом разнообразии агентов на *рынке*, у каждого из которых свои цели и возможности, процесс *спроса и предложений* носит отчетливо выраженный стохастический характер. Для того, чтобы к какой-нибудь торговой или инвестиционной операции привлечь большее количество участников, были придуманы *акции*, для их купли-продажи были открыты фондовые биржи. Но почти сразу общество столкнулось с серьезной проблемой. Так как по своей природе акции не связаны непосредственно с материальными ценностями, а их обращение происходит в удобной и легкой форме, то в развитом капиталистическом обществе процесс их ценообразования подвержен спекулятивным тенденциям. Владельцы крупных пакетов акций за счет *игры* на бирже могут существенно влиять на текущую цену. Постепенно на смену *хлебным, нефтяным и т. п. кризисам* в жизнь общества вошли *финансовые кризисы*, негативное влияние которых в развитом обществе гораздо сильнее любого отраслевого кризиса, так как финансы — это “кровенные” артерии человеческого общества. В XX веке история знает несколько примеров очень глубоких финансовых кризисов, задевших интересы не только отдельных людей, а целых крупных государств. Человечество нашло эффективный способ страховки отдельных людей, коммерческих фирм, общественных фондов, целых государств или сообществ от необоснованных естественными или другими непреодолимыми причинами финансовых кризисов. Появились фьючерсные биржи, на которых стали продавать *производные* ценные бумаги — *фьючерсы и опционы*. Суть идеи — ограничить на определенное время (от одного месяца до нескольких лет) среднюю скорость роста или падения цены акции. В некотором математическом смысле можно говорить о попытке ограничить среднюю абсолютную величину производной от функции, задающей цену акции.

Фьючерс — это контракт на покупку или продажу в определенный день в будущем акции или другого товара по заранее заданной цене. Владелец фьючерсного контракта обязан в день окончания фьючерса выполнить свои обязательства по купле-продаже. По своей сути *игра* на рынке фьючерсов близка ко многим азартным играм. Так же, как и на рынке акций, законы ценообразования на фьючерсных рынках не гарантируют спасения от глубоких финансовых кризисов. *Опцион* — это также контракт на покупку или продажу акции или другого товара в определенный день в будущем (или до определенного дня) по заранее оговоренной цене. Но в отличие от владельца фьючерсного контракта

владелец опциона может не выполнять свои обязательства по купле-продаже, если это ему невыгодно. На самом деле опционные контракты взаимовыгодны и продавцу и покупателю, а финансовый рынок, на котором опционы занимают существенное место, менее подвержен глубоким финансовым кризисам.

Для примера попробуйте поставить себя на место руководителя работ по строительству длинной железной дороги. Срок строительства два года, деньги заказчик в определенном количестве гарантирует выплачивать ежемесячно. Общая стоимость работ оговорена заранее и не может быть изменена. Пусть основные материальные затраты составляют средства на покупку секций железнодорожного полотна. Возможны два варианта гарантированного безубыточного выполнения работ. Первый — взять кредит в банке на всю предполагаемую сумму работ, закупить сразу весь объем железнодорожного полотна, сложить его на складе и постепенно подвозить к месту монтажа. Недостатками этого варианта являются: необходимость кредита от банка, который могут и не дать, если заказчик не очень надежен; риск форс-мажорных обстоятельств; затраты на дополнительную перевозку, перегрузку и организацию хранения железнодорожных секций. Второй вариант — покупка опционных контрактов на поставку железнодорожных секций в определенное время по определенной цене. Для исполнителя работ выгодно фиксировать цену, даже более высокую, чем текущая, но не платить проценты по кредиту и не нести дополнительные затраты на транспортировку и хранение. В момент покупки опциона оплачивается определенное вознаграждение продавцу (называемое *ценой опциона*), соответствующее превышению договоренной суммы над прогнозируемым уровнем цены в будущем. Если за время строительства в экономике или отрасли произойдет кризис, и цены упадут, то владелец опциона не обязан покупать ж/д полотно по высокой цене, он может дешево купить его на рынке и получить тем самым дополнительную прибыль. Для продавца железнодорожных секций, если фактическая цена к моменту исполнения обязательств по контракту, выше оговоренной в опционе, то это не является прямым убытком, так как заранее можно было подготовиться к исполнению своих обязательств, получив на это некоторую предоплату. Если цены на акции или товар к моменту погашения обязательств упадут, то полученная заранее предоплата остается у продавца и является его доходом.

Опционы продавца называются *опционы-пут (put)*, а опционы покупателя *опционы-колл (call)*. Опционы, в которых выполнение обязательств происходит в конце оговоренного срока, называются *опционами Европейского типа*, а те, в которых выполнение обязательств может по желанию владельца контракта произойти и до конца оговоренного срока, — *опционами Американского типа*. Бывают опционы и с другими названиями и правилами обращения.

Приняв гипотезу о стохастическом характере рынка опционов и независимости действий различных агентов на рынке, достаточно тонкие математические рассуждения приводят к формуле Блэка–Шоулса для расчета *справедливой цены опциона* (взаимовыгодной), доказательство и вывод которой можно найти, например, в [24].

Пусть банковский счет $\{b_t\}_{t \geq 0}$ эволюционирует так, что

$$db_t = \delta b_t dt,$$

а цены акций $\{s_t\}_{t \geq 0}$ подчиняются закону геометрического броуновского движения

$$ds_t = s_t(\mu dt + \sigma dw_t),$$

где $\{w_t\}_{t \geq 0}$ — стандартный винеровский процесс (броуновское движение), заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Для этой модели справедливая стоимость стандартного опциона–колл Европейского типа определяется формулой

$$C_T = s_0 \Phi\left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + T(\delta + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{T}}\right) - K e^{-\delta T} \Phi\left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + T(\delta - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{T}}\right),$$

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

T — время до дня погашения опциона, K — зафиксированная в контракте цена (страйк), по которой покупатель в оговоренный день погашения опциона имеет право купить акции или другой товар. В частности, при $s_0 = K$ и $\delta = 0$

$$C_T = s_0 \left(\Phi\left(\frac{\sigma \sqrt{T}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma \sqrt{T}}{2}\right) \right)$$

и $C_T \approx s_0 \sigma \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$ при $T \rightarrow \infty$.

Параметр σ в формуле Блэка–Шоулса, называемый *волатильностью*, играет основную роль при расчете цены опциона. При фиксированном времени T до момента погашения опционных контрактов график функции $\sigma(K)$ имеет вид, похожий на улыбку человека (smile) (Рис. 1). Многолетний анализ формирования цен при торговле на биржах опционами подтверждает такой характер зависимости, причем при быстром изменении текущих цен характер *кривой волатильности* практически не меняется в течении достаточно длительного времени (недели, месяцы). Изменения вида этой кривой происходят достаточно редко и подчиняются определенным эмпирическим законам. Вид кривой волатильности можно параметризовать несколькими параметрами, основные из которых — значения волатильности в точке s_0 (*at the money*) и в крайних точках, угол наклона в точке *at the money*, параметры аппроксимирующих кривых. Обычно кривую волатильности составляют из четырех частей: по краям используют два графика показательной функции, в основной части хорошо соответствуют экспериментальным данным квадратичная и кубическая кривые, склеивающиеся в точке *at the money*.

Использование кривых волатильности приводит к достаточно простому способу расчета цен опционов и проверки правильности полученных результатов: подбирают кривые, наиболее соответствующие реальной картине на рынке, и с их помощью по формуле Блэка–Шоулса рассчитывают цены опционов.

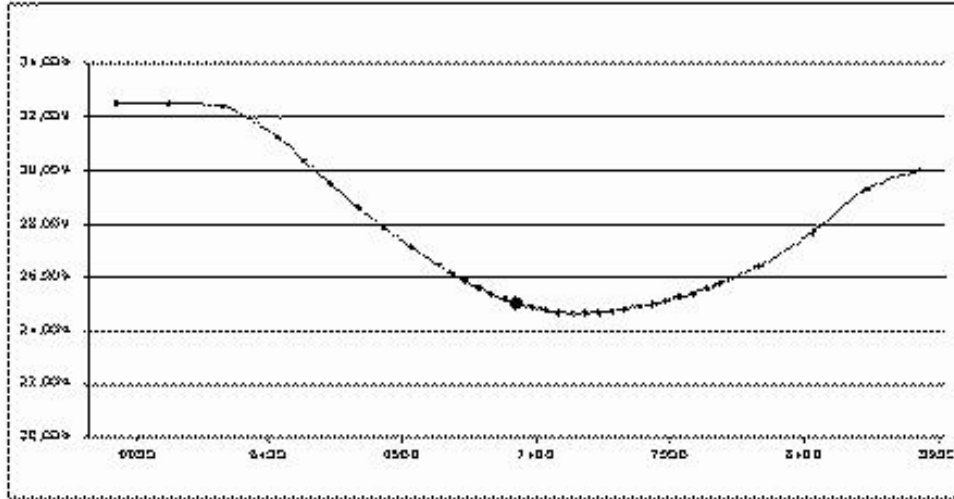


Рис. 1: Кривая волатильности

При быстрых изменениях цен акций или товаров кривая волатильности просто параллельно переносится вслед за изменением точки *at the money* и после этого оперативно пересчитываются цены опционов. Сложность проверки результатов расчетов определяется недостатком информации о текущих ценах. Одновременно по одному виду акций или другого товара продаются опционные контракты на разные сроки (до десяти и даже более). На каждый срок одновременно продаются несколько десятков контрактов с различными гарантированными ценами будущих сделок (страйками). Так как опционы являются производными бумагами, скорость изменения цен на них может быть на порядок выше, чем для самих акций или товаров, лежащих в основе опционного контракта. Например, на электронной бирже во Франкфурте на Майне торгуют, в частности, опционными контрактами на индекс DAX. Характер типичных изменений в течение дня 18 апреля 2000 года реальных цен сделок по страйку 7100 можно проиллюстрировать данными из выборочной таблицы 1.

Таблица 1.

Время	Цена сделки
9 ч. 14 мин.	176
10 ч. 14 мин.	145
11 ч. 07 мин.	110
11 ч. 40 мин.	75
12 ч. 16 мин.	100
12 ч. 24 мин.	115
13 ч. 52 мин.	130
18 ч. 52 мин.	150

В каждый момент ситуация на рынке может существенно измениться, причем

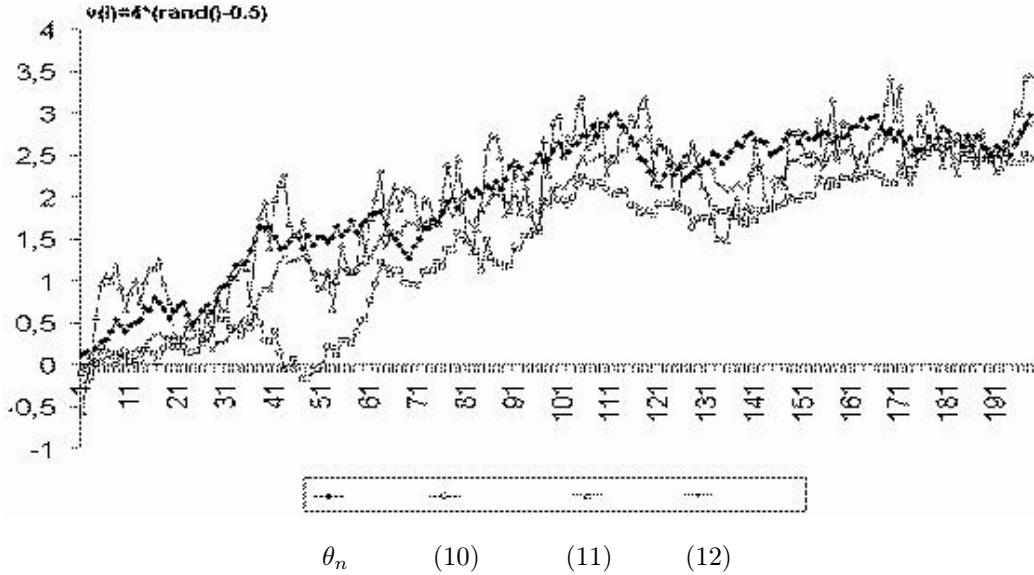


Рис. 2: Фильтрация при белом шумных помехах

об этом можно и не догадаться, наблюдая за одним из продаваемых на бирже контрактов, так как сделок по нему в этот момент может и не быть по каким-либо причинам.

Для оценивания параметров кривых волатильности целесообразно применять рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации. Во-первых, задача — многопараметрическая и, следовательно, актуален вопрос об оптимизации процесса подбора подходящих параметров, а, во-вторых, желательно использовать алгоритмы наименее чувствительные к заданию статистических свойств помех в модели, так как по своей природе помехи могут не быть независимыми и центрированными.

6 Результаты имитационного моделирования

Рассмотрим пример применения рандомизированного алгоритма фильтрации типа (3) к решению задачи о предсказании значения скалярного процесса $\{\theta_n\}$, порождающегося устойчивым линейным фильтром

$$\theta_{n+1} = 0.9999\theta_n + w_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \theta_1 = 0,$$

где $\{w_n\}$ представляет собой реализацию независимых равномерно распределенных на интервале $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ случайных величин

$$E\{w_n\} = 0, \quad E\{w_n^2\} = \frac{2}{81}.$$

Наблюдению в каждый момент времени доступны величины

$$y_n = \varphi_n \theta_n + v_n,$$

представляющие собой смесь преобразованного процесса $\{\theta_n\}$ и *неизвестной, но ограниченной* детерминированной помехи $\{v_n\}$: $|v_n| \leq 2$.

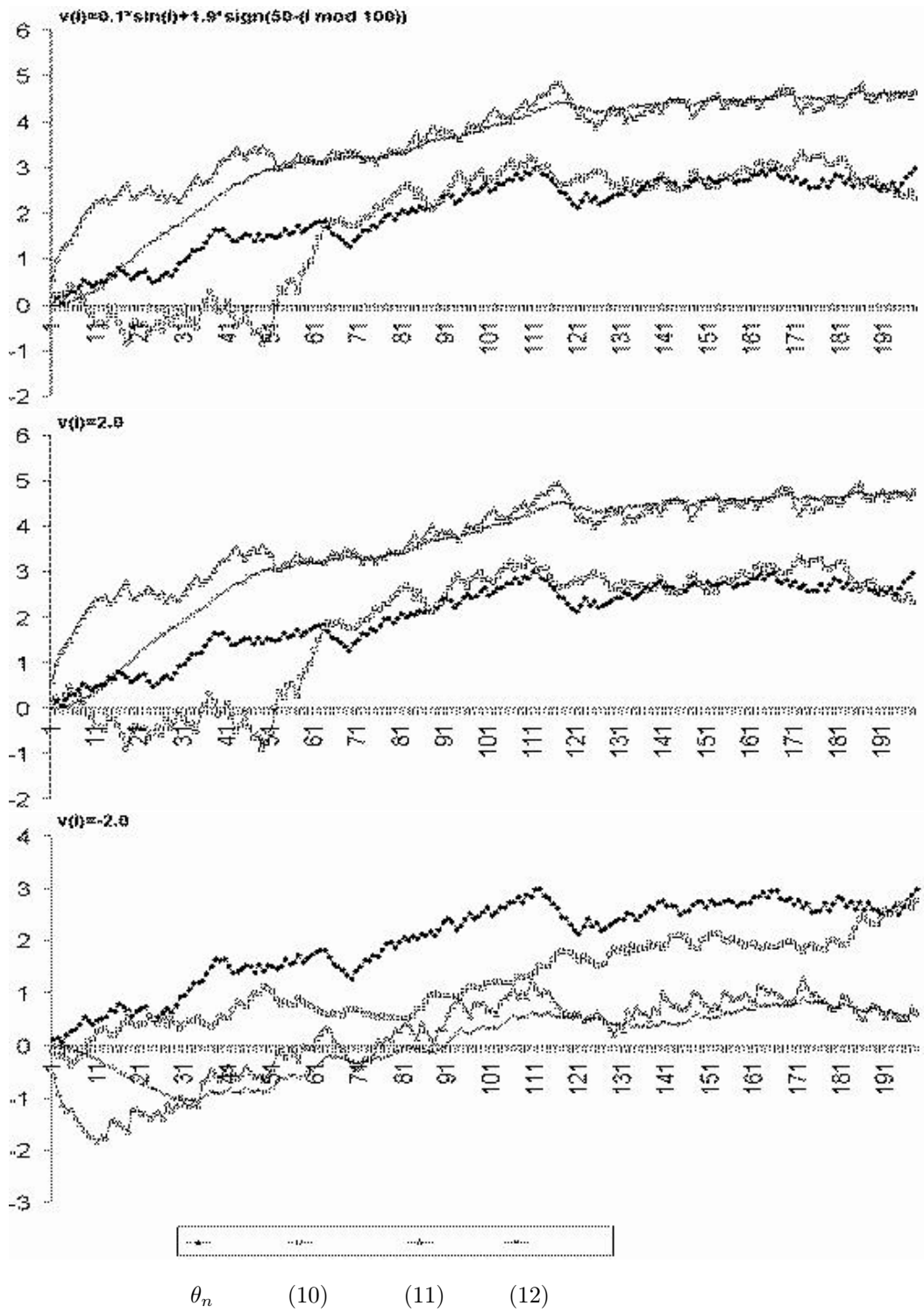


Рис. 3: Фильтрация при нерегулярных помехах

При компьютерном моделировании в качестве последовательности коэффициентов преобразования полезного сигнала в канале наблюдения $\{\varphi_n\}$ были выбраны случайные величины, порождаемые равномерным распределением на интервале $[0.5, 1.5]$. Процесс $\{\theta_n\}$ наблюдался на интервале времени от 1 до 200. Качество предсказания определялось средней величиной невязки

$$\tilde{D}(\{\hat{\theta}_n\}) = \frac{1}{199} \sum_{n=1}^{199} \|\hat{\theta}_{n+1} - \theta_{n+1}\|^2.$$

Оптимизация по ρ функции $\bar{D}(\rho)$ из [12] дает значение $\rho_* = 0.269$. Подставив это значение в формулу для величины размера шага алгоритма получаем $\Gamma_n = 11.3808/48$, и ошибка прогнозирования не превосходит $1.3699 < C_v^2 = 4$.

Рис. 2 и 3 в типичных случаях показывают сравнительное поведение оценок предсказания, формируемых по трем алгоритмам: рандомизированному

$$(10) \quad \hat{\theta}^{n+1} = 0.9999(\hat{\theta}^n - 0.2371(\varphi_n - 1.0)(\varphi_n \hat{\theta}^n - y_n)),$$

упрощенному фильтру Калмана–Бьюси

$$(11) \quad \hat{\theta}^{n+1} = 0.9999(\hat{\theta}^n - 0.2371\varphi_n(\varphi_n \hat{\theta}^n - y_n))$$

и фильтру Калмана–Бьюси

$$(12) \quad \hat{\theta}^{n+1} = 0.9999\hat{\theta}^n - K_n\varphi_n(\varphi_n \hat{\theta}^n - y_n),$$

$$K_n = \frac{0.9999\gamma_{n-1}}{\frac{16}{3} + \gamma_{n-1}\varphi_n^2}, \quad \gamma_n = \gamma_{n-1}0.9999^2 - \frac{\varphi_n^2\gamma_{n-1}^2}{\frac{16}{3} + \gamma_{n-1}\varphi_n^2} + \frac{2}{81}, \quad \gamma_0 = 0.$$

Известно, что фильтр Калмана–Бьюси (12) дает оптимальные оценки в случае гауссовых независимых помех в наблюдении, метод (11) достаточно эффективен при центрированных независимых помехах. Поэтому при центрированных случайных помехах поведение оценок, генерируемых по алгоритмам (11), (12) достаточно хорошее, несмотря на высокий уровень помех наблюдения (см. рис. 2). В ситуациях с постоянной неизвестной помехой или при нулевой в среднем, но недостаточно “разнообразной”, средние значения ошибок алгоритмов (11) и (12) соизмеримы с квадратом уровня помехи (см. рис. 3). В то же время средний уровень ошибок оценок, доставляемых рандомизированным алгоритмом, во всех ситуациях примерно одинаковый и в несколько раз лучше квадрата уровня помехи. В таблице 2 сведены итоговые результаты средних значений ошибок типичных компьютерных экспериментов.

Таблица 2.

	$\tilde{D}((10))$	$\tilde{D}((11))$	$\tilde{D}((12))$
$v_n = 4.0 * (rand() - 0.5)$	0.5309	0.1803	0.1256
$v_n = 0.1 * sin(n) +$			
$+1.9 * sign(50 - n \bmod 100)$	0.5700	2.8254	2.2640
$v_n = 2.0$	0.5954	3.1387	2.5335
$v_n = -2.0$	0.7826	3.4989	3.9582

7 Заключение

Замечательной особенностью рассмотренных в работе рандомизированных алгоритмов СА является сохранение их простоты, работоспособности высокой скорости сходимости при росте размерности вектора оцениваемых параметров. Так как при этом не растет необходимое для каждой итерации количество измерений, то важным дальнейшим шагом в развитии может стать применение этих алгоритмов в системах с бесконечномерными измерениями и распределенными параметрами. На взгляд автора, замена в многомерном случае большого количества конечно-разностных аппроксимаций градиента целевой функции всего на одно или два измерения в случайно выбираемых точках на интуитивном уровне кажется гораздо более близкой к модели поведения высокоорганизованных живых систем. Наверное, такого типа алгоритмы более естественно использовать при конструировании систем "искусственного интеллекта".

Список литературы

- [1] *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 223 с.
- [2] *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972. 295 с.
- [3] *Вахитов А. Т., Граничин О. Н., Сысоев С. С.* Точность оценивания рандомизированного алгоритма стохастической оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2006. №4. С. 86–96.
- [4] *Граничин О. Н.* Алгоритм стохастической аппроксимации с возмущением на входе для идентификации статического нестационарного дискретного объекта // Вестник Ленингр. ун-та, сер. 1. 1988. В. 3. С. 92–93.
- [5] *Граничин О. Н.* Об одной стохастической рекуррентной процедуре при зависимых помехах в наблюдении, использующей на входе пробные возмущения // Вестник Ленингр. ун-та, сер. 1. 1989. В. 1. С. 19–21.
- [6] *Граничин О. Н.* Процедура стохастической аппроксимации с возмущением на входе // Автоматика и телемеханика. 1992. № 2. С. 97–104.
- [7] *Граничин О. Н.* Оценивание точки минимума неизвестной функции, наблюдаемой на фоне зависимых помех // Проблемы передачи информации. 1992. № 2. С. 16–20.
- [8] *Граничин О. Н.* Оценивание параметров линейной регрессии при произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. 2002. № 1, С. 30–41.
- [9] *Граничин О. Н.* Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. 2002. № 2, С. 44–55.

- [10] *Граничнин О. Н.* Неминимаксная фильтрация при неизвестных ограниченных помехах в наблюдениях // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 125–133.
- [11] *Граничнин О. Н.* Оптимальная скорость сходимости рандомизированных алгоритмов стохастической аппроксимации при произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. 2003. №2. С. 88–99.
- [12] *Граничнин О. Н., Поляк Б. Т.* Рандомизированных алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука. 2003. 291 с.
- [13] *Граничнин О. Н., Измакова О. А.* Рандомизированный алгоритм стохастической аппроксимации в задаче самообучения // Автоматика и телемеханика. 2005. №8. С. 52–63.
- [14] *Льюнг Л., Седерстрем Т.* Идентификация систем: теория для пользователя. М.: Наука. 1991. 431 с.
- [15] *Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. И.* Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука. 1987. 279 с.
- [16] *Невельсон М. Б., Хасъминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука. 1972. 304 с.
- [17] *Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.* Адаптивные алгоритмы оценивания (сходимость, оптимальность, устойчивость) // Автоматика и телемеханика. 1979. № 3. С. 71–84.
- [18] *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983. 384 с.
- [19] *Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.* Градиентные методы стохастической оптимизации // Измерения, контроль, автоматизация. 1989. № 3. С. 50–54.
- [20] *Поляк Б. Т., Цыбаков А. Б.* Оптимальные порядки точности поисковых алгоритмов стохастической аппроксимации // Проблемы передачи информации. 1990. № 2. С. 45–53.
- [21] *Поляк Б. Т.* Новый метод типа стохастической аппроксимации // Автоматика и телемеханика. 1990. № 7. С. 98–108.
- [22] *Фельдбаум А. А.* О проблемах дуального управления // Методы оптимизации автоматических систем. М.: Наука. 1972. С. 89–108.
- [23] *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука. 1980, 574 с.
- [24] *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики, том 2, теория. М.: Фазис. 1998, 1017 с.
- [25] *Alspector J., Meir R., Jayakumar A., Lippe D.* A parallel gradient descent method for learning in analog VLSI neural networks // Advances in Neural Information Processing Systems 5. Hanson S.J., Cowan J.D., Lee C. eds. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1993. P. 834–844.

- [26] *Blum J. R.* Multidimensional stochastic approximation // Ann. Math. Statist. 1954. V. 9. P. 737–744.
- [27] *Chen H. F., Duncan T. E., Pasik–Duncan B.* A Kiefer–Wolfowitz algorithm with randomized differences // IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. V. 44. N 3. P. 442–453.
- [28] *Fabian V.* Stochastic approximation of minima with improved asymptotic speed // Ann. Math. Statist. 1967. V. 38. P. 191–200.
- [29] *Fisher R. A.* The Design of Experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1935.
- [30] *Goldenshluger A. V., Polyak B. T.* Estimation of regression parameters with arbitrary noise // Mathematical Methods of Statistics. 1993. V. 2. N 1. P. 18–29.
- [31] *Granichin O. N.* Linear regression and filtering under nonstandard assumptions (Arbitrary noise) // Trans. on Automat. Contr. 2004. V. 49. P. 1830–1835.
- [32] *Granichin O. N., Vakhitov A. T.* Accuracy for the SPSA algorithm with two measurements // WSEAS Transactions on Systems. № 5, V. 5. May 2006. P. 953–957.
- [33] *Guo L., Ljung L., Wang G-J.* Necessary and sufficient conditions for stability of LMS // IEEE Transactions on Automatic Control. 1997. V. 42, N 6. P. 761–770.
- [34] *Kiefer J., Wolfowitz J.* Statistical estimation on the maximum of a regression function // Ann. Math. Statist. 1952. V. 23. P. 462–466.
- [35] *Ljung L., Guo L.* The role of model validation for assessing the size of the unmodeled dynamics // IEEE Transactions on Automatic Control. 1997. V. 42, N 9. P. 1230–1239.
- [36] *Maeda Y., Kanata Y.* Learning rules for recurrent neural networks using perturbation and their application to neuro-control // Transactions of IEE of Japan. 1993. V. 113–C. P. 402–408.
- [37] *Mostaghimi M.* Monetary policy simulation using SPSA-based neural networks // In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. 1997, p. 492–497.
- [38] *Polyak B. T., Tsybakov A. B.* On stochastic approximation with arbitrary noise (the KW case) / Topics in Nonparametric Estimation. Khasminskii R.Z. eds. // Advances in Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc. Providence. 1992. N 12. P. 107–113.
- [39] *Poznyak A, Godoy M., Ochoa S. E. M.* Stackleberg–Nash Equilibrium in Conflicts with a Leader: Numerical Procedure // report on “Conference on Optimization and Control”. 20 May, 2005. Moscow. ICS RAS <http://www.ipu.ru/labs/lab7/files/conf05/20-1-4-Poznyak.ppt/>.

- [40] *Robbins H., Monro S.* A stochastic approximation method // Ann. Math. Statist. 1951. V. 22. P. 400–407.
- [41] *Spall J. C.* Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation // IEEE Transactions on Automatic Control. 1992. V. 37. P. 332–341.
- [42] *Spall J. C.* An overview of the simultaneous perturbation method for efficient optimization // Johns Hopkins APL Technical Digest. 1998. V. 19. P. 482–492, <http://techdigest.jhuapl.edu/td/td1904/spall.pdf>.