Trigonometrie

Zusammengestellt von:

helmut hinder

gießen 2009-20

Aufgaben und Grafiken (nur für unterrichtliche Zwecke benutzt) auszugsweise aus:

1. Westermann; Mathe 10
2. Mathematik heute 10

Themen:

1. Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens – Längenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck
2. Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis
   1. Einführung
   2. Bestimmung von Werten für Sinus, Kosinus und Tangens
3. Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck
   1. WSW
   2. SSW
   3. SWS
4. Berechnungen im gleichschenkligen Dreieck
5. Bogenmaß eines Winkels
6. Sinus- und Kosinusfunktion
   1. Einführung
   2. Eigenschaften
   3. Graph
7. Der Sinus-und Kosinussatz
   (Nur in leistungsstärkeren Gruppen)
   1. Einführung
   2. Berechnungen in beliebigen Dreiecken
   3. Berechnung von Vierecken und anderen Vielecken z.B. durch Zerlegung in berechenbare Dreiecke

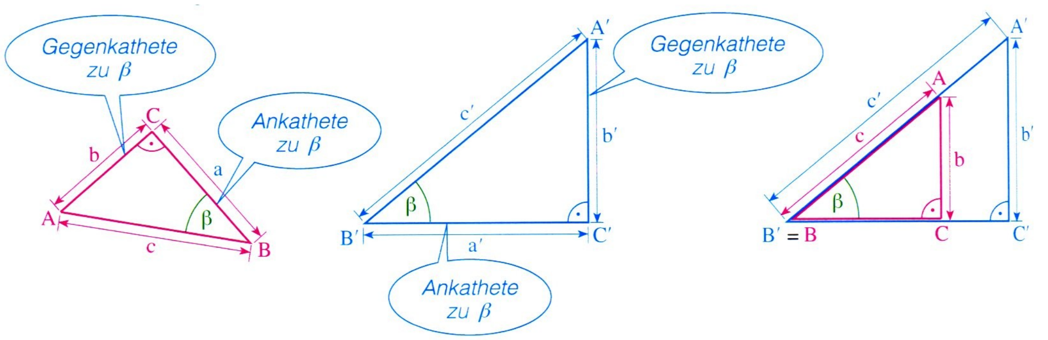
Lernziele:

1. Die Definitionen von Sinus, Kosinus und Tangens eines Winkels kennen.
2. Im rechtwinkligen Dreieck zu einem vorgegebenen Winkel Ankathete und Gegenkatheten bestimmen können.
3. sin, cos und tan zu vorgegebenen Winkeln und umgekehrt berechnen können.
4. Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen durchführen können.
5. Berechnungen im gleichschenkligen Dreieck mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen durchführen können.
6. Wissen, was man unter dem Bogenmaß eines Winkels versteht.
7. Winkel vom Gradmaß ins Bogenmaß und umgekehrt umwandeln können.
8. Die Sin- Cos- und Tangens-Funktionen und ihre Eigenschaften (Max-, Min-Werte und Nullstellen) kennen, bestimmen und den zugehörigen Graph dazu zeichnen können.

Zielsetzung

In rechtwinkligen Dreiecken lassen sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras Seitenlängen berechnen. Jedoch können wir in solchen Dreiecken die Größe von Winkeln in der Regel bisher nur zeichnerisch ermitteln.
Ziel muss daher sein, Verfahren kennen zu lernen, mit der Hilfe man auch die Winkel und Längen in beliebigen Dreiecken aus gegebenen Stücken berechnen kann.

Gleiche Längenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken



Zwei rechtwinklige Dreieck ABC und A'B'C', die in der Größe des Winkels β übereinstimmen.Durch Verschieben und Drehen des Dreiecks ABC kann man beide Dreiecke in die Lage wie im Bild rechts bringen. Es entsteht eine Strahlensatzfigur mit den beiden Parallelen AC und A'C'.

Nach dem 1. Strahlensatz gilt:

In beiden rechtwinkligen Dreiecken stimmt das Längenverhältnis aus
Gegenkathete und Hypotenuse überein.
-
Dasselbe gilt für das Längenverhältnis aus
Ankathete und Hypotenuse.

Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

In beiden rechtwinkligen Dreiecken stimmt das Längenverhältnis aus
Gegenkathete und Ankathete überein.

Merke 1:

Für alle rechtwinkligen Dreiecke, die in der Größe eines spitzen Winkels (und damit in allen Winkeln) übereinstimmen, gilt (nach den Strahlensätzen):

- $\dfrac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$ hat immer den gleichen Wert
- $\dfrac{\text{Länge der Ankathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$ hat immer den gleichen Wert
- $\dfrac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Ankathete}}$ hat immer den gleichen Wert

Diese Verhältnisse ändern sich nur, wenn der Winkel sich ändert. Sie bestimmen also den Winkel; deshalb erhalten sie eigene Namen.

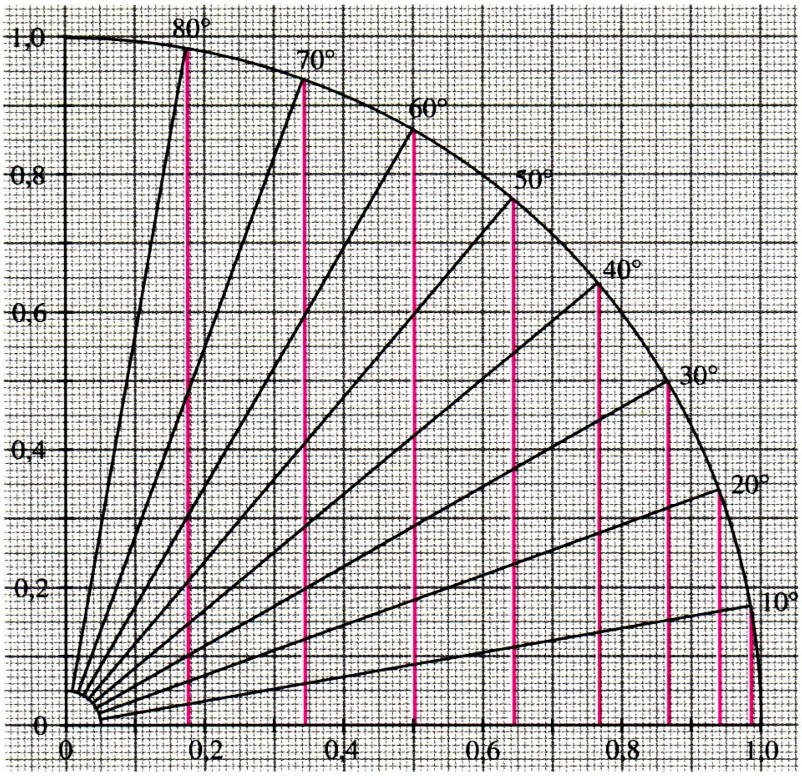
Merke 2:

$$\text{Sinus eines Winkels} = \frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\text{Kosinus eines Winkels} = \frac{\text{Länge der Ankathete des Winkels}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\text{Tangens eines Winkels} = \frac{\text{Länge der Gegenkathete des Winkels}}{\text{Länge der Ankathete}}$$

Der Einheitskreis hilft hilft uns Näherungswerte für sin α, cos α und tan α für α = 5°, 10°, 15°, 20°, … 85° zu finden.



α	Näherungswerte für sin α	cos α	tan α
5°			
10°			
15°			
20°			
25°			
30°			
35°			
40°			
45°			
50°			
55°			
60°			
65°			
70°			
75°			
80°			
85°			

Anhand der oben stehenden Tabelle lassen sich interessante Beziehungen zwischen sin α; cos α und tan α entdecken.

sin 05° = …......................... = …...............................

sin 10° = …......................... = …...............................

sin 15° = …......................... = …...............................

sin 20° = …......................... = …...............................

…

sin 85° = …......................... = …...............................

Merke 3

Wir legen fest:

$$\textbf{tan } \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Folgende Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus lassen sich aus den Ergebnissen der obenstehenden Tabelle ableiten:

cos α = sin(90° - α)

sin α = cos(90° - α)

$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Der Sinussatz - Berechnen eines allgemeinen Dreiecks im Falle wsw und Ssw

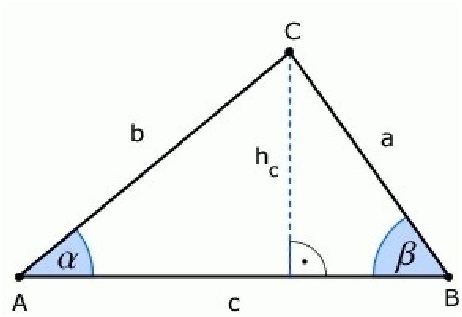
Merke 4:

Der Sinussatz ist anwendbar wenn ...

1. zwei Winkel und eine Seite gegeben sind (**wsw** bzw. **sww**)
   oder
2. zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind (**Ssw**), wobei der Winkel der größeren der beiden Seiten gegenüber liegen muss.

Herleitung des Sinussatzes

Im Folgenden werden die Seiten eines Dreiecks mit a, b und c bezeichnet, sowie die entsprechenden Maßen α, β und γ der gegenüber liegenden Winkel. h_c ist die Höhe auf c.



Beweis

Zeichnet man die Höhe h_c auf c in einem beliebigen Dreieck ein, dann wird dieses Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke unterteilt. In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Sinus eines Winkels gleich dem Verhältnis zwischen Gegenkathete und Hypotenuse.

Es folgt also:

$$\sin\alpha=\frac{h_c}{b} \quad \text{und} \quad \sin\beta=\frac{h_c}{a}$$

Die Höhe h_c kann also geschrieben werden als:

$$h_c=b\cdot\sin\alpha \quad \text{und} \quad h_c=a\cdot\sin\beta$$

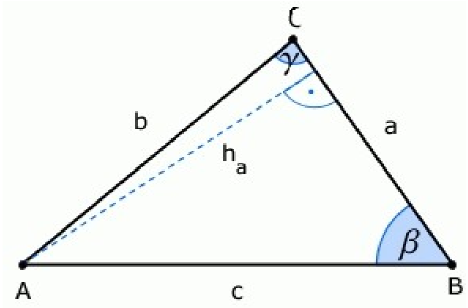
Gleichsetzen der Ausdrücke:

$$b\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\beta$$

Daraus lässt sich der erste Teil des Sinussatzes folgern:

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

Zeichnet man nun die Höhe h_a auf a in das Dreieck ein, wird auch dieses mal das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke unterteilt.



Es können wieder folgende Aussagen gemacht werden:

$$\sin\beta=\frac{h_a}{c} \quad \text{und} \quad \sin\gamma=\frac{h_a}{b}$$

Umstellen und gleichsetzen der obigen Ausdrücke ergibt den zweiten Teil des Sinussatzes:

$$c\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\gamma$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

Setzt man den ersten und den letzten Teil zusammen, ergibt sich folgender Ausdruck:

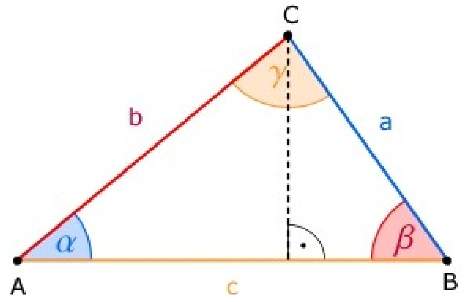
$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

Zusammenfassung:

In einem beliebigen Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b und c und den Maßen α, β, und γ gilt der Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

Berechnung des Flächeninhaltes beliebiger Dreiecke



Falls die Höhe eines Dreiecks nicht bekannt ist, gilt es eine Formel zu finden, mit der man ohne Rückgriff auf eine Höhe des Dreiecks den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen kann.

Ausgehen wollen wir von der uns bekannten Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes eines beliebigen Dreiecks ABC:

(1) $F=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot \sin\beta$

Nach Einzeichnen der h_c lässt sich nun sin α und sin β berechnen:

(2) $\sin\alpha=\frac{h_c}{b}$

$h_c \quad =\sin\alpha\cdot b$

(3) $\sin\beta=\frac{h_c}{a}$

$h_c \quad =\sin\alpha\cdot a$

(2) in (1) $F=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin\alpha$

oder

(3) in (1) $F=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot \sin\beta$

Genauso herleiten lässt sich die dritte Formel zur Berechnung des Flächeninhalts:

$F=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma$

Eine Anwendung des Sinussatzes

Dank dem Sinussatzes ist es möglich zu zeigen, dass in einem beliebigen Dreieck die größte Seite dem größten Winkel gegenüberliegt.
Zuerst muss gezeigt werden: Der größeren von zwei Seiten liegt der größere Winkel gegenüber.

Seien a,b zwei Seiten eines Dreiecks mit $a > b$

Nach dem Sinussatz gilt: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

Umformen der Gleichung: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

Da $a > b$, folgt: $\sin\alpha > \sin\beta$

Jetzt muss gezeigt werden, dass aus $\sin\alpha > \sin\beta$ auch $\alpha > \beta$ folgt.

Eine Fallunterscheidung ist notwendig:

1) $\alpha < 90°$

Da $\sin\alpha > \sin\beta$ gelten sollt, kann β nur in zwei Intervallen liegen:

Entweder $0 \leq \beta \leq \alpha$ oder $180° - \alpha \leq \beta \leq 180°$

Da die Innenwinkelsumme in einem Dreieck gleich 180° ist, kann β nur im ersten Intervall liegen.

2) $\alpha = 90°$

Zwei mögliche Intervalle wie oben.

3) $\alpha > 90°$

β liegt entweder im ersten Quadranten oder $\beta > \alpha$

Wieder kann man mit dem Argument der Innenwinkelsumme die zweite Möglichkeit ausschließen.

Fazit: der größeren von zwei Seiten liegt der größere Winkel gegenüber!

Wendet man den Satz auf alle Seiten eines Dreiecks, folgt unmittelbar:

Ist $a > b > c$, dann gilt: $\alpha > \beta > \gamma$

Der Kosinussatz - Berechnen eines allgemeinen Dreiecks im Falle sws und sss

Merke 5:

Der Kosinussatz ist anwendbar wenn ...

3. zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind (**sws**)

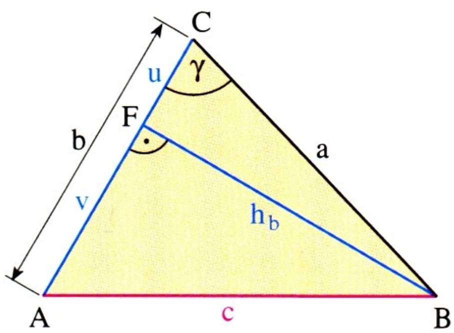
 oder

4. drei Seiten gegeben sind (**sss**).

Herleitung des Kosinussatzes

Im Folgenden werden die Seiten eines Dreiecks mit a, b und c bezeichnet, sowie die entsprechenden Maßen α, β und γ der gegenüber liegenden Winkel.

h_b ist die Höhe auf b und teilt diese Seite in die Abschnitte u und v.



Berechnen von h_b im Dreieck BCF:	*Berechnen von u im Dreieck BCF:*	*Berechnen von v im Dreieck ABC:*	*Berechnen von c im Dreieck ABF:*
$\frac{h_b}{a}=\sin\gamma$	$\frac{u}{a}=\cos\gamma$	$u+v=b$	$c^2=h_b{}^2+v^2$
$h_b=a\cdot\sin\gamma$	$u=a\cdot\cos\gamma$	$v=b-u$	$c=\sqrt{h_b{}^2+v^2}$

Durch Einsetzen erhalten wir

$c^2=h_b{}^2+v^2$

$c^2=h_b{}^2+(b-u)^2$ b-u für v eingesetzt

$c^2=h_b{}^2+b^2-2bu+u^2$

$c^2=a^2\cdot(\sin\gamma)^2+b^2-2ba\cdot\cos\gamma+a^2\cdot(\cos\gamma)^2$ $a\cdot\sin\gamma$ für h_b eingesetzt

$c^2=a^2\cdot((\sin\gamma)^2+(\cos\gamma)^2)+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$ $a\cdot\cos\gamma$ für u eingesetzt

Wegen $(\sin\gamma)^2+(\cos\gamma)^2=1$

folgt:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$$

Man nennt diese Gleichung den Kosinussatz.

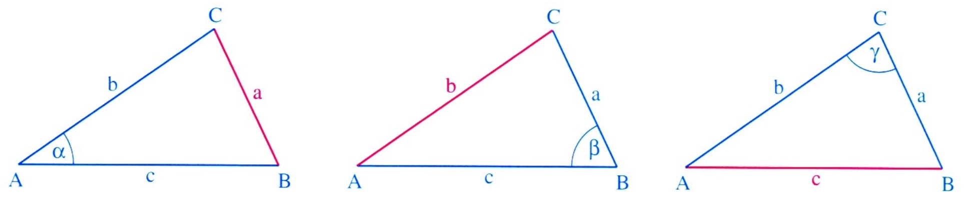
Analog dazu erhalten wir (je nachdem, welche Höhe des Dreiecks zur Berechnung verwendet wurde):

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

Zusammenfassung:

In jedem Dreieck ABC gilt der **Kosinussatz**:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$ $\qquad$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Aufgaben

Achtung:

Runde erhaltene Ergebnisse, wenn nicht anders angegeben auf zwei Nachkommastellen.

Aufgabe 1

Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit β =44° (β liegt beim Eckpunkt B) mit dem rechten Winkel bei A.

Die Seite b sei 4,3 cm lang.

Zeichne dabei die Gegenkathete zu sin β in rot,die Ankathete in blau und die Hypotenuse in grün ein.

Miss jeweils alle Seitenlängen und berechne

a) sin β mit Hilfe deines Taschenrechners.

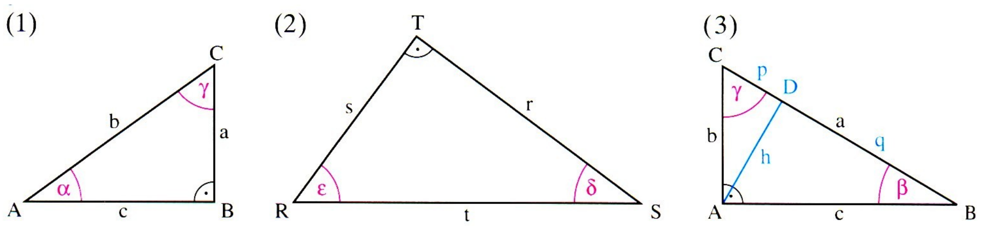
b) sin β mit Hilfe deiner Messergebnisse

Was stellst du fest?

Aufgabe 2

Skizziere jedes Dreieck zunächst zweimal im Heft und markiere zu jedem der beiden spitzen Winkel die Gegenkathete rot, die Ankathete blau und die Hypotenuse grün.

Gib dann den Sinus, den Kosinus und den Tangens dieser beiden Winkel jeweils als Längenverhältnis der entsprechenden Seiten an.



Aufgabe 3

Berechne die Größe des Winkels α.

a) sin α = $\frac{7}{10}$; b) cos α = 0,8; c) tan α = 4 d) sin α = 0,9 e) cos α = 0,3

Aufgabe 4

Fülle die Tabelle aus.

α		13°					79°		
sin α	0,41					0,24			
cos α			0,34		0,09				0,26
tan α				1,04				0,27	

Aufgabe 5

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die folgenden Seiten und Winkel gegeben:

a) $\alpha = 90°$	b) $\alpha = 90°$	c) $\beta = 90°$	d) $\beta = 90°$	e) $\gamma = 90°$
$\beta = 38°$	$\gamma = 48°$	a = 5 cm	$\alpha = 28°$	a = 2,8 cm
c = 9 cm	b = 8 cm	$\gamma = 58°$	c = 13 cm	$\beta = 61°$

Fertige jeweils eine Skizze an und beschrifte diese vollständig.

Berechne dann die fehlenden Seiten und Winkel.

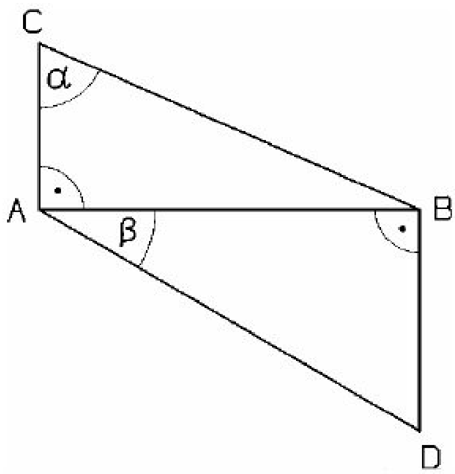
Anschließend sind jeweils der sin, cos und tan der beiden spitzen Winkel zu berechnen

Aufgabe 6

Gegeben sind in nebenstehender Skizze:

$\alpha = 75{,}12°$; $\beta = 41{,}36°$; $\overline{AC} = 2{,}5\,\text{cm}$

Berechne die Länge von $\overline{AD}$.



Aufgabe 7

Zeichne die Sinus-Funktion im Bereich von 0°bis 360°.

Aufgabe 8

Gib <u>alle</u> Winkel α an, für die folgende Werte gelten: cos α = 0,50 $\quad 0° \leq \alpha \leq 360°$

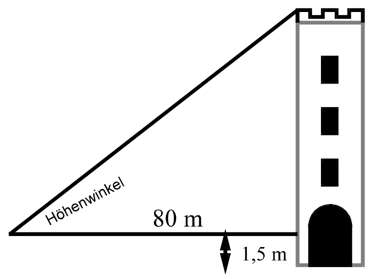
(Mit Begründung oder Skizze!)

Aufgabe 9

Von einem a = 80 m entfernten Kirchturm wird mit Hilfe eines Theodolith der Höhenwinkel α = 51° gemessen.

Der Beobachtungspunkt liegt 1,5 m höher als der Fußpunkt des Turms.

Wie hoch ist der Turm?



Aufgabe 10

Eine Zahnradbahn führt unter einem Steigungswinkel von 40° zu der 340 m höher liegenden Bergstation.

Achtung: Runde bei dieser Aufgabe erhaltene Endergebnisse auf volle m.

a) Wie lang ist die Fahrstrecke?

b) Welche Höhe wird nach einer Fahrstrecke von 100 m erreicht?

Aufgabe 11

Achtung:

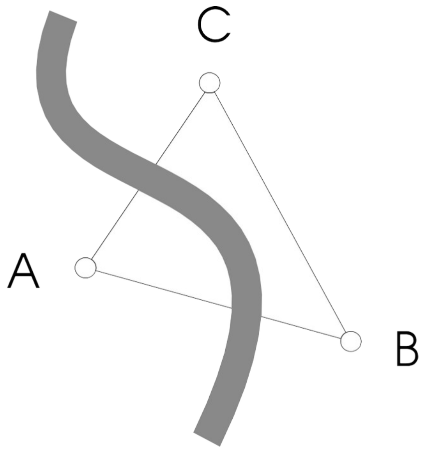
Die Bearbeitung dieser Aufgabe setzt die Kenntnis des **Sinus-Satzes** voraus.

A, B und C sind die Kirchtürme dreier Dörfer.A ist von B und von C durch einen Fluss getrennt.

Wie kann man die Entfernung bestimmen, ohne diese (wegen des Flusses) direkt zu messen?

Die Entfernung $\overline{BC} = a = 5{,}4\,\text{km}$ und die Winkelgrößen sind $\beta = 44°$ (liegt bei B) und $\gamma = 69°$ (liegt bei C)

Berechne $b = \overline{AC}$.



Aufgabe 12

Berechne die fehlenden Seiten und Winkel des rechtwinkligen Dreiecks ABC.

α = 90°; b =7,2 cm; c = 6,1 cm

Fertige zunächst eine vollständig beschriftete Skizze an.

Aufgabe 13

Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\overline{BC}$ als Basis.

c = 11 cm; α = 90°

Berechne die Länge der Seite a und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Fertige zunächst eine vollständig beschriftete Skizze an.

Aufgabe 14

Bestimme die Funktionswerte.

a) cos 300° ≈ ....

b) $\cos 2{,}5$ ≈ ....

c) $\sin(-110°)$ ≈ ....

d) $\sin(\frac{1}{2} \cdot \text{pi})$ = …..................................

Fertige zunächst jeweils eine vollständig beschriftete Skizze an.

Aufgabe 15

Berechne alle Winkel α im Intervall $0° \leq \alpha \leq 360°$, für die gilt:

a) $\tan\alpha \approx 4{,}6$ .... b) $\cos\alpha = 0$ ....

c) $3 \cdot \sin\alpha = 1{,}5$ .... d) $\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \approx -0{,}41$ ....

Fertige zunächst jeweils eine vollständig beschriftete Skizze an.

Aufgabe 16

Gegeben ist die Funktion mit $y = 0{,}25 \cdot \cos x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Fülle die folgende Wertetabelle vollständig aus. und gib die Nullstellen im folgenden Intervall $-\pi \leqslant x \leqslant 3 \cdot \pi$ an.

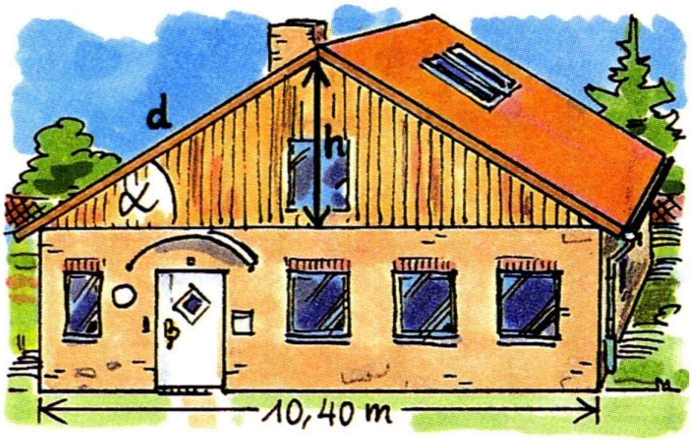
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2} \cdot \pi$	$2 \cdot \pi$	$\frac{5}{2} \cdot \pi$	$3 \cdot \pi$
y									

b) Skizziere den Graphen im Intervall $-\pi \leqslant x \leqslant 3 \cdot \pi$.

c) Der Punkt $P(2 \cdot \pi - 0{,}5 \mid y)$ gehört zum Graphen der Funktion.
Berechne die fehlende Koordinate.

Aufgabe 17

Ein Haus mit Satteldach ist 10,40 m breit. Die Dachsparren sind 6,30 m lang (d); sie stehen 50 cm über.
Vernachlässige die Dicke der Dachsparren.
Stelle selbst zu diesen Angaben geeignete Aufgaben und löse sie.

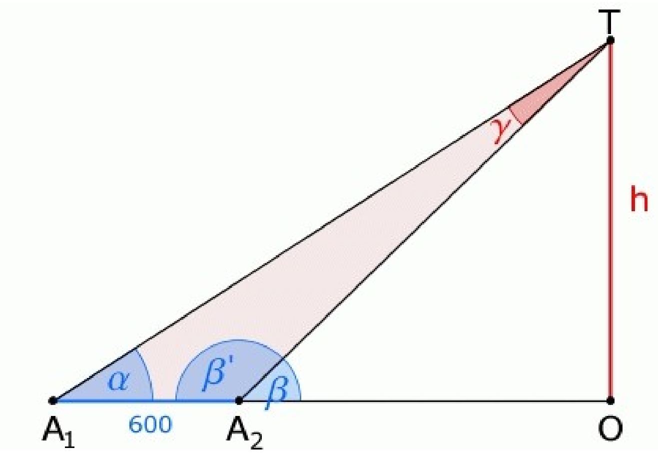


Aufgabe 18*

Inhalt: Sinussatz

Von einem Schiff A1 aus sieht man die Spitze eines Leuchtturms unter einem Erhebungswinkel von α = 5° und von einem Schiff A2 aus unter einem Erhebungswinkel von β = 15°. Beide Schiffe befinden sich genau westlich vom Leuchtturm und sind 600m voneinander entfernt. Wie hoch ist der Leuchtturm?

Runde erhaltene Längenmaße auf zwei Nachkommastellen.



Aufgabe 19*

Inhalt: Sinussatz

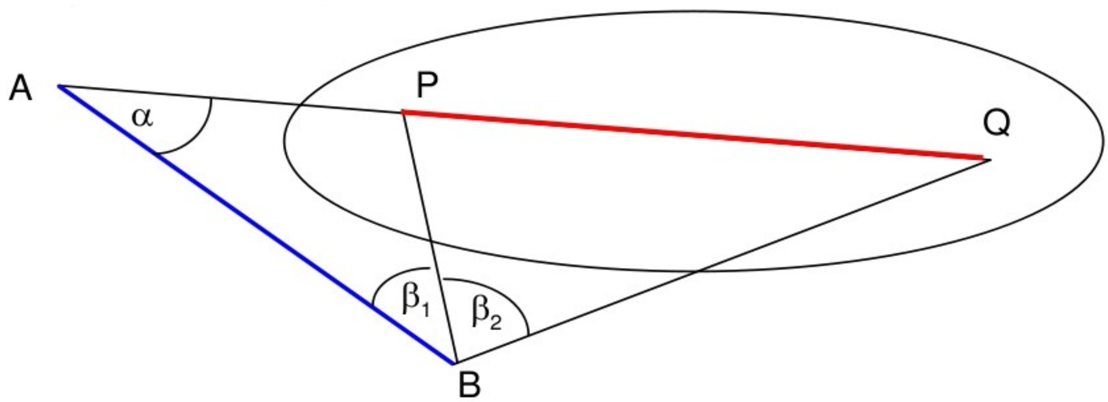
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seiten b = 6,0 cm und c = 8,0 cm sowie der Winkel γ = 75°. Berechne die fehlenden Stücke des Dreiecks.

Runde erhaltene Winkelmaße und Längen auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe 20*

Inhalt: Sinussatz

Die Skizze zeigt ein Moor, In den Punkten P und Q stehen zwei Bäume, deren Entfernung voneinander bestimmt werden soll.



Dazu wird eine Standlinie $\overline{AB}$ abgesteckt, deren Länge mit 945 m gemessen wird.

Von A und B aus misst man diese Winkel:

$\alpha = 48{,}4°$, $\beta_1 = 34{,}1°$ und $\beta_2 = 53{,}9°$.

Berechne die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

Runde erhaltene Längenmaße auf ganze Meter.

Aufgabe 21*

Ein Landschaftsschutzgebiet hat die Form eines Vierecks ABCD.

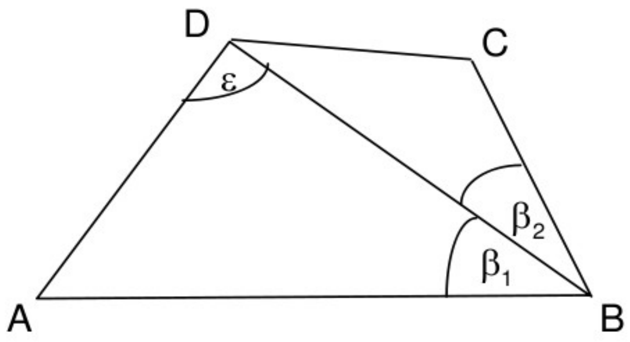
Die Strecke $\overline{AB}$ hat die Länge 947 m, $\overline{BC}$ ist 538 m lang und es gilt :

$\beta_2 = 28°$ und $\varepsilon = 90°$.

Von B nach D führt ein gradliniger Radweg der Länge 761 m, der rechtwinklig auf die Seite $\overline{AD}$ stößt.

Berechne die Länge der Seite $\overline{AD}$ und die Größe des Winkels β_1.

Runde erhaltene Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.



Aufgabe 22*

Die vier Dörfer A, B, C und D liegen in der Hohenloher Ebene.

Zwischen A und C befindet sich ein See. Bei einem Schullandheimaufenthalt soll festgestellt werden, ob der Weg von A nach C über B oder über D der kürzere ist.

Deshalb messen die Schüler folgende Winkel :

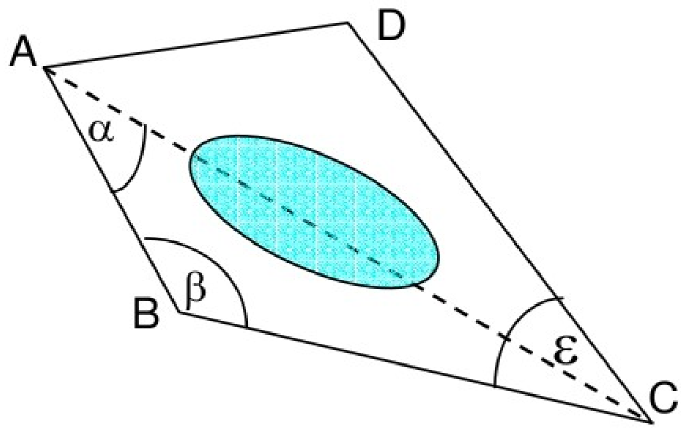
$\alpha = 36{,}6°$; $\beta = 120°$; $\varepsilon = 43{,}2°$

und diese Strecken:

$\overline{AB} = 4{,}0$ km und $\overline{AD} = 4{,}0$ km .

Berechne die direkte Entfernung von A nach C.

Runde das Endergebnis auf eine Nachkommastelle.



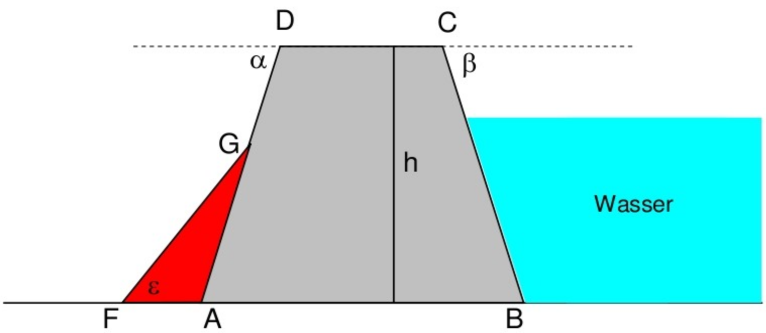
Aufgabe 23**

Der Querschnitt des Damms eines Stausees hat die Form eines Trapezes ABCD.

Dabei ist $\alpha = \beta = 62°$.

Der Damm soll durch eine Aufschüttung (roter Bereich) verstärkt werden.

Die Strecke $\overline{AG}$ hat eine Länge von 6,5 m und $\overline{FG}$ ist 8,2 m lang.



a) Wie groß ist der Böschungswinkel ε der Aufschüttung ?

b) Wie viele m^3 Material verbraucht man für die Verstärkung, wenn der Damm 120 m lang ist ?

Runde erhaltene Winkelmaße auf eine Nachkommastelle. Längenmaße sollen auf cm genau gerundet werden.

Lösungen

zu Nr. 1

Kontrolliere diese Aufgabe mit deinem Lehrer.

zu Nr. 2

Kontrolliere diese Aufgabe mit deinem Lehrer.

zu Nr. 3

a) α □ 44,43° b) α □ 36,87° c) α □ 75,96° d) α □ 64,16° e) α □ 72,54°

zu Nr. 4

α	24,2°	13°	70,12°	46,12	84,84°	13,89	79°	15,11°	74,93°
sin α	0,41	0,22	0,94	0,72	1	0,24	0,98	0,26	0,97
cos α	0,91	0,97	0,34	0,69	0,09	0,97	0,19	0,97	0,26
tan α	0,45	0,23	2,77	1,04	11,07	0,25	5,14	0,27	3,71

zu Nr. 5

a)	b)	c)	d)	e)
a ≈ 11,42 cm	a ≈ 11,96 cm	b ≈ 9,43 cm	a ≈ 6,91 cm	b ≈ 5,05 cm
b ≈ 7,03 cm	c ≈ 8,88 cm	c ≈ 8,00 cm	b ≈ 14,72 cm	c ≈ 3,20 cm
γ = 52°	β = 42°	α = 32°	α = 62°	α = 29°
sin 38° ≈ 0,62	sin 48° ≈ 0,74	sin 58° ≈ 0,85	sin 28° ≈ 0,47	sin 61° ≈ 0,87
cos 38° ≈ 0,79	cos 48° ≈ 0,67	cos 58° ≈ 0,53	cos 28° ≈ 0,88	cos 61° ≈ 0,48
tan 38° ≈ 0,78	tan 48°≈ 1,11	tan 58° ≈ 1,60	tan 28° ≈ 0,53	tan 61° ≈ 1,80
sin 52° ≈ 0,79	sin 42° ≈ 0,67	sin 32° ≈ 0,53	sin 62° ≈ 0,88	sin 29° ≈ 0,48
cos 52° ≈ 0,62	cos 42° ≈ 0,74	cos 32° ≈ 0,85	cos 62° ≈ 0,47	cos 29° ≈ 0,87
tan 52° ≈ 1,28	tan 42° ≈ 0,90	tan 32° ≈ 0,62	tan 62° ≈ 1,88	tan 29° ≈ 0,55

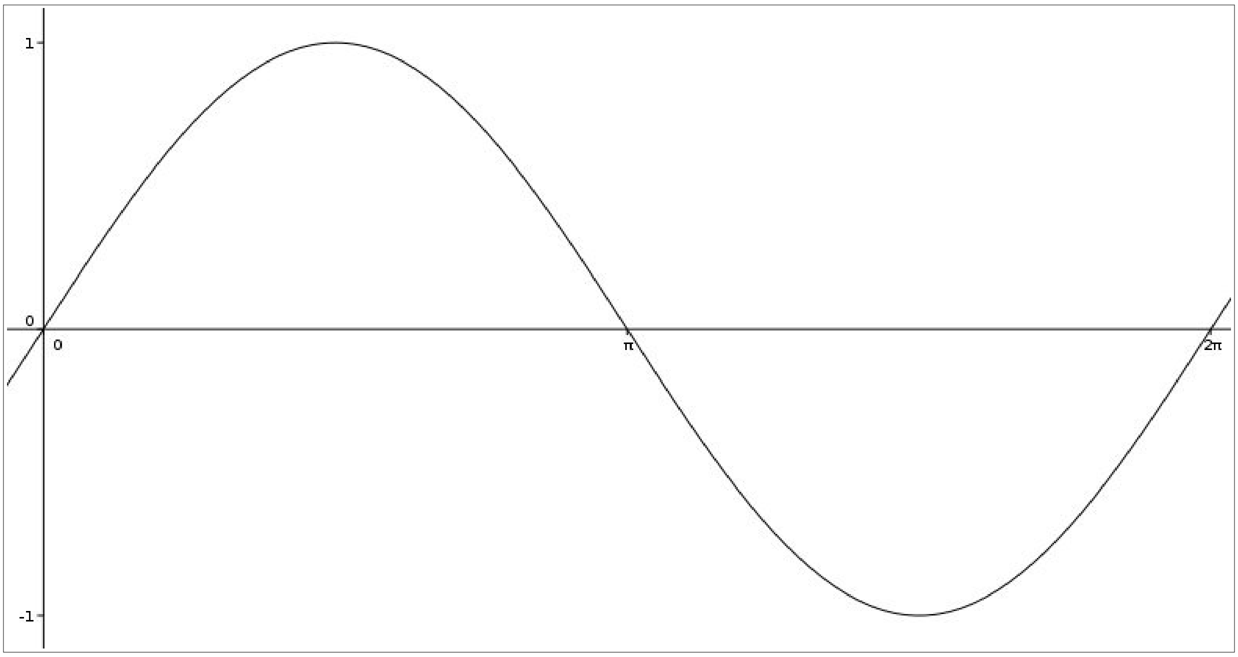
zu Nr. 6

$\overline{AD} \approx 12{,}53\,\text{cm}$

Aufgabe 7

y = sin x

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2} \cdot \pi$	$2 \cdot \pi$
y	0	1	0	-1	0



Aufgabe 8

α = 60°   v   α = 300°

Aufgabe 9

Der Turm ist rund 99,9 m hoch.

Aufgabe 10

Die Fahrstrecke beträgt rund 529 m.

Es wurde eine Höhe von rd. 64 m erreicht.

Aufgabe 11

Sollte <u>nicht</u> bearbeitet werden, da der Sinussatz nicht Gegenstand unseres Unterrichtes war.

Aufgabe 12

$\beta \approx 49{,}73°$
$\gamma \approx 40{,}27°$
$a = 9{,}44\,cm$

Aufgabe 13

$a \approx 15{,}56\,cm$
$h \approx 7{,}78\,cm$
$A \approx 60{,}53\,cm^2$

Aufgabe 14

a) 0,5 b) -0,80 c) -0,94 d) 1

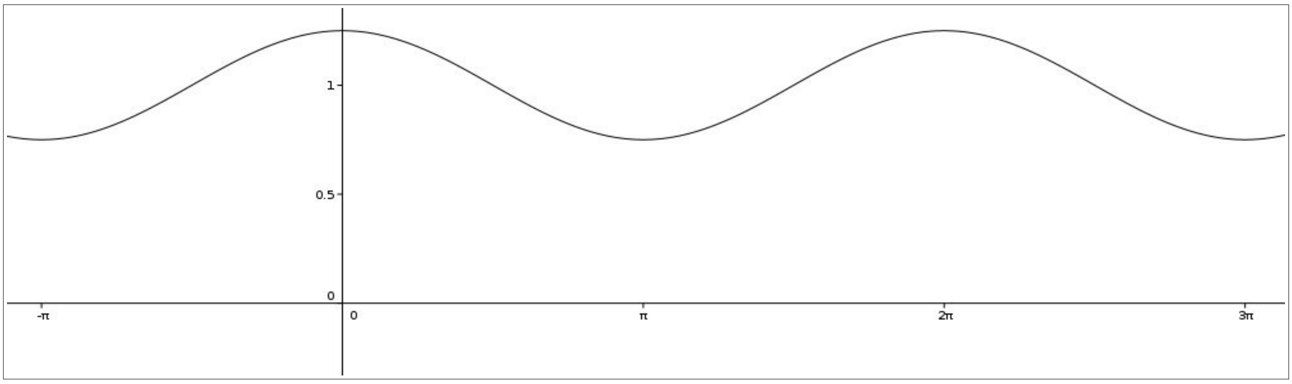
Aufgabe 15

a) α = 77,74° v α = 77,74°
b) α = 90° v α = 270°
c) α = 30° v α = 150°
d) α = 304,92° v α = 235,08°

Aufgabe 16

$y = 0{,}25 \cdot \cos x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\cdot\pi$	$2\cdot\pi$	$\frac{5}{2}\cdot\pi$	$3\cdot\pi$
y	0,75	1	1,25	1	0,75	1	1,25	1	0,75



Aufgabe 17

Vorgehensweise:

- Zunächst ist die Länge des Dachüberstandes von d abzuziehen, um die Länge der Strecke zu erhalten, die für das zu betrachtende Dreieck benötigt wird.
- Damit ergibt sich eine Dachlänge (ohne Überstand von 5,80 m).
- Anschließend berechnet man den Neigungswinkel α und erhält $\alpha \approx 26{,}91°$.
- Anschließend lässt sich mit Hilfe von Sinus die Höhe des Daches berechnen.

Die Höhe des Daches beträgt gerundet 2,63 m.

Aufgabe 18*

Die beiden Schiffe und die Turmspitze bilden das Dreieck A_1A_2T

Aus α und β bestimmt man die restlichen Winkel des Dreiecks:

β' = 180° -β (A1 und A2 liegen auf einer waagerechten Linie)

γ = 180° -(α + β') = 180° - (α + 180 ° - β) = β - α (Innenwinkelsumme ist gleich 180°)

⇒ β' = 165°

⇒ γ = 10°

Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\sin\gamma}=\frac{\overline{A_2T}}{\sin\alpha}$$

Somit kann die Entfernung des Schiffes A2 zur Turmspitze T berechnet werden:

$$\Rightarrow \overline{A_2T}=\frac{\overline{A_1A_2}}{\sin\gamma}\cdot\sin\alpha=\frac{600\,\text{m}}{\sin(10°)}\cdot\sin(5°)=301{,}15\,\text{m}$$

Das Schiff A2, die Turmspitze T und der Turmboden O bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Also gilt für die Höhe h des Turmes:

$$h=\overline{A_2T}\cdot\sin\beta=301{,}15\,\text{m}\cdot\sin(15°)=77{,}94\,\text{m}$$

Aufgabe 19*

$\beta = 46{,}4°$; $\alpha = 58{,}6°$; $a = 7{,}1$ cm

Aufgabe 20*

Zunächst berechnet man die Länge der Strecke $\overline{AP}$. $\overline{AP}$ = 525 m.

Nun lässt sich die Länge der Strecke $\overline{AQ}$ berechnen. $\overline{AQ}$ = 1369 m.

$\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = 1369\text{ m} - 525\text{ m} = 844\text{ m}.$

Die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ = 844 m lang.

Aufgabe 21*

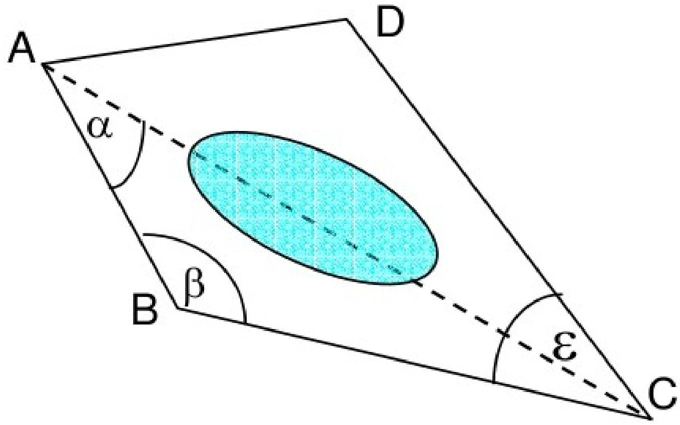
Zunächst muss das Winkelmaß von α und β_1 werden. $\alpha = 53{,}5°$ und $\beta_1 = 36{,}5°$.

Nun lässt sich mit Hilfe des Sinussatzes die Länge der Strecke $\overline{AD}$ ermitteln.

Die Länge von $\overline{AD}$ = 563,3 m.

Aufgabe 22*

Die Strecke $\overline{AC}$ ist 8,7 m lang.



Aufgabe 23**

a) Der Böschungswinkel ε ist 44,4° groß.

b) Um das Volumen der Aufschüttung zu berechnen wird zunächst die Höhe der Aufschüttung ermittelt. Diese beträgt h = 5,74 m.

   Nun muss der Flächeninhalt des Querschnittes der Aufschüttung berechnet (Flächeninhalt Dreieck) werden. Dafür muss ich die Länge der Strecke $\overline{FA}$ berechnen. Deren Länge beträgt 2,81 m.

   Anschließend lässt sich die Querschnittsfläche und damit das Volumen der Aufschüttung berechnen:

   Querschnittsfläche: 8,0647 m^2.

   Volumen: 967,764 m^3.

   Für die Aufschüttung wird insgesamt 967,764 m^3 Material benötigt.

Lernkompetenzraster

zur

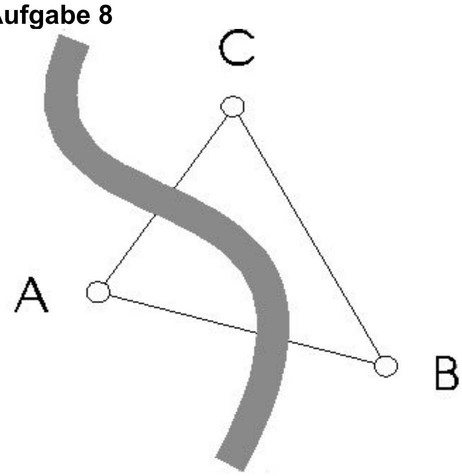
Trigonometrie

Beachte:

- Das Lernkompetenzraster wird dir helfen zu erkennen wie dein Lernstand ist.
- Du hast zur Bearbeitung der Aufgaben 45 Minuten Zeit. Die Kontrolle der Aufgaben erfolgt im Anschluss an die Bearbeitung durch dich selbst.
- Fülle daran anschließend die letzten drei Spalten des Rasters aus.
- Überlege dir nun, ob du weitere Übungen absolvieren willst. Gerne berate ich dich hierbei.

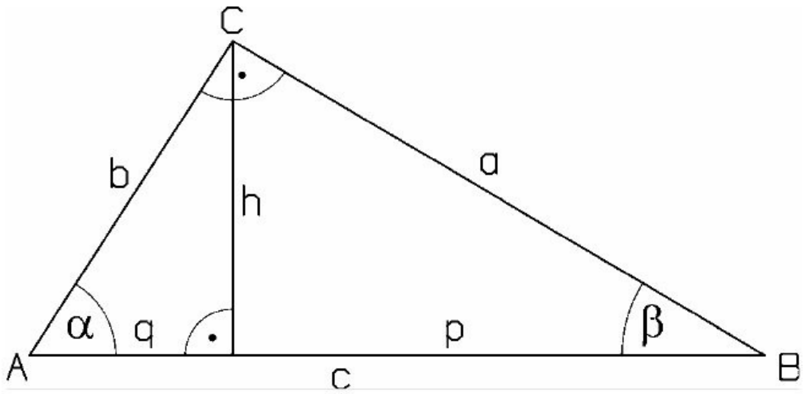
Lernkompetenzraster

Trigonometrie	**Beispielaufgaben**	**Das kann ich gut** √√	**Das kann ich** √	**Das muss ich noch üben** !
Ich kenne die Begriffe *Kathete* und *Hypotenuse*.	**Aufgabe 1** Zeichne ein Dreieck, beschrifte die Kathete(n) und die Hypotenuse(n) und erkläre schriftlich, was du unter einer Kathete bzw. Hypotenuse verstehst.			
Ich kann erklären, was *Sinus* und *Kosinus* bedeutet.	**Aufgabe 2** Zeichne einen Einheitskreis und beschreibe, was Sinus und Cosinus dort bedeuten.			
Ich kenne die Formeln für *Sinus*, *Kosinus* und *Tangens*.	**Aufgabe 3** Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\alpha=90°$. Die restlichen Winkel seien β und γ. Beschrifte das Dreieck vollständig und notiere die Formeln für $\sin\beta$, $\cos\beta$ und $\tan\beta$, sowie für $\sin\gamma$, $\cos\gamma$ und $\tan\gamma$.			
Ich kann bei gegebenem Winkel den zugehörigen *sin*-, *cos*- bzw. *tan*-Wert mit dem TR ermitteln.	**Aufgabe 4** siehe weiter hinten.			
• Aus dem gegebenen *sin*-, *cos*- oder *tan*-Wert kann ich mit dem TR den zugehörigen Winkel ermitteln. • Ich kann fehlende Seiten (Winkel) im rechtwinkligen Dreieck mit Hilfe von sin, cos und tan berechnen.	**Aufgabe 5** siehe weiter hinten.			
Ich kann Figuren zerlegen oder ergänzen, so dass rechtwinklige Dreiecke entstehen und damit fehlende Größen mit Hilfe von *sin*, *cos* und *tan* berechnen.	**Aufgabe 6** siehe weiter hinten.			
Ich kann zu vorgegebenen trigonometrischen Funktionsgleichungen • eine Wertetabelle erstellen • den Graph zeichnen • Min- und Max-Werte sowie die Nullstellen bestimmen.	**Aufgabe 7**** Gegeben ist die Funktion $y=\frac{1}{2}\cdot\cos(x)-2$. a) Lege eine Wertetabelle an. b) Zeichne den Graph. c) Bestimme die Nullstellen im Intervall $0\le x\le 2\cdot\pi$.			

Trigonometrie	**Beispielaufgaben**	**Das kann ich gut** √√	**Das kann ich** √	**Das muss ich noch üben** !
Ich kenne den *Sinus*- und *Kosinussatz* und kann diese bei entsprechenden Aufgaben anwenden.	**Aufgabe 8**  Zwischen A und C verläuft ein Fluss. Deshalb kann die Strecke nicht so ohne weiteres gemessen werden. Deshalb soll die Länge von $\overline{AC}$ berechnet werden. Bekannt sind $\overline{BC}=5{,}4\,\text{km}$ und die Winkelgrößen $\beta=44°$ und $\gamma=69°$. Runde dein Endergebnis auf eine Nachkommastelle.			

LK-Aufgabe 4

Im folgenden stehen die Variablen für Seitenlängen und Winkelmaße rechtwinkliger Dreiecke ABC, die wie das Dreieck ABC in nachstehender Skizze bezeichnet sind.
Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelmaße.
Runde erhaltene Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.



	a	b	c	α	β	h	q	p
a)	8 cm	6cm						
b)	12,4 cm			70°				
c)		7,5 cm		60°				
d)					35°	6,2 cm		
e)						4 cm	3 cm	
f)							2,8 cm	6,2 cm
g)			10 cm			4 cm		

LK-Aufgabe 5

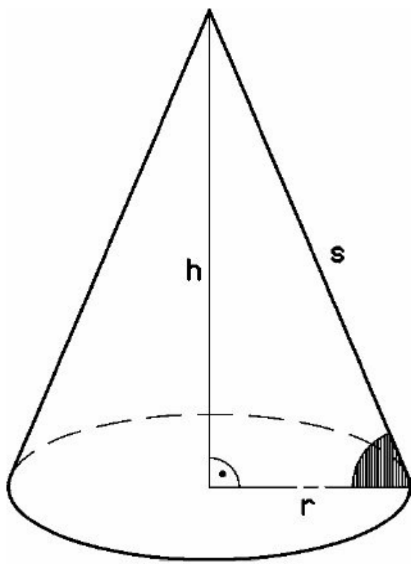
Nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius r, der Höhe h und der Mantellinie s.

a) Berechne das Maß α des Neigungswinkels einer Mantellinie gegen die Grundfläche für r = 5 cm und h = 12 cm .
(Runde dein Ergebnis auf eine Nachkommastelle).

b) Wie groß sind r, α und s für und Kegelvolumen V = 240 cm³ und h = 5,4 cm?

c) Berechne h, s, das Kegelvolumen V und den Kegelmantel M für r = 6 cm und α = 60° (freiwillig, wenn Zeit).

Runde alle erhaltenen Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. Wähle für pi den Wert, den dir dein TR vorgibt.



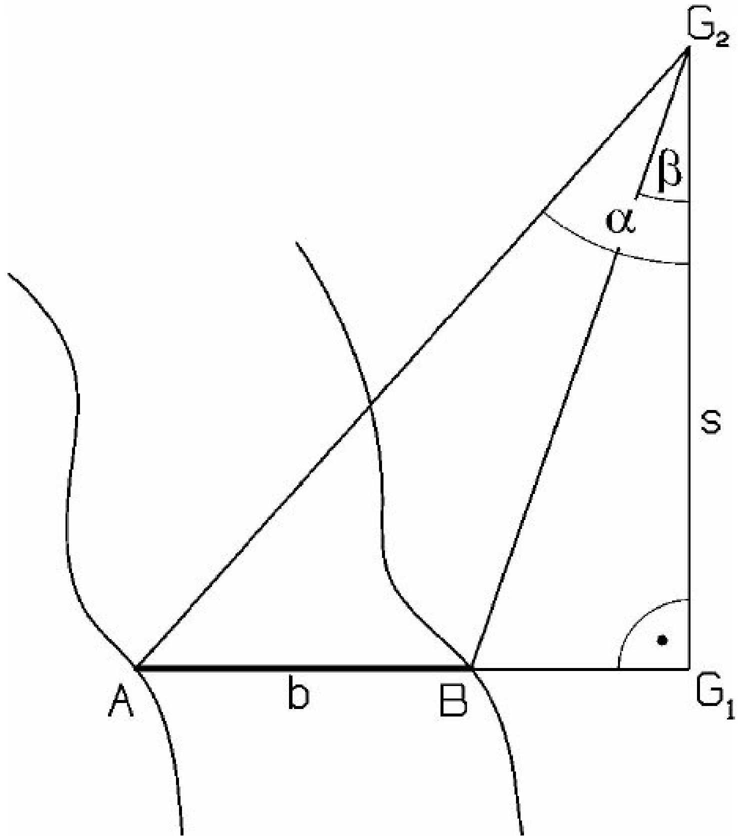
LK-Aufgabe 6

Bestimme die Breite b eines Flusses.

Bekannt seien

s = 150 m; α = 78°; β = 71°.

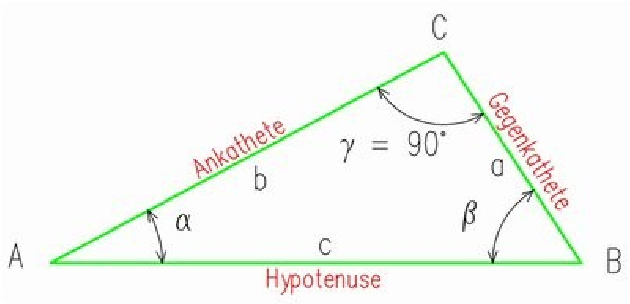
Runde erhaltene Ergebnis auf cm genau.



Lösungen – Kompetenzraster

- Trigonometrie -

zu LK-Nr. 1

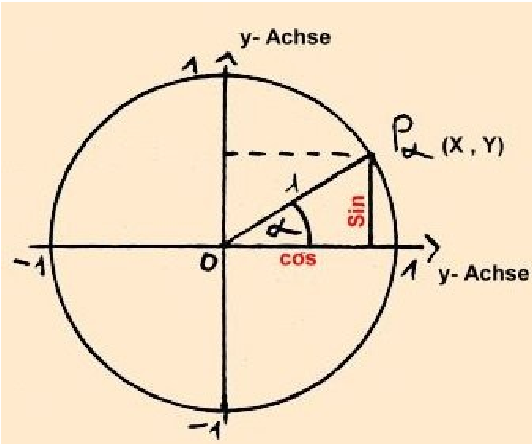


zu LK-Nr. 2

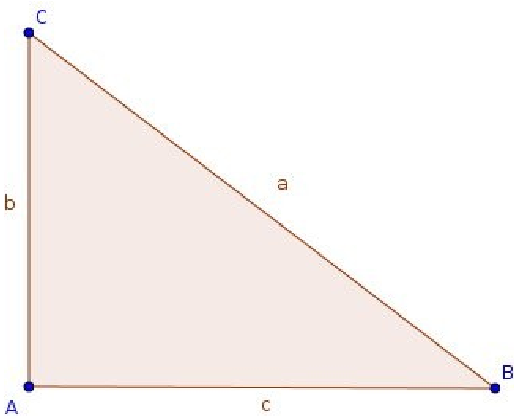
Zur Beantwortung dieser Frage, sollte man sich noch einmal in Erinnerung rufen, was der Sinus eines Winkels α ist:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Da die Hypothenuse im Einheitskreis stets 1 ist, entspricht der sin α immer der Länge der Gegenkathete von α.



zu LK-Nr. 3



$\sin \beta = \frac{b}{a}$; $\cos \beta = \frac{c}{a}$; $\tan \beta = \frac{b}{c}$

$\sin \gamma = \frac{c}{a}$; $\cos \gamma = \frac{b}{a}$; $\tan \gamma = \frac{c}{b}$

zu LK-Nr. 4

	a	b	c	α	β	h	q	p
a)	8 cm	6cm	10 cm	53,13°	36,87°	4,80 cm	3,60 cm	6,40 cm
b)	12,4 cm	4,51 cm	13,20 cm	70,00°	20,00°	4,24 cm	1,54 cm	11,66 cm
c)	13,00 cm	7,50 cm	15,00 cm	60,00°	30,00°	6,50 cm	3,75 cm	11,25 cm
d)	8,85 cm	7,57 cm	10,80 cm	55,00°	35,00°	6,20 cm	4,34 cm	6,46 cm
e)	5,34 cm	5,00 cm	6,67 cm	53,13°	36,87°	4,00 cm	3,00 cm	3,67 cm
f)	7,47 cm	5,02 cm	9,00 cm	56,12°	33,88°	4,17 cm	2,80 cm	6,20 cm
g)	6,33 cm	6,32 cm	10,00 cm	50,73°	39,27°	4,89 cm	4,00 cm	6,00 cm

---

zu LK-Nr. 5

a) Der Neigungswinkel ist $\alpha \approx 67{,}4°$ groß.

b) $\alpha \approx 39{,}7°$, $r \approx 6{,}51$ cm, $s \approx 8{,}46$ cm

c) $s \approx 12$ cm; $h \approx 10{,}39$ cm; $V \approx 1175{,}08\ \text{cm}^3$, $M \approx 226{,}19\ \text{cm}^2$.

---

zu LK-Nr. 6

Der Fluss hat eine Breite von 270,06 m (gerundet).

---

zu LK-Nr. 7**

Besprechung mit deinem Lehrer.

---

zu LK-Nr. 8*

Die Strecke von A nach C ist rund 4,1 km lang.
