Fundamentos de los modelos de flujo de agua subterránea

Planteamiento del problema

Pretendemos solamente exponer de modo muy elemental el fundamento de los modelos de flujo subterráneo, para comprender cómo un ordenador puede prededir el comportamiento de del agua en el subsuelo sin más herramientas que la Ley de Darcy.

Cuando nos enfrentamos al problema de **predecir el comportamiento de los niveles de un acuífero como respuesta a bombeos u otros estímulos**, las soluciones analíticas (fórmulas: Theis, Jacob, etc.) tienen un límite cuando el medio hidrogeológico u otras circunstancias son muy complejos: varias capas con cambios laterales, caudales de bombeo variables, etc. El problema se complica si queremos calcular cual será el comportamiento del acuífero a lo largo de varios años, interviniendo en este caso las precipitaciones, caudales drenados por los ríos, etc.

En los años 60 y 70 se realizaron **simulaciones electrónicas**: se realizaba una maqueta del acuífero en la que una maraña de resistencias y condensadores simulaban respectivamente las distintas permeabilidades y los coeficientes de almacenamiento. Evidentemente, el flujo eléctrico hacía el papel del agua y el potencial eléctrico equivalía al potencial hidráulico. La solución era muy laboriosa y bastante limitada.

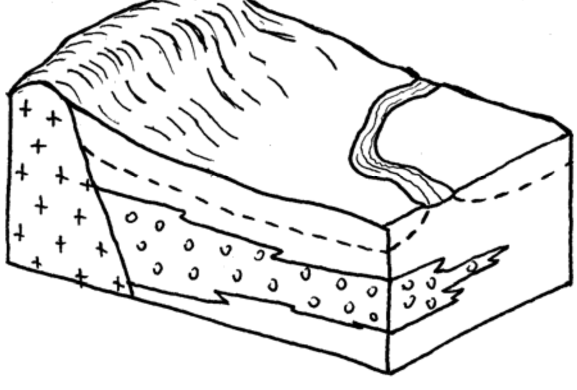
Un modelo *numérico* (o *modelo matemático*, o *digital*) consiste en la creación en un ordenador de un mundo virtual que sea equivalente al medio físico, y que, mediante las operaciones adecuadas, calculará la evolución de los niveles y el flujo hídrico producido, todo ello en los incrementos de tiempo que se le soliciten. Más concretamente el trabajo del modelo consistirá en lo siguiente:

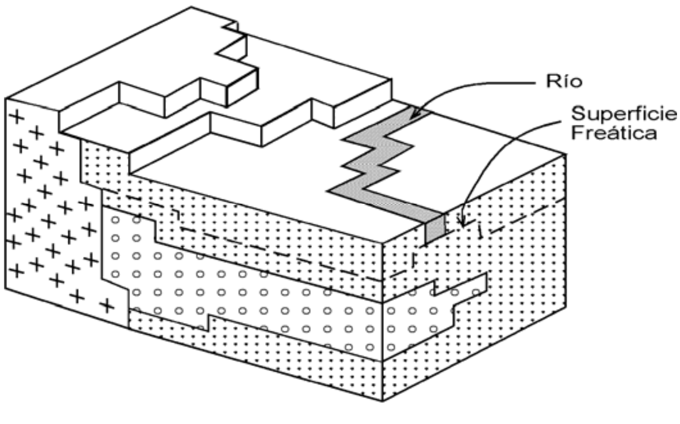
Datos que le proporcionamos:

- Geometría de las formaciones: forma de las capas, espesores
- Forma de la superficie piezométrica en el instante inicial
- Transmisividades, coeficientes de almacenamiento y porosidades
- Opcionalmente: caudales de bombeo o inyección, infiltración a partir de las precipitaciones o desde ríos, zanjas de drenaje, etc.

Problema que debe resolver:

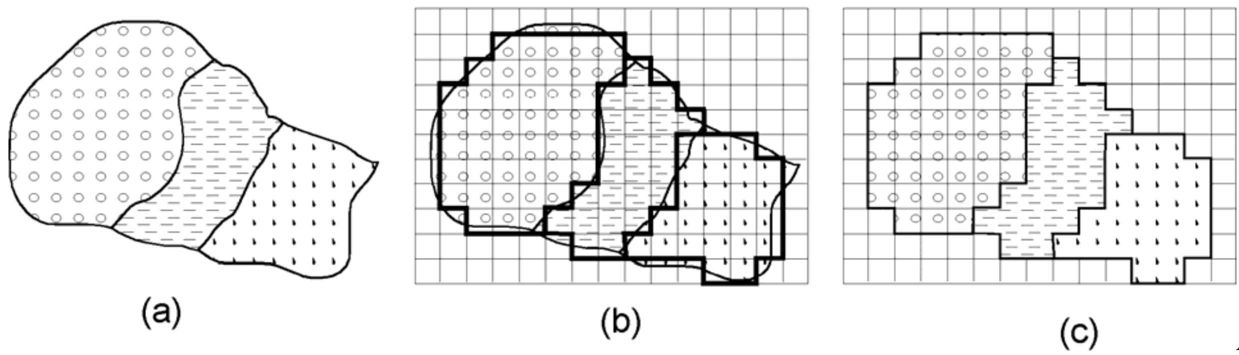
Cual será la evolución de la superficie piezométrica a partir de un instante inicial, sin estímulos externos o bien teniendo en cuenta: determinados bombeos, la infiltración de las precipitaciones, la salida de flujo subterráneo hacia los cauces, etc.



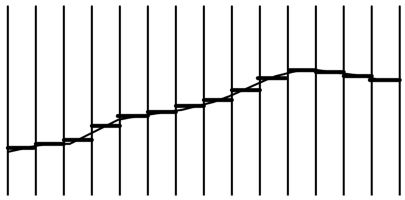


Discretización del medio

El mundo real es continuo, y discretizarlo es dividirlo en elementos o celdas. Para ello, el ordenador superpone una rejilla sobre la cartografía real y asimila las líneas reales, que son irregulares, a líneas poligonales que se ajusten a la rejilla superpuesta.



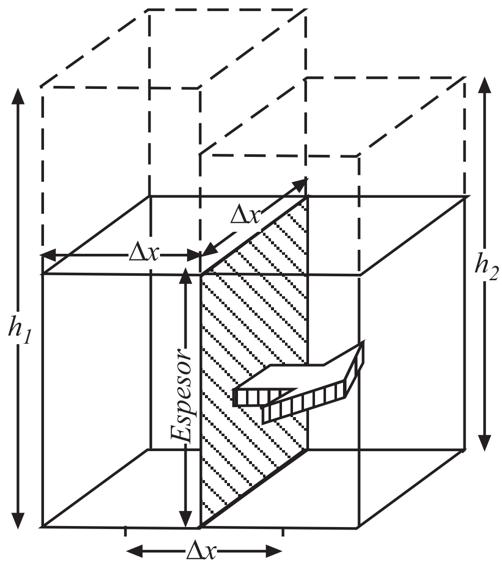
Además de discretizar los contactos geológicos, también quedan discretizadas todas las líneas y superficies: superficie piezométrica o freática, la topografía, los contactos entre capas... (ver figura de la página anterior).



Perfil transversal de la topografía (podría ser la superficie piezométrica o el contacto entre dos capas).
La superficie original, continua, queda en forma de escalones.

Consideraremos que **dentro de cada una de las celdas el medio es absolutamente homogéneo** (permeabilidad, nivel del agua,...) y que, si en una celdilla el nivel piezométrico es más elevado que en alguna de las adyacentes, el flujo se producirá perpendicularmente a las superficies laterales de las celdillas.

El tamaño de las celdillas determinará que esas líneas y superficies escalonadas se ajusten lo más posible a la realidad. Esto afectará a la precisión del modelo en general : por ejemplo, si las celdas son de 100x100 metros no podremos esperar que el modelo nos proporcione el descenso producido a 120, 140 y 165 metros del pozo que bombea, puesto que la superficie piezométrica estaría formada por cuadros de 100x100 metros. Pero, por otra parte, tampoco se puede trabajar con un número excesivo de celdas, pues, como veremos más adelante, el ordenador deberá resolver un sistema de ecuaciones con tantas ecuaciones como celdas tenga el modelo. Para solventar en parte este compromiso, en lugar de utilizar una rejilla cuadrada homogénea, se disponen celdas mas pequeñas en las proximidades de captaciones u otros puntos singulares.



Realización de los cálculos

Cada modelo realizará los cálculos de un modo distinto, pero para simplificar, vamos a suponer un modelo de una sola capa horizontal, que hemos discretizado con una retícula de celdas cuadradas de tamaño Δx.

Entre dos celdas adyacentes, aplicando la **Ley de Darcy** , circulará el siguiente caudal:

$$Caudal = Sección \times K \times \frac{\Delta h}{\Delta l} \qquad (1)$$

donde K= conductividad hidráulica y Δh es la diferencia de altura de agua entre dos puntos separados por una distancia Δl

Como hemos supuesto que las celdas son de base cuadrada, $\Delta l = \Delta x$. La sección de paso del agua de una celda a la otra sería Δx por el espesor del acuífero (ver la Figura 1):

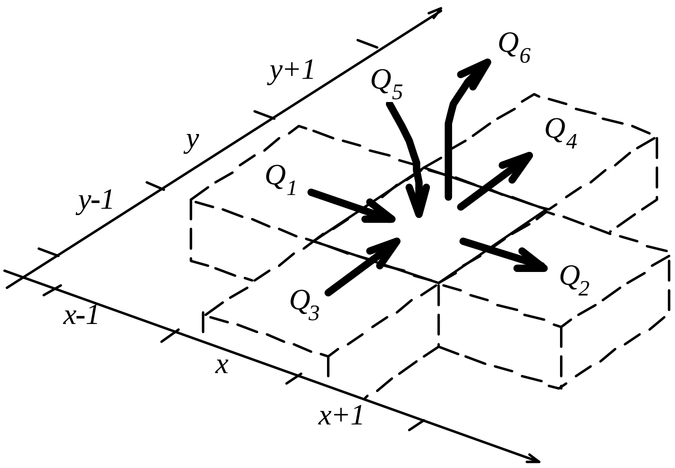
$$Q = \Delta x \times espesor \times K \times \frac{h_1 - h_2}{\Delta x} \qquad (2)$$

Y, como el espesor por la conductividad hidráulica es igual a la Transmisividad, y (al haber determinado celdas cuadradas) la distancia entre las dos celdas (Δx) es la misma que la anchura de la celda, resulta:

$$Q = T \times (h_1 - h_2) \qquad (3)$$

Ahora consideraremos el **balance de entradas y salidas de agua en una celda** de coordenadas (x,y) en un incremento de tiempo determinado Δt :

$$\Sigma\ entradas = \Sigma\ salidas \pm \Delta\ almacenamiento \qquad (4)$$



En la figura adjunta hemos llamado Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 a los caudales que circulan a través de las cuatro caras de la celdilla considerada. La dirección indicada en la figura es arbitraria, y hace que consideremos a Q_1 y Q_3 como entradas y Q_2 y Q_4 como salidas, pero si en la realidad alguna de ellas fuera en sentido contrario, bastaría con asignarle un valor negativo. En la misma Figura 2 representamos los caudales Q_5 y Q_6 respectivamente para otras entradas (por ejemplo, recarga procedente de infiltración o de otro acuífero) y otras salidas (por ejemplo, hacia otro acuífero o extracciones por bombeo). Por tanto, la ecuación (4) resulta:

$$Q_1 + Q_3 + Q_5 = Q_2 + Q_4 + Q_6 \pm \Delta\ almacenamiento \qquad (5)$$

El Δ*almacenamiento* aparece como una variación de volumen, pero en la ecuación (5) no podemos sumar volúmenes con caudales, así que debemos expresarlo como un caudal. Dijimos que calculábamos el balance de esa celda para un Δt, por tanto si ha salido (o entrado) un volumen Δ*volumen* en un tiempo Δt, el Δ*almacenamiento* expresado como caudal, será igua a:

$$\Delta almacenamiento = \frac{\Delta volumen}{\Delta t} \qquad (6)$$

El Δ*volumen* podremos calcularlo multiplicando la variación del nivel piezométrico en esa celda (=nivel tras el Δt – nivel antes del Δt) por la base de la celda (Δx^2) y por el coeficiente de almacenamiento (S), con lo que la fórmula (6) resulta:

$$\Delta almacenamiento = \frac{\left(h^{TRAS\ EL\ \Delta t} - h^{ANTERIOR}\right) \times \Delta x^2 \times S}{\Delta t} \qquad (7)$$

Ya podemos excribir el balance para la celda (x,y). Sustituyendo (3) y (7) en (5), resulta:

$$T_1(h_{x-1,y} - h_{x,y}) + T_3(h_{x,y-1} - h_{x,y}) + Recarga_{x,y} =$$

$$= T_2(h_{x,y} - h_{x+1,y}) + T_4(h_{x,y} - h_{x,y+1}) + Bombeo_{x,y} \pm \frac{\left(h_{x,y} - h_{x,y}^{ANTERIOR}\right) \times \Delta x^2 \times S_{x,y}}{\Delta t} \qquad (8)$$

(En los sumandos *Recarga* y *Bombeo* se incluirían además, respectivamente, otras entradas y salidas de la celda *x,y*).

Esta ecuación no puede resolverse sola ya que tiene 5 incógnitas: $h_{x,y}$, $h_{x-1,y}$, etc. es decir: los niveles en las 5 celdas (la *x,y* y las cuatro adyacentes), las demás variables son datos conocidos:

$S_{x,y}$ = Coeficiente de almacenamiento de esa celda
$Recarga_{x,y}$ = Otras entradas en esa celda, como la infiltración
$Bombeo_{x,y}$ = Otras salidas, como el bombeo, si hay un pozo en esa celda
$h_{x,y}^{ANTERIOR}$ = nivel del agua en esa celda al comienzo del Δt considerado
Δx^2 = tamaño de la celda
Δt = tiempo para el cálculo

Pero si escribimos la ecuación (8) para todas las celdas del modelo, supongamos que tiene 1200 celdas, ya tendremos un sistema con 1200 ecuaciones y 1200 incógnitas (los niveles de la 1200 celdas tras el Δt). Resuelto el sistema de ecuaciones, conocemos los niveles $h_{x,y}$ de las 1200 celdas, los cuales se utilizan inmedatamente como dato de entrada ($h_{x,y}^{ANTERIOR}$) para resolver el mismo sistema de ecuaciones otra vez para el siguiente incremento de tiempo.

Calibración o validación del modelo

Si hacemos trabajar a nuestro modelo para que pronostique la evolución de los niveles en el futuro, habrá que esperar a que el futuro llegue y comprobar si acertó (Esto no parece práctico). En cambio, si tenemos datos suficientes, podemos hacer funcionar el modelo desde una fecha anterior, por ejemplo a partir de 1980. Si disponemos de datos de la evolución de los niveles piezométricos en uno o varios pozos desde 1980 hasta la actualidad, podremos comprobar si las predicciones del modelo son fiables. Como los datos de permeabilidades y coeficientes de almacenamiento que introdujimos en el modelo probablemente eran extrapolaciones de unos pocos datos disponibles, éste será el momento de introducir cambios en estos parámetros y correr el modelo de nuevo a partir de 1980, hasta lograr que la evolución de niveles facilitada por el modelo se parezca lo más posible a la que sucedió realmente.

Precaución: Podría suceder que, disponiendo de muy pocos datos sobre la estructura y parámetros del medio, y después de muchos intentos ensayo/error, consiguiéramos reproducir la evolución de niveles que se produjo en el periodo histórico considerado. Esto no significaría necesariamente que todos los parámetros y magnitudes introducidos coincidan con las reales, ya que diversas combinaciones de esos valores pueden dar el mismo resultado

La fase en la que cambiamos los parámetros del modelo es la **calibración**. La **validación** es la fase siguiente en que comprobamos (con los parámetros adoptados en la calibración) que los resultados producidos por el modelo coinciden con la realidad (para otro periodo distinto).

Las cosas no son tan simples

La descripción simplificada de los cálculos que se ha expuesto se basa en el antiguo modelo de Prickett y Lonquist (1971). Si se desea considerar conjuntamente varias capas superpuestas, a los cálculos que hemos estudiado habría que añadir el flujo de cada celdilla con la de arrriba y con la de abajo.

El modelo MODFLOW (McDonald et al., 1988), que es actualmente el estándar mundial, comienza considerando un conjunto tridimensional de celdas y puede verse una descripción de su fundamento en Domenico & Schwartz (1998, p.145).

Bibliografía

Domenico, P. A. & Schwartz, F. W. (1998).- *Physical and chemical hydrogeology*. Wiley, 502 pp.

McDonald, M.G., Harbaugh, A.W. (1988).- A modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model: U.S. Geological Survey, *Techniques of Water-Resources Investigations*, **6**.

Prickett, T.A., Lonnquist, C.G. (1971).- Selected digital computer techniques for groundwater resource evaluation: Illinois State Water simulation Survey, *Report of Investigation,* **55**, 62 p.