# Úvod do "Boundary Elements Method"


Jiří Bouchala

Katedra aplikované matematiky

jiri.bouchala@vsb.cz

www.am.vsb.cz/bouchala


SNA’07, 22.-26. ledna 2007

# 1. Úvod.

# Vnitřní a vnější okrajová úloha.

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f \text{ v } \Omega, \\ \qquad + \\ \text{okrajové podmínky na } \partial\Omega \end{cases}}$$

$$\left(u = g \text{ na } \partial\Omega,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = h \text{ na } \partial\Omega, \ldots\right);$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ... omezená oblast s dost hladkou hranicí ($N \geq 2$).

---

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f \text{ v } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ \qquad + \\ \text{okrajové podmínky na } \partial\Omega, \\ \qquad + \\ \quad \text{podmínky v } \infty \end{cases}}$$

$$\left(u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty\right).$$

**Příklad.**

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ v } \Omega, \\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

`Klasické řešení:` $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, ...

---

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x.$$

`Slabé řešení:` $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, ...

**Platí:** $u$ je dost hladké slabé řešení $\Rightarrow$ $u$ je klasické řešení.

**Neplatí:** $u$ je klasické řešení $\Rightarrow$ $u$ je slabé řešení.

**Příklad.**

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ v } B_1(0) \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0 \text{ na } \partial B_1(0). \end{cases}$$

$$-\Delta u(x,y) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}} =: f(x,y),$$

$$u(x,y) := \sqrt{1-x^2-y^2} \in C^\infty(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1(0)}),$$

$u$ je klasickým řešením.

Ale!

$$\int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{B_1(0)} \left(\tfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\tfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \tfrac{r^2}{1-r^2}\, r\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 \left(-\tfrac{1}{2(r+1)} + \tfrac{1}{2(1-r)} - r\right) \mathrm{d}r = \infty,$$

a proto $u \notin W_0^{1,2}(B_1(0))$; $u$ není slabým řešením.

# Řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na kouli.

$$\text{(DK)} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ v } \ B_R(x_0), \\ u = \varphi \ \text{ na } \ \partial B_R(x_0), \end{cases}$$

kde

- $R > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^N,\ \ B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N :\ \|x - x_0\| < R\},$
- $\varphi \in C\big(\partial B_R(x_0)\big).$

**Věta.** Buď

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x),\ x \in \partial B_R(x_0), \\ \frac{1}{\kappa_N \cdot R} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} \varphi(y)\, \frac{R^2 - \|x - x_0\|^2}{\|x-y\|^N}\, \mathrm{d}S_y,\ x \in B_R(x_0), \end{cases}$$

kde $\kappa_N$ je povrch jednotkové koule v $\mathbb{R}^N$.

Pak $u \in C^\infty\big(B_R(x_0)\big) \cap C\big(\overline{B_R(x_0)}\big)$ je jediným (klasickým) řešením úlohy (DK) a platí $\|u\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty$.

$$\kappa_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)},$$

$$\Gamma(k) = (k-1)!,\ \Gamma(k + \tfrac{1}{2}) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi},$$

$$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1.$$

$\kappa_1 = 2,\ \kappa_2 = 2\pi,$

$\kappa_3 = 4\pi,\ \kappa_4 = 2\pi^2,$

$\kappa_5 = \frac{8}{3}\pi^2,\ \kappa_6 = \pi^3,$

$\kappa_7 = \frac{16}{15}\pi^3,\ \kappa_8 = \frac{1}{3}\pi^4,$

...

# Řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rov. na vnějšku koule.

(DVK) $$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ v } \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(x_0)}, \\ u = \varphi \text{ na } \partial B_R(x_0),\ \varphi \in C\big(\partial B_R(x_0)\big), \\ u = \mathcal{O}\Big(\dfrac{1}{\|x\|^{N-2}}\Big) \text{ pro } \|x\| \to \infty. \end{cases}$$

**Věta.** Buď

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x),\ x \in \partial B_R(x_0), \\ \frac{1}{\kappa_N \cdot R} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} \varphi(y) \frac{\|x-x_0\|^2 - R^2}{\|x-y\|^N} \, \mathrm{d}S_y,\ \|x - x_0\| > R. \end{cases}$$

Pak $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(x_0)}\big) \cap C\big(\mathbb{R}^N \setminus B_R(x_0)\big)$ je jediným (klasickým) řešením úlohy (DVK).

**Věta (Gauss).** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \geq 1$, je omezená oblast s dost hladkou hranicí. Pak

$$\forall u \in C^1(\overline{\Omega}) \ \ \forall i \in \{1, ..., N\} : \quad \boxed{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u \, n_i \, \mathrm{d}s}$$

$(n = (n_1, n_2, ..., n_N)$ ... jednotkový vektor vnější normály).

$\boxed{N = 1}$

$$\forall u \in C^1(\langle a, b \rangle) : \quad \boxed{\int_a^b u' \, \mathrm{d}x = [u]_a^b = u(b) - u(a),}$$

$$\forall u, v \in C^1(\langle a, b \rangle) : \quad \int_a^b (uv)' \, \mathrm{d}x = [uv]_a^b,$$ a proto

$$\boxed{\int_a^b u' v \, \mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u v' \, \mathrm{d}x.}$$

## Další důsledky Gaussovy věty:

$N = 2$

**Věta (Green).** Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a $(f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ třídy $C^1$ na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\boxed{\int_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{(\partial\Omega)} (f_1, f_2)\, \mathrm{d}s.}$$

$N = 3$

**Věta (Gauss - Ostrogradskij).** Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a $(f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ třídy $C^1$ na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\boxed{\int_\Omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{(\partial\Omega)} (f_1, f_2, f_3)\, \mathrm{d}s.}$$

$$\boxed{\forall u,v \in C^1(\overline{\Omega}) : \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uvn_i \,\mathrm{d}s}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u,v \in C^2(\overline{\Omega}) : \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} vn_i \,\mathrm{d}s$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u,v \in C^2(\overline{\Omega}) : \int_\Omega \Delta u \cdot v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} v \,\mathrm{d}s$$

... 1. Greenova formule

$$\Downarrow$$

$$\forall u,v \in C^2(\overline{\Omega}) : \int_\Omega (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} v - u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n}\right) \mathrm{d}s$$

... 2. Greenova formule

# 2. Harmonické funkce.

**Definice.** Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ omezená oblast. Řekneme, že funkce $u \in C^2(\Omega)$ je harmonická v $\Omega$, platí-li: $\Delta u = 0$ v $\Omega$.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ neomezená oblast. Řekneme, že funkce $u \in C^2(\Omega)$ je harmonická v $\Omega$, platí-li:
$\Delta u = 0$ v $\Omega$ a současně $u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right)$ pro $\|x\| \to \infty$.

$$\Updownarrow$$

$$(\exists K > 0)\,(\exists R > 0)\,\left(\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \|x\| > R\right):\ |u(x)| \leq \frac{K}{\|x\|^{N-2}}.$$

**Příklady.**

- Funkce $u := 1$ je harmonická v každé oblasti, je-li $N = 2$.
- Funkce $u := 1$ je harmonická v každé omezené oblasti a není harmonická v žádné neomezené oblasti, je-li $N > 2$.
- Funkce $u(x, y) := x^2 - y^2$ je harmonická v každé `omezené` oblasti v $\mathbb{R}^2$.

2. Harmonické funkce.
- Elementární řešení Laplac. rovnice.

**Věta.** Buď $N > 2$. Definujme

$$v(x,y) := \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \,:\, \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}.$$

Pak pro každé $y \in \mathbb{R}^N$ je funkce $x \mapsto v(x,y)$ harmonická v každé oblasti, která neobsahuje bod $y$.

**Věta.** Buď $N = 2$. Definujme

$$v(x,y) := \ln \frac{1}{\|x-y\|} \,:\, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Pak pro každé $y \in \mathbb{R}^2$ je funkce $x \mapsto v(x,y)$ harmonická v každé `omezené` oblasti, která neobsahuje bod $y$.

**Definice.** Funkci

$$v(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{(N-2)\kappa_N} \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}, & \text{je-li } N \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x-y\|}, & \text{je-li } N = 2, \end{cases}$$

nazýváme <u>elementárním řešením Laplaceovy rovnice</u> (tj. rovnice $\Delta u = 0$).

**Věta.** Pro každé $y \in \mathbb{R}^N$ platí

$$\Delta_x v(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x,y) = -\delta_y \equiv \delta(x-y)$$

(derivace je třeba chápat ve smyslu distribucí).

# 3. Potenciály.

**Věta (o třech potenciálech).**
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) omezená oblast s dost hladkou hranicí, $v:\ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ elementární řešení Laplaceovy rovnice a $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Pak pro každé $x \in \Omega$ platí

$$u(x) = -\int_\Omega \Delta u(y) v(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} v(x,y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_y}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

Speciálně: je-li navíc $\Delta u = 0$ v $\Omega$, je

$$\forall x \in \Omega:\ u(x) = \int_{\partial\Omega} v(x,y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_y}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

**Důsledek (věta o regularitě).**
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) libovolná oblast, $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ v $\Omega$. Pak $u \in C^\infty(\Omega)$.

V dalším uvažujme pouze případ $N \geq 3$.

**Definice.**

- $$v(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}s_y$$

  ... potenciál jednoduché vrstvy,

- $$w(x) := \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left( \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y$$

  ... potenciál dvojvrstvy,

- $$\varphi(x) := \int_{\Omega} \varrho(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}y$$

  ... objemový (Newtonův) potenciál;

$\mu, \sigma, \varrho$ ... hustoty (příslušných potenciálů).

**Věta (vlastnosti objemového potenciálu).** Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak potenciál $\varphi$ je

- spojitý a spojitě diferencovatelný v $\mathbb{R}^N$,
- harmonická funkce v každé oblasti $G \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\varrho \in C^1(\overline{\Omega})$, je

- $\varphi \in C^2(\Omega)$,
- $\forall x \in \Omega : \ -\Delta\varphi(x) = (N-2)\kappa_N \varrho(x)$.

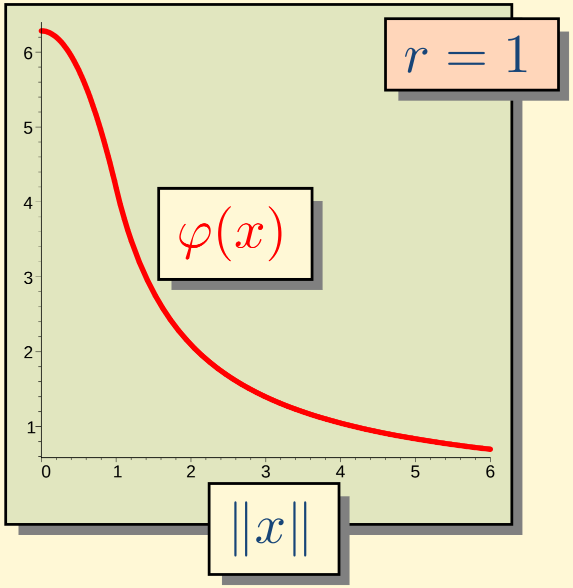
Uvedený výsledek nám umožňuje konstruovat partikulární řešení Poissonovy rovnice a převést tak okrajovou úlohu pro Poissonovu rovnici na okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici:

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta u_0 = f \quad \in C^1(\overline{\Omega}) \\ -\Delta u = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ -\Delta(u + u_0) = f;$$

$$u_0(x) = \frac{1}{(N-2)\kappa_N} \int_\Omega f(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}y.$$

**Příklad.** Objemovým potenciálem koule $B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ s hustotou $\varrho := 1$ je funkce

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{3}(3r^2 - \|x\|^2), & \text{je-li } \|x\| \leq r, \\ \frac{4\pi}{3}\frac{r^3}{\|x\|}, & \text{je-li } \|x\| > r. \end{cases}$$




Odtud plyne, že jedním z řešení rovnice $\Delta u = 1$ na $B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ je funkce

$$u(x) := -\frac{1}{4\pi}\frac{2\pi}{3}(3r^2 - \|x\|^2) = \frac{1}{6}\|x\|^2 + konst.,$$

takže taky (např.) funkce $\tilde{u}(x) := \frac{1}{6}\|x\|^2$.

**Věta (vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy).** Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\mu \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál $v$ je harmonickou funkcí v oblastech $\Omega$ a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\mu \in C(\partial\Omega)$, je potenciál $v$ spojitý v $\mathbb{R}^N$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

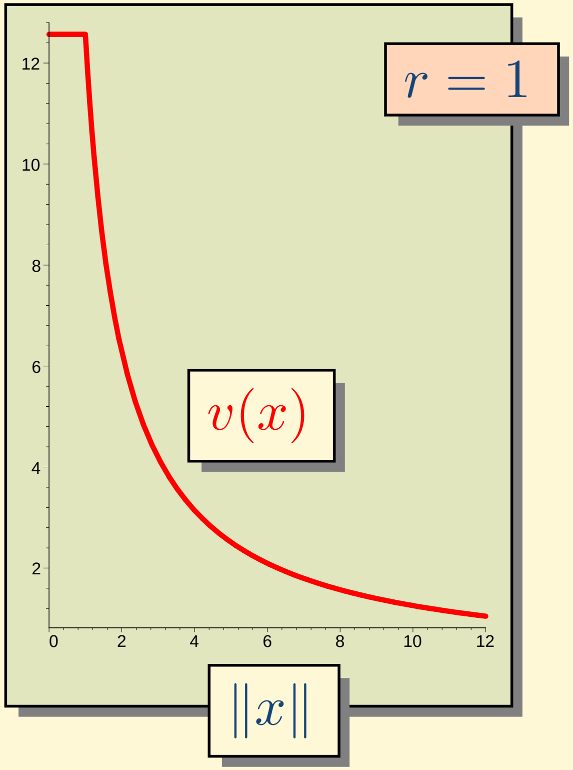
- $\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_i := \lim\limits_{\alpha\to 0-} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x+\alpha n_x) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\mu(x) + \frac{\overline{\mathrm{d}v}}{\mathrm{d}n_x}(x),$

  kde $\frac{\overline{\mathrm{d}v}}{\mathrm{d}n_x}(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y;$
- $\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_e := \lim\limits_{\alpha\to 0+} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x+\alpha n_x) = -\frac{(N-2)\kappa_N}{2}\mu(x) + \frac{\overline{\mathrm{d}v}}{\mathrm{d}n_x}(x).$

$$\left(\text{Takže } \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_i - \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_e = (N-2)\kappa_N \mu(x).\right)$$

**Příklad.**
Potenciálem jednoduché vrstvy na sféře $\partial B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ s hustotou $\mu := 1$ je funkce

$$v(x) = \begin{cases} 4\pi r, & \text{je-li } \|x\| \le r, \\ 4\pi \frac{r^2}{\|x\|}, & \text{je-li } \|x\| > r. \end{cases}$$



**Věta (vlastnosti potenciálu dvojvrstvy).**
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\sigma \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál $w$ je harmonickou funkcí v oblastech $\Omega$ a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

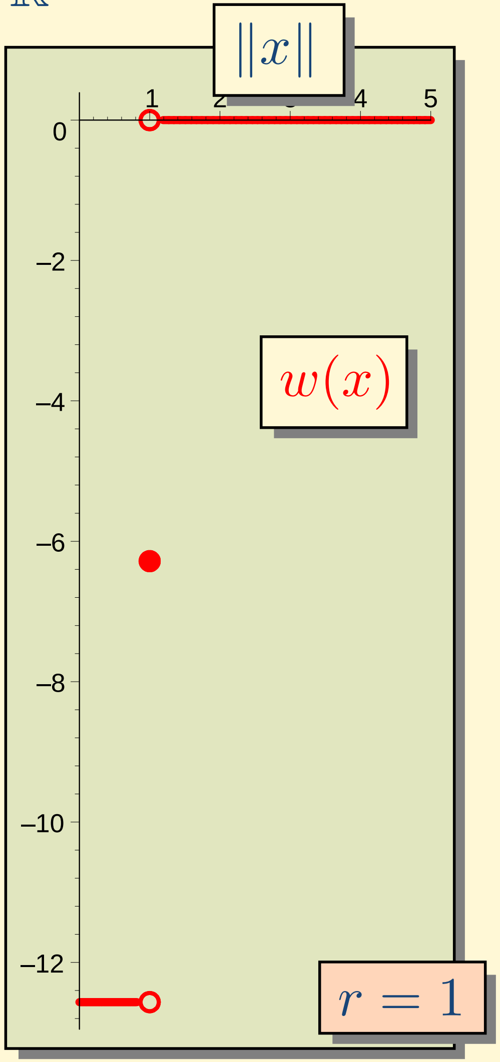
Je-li $\sigma \in C(\partial\Omega)$, je $w|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

- $w_e(x) := \lim\limits_{\substack{\tilde{x} \to x \\ \tilde{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}}} w(\tilde{x}) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\sigma(x) + w(x)$,
- $w_i(x) := \lim\limits_{\substack{\tilde{x} \to x \\ \tilde{x} \in \Omega}} w(\tilde{x}) = -\frac{(N-2)\kappa_N}{2}\sigma(x) + w(x)$.

(Takže $w_e(x) - w_i(x) = (N-2)\kappa_N\sigma(x)$.)

**Příklad.**
Potenciálem dvojvrstvy na sféře $\partial B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ s hustotou $\sigma := 1$ je funkce

$$w(x) = \begin{cases} -4\pi, & \text{je-li } \|x\| < r, \\ -2\pi, & \text{je-li } \|x\| = r, \\ 0, & \text{je-li } \|x\| > r. \end{cases}$$



# 4. Metoda potenciálů.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{D_i}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{v} \quad \Omega, \\ u = g & \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Hledejme (klasické) řešení $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ problému $(\mathrm{D_i})$ ve tvaru potenciálu dvojvrstvy s `neznámou` hustotou $\sigma \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left( \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y, \; x \in \Omega, \\ g(x), \; x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Protože potenciál dvojvrstvy je na $\Omega$ harmonickou funkcí (tj. splňuje Laplaceovu rovnici automaticky), jde pouze o to určit hustotu $\sigma$ tak, aby platilo, že $u \in C(\overline{\Omega})$, tzn. aby pro každé $x \in \partial\Omega$:

$$g(x) = u_i(x) = -\frac{(N-2)\kappa_N}{2} \sigma(x) + \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left( \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y,$$

$$(\mathrm{D_i}): \quad \Delta u = 0 \text{ v } \Omega, \;\; u = g \text{ na } \partial\Omega.$$



tj. aby

$$(\heartsuit) \quad \boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$$

$$\boxed{\sigma(x) - \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = -\frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

( $(\heartsuit)$ ... Fredholmova integrální rovnice druhého druhu. )

**Věta.** Pro každou funkci $g \in C(\partial\Omega)$ existuje právě jedno (klasické) řešení úlohy $(\mathrm{D_i})$. Tímto řešením je funkce

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y, \; x \in \Omega, \\ g(x), \; x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

kde $\sigma$ je řešením rovnice $(\heartsuit)$.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{N_e}) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ v } \ \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_e = g \ \text{ na } \ \partial\Omega, \\ u = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \ \text{ pro } \|x\| \to \infty. \end{cases}$$

Hledejme (klasické) řešení $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ problému $(\mathrm{N_e})$ ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy s `neznámou` hustotou $\mu \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \,\mathrm{d}s_y.$$

Protože potenciál jednoduché vrstvy je na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ harmonickou funkcí, jde pouze o to určit hustotu $\mu$ tak, aby pro každé $x \in \partial\Omega$ :

$$g(x) = \left[\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(x)\right]_e = -\frac{(N-2)\kappa_N}{2}\,\mu(x) + \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y,$$

tj. aby

$(\diamondsuit)$ $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\mu(x) - \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = -\frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).$$

$\Big($ $(\diamondsuit)$ ... adjungovaná rovnice k $(\heartsuit)$. $\Big)$

**Věta.** Pro každou funkci $g \in C(\partial\Omega)$ existuje právě jedno (klasické) řešení úlohy $(\mathrm{N_e})$. Tímto řešením je funkce

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\, \mathrm{d}s_y,$$

kde $\mu$ je řešením rovnice $(\diamondsuit)$.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{D_e}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ v } \ \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ u = g \ \text{ na } \ \partial\Omega, \\ u = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \ \text{ pro } \|x\| \to \infty. \end{cases}$$

Podobně jako u $(\mathrm{D_i})$: funkce

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y, \ x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ g(x), \ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

je (klasickým) řešením úlohy $(\mathrm{D_e})$, je-li hustota $\sigma \in C(\partial\Omega)$ taková, že pro každé $x \in \partial\Omega$:

$$g(x) = u_e(x) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\sigma(x) + \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y,$$

tj. že

$$(\spadesuit) \quad \boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$$

$$\boxed{\sigma(x) + \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = \frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

Tentokrát je situace složitější, může se totiž stát, že rovnice $(\spadesuit)$ nemá řešení. I v takovémto případě má sice úloha (D$_\mathrm{e}$) řešení, toto však nemá tvar potenciálu dvojvrstvy.

K této situaci dochází proto, že potenciály dvojvrstvy tvoří příliš "malou" část množiny všech harmonických funkcí v $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

U obecné harmonické funkce totiž požadujeme, aby byla

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty,$$

zatímco potenciál dvojvrstvy je

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-1}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty.$$

Pokusme se řešení najít ve tvaru součtu potenciálu dvojvrstvy a jednoduché harmonické funkce s růstem

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty.$$

Umístěme počátek soustavy souřadnic dovnitř $\Omega$ a hledejme $u$ ve tvaru:

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y + \frac{1}{\|x\|^{N-2}} \int_{\partial\Omega} \sigma(y)\, \mathrm{d}s_y, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ g(x), \; x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Už víme, že $\forall \sigma \in C(\partial\Omega)$ je takto definovaná funkce $u$ harmonická v $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. Zbývá tedy určit $\sigma \in C(\partial\Omega)$ tak, aby pro každé $x \in \partial\Omega$:

$$g(x) = u_e(x) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\sigma(x) + \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) + \frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right] \mathrm{d}s_y,$$

tj. aby

(♠♠) $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\sigma(x) + \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \left[ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left( \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) + \frac{1}{\|x\|^{N-2}} \right] \mathrm{d}s_y = \frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

**Věta.** Pro každou funkci $g \in C(\partial\Omega)$ existuje právě jedno (klasické) řešení úlohy $(\mathrm{D_e})$. Tímto řešením je funkce

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left( \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y + \frac{1}{\|x\|^{N-2}} \int_{\partial\Omega} \sigma(y)\, \mathrm{d}s_y, \\ \qquad x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ g(x), \ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

kde $\sigma \in C(\partial\Omega)$ je řešením rovnice (♠♠).

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{N_i}) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ v } \Omega, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_i = g \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Pozorování 1.**
Je-li funkce $u$ klasickým řešením úlohy $(\mathrm{N_i})$, je i každá z funkcí

$$v_c(x) := u(x) + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$, řešením $(\mathrm{N_i})$.

**Pozorování 2.**
Buď $u$ dost hladké řešení úlohy $(\mathrm{N_i})$ a $v := 1$.
Z 1. Greenovy formule $\int_\Omega \Delta u \cdot v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} v \,\mathrm{d}s$ pak vyplývá, že

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} g \,\mathrm{d}s.$$

Řešení $u$ hledejme ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy s hustotou $\mu \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \,\mathrm{d}s_y.$$

Pro $\mu$ pak musí platit, že pro každé $x \in \partial\Omega$ :

$$g(x) = \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(x)\right]_i = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\,\mu(x) + \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y,$$

tj. že

(♣) $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\mu(x) + \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = \frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

( (♣) ... adjungovaná rovnice k (♠). )

**Věta.** Podmínka

$$\int_{\partial\Omega} g(x)\,\mathrm{d}s_x = 0$$

je podmínkou `nutnou` a `postačující`, aby úloha $(\mathrm{N_i})$ (s okrajovou podmínkou $g \in C(\partial\Omega)$) měla řešení.
Toto řešení je jednoznačně až na konstantu určeno vztahem

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y)\,\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\,\mathrm{d}s_y,$$

kde $\mu$ je řešením rovnice $(\clubsuit)$.

# 5. Přímé metody.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ a buď $g_1 \in C(\Gamma_1)$ a $g_2 \in C(\Gamma_2)$.
Uvažujme problém

$$(\mathrm{DN_i}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{v } \Omega, \\ u = g_1 & \text{na } \Gamma_1, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_i = g_2 & \text{na } \Gamma_2. \end{cases}$$

Z věty o třech potenciálech vyplývá:
je-li $u \in C^2(\overline{\Omega})$ (klasickým) řešením $(\mathrm{DN_i})$, je

$$\forall x \in \Omega : \; u(x) = \int_{\partial\Omega} v(x,y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_y}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}s_y,$$

kde $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je elementární řešení Laplaceovy rovnice, tj. funkce $v(x,y) := \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}.$

Zjistili jsme: je-li $u \in C^2(\overline{\Omega})$ řešením úlohy $(\mathrm{DN_i})$, je

pro každé $x \in \Omega$ :

$$\boxed{u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) u(y)\,\mathrm{d}s_y.}$$

Problém: $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) = ? \text{ na } \Gamma_1,\ u(y) = ? \text{ na } \Gamma_2.}$

Všimněme si:

- $\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y$ ... potenciál jednoduché vrstvy

  s hustotou $\frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \in C(\partial\Omega)$,

- $\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) u(y)\,\mathrm{d}s_y$ ... potenciál dvojvrstvy

  s hustotou $\frac{1}{4\pi} u \in C(\partial\Omega)$.

$$(\mathrm{DN_i}): \quad \Delta u = 0 \text{ v } \Omega, \ u = g_1 \text{ na } \Gamma_1, \ \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_i = g_2 \text{ na } \Gamma_2.$$

$$\forall \tilde{x} \in \Omega : \quad u(\tilde{x}) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|} \,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\right) \mathrm{d}s_y.$$

Limitním přechodem ($\Omega \ni \tilde{x} \to x \in \partial\Omega$) dostaneme, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|x-y\|} \,\mathrm{d}s_y - \left( - \frac{4\pi}{2} \frac{1}{4\pi} u(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) \mathrm{d}s_y\right),$$

tj.

$$\forall x \in \partial\Omega : \ \frac{1}{2} u(x) = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \,\mathrm{d}s_y}_{=: V\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)(x)} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) u(y) \,\mathrm{d}s_y}_{=: K(u)(x)}.$$

Takže na $\partial\Omega$ platí

$$\boxed{\frac{1}{2} u = V\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right) - K(u).}$$

$$(\mathrm{DN_i}): \quad \Delta u = 0 \text{ v } \Omega, \;\; u = g_1 \text{ na } \Gamma_1, \;\; \left[\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_i = g_2 \text{ na } \Gamma_2.$$



$$\forall x \in \Omega: \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|x-y\|} \,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) \mathrm{d}s_y.$$

Nyní proveďme limitní přechod pro "derivaci podle vnější normály". Z předpokladu $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a z vlastností potenciálu jednoduché vrstvy plyne, že

$$\forall x \in \partial\Omega: \quad \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_i = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(x) =$$

$$= \frac{4\pi}{2} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) \mathrm{d}s_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) \mathrm{d}s_y,$$

tzn., že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(x) = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \,\mathrm{d}s_y}_{=:\, K'\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)(x)} - \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) u(y) \,\mathrm{d}s_y}_{=:\, D(u)(x)}.$$

Zjistili jsme, že pro řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$ úlohy $(\mathrm{DN_i})$ na $\partial\Omega$ platí:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2}u &= V\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right) - K(u), \\ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} &= K'\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right) + D(u). \end{aligned}}$$

Dá se dokázat, že existuje $V^{-1}$, a proto z první rovnosti vyplývá, že

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = V^{-1}\left(\frac{1}{2}I + K\right)(u).$$

Dosadíme-li tento vztah do druhé z výše uvedených rovností, dostaneme ( na $\partial\Omega$ ) rovnost

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = \underbrace{\left[\left(\tfrac{1}{2}I + K'\right)V^{-1}\left(\tfrac{1}{2}I + K\right) + D\right]}_{=:\, S}(u)}$$

$=: S$ ... Steklov - Poincaré operátor.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = S(u) := \left[\left(\tfrac{1}{2}I + K'\right)V^{-1}\left(\tfrac{1}{2}I + K\right) + D\right](u),}$$

kde

$$V(\lambda)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\lambda(y)\,\mathrm{d}s_y,$$

$$K(u)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)u(y)\,\mathrm{d}s_y,$$

$$K'(\lambda)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)\lambda(y)\,\mathrm{d}s_y,$$

$$D(u)(x) := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

Dá se ukázat, že

$$V:\ H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\ K:\ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

$$K':\ H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\ D:\ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

$$\boxed{S:\ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

jsou spojitými lineárními operátory.

## Uvažujme problém

$$(\mathrm{DN_i}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = g & \text{na } \Gamma_2, \end{cases}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1$ má "*kladnou míru*", $g \in L^2(\Gamma_2)$, $f \in L^2(\Omega)$.

Slabým řešením úlohy $(\mathrm{DN_i})$ rozumíme funkci $u \in \mathcal{W} := \{v \in H^1(\Omega) : \ Tv = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$ takovou, že

$$\forall v \in \mathcal{W} : \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} g T v \, \mathrm{d}s.$$

Slabým *hraničním* řešením úlohy $\mathrm{DN_i}$ rozumíme funkci $u \in W := \{v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \ v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$ takovou, že

$$\forall v \in W : \quad \langle Su, v \rangle = \langle Nf, v \rangle + \int_{\Gamma_2} g v \, \mathrm{d}s.$$

# Literatura.

- P. Drábek: *Integrální rovnice*, SNTL, Praha, 1991;
- L. C. Evans: *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998;
- J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice*, skripta VUT, Brno, 2003;
- O. John, J. Nečas: *Rovnice matematické fyziky*, skripta MFF UK, Praha, 1981;
- A. Kufner, O. John a S. Fučík: *Function spaces*, Academia, Praha, 1977.
- C. Johnson: *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, 1995;
- K. Rektorys a spol.: *Přehled užité matematiky II*, Prometheus, Praha, 1995;

- M. Renardy, R. C. Rogers: *An introduction to partial differential equations*, Springer – Verlag, New York, 1993;
- M. Rokyta, O. John, J. Málek, M. Pokorný, J. Stará: *Úvod do teorie parciálních diferenciálních rovnic*, www.karlin.mff.cuni.cz/ rokyta/vyuka/skripta-pdr/, 2004;
- M. Sadowská: *Řešení variačních nerovnic pomocí hraničních integrálních rovnic*, diplomová práce, VŠB-TU Ostrava, 2005;
- O. Steinbach: *Stability estimates for hybrid coupled domain decomposition methods*, Springer – Verlag, Heidelberg, 2003;
- A. Ženíšek: *Funkcionální analýza II*, skripta VUT, Brno, 1999;


Příspěvek vznikl za podpory grantu GAČR 201/07/0294.