NEFN 1

1

Nový nadpis 10.2.2010

1. Operátorové rovnice

$$\boxed{T(u) = v}$$

$T: X \longrightarrow Y$
$v \in Y$
$u \in X$ ... neznámá

- **Problémy:**
  - existence (u)
  - jednoznačnost
  - jak řešení najít (aspoň „přibližně")

- **Příklady**

1) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = c$$ ... transcendentní rovnice

2) soustava lineárních algebraických rovnic

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \text{pro } i = 1, \dots, m$$

Označme $x = (x_1, \dots, x_n)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$

$$Tx := (A \cdot x^T)^T = b$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

3) diferenciální rovnice

$$-y'' + y' - 3y = f(x) \quad v \ \langle 0, 1 \rangle \qquad Ty \overset{\text{def}}{=} -y'' + y' - 3y$$

$$f \in C(\langle 0, 1 \rangle)$$

$$T : C^2(\langle 0,1\rangle) \longrightarrow C(\langle 0,1\rangle)$$

$$Ty = f$$

Pozorování. Buď $T : X \to X$, kde X je NLP.

Pak

$$Tu = v$$

$$\Updownarrow$$

$$Su := Tu - v = 0 \iff u \in \operatorname{Ker} S$$

$$\operatorname{Ker} S = \{u \in X : Su = 0\}$$

$$Su = \left(J'(u) \ldots u \text{ je kritický bod } J \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$Ku := u + Su = u \iff u \text{ je pevný bod } K$$

Věta (Banachova o pevném bodě)

Buď
- X úplný metrický prostor
- $T : X \to X$
- T kontraktivní

(tzn. $\exists q < 1\ \forall x, y \in X : \rho(Tx, Ty) \le q \cdot \rho(x, y)$)

Pak $\exists!\, x \in X : Tx = x$

(důkaz a příklady – viz ÚFA)

V dalším předpokládejme, že $T: X \to Y$, kde X, Y jsou NLP

Definice

T je spojitý na $X \overset{\text{def.}}{\equiv} \left[x_n \to x \implies Tx_n \to Tx \right]$

Pozorování

T je spojitý na X

$$\Updownarrow$$

pro každou otevřenou množinu $V \subset Y$ platí, že $U := \{u \in X : Tu \in V\}$ je otevřená

Věta (viz ÚFA). Buď $T: X \to Y$ lineární. Pak

T je spojitý (na X) $\iff$ T je omezený

(tzn. $\exists M > 0 \; \forall x \in X: \|Tx\| \leq M \cdot \|x\|$)

Připomenutí (viz ÚFA)

$A \in \mathcal{L}(X, Y) \ldots$ NLP, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$.

• **Příklady.** Buď $k = k(x,t) \in C(\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle)$

1) $T : X \to X$, kde $X = C(\langle 0,1\rangle)$,

$$\|u\| = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |u(x)|$$

$$(Tu)(x) := \int_0^1 k(x,t)\,u(t)\,dt \qquad (*)$$

• T je (zřejmě) lineární

• $$|(Tu)(x)| \le \int_0^1 |k(x,t)|\cdot|u(t)|\,dt \le$$

$$\le \|u\| \cdot \max_{x\in\langle 0,1\rangle} \int_0^1 |k(x,t)|\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\|Tu\| \le \max_{x\in\langle 0,1\rangle} \int_0^1 |k(x,t)|\,dt \cdot \|u\|$$

... T je omezený, a proto (T je lineární) spojitý

• Dá se ukázat, že

$$\boxed{\|T\| = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} \int_0^1 |k(x,t)|\,dt}$$

2) Uvažujme nyní „stejný" operátor T (viz (*)) na prostoru $X = L^2(0,1)$

(Šlo by vystačit i se slabšími předpoklady kladenými na k – stačí, aby $k \in L^2((0,1)\times(0,1))$)

- T – je opět lineární
- $$\|Tu\|^2 = \int_0^1 |(Tu)(x)|^2\,dx = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(x,t)\,u(t)\,dt \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(x,t)\cdot u(t)|\,dt \right)^2 dx \underset{\text{Hölder}}{\leq} \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(x,t)|^2 dt \cdot \int_0^1 u^2(t)\,dt \right) dx =$$

$$= \|u\|^2 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(x,t)|^2 dt \right) dx$$

$\therefore$ T je omezený, a proto spojitý

- Dá se ukázat, že

$$\boxed{\|T\| = \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^1 |k(x,t)|^2 dt \right) dx}}$$

Poznámka: Všimněme si, že nám vyšla jiná norma, než u předcházejícího příkladu, a to přesto, že operátor T byl definován „stejným" předpisem (*)

Pozorování! Buď $T : X \to Y$

- lineární na X
- prosté
- na

Pak existuje $T^{-1} : Y \to X$ a je lineární na Y

($T^{-1} : Y \to X$ je definované vztahem

$$T^{-1} v = u \iff v = Tu \quad)$$

Dk.
- Existence T^{-1} je zřejmá
- Dokážeme, že T^{-1} je lineární

a) $$\underline{T^{-1}(v_1 + v_2)} = T^{-1}(\underset{v_1}{\underset{\parallel}{Tu_1}} + \underset{v_2}{\underset{\parallel}{Tu_2}}) =$$

$$= T^{-1}(T(u_1 + u_2)) = u_1 + u_2 =$$

$$= \underline{T^{-1} v_1 + T^{-1} v_2}$$

b) $$\underline{T^{-1}(\alpha v)} = T^{-1}(\alpha \underbrace{Tu}_{= v}) = T^{-1}(T(\alpha u)) =$$

$$= \alpha u = \underline{\alpha \cdot T^{-1} v}$$

cbd.

- **Definice.** Řekneme, že $T: X \to Y$ je otevřené zobrazení, pokud obraz každé otevřené množiny je otevřený. Tedy:

$$T \text{ je otevřené} \iff \left[\begin{array}{l} U \subset X \\ \text{je otev.} \end{array} \implies \begin{array}{l} T(U) = \{T(u) : u \in U\} \subset Y \\ \text{je otev.} \end{array} \right]$$

- **Věta (Banachova o otevřeném zobrazení)**

Buď
- X, Y ... Banachovy prostory,
- $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Pak

$$A \text{ je na} \iff A \text{ je otevřené zobrazení}$$

Důkaz $\Leftarrow$

$$0 = A(0) \in A(X) \text{ ... otevřená množina}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0: \; U(0, \varepsilon) \subset A(X)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall y \in Y \setminus \{0\}: \; \frac{\varepsilon}{2} \frac{y}{\|y\|} \in U(0, \varepsilon) \subset A(X)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists x \in X: \; A(x) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{y}{\|y\|}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists x \in X: \; A\left(\frac{2}{\varepsilon} \|y\| \cdot x\right) = y \implies y \in A(X) \quad \text{ctd.}$$

8

$\Longrightarrow$

Nejdřív dokážeme, že

1) $\boxed{\forall r > 0 : \quad 0 \in \operatorname{int} A(U(0,r))}$

- Protože A je $\underline{\underline{\text{na}}}$, je $\quad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A(U(0,n))}$

z Baireovy věty ($\underline{X \text{ je úplný}}$!!) vyplývá, že existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\operatorname{int} \overline{A(U(0,m))} \neq \emptyset \text{, tj.}$$

(A je $\underline{\text{na}}$) $\quad \exists u \in X : A(u) \in \operatorname{int} \overline{A(U(0,m))}$

$$\Downarrow$$

$$\exists \delta > 0 \; \forall v, \|v\| < \delta : \quad A(u) + v \in \overline{A(U(0,m))}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists (u_n) \subset U(0,m) : \; A(u_n) \to A(u) + v$$

$$\Downarrow$$

$$A(u_n - u) \to v$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \delta > 0\ \forall v, \|v\| < \delta : \quad v \in \overline{A(U(0,m) - w)}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \in \operatorname{int} \overline{A(\underbrace{U(0,m)}_{\subset U(0,R)} - u)}$$

pro dost velké R

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\exists R > 0 : \quad 0 \in \operatorname{int} \overline{A(U(0,R))}}$$

Uvědomme si, že k důkazu 1) stačí, dokážeme-li, že $\boxed{0 \in \operatorname{int} A(U(0,3R))}$ (to plyne přímo z linearity A

$$\|v\| < \delta \implies \exists u, \|u\| < 3R : \ Au = v$$

$$\Downarrow$$

$$A\Big(\underbrace{\tfrac{r}{3R} \cdot u}_{\tilde{u}}\Big) = \underbrace{\tfrac{r}{3R} v}_{\tilde{v}}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\tilde{v}\| < \tfrac{r}{3R}\delta \implies \exists \tilde{u}, \|\tilde{u}\| < r : \ A(\tilde{u}) = \tilde{v} \quad)$$

$v := \frac{3R}{r}\tilde{v}$, $\|v\| < \delta$ $\rightsquigarrow$ u, $Au = v$, $\|u\| < 3R$ $\rightsquigarrow$ $\tilde{u} := \frac{r}{3R} u$, $\|\tilde{u}\| < r$

K důkazu 1) tedy stačí dokázat:

$$\boxed{0 \in \operatorname{int} \overline{A(U(0,R))} \Rightarrow 0 \in \operatorname{int} A(U(0,3R))}$$

$$0 \in \operatorname{int} \overline{A(U(0,R))}$$
$$\Downarrow$$

(*) $\exists r>0 \ \forall v, \|v\|<r : \exists u \in U(0,R) : \|v - A(u)\| < \frac{r}{2}$

$\boxed{\text{Buď } v, \|v\|<r \text{ dáno}}$

Nyní sestrojíme posloupnosti (v_n) a (u_n)

$v_0 := v$ $\quad$ u_0 vybereme (viz (*)) tak, aby

$$u_0 \in U(0,R) \text{ a } \|v_0 - A(u_0)\| < \frac{r}{2}$$

$$v_1 := 2(v_0 - A(u_0)) \Rightarrow \|v_1\| < r,$$

a proto lze volit (viz (*))

$u_1 \in U(0,R)$ tak, že $\|v_1 - A(u_1)\| < \frac{r}{2}$,

...

Takže pro posloupnosti (v_n) a (u_n) platí:

$$\boxed{\|v_n - A(u_n)\| < \frac{r}{2}, \quad v_{n+1} = 2(v_n - Au_n), \quad u_n \in U(0,R), \quad \|v_n\| < r}$$

A tedy každý krok
$$\frac{1}{2^{n+1}} v_{n+1} = \frac{1}{2^n}(v_n - Au_n),$$

a proto

$$A\left(\frac{1}{2^0}u_0\right) = \frac{1}{2^0}v_0 - \frac{1}{2^1}v_1$$

$$+\quad A\left(\frac{1}{2^1}u_1\right) = \frac{1}{2^1}v_1 - \frac{1}{2^2}v_2$$

$$\vdots$$

$$A\left(\frac{1}{2^n}u_n\right) = \frac{1}{2^n}v_n - \frac{1}{2^{n+1}}v_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{2^n}u_n\right) = v_0 - \frac{1}{2^{m+1}}v_{m+1}} \qquad (\times)$$

Nyní využijeme předpokladu, že Y je úplný:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{2^n} u_n \right\| \le R \cdot 2 < \infty$$

$$\Downarrow$$

ex. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n \stackrel{\text{ozn.}}{=} u$, (xx)

$$\underline{\underline{\|u\| < 3R}}$$

Z (x) a (xx) vyplývá (A je spoj.)

lineárním převodem

$$A(u) = v_0 = v$$

Neboli $\forall v, \|v\| < r \ \exists u, \|u\| < 3R:$

$$A(u) = v$$

Odtud plyne dokazované tvrzení

$$\boxed{0 \in \operatorname{int} A(U(0, 3R))}$$

ad 1)

2) Zbývající část důkazu je snadná
Máme dokázat

$$\boxed{U \subset X \text{ otv.} \implies A(U) \text{ otv.}}$$

Buď $u \in U$. Pak $A(u) \in A(U)$

$\exists \varepsilon > 0 : \quad u + U(0,\varepsilon) \subset U \quad$ (U je otv.)

$0 \in \operatorname{int} A(U(0,\varepsilon))$ (viz 1))

$$\Downarrow$$

$$\exists \delta > 0 \quad U(0,\delta) \subset A(U(0,\varepsilon))$$

$$A(u) + U(0,\delta) \subset A(u) + A(U(0,\varepsilon)) =$$

$$= A(u + U(0,\varepsilon)) \subset A(U)$$

$$\Downarrow$$

$$A(u) \in \operatorname{int} A(U)$$

cbd.

- Pozorování. Všimněme si, že Banachova věta o omezeném zobrazení nám dává postačující podmínky, za nichž je řešení operátorové rovnice

$$Au = v$$

„spojitě závislé" na pravé straně:

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \dots \text{Banachovy prost.} \\ A \in \mathcal{L}(X,Y) \\ A \text{ je na} \\ A \text{ je prosté} \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} v_n \to v, \quad Au_n = v_n, \quad Au = v \\ \Downarrow \\ u_n = A^{-1} v_n \to A^{-1} v = u \end{array}}$$

Všimněme si: Vynecháme-li A je na za $\operatorname{Im} A$ je uzavřený, dostaneme $\boxed{A^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A, X)}$

(uzav. podprostor Banachova je Banachův)

Příklad. $A: X \to X$, $X = C(\langle 0,1\rangle)$

$\|f\| = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |f(x)|$

$$(Af)(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

Pak

- A je lineární

$$\big(A(\alpha f+\beta g)\big)(x) = \int_0^x (\alpha f+\beta g)(t)\,dt =$$
$$= \alpha \int_0^x f(t)\,dt + \beta \int_0^x g(t)\,dt =$$
$$= \alpha (Af)(x) + \beta (Ag)(x) =$$
$$= \big(\alpha (Af) + \beta (Ag)\big)(x)$$

- A je omezený

$$|(Af)(x)| \le \int_0^x |f(t)|\,dt \le \|f\|\cdot x \le \|f\|$$
$$\Downarrow$$
$$\|Af\| = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |(Af)(x)| \le \|f\|$$

- A je prostý

$$\forall x: (Af)(x) = (Ag)(x) \Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = g(x)$$

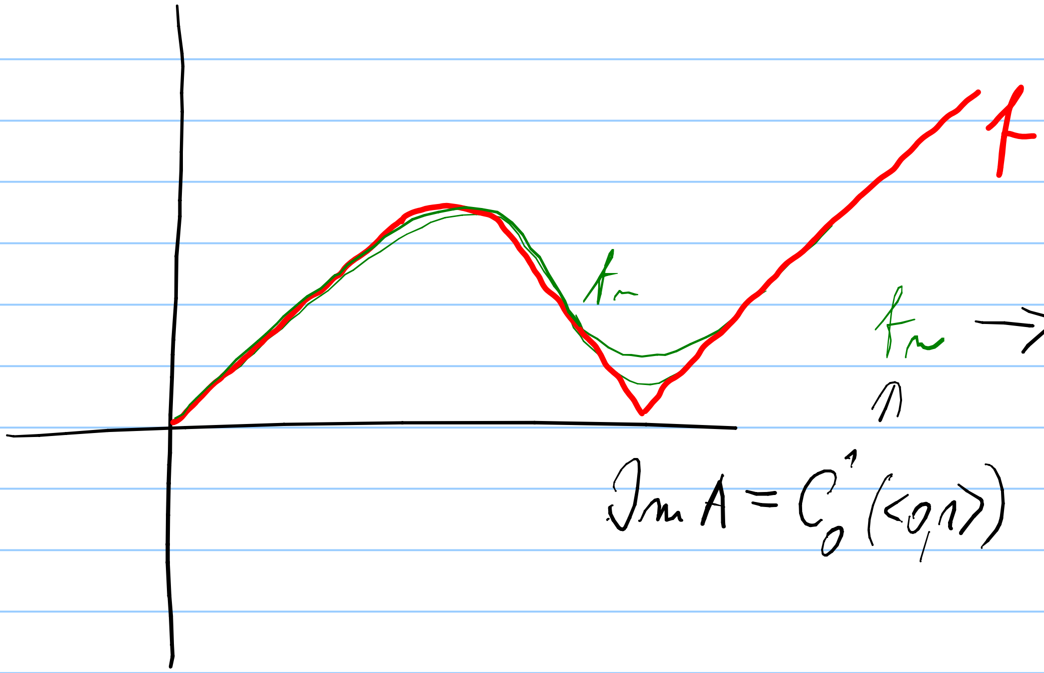
derivace

16

- A není na $\quad (A(X) = C_0^1(\langle 0,1\rangle) \subsetneqq C(\langle 0,1\rangle))$

$C_0^1(\langle 0,1\rangle) = \{f \in C^1(\langle 0,1\rangle) : f(0)=0\}$

- $\mathrm{Im}\, A$ není uzavřený



$f_n \to f$

$\cap \qquad \not\in$

$\mathrm{Im}\, A = C_0^1(\langle 0,1\rangle) \qquad C_0^1(\langle 0,1\rangle)$

A^{-1} není spojitý !!!

$$\left.\begin{array}{l} f_n, f \in C_0^1(\langle 0,1\rangle) \\ f_n \to f \end{array}\right\} \not\Rightarrow f_n' \to f'$$

Př.: $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$

$f(x) := 0$