Hans-Jochen Bartsch

Matematické vzorce

ACADEMIA
PRAHA 2006

KATALOGIZACE V KNIZE – NÁRODNÍ KNIHOVNA ČR

Bartsch, Hans-Jochen
Matematické vzorce / Hans-Jochen Bartsch ; [z německého originálu ... přeložil, upravil a doplnil Zdeněk Tichý]. – Vyd. 4., V nakl. Academia 1. – Praha : Academia, 2006. – 832 s.
Název originálu: Mathematische Formeln
ISBN 80-200-1448-9

51-32
– matematické vzorce
– příručky

51 – Matematika

ISBN 80-200-1448-9

Rovnice normály v regulárním bodě $P[x_0, y_0, z_0]$ k ploše dané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$:

$$\frac{X - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_0,\, y=y_0,\, z=z_0}} = \frac{Y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=x_0,\, y=y_0,\, z=z_0}} = \frac{Z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x=x_0,\, y=y_0,\, z=z_0}}.$$

7. INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

7.1. DEFINICE NEURČITÉHO INTEGRÁLU

Primitivní funkce

Funkce F se nazývá *primitivní funkce k funkci f na intervalu* (a, b) (připouští se $a = -\infty$, $b = +\infty$), jestliže pro $\forall x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Neurčitý integrál

Zápis $\int f(x)\,dx$ představuje **množinu všech primitivních funkcí** k funkci f a nazývá se *neurčitý integrál* $\langle z \rangle$ *funkce f*.

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, přičemž $F'(x) = f(x)$ a C je libovolná konstanta. Funkce f se nazývá *integrand* nebo *integrovaná funkce*, *x integrační proměnná*, *C integrační konstanta a $\int$ integrační znak.*

Protože integrační konstanta C může nabývat libovolného reálného čísla, přísluší danému integrandu nekonečně mnoho primitivních funkcí. Každé určité hodnotě integrační konstanty C přísluší právě jedno *parciální řešení*. Geometricky to znamená, že existuje nekonečně mnoho integrálních křivek, které vzniknou jedna z druhé rovnoběžným posunutím ve směru druhé souřadnicové osy.

Funkce f se nazývá *integrovatelná*, existuje-li k ní primitivní funkce F. **Každá spojitá funkce je integrovatelná.**

7.2. ZÁKLADNÍ INTEGRÁLY

Pokud u vzorců nejsou v závorkách připojeny další omezující podmínky, platí vzorce pro $\forall x \in \mathrm{R}$ a pro všechny reálné hodnoty uvedených konstant. Přitom např. místo omezení platnosti vzorce na $\forall x \in (-\infty, 1) \cup \cup (1, +\infty)$ se stručně uvádí $x \neq 1$. V omezujících podmínkách je všude vynechán obecný kvantifikátor.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (x > 0,\ n \in \mathrm{R} \setminus \{-1\}).$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0),$
$\displaystyle\quad = \ln(kx) \qquad (kx > 0).$

3. $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C.$

4. $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a e + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1).$

5. $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

6. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \qquad \left(x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in \mathsf{Z}\right).$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C \qquad (x \neq k\pi,\ k \in \mathsf{Z}).$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1 \qquad (|x| < 1).$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C_1.$

11. $\displaystyle\int \sinh x \, dx = \cosh x + C.$

12. $\displaystyle\int \cosh x \, dx = \sinh x + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + C \qquad (x \neq 0).$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)}} = \operatorname{argsinh} x + C = \ln\left[x + \sqrt{(x^2 + 1)}\right] + C.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)}} = \ln\left|x + \sqrt{(x^2 - 1)}\right| + C \qquad (|x| > 1),$
$\displaystyle\quad = \operatorname{argcosh} x + C \qquad (x > 1).$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C \qquad (|x| \neq 1),$
$\displaystyle\quad = \operatorname{argtgh} x + C \qquad (|x| < 1),$
$\displaystyle\quad = \operatorname{argcotgh} x + C \qquad (|x| > 1).$

Ze vzorce 17 plyne

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C \qquad (|x| \neq 1),$$
$$= -\operatorname{argtgh} x + C \qquad (|x| < 1),$$
$$= -\operatorname{argcotg} x + C \qquad (|x| > 1).$$

7.3. ZÁKLADNÍ INTEGRAČNÍ PRAVIDLA

Integrace součtu nebo rozdílu funkcí (f, g a h jsou integrovatelné funkce):

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx - \int h(x) \, dx.$$

Integrace funkce s multiplikační konstantou (f je integrovatelná funkce):

$$\int c\, f(x) \, dx = c \int f(x) \, dx.$$

Substituční metoda

a) Neurčitý integrál $\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t) \, dt$ vypočteme tak, že najdeme libovolnou primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x)$ a do výsledku za proměnnou x dosadíme $x = \varphi(t)$:

$$\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t) \, dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Přitom předpokládáme, že funkce φ má spojitou derivaci φ' na intervalu (α, β), funkce f je spojitá na intervalu (a, b) a $\varphi(t) \in (a, b)$ pro všechna čísla $t \in (\alpha, \beta)$.

b) Neurčitý integrál $\int f(x) \, dx$ vypočteme tak, že najdeme libovolnou primitivní funkci $G(t)$ k funkci $f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$ a do výsledku za proměnnou t dosadíme $t = \psi(x)$, kde ψ je inverzní funkce k funkci φ na intervalu (α, β):

$$\int f(x) \, dx = G(\psi(x)) + C.$$

Přitom kromě předpokladů uvedených v bodě a) ještě předpokládáme existenci inverzní funkce ψ. Protože zpravidla z dané funkce $t = \psi(x)$ odvozujeme vztah $x = \varphi(t)$, je třeba také ověřit existenci a spojitost funkce φ na intervalu (α, β).

Často se vyskytující substituce

$$ax + b = t, \quad dx = \frac{1}{a}\,dt \quad (a \neq 0);$$

$$\frac{x}{a} = t, \quad dx = a\,dt \quad (a \neq 0);$$

$$\frac{a}{x} = t, \quad dx = -\frac{a}{t^2}\,dt \quad (a \neq 0,\ x \neq 0);$$

$$a^x = t, \quad dx = \frac{dt}{t \ln a} \quad (a \neq 1,\ a > 0);$$

$$e^x = t, \quad dx = \frac{1}{t}\,dt;$$

$$\ln x = t, \quad dx = e^t\,dt \quad (x > 0);$$

$$a + bx^2 = t, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{(bt - ab)}} \quad (x > 0 \text{ nebo } x < 0,\ b \neq 0);$$

$$a^2 + x^2 = t, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{(t - a^2)}} \quad (x > 0 \text{ nebo } x < 0);$$

$$\sqrt{(a^2 + x^2)} = t, \quad dx = \frac{t\,dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)}};$$

$$\sqrt{(a^2 - x^2)} = t, \quad dx = -\frac{t\,dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)}} \quad (|x| < |a|);$$

$$\sqrt{(x^2 - a^2)} = t, \quad dx = \frac{t\,dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)}} \quad (|x| > a);$$

$$\sqrt{(a + bx)} = t, \quad dx = \frac{2t\,dt}{b} \quad (a + bx \geqq 0,\ b \neq 0);$$

$$\sqrt{x} = t, \quad dx = 2t\,dt \quad (x \geqq 0);$$

$$\sqrt[n]{(a + bx)} = t, \quad dx = \frac{nt^{n-1}\,dt}{b} \quad (a + bx \geqq 0,\ b \neq 0).$$

Substituce pro speciální integrály

1. $$\int f(x, \sqrt{(a^2 - x^2)})\,dx \quad (|x| \leqq |a|).$$

Substituce

$$x = a \sin t, \qquad dx = a \cos t\,dt$$

dává

$$\int f(a \sin t,\ a \cos t)\, a \cos t\,dt.$$

Po integraci dosadíme

$$t = \arcsin\frac{x}{a},$$

$$\sin t = \frac{x}{a}, \qquad \operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}, \qquad \operatorname{cotg} t = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}.$$

Příklad:

Integrál

$$\int \sqrt{(a - x^2)}\,dx$$

vypočteme pomocí substituce $x = a \sin t$, $dx = a \cos t\,dt$. Dostaneme

$$\int [\sqrt{(a^2 - a^2 \sin^2 t)}]\, a \cos t\,dt = a^2 \int \cos^2 t\,dt =$$
$$= a^2(\tfrac{1}{2} \cos t \sin t + \tfrac{1}{2} t),$$

kde jsme použili vzorce 14 z článku 7.4.3. Po zpětném dosazení máme

$$\int \sqrt{(a - x^2)}\,dx = \frac{a^2}{2}\,\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}\,\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a}.$$

2. $$\int f(x, \sqrt{(a^2 - x^2)})\,dx \quad (|x| \leqq |a|).$$