Şi totuşi, de ce 'mama naibii' trebuie să învăţ eu, ditamai studentul la FEAA şi viitorul ultra-, hyper-, mega-specialist în economie, despre *matrici, rangul şi inversa unei matrici, sisteme de ecuaţii liniare, etc.* când singurul lucru pe care trebuie să-l ştiu, ca să ajung bogat ca şi Becali (Bill Gates, Mark Zuckerberg,… pentru pretenţioşi), este să număr banii! Aşa că, daţi-mi naibii mai repede diploma şi lăsaţi-mă cu tâmpenia asta de MATEMATICĂ!!! Mamăăă…, ajutor că mă omoară profii ăştia de mate!

Păi, uite, tocmai de-aia:

1. Modelul lui LEONTIEF: analiza de tip INPUT-OUTPUT în teoria sistemelor economice

1.1 Cine/ce este LEONTIEF?

- **este un 'EL', un economist** (*cum veţi ajunge şi voi peste câţiva ani*, **să sperăm că nu prea mulţi…);**
- **Wassily W. Leontief s-a născut în 1906 la Sankt-Petersburg** (*autorităţile ruse i-au scris pe certificatul de naştere 1905, dar na, se mai întâmplă*) **şi a decedat în 1999 la New York** (*deci, …93 de ani*);
- **a studiat la Universitatea de Stat din Moscova şi la cea din Leningrad (1921-1925)** (*pe vremea lui se numea Petrograd*)**, a obţinut titlul de doctor în economie la Universitatea din Berlin (1928) a lucrat în calitate de cercetător la Institutul de Economie Agrară din Kiel (1927-1928) şi a fost profesor la Harvard (1946-1975) respectiv la Universitatea New York (1975-1999)** (*băi frate, ăsta nu s-a mai oprit cu învăţatul, nu-i sănătos cu capu…)*;
- **în 1973, devine laureat al premiului Nobel în economie, pe baza teoriei INPUT-OUTPUT dezvoltată de el, teorie care analizează legăturile (interdependenţele) sectoriale din cadrul unui sistem economic** (*brrr, ce de cuvinte complicate*)**;**
- **aplicând această teorie şi analizând mai bine de 500 de sectoare (industrii) ale economiei SUA între anii 1965-1970, a demonstrat** (*spre stupefacţia tuturor economiştilor, antreprenorilor şi politicienilor de atunci*) **că ţara cea mai bogată în capital** (*bani*)**, şi anume SUA, exportă mărfuri care înglobează mai multă forţă de muncă** (*labor*) **decât resurse financiare** (*capital*)**. Şi pentru că această descoperire** (*foarte neplăcută pentru ceilalţi mari economişti ai epocii*) **trebuia să poarte un nume, au numit-o simplu: Paradoxul lui Leontief.**
- **din motive parţial necunoscute, de genul:** *"Bă, ăsta-i chiar şmecher…", "Mamăăă…, ce tare-i tipul, nu înţeleg nimic din ce zice…", "Hai să-i dăm rapid un job, că mai descoperă vreo 2-3 paradoxuri şi ne face pe toţi de cacao!"*:
  - ✓ **Guvernul Chinei la invitat (1930) să le fie consilier economic la Ministerul Căilor Ferate Chineze;**
  - ✓ **Preşedintele american F.D. Roosevelt la pus şef (1946) la Departamentul de Statistică al SUA;**
  - ✓ **Guvernele Italiei, Norvegiei şi Japoniei l-au rugat să le facă o analiză asupra economiei ţărilor lor şi să le ofere recomandări practice pentru o viitoare creştere economică;**
  - ✓ **Guvernele Spaniei şi Marocului i-au cerut o analiză economică cu privire la cea mai bună soluţie** (*economică*) **de tranversare a Strâmtorii Gibraltar: *tunel sau pod?***
  - ✓ **din (ne-) fericire, Guvernele României din perioada 1990-1999, nu i-au cerut nimic (*eziztă o ezplicaţie:*** *băi, ce puii mei, ăsta e rus (hai că totuşi nu-i chiar aşa de naşpa), dar e şi american (asta-i nasol tare*, *capitalism, Soroş, democraţie*, *alea-alea…*, *la-s că ştim noi mai bine cum e cu 'economia de piaţă' adică cu 'economia furatului' sau 'furatul economiei' că tot aeea e…*)**, iar cele de după 1999 probabil ar fi vrut, dar nu aveau (încă) un expert, membru de partid, capabil să traducă ce spun fantomele!**

În concluzie*, din păcate LEONTIEF, nu-i nici:** *manelist, cocalar de Dorobanţi, piţiponc de Bamboo, nu-i nici rapper, rocker, Beyonce sau Inna, şi nici măcar o marcă de bere sau de parfum!* ***Deci TOTAL INSIGNIFIANT! (sper că nu v-aţi scrântit limba citind ultimul cuvânt). ***Şi atunci, de ce… LEONTIEF? Păi…, vezi mai jos, …pe paginile următoare!***

P.S.: Trataţi textul de mai sus ca un PAMFLET, dar nu în totalitate! Ce urmează este chiar serios, adică MATEMATICĂ!

1.2 Ce este analiza INPUT-OUTPUT?

Analiza INPUT-OUTPUT este o analiză macro-economică care stabileşte condiţiile de realizare a echilibrului privind <u>cererea şi oferta</u> în cadrul unei economii (naţionale, regionale, locale, etc) formată dintr-un număr oarecare *”n”* de ramuri (industrii, sectoare). Adică dorim să determinăm cantitatea de mărfuri/servicii (ca volum de produse fizice sau în echivalent monetar) care trebuie fabricată/produsă de diferitele ramuri (industrii) ale economiei respective, astfel încât să acopere atât necesarul propriu de consum al acestora (cerere internă) dar şi cererea externă (pentru comerţ, export, stocuri, etc.).

<u>Exemplu</u>:

“Vom analiza o economie ipotetică cu 3 ramuri/sectoare: industria cărbunelui **(C)**, industria oţelului **(O)** şi industria energetică **(E)**. În tabelul de mai jos, sunt date consumurile specifice unitare necesare pentru consumul propriu (cererea internă) al fiecărei industrii şi cantităţile totale necesare pentru consumul extern (cererea externă sau cererea finală).

<u>Cererea internă</u>	**(C)** ptr. fiecare tonă	**(O)** ptr. fiecare tonă	**(E)** ptr. fiecare Mwh
(C) nr. de tone necesare	0	0,27	0,13
(O) nr. de tone necesare	0,008	0,08	0,02
(E) nr de Mwh necesari	0,1	1,15	0,07

<u>Cererea externă</u> <u>(în milioane)</u>
18,3 (tone)
24,7 (tone)
33,5 (Mwh)

Cu alte cuvinte pentru **<u>a produce</u>**:

- **1 tonă de cărbune**, este nevoie de: 8 Kg de oţel şi de 100 Kwh de energie electrică;

- **1 tonă de oţel**, este nevoie de: 270 Kg de cărbune, 80 Kg de oţel şi 1.150 Kw de energie electrică;

- **1 Mwh de energie electrică**, este nevoie de: 130 Kg de cărbune, 20 Kg de oţel şi 70 Kw de energie electrică.

Necesarul pentru **<u>consumul extern</u>** (alte ramuri industriale care nu sunt cuprinse în model, export, pentru populaţie, etc.) este de: 18,3 milioane tone de cărbune; 24,7 milioane tone de oţel şi 33,5 milioane de megawatt/oră (33.500.000 Mwh) de energie electrică.

<u>Se cere să se stabilească producţia optimă (adică cea care satisface atât consumul intern al celor trei industrii, dar şi cererea externă) de cărbune, oţel şi energie electrică.”</u>

Tabelul de mai sus, al cererii interne, se numeşte **Tabelul Input-Output (TIO)** sau <u>Tabel intersectorial.</u>

Introducem următoarele matrici:

- **matricea Input-Output** (matricea tehnologică, matricea coeficienţilor tehnici):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,27 & 0,13 \\ 0,008 & 0,8 & 0,02 \\ 0,1 & 1,15 & 0,07 \end{pmatrix}$$

- valorile sunt exprimate în (fracţiuni de) tonă sau de Mwh

- **matricea cererii externe** (finale):

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18,3 \\ 24,7 \\ 33,5 \end{pmatrix};$$ valorile fiind exprimate în milioane (de tone, respectiv Mwh)

- **matricea cererii totale** (de producţie):

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ unde

$$\begin{cases} x_1\text{-cantitatea totala (in milioane de tone) de carbune care trebuie produsa de (C);} \\ x_2\text{-cantitatea totala (in milioane de tone) de otel care trebuie produsa de (O);} \\ x_3\text{-cantitatea totala (in milioane de Mwh) de energie care trebuie produsa de (E);} \end{cases}$$

Din datele problemei avem, egalităţile:

$$\begin{cases} [\text{cantitatea totala de carbune care trebuie produsa}]-[\text{cererea interna}]=[\text{cererea externa}] \\ [\text{cantitatea totala de otel care trebuie produsa}]-[\text{cererea interna}]=[\text{cererea externa}] \\ [\text{cantitatea totala de energie care trebuie produsa}]-[\text{cererea interna}]=[\text{cererea externa}] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} [x_1]-[a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3]=[b_1] \\ [x_2]-[a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3]=[b_2] \\ [x_3]-[a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3]=[b_3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [x_1]-[0\cdot x_1+0,27x_2+0,13x_3]=[18,3] \\ [x_2]-[0,008x_1+0,08x_2+0,02x_3]=[24,7] \\ [x_3]-[0,1x_1+1,15x_2+0,7x_3]=[33,5] \end{cases}$$ *sau scris matricial:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0,27 & 0,13 \\ 0,008 & 0,08 & 0,02 \\ 0,1 & 1,15 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18,3 \\ 24,7 \\ 33,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$X-AX=B \Leftrightarrow I_3\cdot X-A\cdot X=B \Leftrightarrow (I_3-A)\cdot X=B \Leftrightarrow X=(I_3-A)^{-1}\cdot B$$

Avem deci:

$$I_3-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0,27 & 0,13 \\ 0,008 & 0,08 & 0,02 \\ 0,1 & 1,15 & 0,7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -0,27 & -0,13 \\ -0,008 & 0,92 & -0,02 \\ -0,1 & -1,15 & 0,3 \end{pmatrix}$$ *iar inversa acesteia este:*

$$(I_3-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1,06 & 0,966 & 0,524 \\ 0,019 & 1,2 & 0,88 \\ 0,424 & 4,93 & 3,846 \end{pmatrix}$$ *Atunci solutia problemei X este:*

$$X=(I_3-A)^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 1,06 & 0,966 & 0,524 \\ 0,019 & 1,2 & 0,88 \\ 0,424 & 4,93 & 3,846 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18,3 \\ 24,7 \\ 33,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 60,8 \\ 33 \\ 258,4 \end{pmatrix}$$

Cu alte cuvinte, pentru a fi onorată cererea externă:

- industria cărbunelui trebuie să producă cantitatea de 60.800.000 tone de cărbune;

- industria oţelului trebuie să producă cantitatea de 33.000.000 tone de oţel;

- industria energetică trebuie să producă cantitatea de 258.400.000 Mwh;

Evident sistemul are soluţie unică dacă există matricea $A' = (I_3 - A)^{-1}$.În plus, soluţia sistemului liniar este compatibilă economic, numai dacă matricea coloană **X** are toate elementele pozitive (**X>0**).

Obs: Absolut analog, putem construi un model similar dar utilizând valori monetare. Atunci:

$$\begin{cases} x_i \ ; i=\overline{1,3} - \textit{sumele totale de bani (de ex. in milioane Euro) care trebuie produse de cele 3 industrii;} \\ a_{ij} \ ; i,j=\overline{1,3} - \textit{cuantumul in bani a materialelor din industria "j" necesar pentru a se produce 1 (Euro) de industria "i";} \\ b_i \ ; i=\overline{1,3} - \textit{profitul final al industriei "i" (in milioane Euro), evident dupa scaderea cheltuielilor de productie;} \end{cases}$$

Modelul general este pentru un număr de "***n***" industrii/sectoare economice.

2. Probleme de programare liniară: Algoritmul SIMPLEX

Exemplu:

„O companie produce 3 tipuri de genţi pentru laptop (normale, de lux şi VIP) să le numim: **P_1, P_2, P3**, utilizând 5 tipuri de resurse: **M_1** (piele)**, M_2** (fermoare)**, M_3** (material textil)**, M_4** (capital=bani)**, M_5** (ore muncă) în cantităţile din tabelul de mai jos:

	M_1 (piele/m^2)	**M_2** (fermoare/buc.)	**M_3** (material textil/m^2)	**M_4** (capital/Euro)	(ore de muncă/h)
P_1	0.85	4	1.25	32	4
P_2	1.10	6	1.30	38	6
P_3	1.55	5	0.55	52	7

Compania vinde fiecare din cele trei tipuri de genţi cu următoarele preţuri: **46** Euro, **55** Euro şi **72** Euro. *Câte genţi de fiecare tip ar trebui să producă compania, pentru a avea profit maxim, ştiind că au la dispoziţie: **450** m^2 de piele, **1.500** de fermoare, **355** m^2 de material textil, **14.500** Euro capital iniţial şi **760** ore de muncă?"*

Notăm cu: x_1, x_2, x_3 numărul de genţi de fiecare tip care ar trebui produs.

Modelul matematic (este o Problemă de Programare Liniară _PPL):

$$(1)\quad (\max) f(x_1, x_2, x_3) = 46x_1 + 55x_2 + 72x_3$$

$$(2)\begin{cases} 0.85x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 \le 450 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 1.500 \\ 1.25x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 \le 355 \\ 32x_1 + 38x_2 + 52x_3 \le 14.500 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 760 \end{cases}$$

$$(3)\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Pentru a o putea rezolva trebuie să aducem sistemul liniar de inecuaţii (2) la **forma standard**:

$$(1)\quad (\max) f(x_1, x_2, x_3) = 46x_1 + 55x_2 + 72x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

$$(2)\begin{cases} 0.85x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 + x_4 = 450 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 1.500 \\ 1.25x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 + x_6 = 355 \\ 32x_1 + 38x_2 + 52x_3 + x_7 = 14.500 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + x_8 = 760 \end{cases}$$ - *sistem cu 5 ecuatii si 8 necunoscute (compatibil nedeterminat)*

$$(3)\quad x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_8 \ge 0$$

Seminar 1 — Ecuații liniare. Sisteme de ecuații liniare. Matrici atașate

I.1. Ecuații liniare cu n-necunoscute

Def: Numim ecuație liniară (cu coeficienți reali) cu „n" necunoscute, expresia algebrică de forma:

$$(1.1)\quad a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_jx_j+\dots+a_nx_n=b \quad ; \begin{cases} a_j\in\mathbb{R},\ j=\overline{1,n},\ b\in\mathbb{R} \\ (*)\ a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\neq 0 \quad \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\neq 0\right)\end{cases}$$

Obs:

i) necunoscutele (variabilele) sunt: $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$

ii) coeficienții necunoscutelor (ai ecuației) sunt constantele reale: $a_1,a_2,\dots,a_n$

iii) constanta reală $b\in\mathbb{R}$, se numește termenul liber al ecuației (poate fi și $=0$)

iv) condiția $(*)$ $\sum_{j=1}^{n} a_j^2\neq 0$ impune ca măcar unul dintre coeficienții necunoscutelor să fie nenul ($\neq 0$) (adică $(*) \Leftrightarrow (\exists)\ a_j\neq 0$ pt. $j\in\{1,2,\dots,n\}$)

Ex: a) $2x_1+3x_2-x_3=4$ → ec. lin. cu 3 necunoscute cu: $\begin{cases}a_1=2\\a_2=3\\a_3=-1\end{cases}$; $b=4$

b) $-3x_1+x_2-2x_4+x_5=-7$ → ec. liniară cu 5 necunoscute ($a_1=-3, a_2=1, a_3=0, a_4=-2$, $a_5=1$; $b=-7$)

c) $2x_2-x_6=0$ → ec. lin. cu 6 necunoscute ($a_1=a_3=a_4=a_5=0$, $a_2=2$, $a_6=-1$; $b=0$)

d) $3x_1+\underbrace{x_2\cdot x_3}_{!}-x_4=2$ → nu este ec. lin!

Def: Numim soluție (particulară) a ecuației liniare (1.1) un ansamblu de „n" numere reale: $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_j^0,\dots,x_n^0)\overset{not}{\equiv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)$ care verifică ecuația, adică:

$$(1.2)\quad a_1x_1^0+a_2x_2^0+\dots+a_nx_n^0=b \iff (1.2')\quad a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_n\alpha_n=b$$

Ex: Pentru ecuațiile de mai jos, am scris câteva soluții particulare:

a) $2x_1-x_2=4$ → $\begin{cases}(2,0);\ (3,2);\\ (-1,-6);\ (1,-2)\end{cases}$

b) $x_1+x_2+x_3=-1$ → $\{(0,-1,0);\ (2,2,-5);\ (1,0,-2);\ (1,1,-3)$

c) $2x_1-x_2+x_3-x_4=0$ → $\begin{cases}(1,1,1,2);\ (2,0,-1,1)\\ (0,-3,2,5);\ (0,0,4,4)\end{cases}$

Obs: i) se observă că o ec. liniară cu minim 2 necunoscute are mai multe (o infinitate) de soluții particulare

ii) notăm: $(1.3)\quad S=\{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_n\alpha_n=b\}$ → mulțimea soluțiilor ec. lin. (1.1)

iii) mulțimea soluțiilor (S) se determină rezolvând ecuația (1.1) în funcție de una dintre necunoscute (x_j → variabila principală (independentă) cu coef. $a_j \neq 0$) în raport cu celelalte necunoscute (x_i, $i=\overline{1,n}$, $i \neq j$ → variabile secundare (dependente))

Ex: a) $x_1 + x_2 = 2$

Dem:

a₁) alegem variabila principală pe „x_1":

$$x_1 = 2 - x_2 \overset{not\ x_2=\beta}{\iff} \begin{cases} x_1 = 2-\beta & \to \text{variab. principală} \\ x_2 = \beta & \to \text{variab. secundară} \end{cases} \iff S_1 = \{(\underbrace{2-\beta}_{\overset{not}{=}\alpha_1}, \underbrace{\beta}_{\overset{not}{=}\alpha_2}) \in \mathbb{R}^2 / \beta \in \mathbb{R}\}$$

a₂) alegem variabila principală pe „x_2":

$$x_2 = 2 - x_1 \iff \begin{cases} x_1 = \gamma & \to \text{variab. princ.} \\ x_2 = 2-\gamma & \to \text{variab. sec.} \end{cases} \iff S_2 = \{(\underbrace{\gamma}_{\alpha_1}, \underbrace{2-\gamma}_{\alpha_2}) \in \mathbb{R}^2 / \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Obs: Aparent, mulțimile de soluții S_1 și S_2 sunt diferite, dar nu este adevărat. Cele două mulțimi coincid ($S_1 \equiv S_2$), ordinea elementelor în fiecare dintre ele este diferi[tă]. De exemplu, ptr. $\beta = 0$ se obține soluția particulară $(2,0) \in S_1$. Aceeași soluție se obține pentru $\gamma = 2$, adică $(2,0) \in S_2$

b) $2x_1 - x_2 + 3x_2 = 5$

Dem: Alegând x_1 variabila principală și $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ variabile secundare, avem:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \in \mathbb{R} \iff S = \{(\underbrace{\tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{3}{2}\beta}_{=\alpha_1}, \underbrace{\alpha}_{=\alpha_2}, \underbrace{\beta}_{=\alpha_3}) \in \mathbb{R}^3 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

c) $3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$

Dem: Alegând pe x_4 var. princ., obținem soluția generală (de fapt o să vedem că se numește forma explicită a soluției gen.) de forma:

$$\begin{cases} x_4 = -3\alpha + 2\gamma & \to \text{v. princ.} \\ x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \gamma \end{cases} \quad \text{v. sec.}$$

deci:

$$S = \{(\alpha, \beta, \gamma, -3\alpha + 2\gamma) \in \mathbb{R}^4 / \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Obs: pentru a determina o soluție particulară a unei ec. lin. cu „n" necunoscute de tipul (1.1) se dau valori particulare pentru „n-1" dintre necunoscute și se afle (rezolvând o ec. de gr. I) valoarea celei de a „n-a" variabile.

Ex: Fie ec: $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$

pt. $\begin{cases} x_1 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = -1 \Rightarrow 4 + 3x_2 - 3 - 2 = -3 \iff 3x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = -\frac{4}{3} \iff (2, -\frac{4}{3}, 3, -1) \text{ sol. part.} \\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1 \Rightarrow 2x_1 - 1 + 2 = -3 \iff 2x_1 = -4 \iff x_1 = -2 \iff (-2, 0, 1, 1) \to \text{sol. part.} \end{cases}$

Cazuri particulare:

1) **Ec. lin. cu o necunoscută (variabilă)**: $(*)$ $ax=b$; $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

i) ec. are soluție unică: $x_0=\frac{b}{a}$

ii) interpretare geometrică: soluția este un punct de pe axa nr. reale Ox: $\underset{0}{\cdot}\longrightarrow \underset{x_0=\frac{b}{a}}{\cdot} \longrightarrow x$

Obs: • ec. $(*)$ se mai numește și ec. de gr. I, întâlnită sub forma: $ax+b=0$

- acest caz particular nu-l vom întâlni în aplicațiile pe care le vom studia
- exemple economice (de folosire a acestei ec.): "un produs oarecare costă cu tot cu T.V.A 100 lei. Cât este prețul produsului fără TVA (TVA = 19%)"

Dem: notăm x = prețul produsului fără T.V.A. Atunci:

$$\underbrace{x}_{\text{preț fără TVA a produsului}}+\underbrace{0{,}19x}_{\text{valoarea T.V.A a produsului}}=\underbrace{100}_{\text{preț final (total)}} \Leftrightarrow 1{,}19x=100 \Leftrightarrow x=\frac{100}{1{,}19}^{)100}=\frac{10.000}{119}\simeq \underline{84{,}0336 \text{ lei}}$$

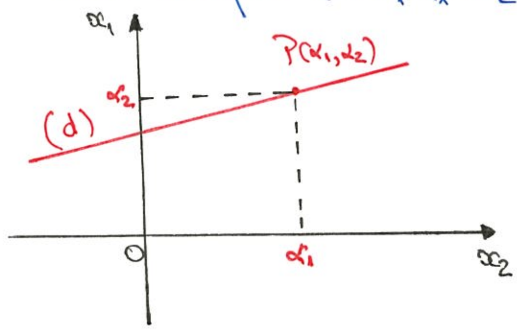
Obs: $19\%=\frac{19}{100}=0{,}19$

2) **Ec. lin. cu două necunoscute**: $(**)$ $a_1x_1+a_2x_2=b$; $a_1,a_2,b\in\mathbb{R}$, $a_1^2+a_2^2\neq 0$

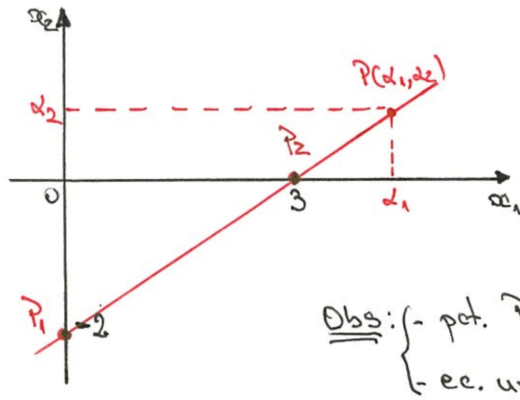
i) $(**)\Leftrightarrow ax+by=c$ sau $ax+by+c=0$ $(x_1,x_2 \leftrightarrow x,y)$

ii) ec. are o infinitate (simplă) de soluții: $S=\{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2 \mid a_1\alpha_1+a_2\alpha_2=b\}$

iii) interpretare geometrică: fiecare soluție particulară (α_1,α_2) este un punct $P(\alpha_1,\alpha_2)\in(d)$ unde dreapta (d) $a_1x_1+a_2x_2=b \subset x_1Ox_2$ $(\equiv xOy)$



Ex: Fie ec. lin: $2x_1-3x_2=6 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \Rightarrow x_2=-2 \Leftrightarrow P_1(0,-2) \\ x_2=0 \Rightarrow x_1=3 \Leftrightarrow P_2(3,0)\end{cases}$



$$S=\{(\overbrace{3-\tfrac{3}{2}\alpha}^{=\alpha_1},\overbrace{\alpha}^{=\alpha_2}) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}=\{(\overbrace{\beta}^{\alpha_1},\overbrace{\tfrac{2}{3}\beta-6}^{\alpha_2}) \mid \beta\in\mathbb{R}\}$$

Obs: $\begin{cases}\text{- pct. } P_1, P_2, P \text{ sunt soluții particulare ale ecuației } 2x_1-3x_2=6 \\ \text{- ec. unei drepte într-un plan are ec. gen: } a x_1+bx_2+c=0 \\ \qquad (ax+by+c=0)\end{cases}$

Ex (economic): O brutărie folosește 500g de făină albă pentru o pâine și 850 g pentru un cozonac. Scrieți restricția (condiția) pe care trebuie să o satisfacă nr. de produse, știind că consumul zilnic de făină este de 100 kg. Reprezentați grafic.

Dem: not: $\begin{cases} x_1 \text{ - nr. de pâini care se fabrică zilnic} \\ x_2 \text{ - nr. de cozonaci care se fabrică zilnic}\end{cases}$

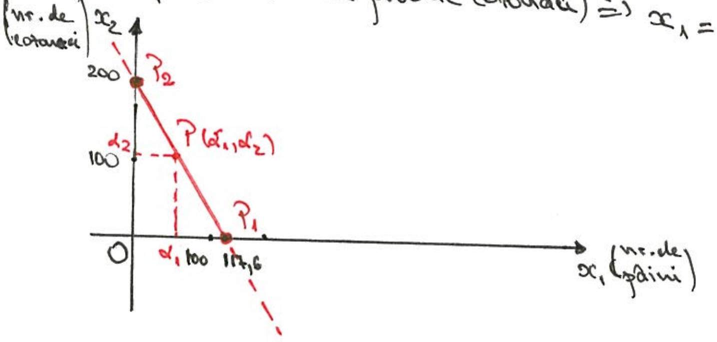
Avem condiția de a se consuma zilnic, exact 100 de kg de făină, de forma:

$(\overset{*}{*})\ 0,5x_1 + 0,85x_2 = 100$ (în kg)

$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{cant. de făină}\\ \text{ptr. 1 pâine}\end{pmatrix}}_{0,5\,(kg/\cancel{buc.})} \times \underbrace{\begin{pmatrix}\text{nr. de pâini ce}\\ \text{urmează a fi produse}\end{pmatrix}}_{x_1\,(\cancel{buc.})} + \begin{pmatrix}\text{cant. de făină}\\ \text{ptr. un cozonac}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{nr. de cozonaci care}\\ \text{urmează a fi produși}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cant. totală de făină}\\ \text{avută la dispoziție}\end{pmatrix}$

$\underbrace{0,5\,(kg/\cancel{buc.}) \cdot x_1\,(\cancel{buc.})}_{\text{în „kg"}} + \underbrace{0,85\,(kg/\cancel{buc}) \cdot x_2\,(\cancel{buc})}_{\text{în „kg"}} = 100\,(kg)$

Dacă $\begin{cases} x_1 = 0 \text{ (nu se produc pâini)} \overset{(\overset{*}{*})}{\Rightarrow} x_2 = \dfrac{100}{0,85} \cong 117,65 \text{ (cozonaci)} \Rightarrow P_1(0;117,65) \\ x_2 = 0 \text{ (nu se produc cozonaci)} \overset{(\overset{*}{*})}{\Rightarrow} x_1 = \dfrac{100}{0,5} = 200 \text{ (pâini)} \Rightarrow P_2(200;\ 0) \end{cases}$



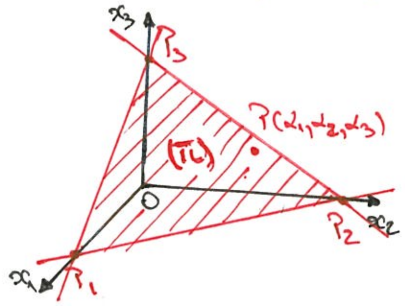
Obs $\begin{cases}\text{i) evident are sens economic, doar porțiunea din dreaptă aflată în cadranul I } (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0) \\ \text{ii) soluțiile reale econ. (nu strict matem.) sunt doar cele ptr. care } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N} \text{ (valorile sunt nr. întregi (naturale) nu nr. reale)}\end{cases}$

3) Ec. lin. cu trei necunoscute: $(\overset{*}{**})\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$; $\begin{cases} a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,3} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$; $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$

i) $(\overset{*}{**}) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz = d \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

ii) ec. are o infinitate (dublă) de soluții: $S = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R} \mid a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = b\}$

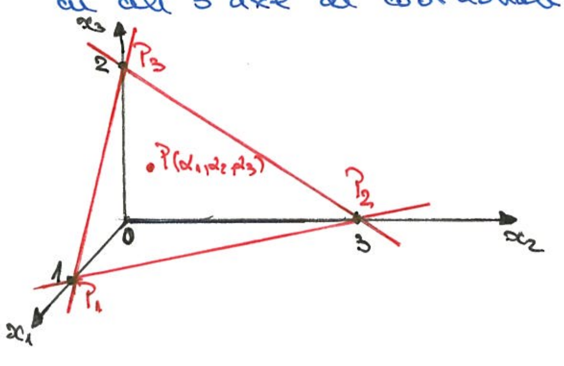
iii) interpretare geometrică: fiecare soluție particulară $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ este reprezentată de un punct $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in (\pi)$ unde planul $(\pi)\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \subset Ox_1x_2x_3\ (\equiv Oxyz)$



Obs $\begin{cases}\text{i) punctele } P_1, P_2, P_3, P \text{ sunt sol. partic. ale ec. } (\overset{*}{**}) \\ \text{ii) ec. generală unui plan în spațiu este de forma: } \\ \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \text{ (sau: } ax + by + cz + d = 0) \end{cases}$

Ex: Reprezentați grafic ec. lin.: $(\overset{*}{**})\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \Leftrightarrow P_1(1,0,0) \\ x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \Leftrightarrow P_2(0,3,0) \\ x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 2 \Leftrightarrow P_3(0,0,2) \end{cases}$

Obs: un plan este unic determinat de 3 puncte (necoliniare); am ales cele 3 puncte, intersecțiile planului cu cele 3 axe de coordonate



Obs: i) în problemele cu caracter economic, uzual apare și condiția $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. În această situație soluțiile ec. $(\overset{*}{**})$ sunt coordonatele punctelor $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ aflate pe laturile $\triangle ABC$ și în interiorul acestuia

ii) de multe ori $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ deci ne vor interesa doar acele puncte $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ unde $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,3}$

Soluția generală a ec.$(\overset{*}{**})$ poate fi scrisă sub una din următoarele trei forme:

i) $\begin{cases} x_1 \to \text{var. princip.} \\ x_2 = \beta \in \mathbb{R} \to \text{var. sec.} \\ x_3 = \gamma \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{(\overbrace{1 - \tfrac{1}{3}\beta - \tfrac{1}{2}\gamma}^{=\alpha_1};\ \overset{=\alpha_2}{\beta};\ \overset{=\alpha_3}{\gamma}) \in \mathbb{R}^3 \ /\ \beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$

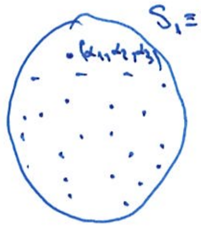
ii) $\begin{cases} x_2 \to \text{var. princ.} \\ x_1 = \alpha \\ x_3 = \gamma \end{cases}\Big\rangle \text{v. sec.} \Rightarrow S_2 = \{(\overset{=\alpha_1}{\alpha},\ \overbrace{3 - 3\alpha - \tfrac{3}{2}\gamma}^{=\alpha_2},\ \overset{=\alpha_3}{\gamma}) \in \mathbb{R}^3 / \alpha,\gamma \in \mathbb{R}\}$

iii) $\begin{cases} x_3 - \text{var. princ.} \\ x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \end{cases}\Big\rangle \text{v. sec.} \Rightarrow S_3 = \{(\overset{=\alpha_1}{\alpha},\ \overset{=\alpha_2}{\beta},\ \overbrace{2 - 2\alpha - \tfrac{2}{3}\beta}^{=\alpha_3}) \in \mathbb{R}^3 / \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$

Obs i) aparent S_1, S_2, S_3 sunt diferite dar de fapt coincid $S_1 \equiv S_2 \equiv S_3$ (diferă doar ordinea elem. în fiecare mulțime)

ii) întradevăr pt. $\begin{cases} \beta = \gamma = 0 \overset{S_1}{\Longrightarrow} (1,0,0) \in S_1 \\ \alpha = 1;\ \gamma = 0 \overset{S_2}{\Longrightarrow} (1,0,0) \in S_2 \\ \alpha = 1;\ \beta = 0 \overset{S_3}{\Longrightarrow} (1,0,0) \in S_3 \end{cases}$

$S_1 \equiv S_2 \equiv S_3$



→ mulț. soluțiilor ec.$(\overset{*}{**})$

I2) Sisteme de „m" ecuații liniare cu „n" necunoscute ($m,n \in \mathbb{N}^*$). Matrici atașate.

Def: Numim sistem liniar de ecuații (cu coeficienți reali) un set finit de ecuații lini[are] fiecare ecuație având aceleași necunoscute adică de forma:

$$(1.4)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (\text{ec. }1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (\text{ec. }2) \\ - - - - - - - - - - - - & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i & (\text{ec. „}i\text{"}) \\ - - - - - - - - - - - - & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m & (\text{ec. „}m\text{"}) \end{cases} ;\ a_{ij}, b_i \in \mathbb{R} \text{ pt. } \begin{cases} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

→ sistem de „m" ecuații liniare cu „n" necunoscute (pe scurt: sistem liniar)

Obs: i) numerele (constantele) reale „a_{ij}" se numesc coeficienții necunoscutelor (variabilelor)
ii) numerele (constantele) reale „b_i" se numesc termenii liberi ai sistemului
iii) o parte dintre „a_{ij}" sau (toți) „b_i" pot fi egali cu zero (nuli)

sistemului (1.4) i se asociază următoarele matrici (matrice):

$$(1.5)\ A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

→ matricea coeficienților sistemului

$$(1.6)\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$

→ matricea termenilor liberi

$$(1.7)\quad \bar{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \end{array} \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$$ → matricea extinsă a sistemului

Obs: i) matricea extinsă $\bar{A}$ poate fi scrisă (ca blocuri de matrici) astfel: $\bar{A}=(A \vdots B)$ (1.7')

ii) sistemul liniar (1.4) mai poate fi scris și sub următoarele forme:

$$\begin{cases} (1.4')\quad A\cdot X = B & \to \text{forma matricială} \\ (1.4'')\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\ ;\ i=\overline{1,m} & \to \text{forma condensată} \end{cases}$$

Def: Numim soluție a sistemului de ec. liniare (1.4) un ansamblu de „n" numere reale $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ care este soluție comună (verifică) a fiecăreia dintre cele „m" ecuații. (deci înlocuind necunoscutele x_i cu constantele α_i, $i=\overline{1,n}$ în fiecare ec. acestea sunt verificate ⟺ egalitățile sunt adevărate ⟺ $a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\dots+a_{in}\alpha_n=b_i$, $i=\overline{1,m}$)

Obs: Un sistem de ecuații liniare (sistem liniar) de forma (1.4) poate să:

a) aibă o unică soluție $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$, sistemul numindu-se compatibil determinat (compatibil = are soluție, determinat = este unică)

b) aibă mai multe soluții (o infinitate) $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, sistemul numindu-se compatibil nedeterminat (compatibil = are soluție ; nedeterminat = nu este unică, sunt mai multe)

c) nu aibă soluție ($S=\emptyset$ → mulțimea vidă), sistemul numindu-se incompatibil (= nu are soluție)

Obs: dacă un sist. este incompatibil, înseamnă că nu există ($\nexists$) o soluție comună tuturor celor „m" ec. liniare (atenție, fiecare ec. lin. are o infinitate de soluții așa cum am văzut anterior, dar nu există o soluție (aceeași) pentru fiecare în parte)

Pentru a se vedea câte soluții are/nu are un sistem liniar (ce tip de sistem este) se folosește noțiunea de rang al unei matrici. Astfel, dacă:

a) $\text{rang}\,A=\text{rang}\,\bar{A}$ ⟹ sist (1.4) este compatibil

a₁) $r_A=r_{\bar{A}}=n$ (nr. de necun.) ⟹ sist. (1.4) este compatibil determinat (sol. unică)

a₂) $r_A=r_{\bar{A}}<n$ (nr. de necun.) ⟹ sist (1.4) este compatibil nedeterminat (are o ∞ de soluții)

b) $\text{rang}\,A<\text{rang}\,\bar{A}$ ⟹ sist. (1.4) este incompatibil (nu are soluție)

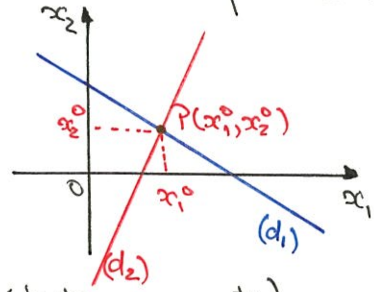
Obs: not: $\text{rang}\,A \equiv r_A$ → rangul matricei A

Interpretare geometrică (pt $n=2$ → două necunoscute; $m=2$ → două ecuații)

Fie sistemul liniar (1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (d_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (d_2) \end{cases}$

Fiecare din cele două ec. lin. cu două necun. are mulțimea soluțiilor o dreaptă din planul x_1Ox_2. Sunt posibile următoarele 3 situații:

a) sistem. comp. deter. (sol. unică)



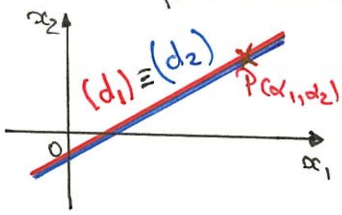
(drepte concurente)

soluția unică este (x_1^0, x_2^0), punctul P aflându-se pe ambele drepte $\begin{cases} (P \in d_1 \Rightarrow (x_1^0, x_2^0) \text{ soluție a primei ec. lin}) \\ (P \in d_2 \Rightarrow (x_1^0, x_2^0) \text{ soluție a celei de-a doua ec. lin}) \end{cases}$

Obs: (i) $\overset{\text{sist (1) are}}{}$ soluție unică $\Leftrightarrow$ dreptele se intersectează într-un (singur) punct

(ii) aici $r_A = r_{\bar{A}} = 2$ cu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$

b) sist. compat. nedeterminat (o infinitate de soluții)



(drepte care coincid)

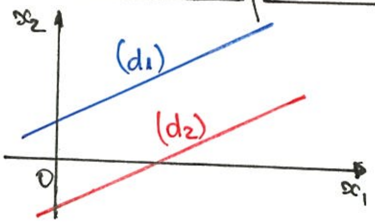
Coordonatele (α_1, α_2) ale **oricărui** punct $P(\alpha_1, \alpha_2)$ de pe cele două drepte (care coincid) sunt soluții ale sist. (1)

Obs: (i) $\overset{\text{sist. (1) are}}{}$ o infinitate de soluții $\Leftrightarrow$ dreptele coincid

(ii) $r_A = r_{\bar{A}} = 1 < 2$ (nr. nec.)

(iii) dreptele coincid dacă toți coeficienții lor sunt proporționali, adică: $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{b_1}{b_2} = \alpha$ $\left(\text{Ex:} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases} \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \right)$

c) sist. incompatibil (nu are soluție)



(drepte paralele)

Dreptele fiind paralele $\Leftrightarrow$ nu au nici un punct comun $\Leftrightarrow$ nu există o soluție comună a celor 2 ecuații $\Leftrightarrow$ sist. nu are soluții

Obs: (i) $\overset{\text{sist (1)}}{}$ nu are soluție $\Leftrightarrow$ dreptele sunt ∥

(ii) $r_A = 1 \neq r_{\bar{A}} = 2$

(iii) dreptele sunt paralele, dacă coeficienții necun. sunt proporționali dar nu și termenii liberi; adică:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \alpha \neq \frac{b_1}{b_2} \quad ; \quad \left(\text{Ex} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{4} \right)$$

Obs: dacă sistemul (1) ar avea $3, 4, \ldots, m$ ec. lin. cu 2 nec., atunci analizăm pozițiile relative ale $3, 4, \ldots, m$ drepte din planul x_1Ox_2 (dreptele: $(d_1), (d_2), \ldots, (d_m)$) ceea ce devine „puțin" mai complicat.

Ex (economic/real/practic)

a) Mihai este rugat de mama sa să cumpere niște fructe de la magazinul de la parterul blocului vecin, deoarece îi vin în vizită niște prietene. Văzând că întârzie, o trimite și pe ~~s~~ sora lui, Ioana, pentru a face aceleași cumpărături. Ioana se întoarce repede și îi spune mamei că a cumpărat 1 kg de caise și 2 kg de zmeură care au costat 19 lei. După un timp se întoarce și Mihai (făcuse un fotbal scurt cu prietenii) care cumpărase 2 kg de caise (îi plăceau tare) și 1 kg de zmeură pe care plătise 17 lei. Copiii fiind nici nu au știut să-i spună mamei cât a costat fiecare fel de fruct. Aflați voi!

Dem: not cu: $\begin{cases} x_1 - \text{costul unui kg de caise (în lei)} \\ x_2 - \text{costul unui kg de zmeură (în lei)} \end{cases}$

Atunci avem: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 \; / \cdot(-2) \\ 2x_1 + x_2 = 17 \end{cases}$ $+$

$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 19 \\ 2 & 1 & 17 \end{array}\right) \end{array} / \cdot(-2) \sim$

$(=) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 \\ \quad -3x_2 = -21 \; / \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \; / \cdot \frac{2}{3} \end{cases}$ $+$

$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 0 & \boxed{-3} & -21 \end{array}\right) \end{array} / \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \; / \cdot\left(\frac{2}{3}\right)$ $+$

$(=) \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \end{cases}$

$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \end{cases}$

transformări elementare (!)

Deci $\begin{cases} x_1 = 5 \text{ (lei)} \rightarrow \text{costul unui kg de caise} \\ x_2 = 7 \text{ (lei)} \rightarrow \text{costul unui kg de zmeură} \end{cases}$

Sist. are soluție unică $\Rightarrow$ este compatibil determinat

Obs $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow r_A = 2 = r_{\bar{A}} = \text{nr. de nec.} \Leftrightarrow$ sist este comp. det. (sol. unică)

b) aceleași enunț, dar Mihai cumpără două kg de caise și 4 kg de zmeură pe care plătește 38 de lei

Dem: sist. lin. devine: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 \; / \cdot(-2) \\ 2x_1 + 4x_2 = 38 \end{cases}$ $+$

$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 19 \\ 2 & 4 & 38 \end{array}\right) \end{array} / \cdot(-2) \sim$

$(=) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 \\ \quad 0 = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

sistemul se reduce la o singură ecuație cu 2 nec. care are (teoretic) o infinitate de soluții (comp. nedet.)

$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 19 - 2\alpha \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$ (!!, $\alpha > 0$, $\alpha < 19$)

o alg. variab. princ. — var. sec.

$S = \{(\underbrace{19-2\alpha}_{=x_1}, \underbrace{\alpha}_{=x_2}) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

corect economic $\alpha \in (0, 19)$

Deci mama nu poate stabili cât costă fiecare tip de fructe (nu are suficiente informații independente!)

Obs: $\det A \ (\overset{not}{\equiv} |A|) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-4=0 \Rightarrow \text{rang } A = 1$

$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 2 & 4 & 38 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 19 \\ 2 & 38 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 4 & 38 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{rang } \bar{A} = 1$

$\Rightarrow r_A = r_{\bar{A}} = 1 < 2 =$ nr. nec.

$\Downarrow$

sist. comp. nedeterminat

c) același enunț, dar Mihai cumpără 2kg de caise și 4kg de zmeură pe care spune că a plătit 40 de lei (pentru a ascunde că a luat și o înghețată pe care a dat 2 lei)

Dem: Sist. lin. devine: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 & \Big| \cdot(-2) \\ 2x_1 + 4x_2 = 40 & \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 \\ 0 = 2 \ (F) \end{cases}$

$\Downarrow$

sistemul are o egalitate care este imposibilă $\Rightarrow$ este incompatibil, nu are soluții

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 2 & 4 & 40 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 2 \ (F)$$

Evident, mama își dă seama că ceva este "putred" (ori copiii au mințit, ori au fost înșelați de vânzătoare)