



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Θεωρία Ginzburg Landau για την
Υπεραγωγιμότητα

Author:
Ανδρέας Ναζλίδης

Supervisor:
Χαράλαμπος
Μουστακίδης
Επικ. Καθηγητής

Ιούνιος 2014



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Στοιχειοθετήθηκε με το \LaTeX και τη γραμματοσειρά "Κέρκης"
(Κέρκης ©Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου)

Copyright ©-All rights reserved Ναζλίδης Ανδρέας, 2014.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Περίληψη

Αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι η αναπαραγωγή και παρουσίαση της θεωρίας Ginzburg Landau για την υπεραγωγιμότητα καθώς και η παρουσίαση μερικών προβλέψεων που κάνει η θεωρία αυτή. Στην αρχή γίνεται μία ιστορική αναδρομή σχετικά με το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας ξεκινώντας από την ανακάλυψή του από τον Kamerlingh Onnes το 1911. Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικά βασικά φαινόμενα που έχουν παρατηρηθεί σχετικά με την υπεραγωγιμότητα όπως το φαινόμενο Meissner και οι βασικές φυσικές ιδιότητες των υπεραγωγών. Επιπλέον γίνεται μία σύντομη παρουσίαση της θεωρίας London η οποία αναπτύχθηκε με σκοπό να περιγράψει το φαινόμενο Meissner αλλά δεν αποτελεί μία ολοκληρωμένη θεωρία για το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας εφόσον δεν λαμβάνει υπόψη της τα κβαντικά φαινόμενα. Το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας αποτελεί τη μακροσκοπική εκδήλωση κβαντομηχανικών φαινομένων και η πρώτη κβαντική θεωρία που αναπτύχθηκε για το φαινόμενο αυτό η οποία είναι μία μακροσκοπική φαινομενολογική θεωρία είναι η θεωρία Ginzburg Landau. Στη συνέχεια αναπτύσσεται η θεωρία Landau για τις μετατροπές φάσης 2ης τάξης πάνω στην οποία στηρίζεται η θεωρία Ginzburg Landau η οποία αναπτύσσεται εκτενέστερα στη συνέχεια. Στο τελικό κομμάτι της εργασίας παρουσιάζονται μερικοί υπολογισμοί και οι προβλέψεις που κάνει η θεωρία αυτή για τους υπεραγωγούς.

abstract

The aim of this project is to present and recreate Ginzburg Landau's theory, about the superconductivity and also to give us some predictions for it. At the beginning we will read some historical facts and information about this phenomenon starting from Kamerlingh Onnes's discovery in 1911. Furthermore, we are going to see a few basic phenomena that have to do with the SC, such as the Meissner's effect and the basic physical properties of the superconductors. We will also refer to London's theory, which had been developed in order to describe Meissner's effect, but it's not a complete theory for this phenomenon because it does not take into account the quantum effects. The SC effect stands for the phenomenological theory of quantum effects and the pioneer quantum theory that had been developed for this phenomenon was Ginzburg Landau's theory. In addition, we will refer to Landau's theory about the second order phase transitions, in which Ginzburg Landau's theory is based on, and will be extendable presented. Finally, we will present several calculations and predictions that this specific theory makes for the superconductors.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	vi
1 Γενικά	1
1.1 Ιστορική αναδρομή	1
1.2 φαινόμενο Meissner	3
1.3 Φυσικές ιδιότητες υπεραγωγών	5
1.3.1 Κρίσιμη θερμοκρασία	6
1.3.2 Μόνιμα ρεύματα	6
1.3.3 Θερμοηλεκτρικές ιδιότητες	7
1.3.4 Ειδική θερμότητα	8
1.3.5 Εντροπία	9
1.3.6 Μαγνητικές ιδιότητες:Κρίσιμο πεδίο	9
1.3.7 Υπεραγωγοί τύπου 1	10
1.3.8 Υπεραγωγοί τύπου 2	10
1.4 Εξισώσεις London	11
2 Θεωρία Landau	13
2.1 Θεωρία Landau	13
3 Θεωρία Ginzburg Landau	18
3.1 Οι εξισώσεις Ginzburg–Landau	19
3.1.1 Μεταβολή ως προς Ψ^*	21
3.1.2 Μεταβολή ως προς Ψ	22
3.1.3 Μεταβολή ως προς \vec{A}	24
3.1.4 Διαστατική απλοποίηση	25
3.1.5 Μετασχηματισμός βαθμίδας	28
3.1.6 Μήκος συνάφειας και βάθος διείσδυσης	28
4 Εφαρμογές	30
4.1 Το φαινόμενο της γειννίασης	30
4.2 Η ενέργεια της συνοριακής επιφάνειας SN	31

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

iv

5 Σχόλια-Συμπεράσματα

35

Κατάλογος σχημάτων

1.1	Το διάγραμμα που δείχνει τη μεταβολή της ειδικής αντίστασης συναρτήσει της θερμοκρασίας για τον υδράργυρο	2
1.2	Φαινόμενο Meissner	4
1.3	Στην εικόνα φαίνονται ποια στοιχεία μετατρέπονται σε υπεραγωγούς για διάφορες συνθήκες πίεσης	5
1.4	Στην εικόνα φαίνεται πως μεταβλήθηκε με αύξουσα πορεία η τιμή της κρίσιμης θερμοκρασίας με την πάροδο των ετών	7
1.5	Μεταβολή της ειδικής θερμότητας συναρτήσει της θερμοκρασία για τα κανονικά στερεά	8
1.6	Στις εικόνες φαίνονται οι διαφορες στη μεταβολή της εντροπίας και της ειδικής θερμότητας μεταξύ των κανονικών και των υπεραγωγίων στερεών	9
1.7	Στην εικόνα φαίνονται οι μεταβολές του μαγνητικού πεδίου με τη θερμοκρασία για τους δύο τύπους υπεραγωγών	10
2.1	Ισορροπία φάσεων	14
3.1	Η συμπεριφορά της F συναρτήσει της παραμέτρου τάξης στην απλή περίπτωση χωρίς την παρουσία μαγνητικού πεδίου για διαφορετικές τιμές του α και για $\beta=1$	20
4.1	Η παράμετρος τάξης και το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή της συνοριακής επιφάνειας SN για $\lambda \ll \xi$	33
4.2	Η παράμετρος τάξης και το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή της συνοριακής επιφάνειας SN για $\lambda \gg \xi$	34

Εισαγωγή

Η θεωρία Ginzburg Landau είναι η πρώτη θεωρία που αναπτύχθηκε για την περιγραφή του φαινομένου της υπεραγωγιμότητας. Είναι μία φαινομενολογική (μακροσκοπική) θεωρία και βασίζεται στη προγενέστερη θεωρία του Landau για τις μετατροπές φάσης 2ης τάξης. Η προϋπάρχουσα θεωρία που αναπτύχθηκε από τους αδερφούς London το 1935 δε λαμβάνει υπόψη της τα κβαντικά φαινόμενα και έτσι δε μπορεί να περιγράψει πλήρως το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας, παρόλα αυτά εξηγεί ικανοποιητικά το φαινόμενο Meissner, ενώ εισάγει ένα χαρακτηριστικό μέγεθος για τους υπεραγωγούς, το βάθος διείσδυσης London. Από την άλλη η θεωρία των Ginzburg Landau η οποία λαμβάνει υπόψη της τα κβαντικά φαινόμενα αλλά όχι και τις μικροσκοπικές ιδιότητες του συστήματος, αποτελεί ουσιαστικά την πρώτη θεωρία για την υπεραγωγιμότητα. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η υπεραγωγίμη κατάσταση μπορεί να περιγραφεί ποσοτικά από τη θεωρία G-L χωρίς τη γνώση του μικροσκοπικού μηχανισμού που βασίζεται στη θεωρία BCS. Με βάση το γεγονός αυτό η περίπλοκη μαθηματική περιγραφή της θεωρίας BCS αντικαθίσταται από ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων μαζί με τις συνοριακές συνθήκες τους. Παρόλα αυτά οι εξισώσεις αυτές είναι μή γραμμικές και η λύση τους είναι καθαρά αριθμητική.

Κεφάλαιο 1

Γενικά

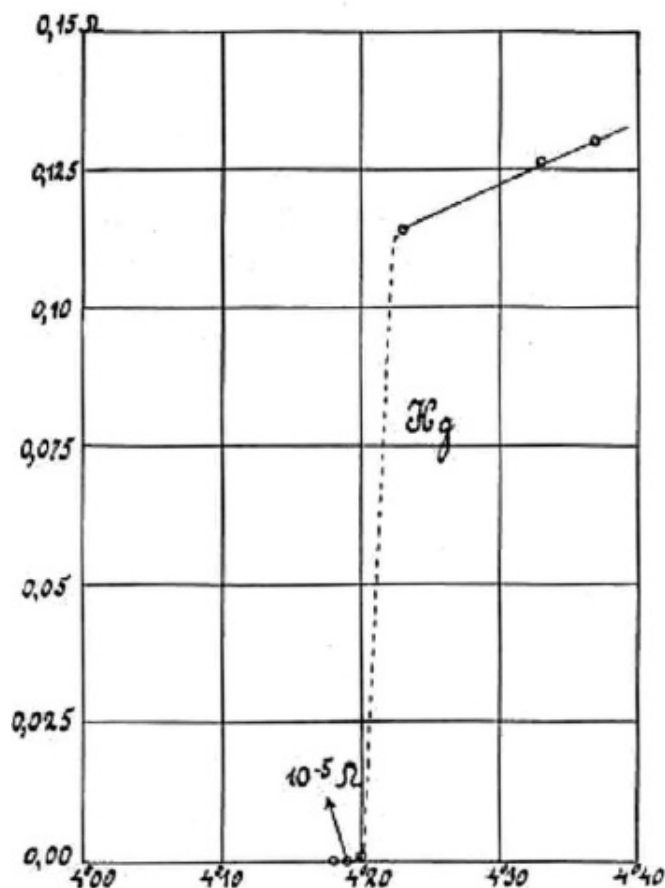
1.1 Ιστορική αναδρομή

Η υπεραγωγιμότητα ανακαλύφθηκε από τον Kamerlingh onnes ¹ το 1911. Ο Onnes εργαζόμενος στο εργαστήριο κρυογονικής στο πανεπιστήμιο του Leiden της ολλανδίας κατάφερε πρώτος να υγροποιήσει το ήλιο ενώ πρώτος επίσης ανακάλυψε το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας. Πολλοί φυσικοί της εποχής εκείνης περί τα τέλη του 19ου αιώνα εργαζόμενοι στο πεδίο της φυσικής χαμηλών θερμοκρασιών, ασχολήθηκαν με την υγροποίηση διαφόρων αερίων τα οποία όπως είναι γνωστό μετατρέπονται σε υγρά σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες και υπό ορισμένες συνθήκες πίεσης. Μετά την υγροποίηση του οξυγόνου και του υδρογόνου στόχος την εποχή εκείνη παρέμενε η υγροποίηση του ηλίου.

Ο Kamerlingh Onnes ο οποίος υπήρξε μαθητής του θεωρητικού φυσικού Johannes Van der Waals συνέβαλε καθοριστικά σε αυτό το εγχείρημα και γενικά στην ανάπτυξη της κρυογονικής επιστήμης. Ο Van der Waals την εποχή εκείνη διατύπωσε την ομόνυμη εξίσωσή του η οποία περιγράφει τα πραγματικά αέρια και αποτελεί γενίκευση της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων. Η εξίσωση των ιδανικών αερίων περιγράφει με καλή προσέγγιση αέρια τα οποία βρίσκονται σε σχετικά υψηλές θερμοκρασίες και συνθήκες μικρής πίεσης ώστε τα μόρια των αερίων να μην αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Σε χαμηλές θερμοκρασίες και υψηλές πυκνότητες όπου οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μορίων είναι σημαντικές, η εξίσωση που περιγράφει τα αέρια είναι η εξίσωση Van der Waals για τα πραγματικά αέρια. Ο Onnes στηριζόμενος στην εξίσωση αυτή και πειραματιζόμενος με διάφορα αέρια κατάφερε τελικά το 1908 να υγροποιήσει το ήλιο φτάνοντας σε θερμοκρασία των 4.16 kelvin όπου είναι και το σημείο βρασμού του. Παρά την ανακάλυψη του αυτή και ενώ παρατήρησε ορισμένα φαινόμενα που αποτελούν χαρακτηριστικές ιδιότητες της υπερρευστότητας δεν ασχολήθηκε περαιτέρω με το θέμα κι έτσι δεν θεωρείται ότι ανακάλυψε το

¹Kamerlingh Onnes:Ολανδός Νομπελίστας φυσικός(1853-1926)

φαινόμενο αυτό της υπερρρευσιότητας[8]. Στη συνέχεια ο Onnes έχοντας αναπτύξει μεθόδους για την επίτευξη θερμοκρασιών κοντά στο 1 kelvin διεξήγαγε πειράματα για την μέτρηση ιδιοτήτων διαφόρων ουσιών. Μία από τις ιδιότητες αυτές ήταν και η ειδική αντίσταση διαφόρων μετάλλων όπως ο υδράργυρος, ο κασσίτερος και ο μόλυβδος σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. Ως αποτέλεσμα όλων αυτών στις 8 απριλίου του 1911 ο Onnes ανακάλυψε ότι η ειδική αντίσταση του στερεού υδράργυρου σε θερμοκρασία των 4.2 kelvin περίπου (θερμοκρασία υγροποίησης ηλίου) η ειδική του αντίσταση σχεδόν μηδενίζεται απότομα. Έτσι όπως είχε ειπωθεί και από τον ίδιο ο υδράργυρος πέρασε σε μία νέα κατάσταση η οποία χαρακτηρίζεται από τις εκπληκτικές ηλεκτρικές του ιδιότητες και η οποία μπορεί να ονομαστεί ως υπεραγώγιμη κατάσταση. Το 1913 του απονεμήθηκε το βραβείο νόμπελ.



Σχήμα 1.1: Το διάγραμμα που δείχνει τη μεταβολή της ειδικής αντίστασης συναρτήσει της θερμοκρασίας για τον υδράργυρο

Από πειραματικής πλευράς ακολούθησε έκτοτε σημαντική πρόοδος με πρώτο

πάλι τον Onnes ο οποίος το 1912 διεξήγαγε ένα πείραμα ώστε να επιδείξει τη χρησιμότητα της υπεραγωγιμότητας. Χρησιμοποίησε έναν υπεραγωγίμο δακτύλιο ο οποίος συνδεόταν με μπαταρία ώστε να διαρέεται από ρεύμα και στη συνέχεια αφαιρώντας την μπαταρία παρατήρησε ότι η ένταση του ρεύματος που τον διέρρηε δεν εξασθενούσε με το χρόνο. Τα επόμενα χρόνια ανακαλύφθηκαν διάφορα άλλα υλικά τα οποία σε χαμηλές θερμοκρασίες περνούσαν στην υπεραγωγίμη κατάσταση όπως ο μόλυβδος στους 7 kelvin, το νιτρίδιο του νιοβίου στους 16 kelvin με αποτέλεσμα η θερμοκρασία στην οποία τα διάφορα υλικά περνούν στην υπεραγωγίμη κατάσταση συνεχώς αυξανόταν, φτάνοντας πλέον στην δεκαετία του 80 όπου ανακαλύφθηκαν οι υπεραγωγοί υψηλών θερμοκρασιών.

Το επόμενο μεγάλο βήμα για την κατανόηση της υπεραγωγιμότητας έγινε το 1935 με την ανακάλυψη του φαινομένου Meissner. Σε αντίθεση με την πειραματική ανάπτυξη σχετικά με το νέο φαινόμενο αυτό της υπεραγωγιμότητας, μία θεωρητική εξήγηση για το φαινόμενο αυτό άργησε να έρθει. Μετά την ανακάλυψη του φαινομένου Meissner έγινε η πρώτη προσπάθεια για την εξήγηση του φαινομένου από τους αδερφούς London το 1935. Η θεωρία London η οποία δε λαμβάνει υπόψη της τα κβαντικά φαινόμενα περιγράφει ικανοποιητικά το φαινόμενο Meissner αλλά δεν αποτελεί μία ολοκληρωμένη θεωρία για την υπεραγωγιμότητα η οποία είναι μία μακροσκοπική εκδήλωση κβαντομηχανικών φαινομένων. Μετά τη θεωρία London αναπτύχθηκε η θεωρία Ginzburg Landau από τους Ginzburg² και Lev Landau³ με την οποία θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στην εργασία αυτή και η οποία είναι μία φαινομενολογική (μακροσκοπική) θεωρία χωρίς να λαμβάνει υπόψη της τις μικροσκοπικές ιδιότητες του συστήματος. Στη συνέχεια αναπτύχθηκε η θεωρία BCS από τους Bardeen, Cooper και Snieffer η οποία είναι μια μικροσκοπική κβαντομηχανική θεωρία και εξηγεί σε μεγάλο βαθμό το φαινόμενο. Λίγα χρόνια αργότερα έγινε η σύνδεση των δύο τελευταίων θεωριών από τον Gorkov.

1.2 φαινόμενο Meissner

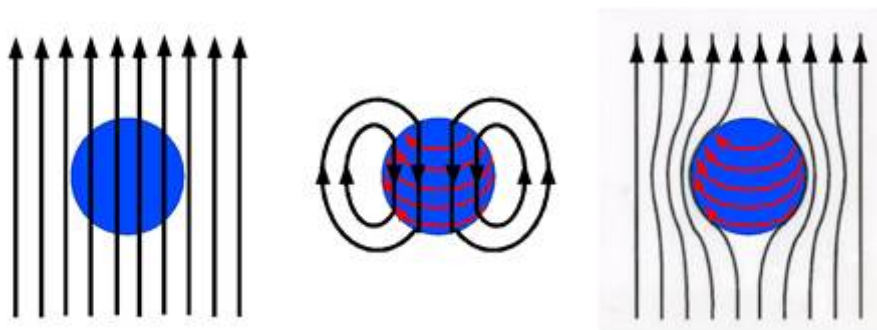
Το φαινόμενο Meissner είναι το βασικότερο και πιο γνωστό φαινόμενο που σχετίζεται με την υπεραγωγιμότητα. Ανακαλύφθηκε το 1933 από τους Walther Meissner και Robert Ochsenfeld όταν είχαν μετρήσει την κατανομή του μαγνητικού πεδίου υπεραγωγίμων δειγμάτων κασσίτερου και μόλυβδου. Το φαινόμενο Meissner είναι η απώθηση του μαγνητικού πεδίου από το εσωτερικό ενός υπεραγωγού κατά τη μετάβασή του από την κανονική στην υπεραγωγίμη κατάσταση. Όταν το δείγμα βρίσκεται στην κανονική κατάσταση πάνω από την κρίσιμη θερμοκρασία μέσα σε μαγνητικό πεδίο, οι γραμμές του πεδίου διέρχονται διαμέσου του υλικού, καθώς αυτό όμως ψύχεται σε θερμοκρασία κάτω από την κρίσιμη ώστε να περάσει στην υπεραγω-

²Vitaly Lazarevich Ginzburg: Ρώσος Νομπελίστας θεωρητικός φυσικός (1916-2009)

³Lev Landau: Σοβιετικός Νομπελίστας θεωρητικός φυσικός (1908-1968)

γιμη κατάσταση τότε το μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται στο εσωτερικό του δείγματος με αποτέλεσμα οι δυναμικές γραμμές να απωθούνται προς τον εξωτερικό χώρο του υπεραγωγού. Το φαινόμενο παρατηρήθηκε έμμεσα μέσω της διατήρησης της μαγνητικής ροής, καθώς η ροή στο εσωτερικό του υπεραγωγού ελαττώνεται, αυξάνεται στο χώρο γύρω από αυτόν.

Η απώθηση του μαγνητικού πεδίου από το εσωτερικό του υπεραγωγού και ο μηδενισμός του οφείλονται στη δημιουργία κλειστών επιφανειακών ρευμάτων τα οποία δημιουργούν μαγνητικό πεδίο επαγωγής αντίθετης με αυτής του εφαρμοζόμενου πεδίου με αποτέλεσμα αυτό να απωθείται από το εσωτερικό του υπεραγωγού. Επειδή τα υπερρεύματα αυτά δε συναντούν ωμική αντίσταση, το φαινόμενο δεν εξασθενεί με το χρόνο.



Σχήμα 1.2: Φαινόμενο Meissner

Κοντά στην επιφάνεια του υπεραγωγού μέσα σε μία απόσταση που ονομάζεται βάθος διείσδυσης London το μαγνητικό πεδίο δε μηδενίζεται τελείως. Κάθε υπεραγωγίμο υλικό έχει το δικό του βάθος διείσδυσης που είναι της τάξης μερικών νανομέτρων.

Το φαινόμενο Meissner δεν μπορεί να ερμηνευθεί με την κλασική θεωρία της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής η οποία προβλέπει ότι για ένα τέλειο αγωγό όπου η ειδική αντίστασή του τείνει στο μηδέν, το μαγνητικό πεδίο που διέρχεται διαμέσου αυτού θα πρέπει να παραμείνει το ίδιο. Αντίθετα εδώ έχουμε μεταβολή του μαγνητικού πεδίου με ψύξη του μετάλλου κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία. Η θεωρία που εξηγεί το φαινόμενο είναι πιο περίπλοκη και δίνεται από τις εξισώσεις London οι οποίες διατυπώθηκαν από τους αδερφούς London το 1935.

Οι υπεραγωγοί κατά το φαινόμενο Meissner επιδεικνύουν τέλειο διαμαγνητισμό (ή υπερδιαμαγνητισμό) πράγμα το οποίο σημαίνει ότι το μαγνητικό πεδίο τείνει στο μηδέν στο εσωτερικό τους σε πολλά βάθη διείσδυσης από την επιφάνειά τους. Αυτό σημαίνει ότι η μαγνητική τους επιδεκτικότητα είναι $\chi = -1$.

Τα διαμαγνητικά υλικά χαρακτηρίζονται από μαγνήτιση \vec{M} η οποία έχει μέτρο ανάλογο προς το μέτρο της έντασης που την προκαλεί και φορά αντίθετη αυτής

$$\vec{M} = \chi \vec{H}.$$

Στα κανονικά υλικά ο διαμαγνητισμός οφείλεται στην συνισταμένη μαγνητική ροπή της περιφοράς των ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα και του σπιν τους η οποία είναι μηδέν. Στα υπεραγωγία υλικά η υπόθεση του τέλει διαμαγνητισμού οφείλεται στα συνεχή ρεύματα τα οποία δημιουργούν μαγνητικό πεδίο με κατεύθυνση αντίθετη του εξωτερικού πεδίου και όχι μόνο στο σπιν των ηλεκτρονίων.

Το φαινόμενο μπορεί να γίνει αντιληπτό με την αιώρηση ενός μαγνήτη ο οποίος τοποθετείται πάνω από έναν υπεραγωγό λόγω της απώθησης του μαγνητικού πεδίου από αυτόν. Πρέπει να σημειωθεί ότι η τοποθέτηση ενός μαγνήτη και η αιώρησή του πάνω από έναν υπεραγωγό ο οποίος έχει ήδη περάσει στην υπεραγωγίμη φάση του δεν αποτελεί εκδήλωση του φαινομένου Meissner, ενώ η αρχική τοποθέτηση ενός μαγνήτη σταθερά πάνω από τον υπεραγωγό και η απώθησή του καθώς αυτός ψυχθεί κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία στην υπεραγωγίμη φάση του, αποτελεί εκδήλωση του φαινομένου.

Η ανακάλυψη του φαινομένου οδήγησε στην θεμελίωση της φαινομενολογικής θεωρίας της υπεραγωγιμότητας των αδερφών London.

1.3 Φυσικές ιδιότητες υπεραγωγών

Περισσότερα από 20 μεταλλικά στοιχεία είναι υπεραγωγοί, ακόμη και οι ημιαγωγοί μπορούν να γίνουν υπεραγωγοί κάτω από συνθήκες υψηλής πίεσης και πολύ χαμηλής θερμοκρασίας ενώ τα υπεραγωγία κράματα ανέρχονται σε χιλιάδες.

KNOWN SUPERCONDUCTIVE ELEMENTS

■ BLUE = AT AMBIENT PRESSURE
■ GREEN = ONLY UNDER HIGH PRESSURE

1	1A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0							
		H	He																
2		Li	Be			B	C	N	O	F	Ne								
3		Na	Mg			Al	Si	P	S	Cl	Ar								
4		K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
5		Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
6		Cs	Ba	*La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
7		Fr	Ra	+Ac	Rf	Ha	106	107	108	109	110	111	112						

SUPERCONDUCTORS.ORG

* Lanthanide Series	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
+ Actinide Series	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr

Σχήμα 1.3: Στην εικόνα φαίνονται ποια στοιχεία μετατρέπονται σε υπεραγωγούς για διάφορες συνθήκες πίεσης

Στο σημείο αυτό μπορούμε να περαθέσουμε μερικές βασικές φυσικές ιδιότητες

των υπεραγωγών και χαρακτηριστικά φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας[1, 2].

Τα κύρια χαρακτηριστικά των υπεραγωγών είναι:

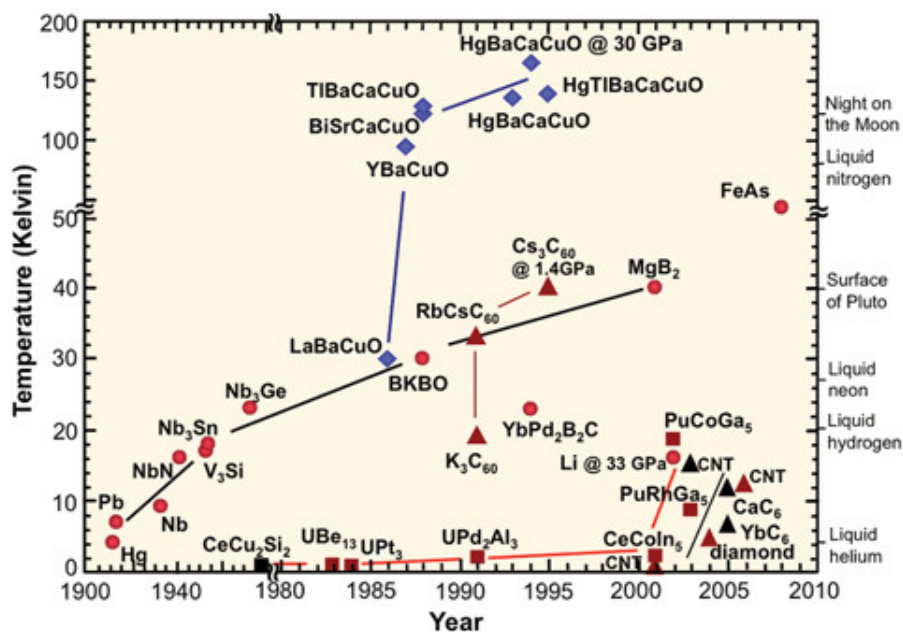
1. Ένας υπεραγωγός συμπεριφέρεται ώστε να μην έχει μετρήσιμη DC ηλεκτρική αντίσταση. Στον υπεραγωγό δημιουργούνται ρεύματα τα οποία δεν εμφανίζουν απόσβεση με το χρόνο.
2. Ένας υπεραγωγός συμπεριφέρεται ως τέλειος διαμαγνήτης $\chi_m = -1$. Τα επιφανειακά ρεύματα που δημιουργούνται σε υπεραγωγίμο δείγμα το οποίο βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο δημιουργούν μαγνητικό πεδίο το οποίο εξουδετερώνει το εφαρμοζόμενο πεδίο στο εσωτερικό του δείγματος.
3. Ένας υπεραγωγός έχει ενεργειακό χάσμα εύρους 2Δ στην περιοχή του επιπέδου Fermi στο σύνολο των επιτρεπτών επιπέδων ενός ηλεκτρονίου. Το ενεργειακό χάσμα αυξάνεται σε μέγεθος καθώς ελαττώνεται η θερμοκρασία.

1.3.1 Κρίσιμη θερμοκρασία

Η κρίσιμη θερμοκρασία είναι η τιμή της θερμοκρασίας στην οποία το υλικό περνάει στην υπεραγωγίμη κατάσταση. Πάνω από την κρίσιμη θερμοκρασία οι ιδιότητες του δείγματος είναι οι κανονικές ενώ κάτω από αυτή την τιμή μεταβάλλονται και εμφανίζονται οι υπεραγωγίμες ιδιότητες. Πιο δραματικές μεταβολές υφίστανται οι ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες του υπεραγωγίμου υλικού. Οι κρίσιμες θερμοκρασίες που έχουν μετρηθεί κυμαίνονται από μερικά χιλιοστά του Κελβίν έως λίγο πάνω από τους 20K. Αντίστοιχα η θερμική ενέργεια kT μεταβάλλεται από $10^{-7}eV$ μέχρι μερικά εκατοστά του ηλεκτρονιοβόλτ και είναι πολύ μικρότερη από αυτή των συνηθισμένων στερεών. Βέβαια τα τελευταία χρόνια με την ανακάλυψη των υπεραγωγών υψηλών θερμοκρασιών, η κρίσιμη θερμοκρασία μερικών υπεραγωγίμων υλικών ξεπερνάει τα 100K. Παρακάτω στην εικόνα φαίνεται η μεταβολή της τιμής της κρίσιμης θερμοκρασίας με την πάροδο των ετών.

1.3.2 Μόνιμα ρεύματα

Η ειδική αντίσταση που χαρακτηρίζει ένα κανονικό μέταλλο περιγράφεται από μία σχέση της μορφής $\rho(T) = \rho_0 + BT^5$. Ο σταθερός όρος αναφέρεται στη σκέδαση από ατέλειες και προσμίξεις ενώ ο μη γραμμικός όρος στη σκέδαση από φωνόνια. Κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία και οι δύο όροι γίνονται ασήμαντοι και η ειδική αντίσταση μηδενίζεται απότομα. Έτσι το ηλεκτρικό ρεύμα μπορεί να διαρρέει έναν υπεραγωγό χωρίς σημαντική απώλεια ενέργειας. Οι περιορισμοί που τίθενται εδώ είναι ότι:



Σχήμα 1.4: Στην εικόνα φαίνεται πως μεταβλήθηκε με αύξουσα πορεία η τιμή της κρίσιμης θερμοκρασίας με την πάροδο των ετών

1. Η υπεραγωγιμότητα καταστρέφεται με την εφαρμογή ενός μεγάλου μαγνητικού πεδίου.
2. Αν το ρεύμα υπερβαίνει μία κρίσιμη τιμή η υπεραγωγιμότητα καταστρέφεται. Η τιμή του κρίσιμου ρεύματος εξαρτάται από τη φύση και τη γεωμετρία του δείγματος.
3. Για θερμοκρασίες αρκετά κάτω από την κρίσιμη, η ηλεκτρική αντίσταση και ενός AC ρεύματος μηδενίζεται αν η συχνότητά του δεν είναι πολύ μεγάλη. Εδώ η καταστροφή της υπεραγωγιμότητας γίνεται σε μία συχνότητα ω της τάξης Δ/\hbar όπου Δ το ενεργειακό χάσμα.

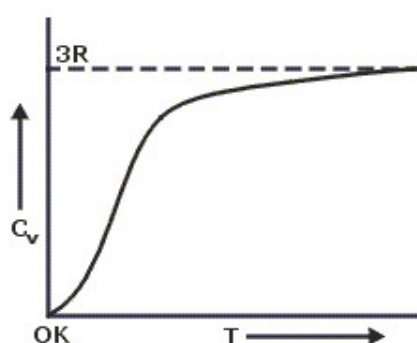
1.3.3 Θερμοηλεκτρικές ιδιότητες

Οι υπεραγωγοί είναι κακοί αγωγοί της θερμότητας σε αντίθεση με τους κανονικούς αγωγούς οι οποίοι είναι καλοί αγωγοί και του ρεύματος και της θερμότητας. Αυτό συμβαίνει διότι στους υπεραγωγούς τα ηλεκτρόνια δε μεταφέρουν εντροπία (υπεραγωγίμη τάξη) και έτσι ένα ηλεκτρικό ρεύμα δε συνοδεύεται από ροή θερμότητας. Στην περίπτωση ακόμη που ένας υπεραγωγός δε μεταφέρει ηλεκτρικό ρεύμα μόνο ένα μέρος των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας είναι ικανό να μεταφέρει εντροπία.

Στο πρώτο γράφημα που παραθέσαμε πιο πάνω φαίνεται η δραματική πτώση της ειδικής αντίστασης για τον υδράργυρο όπως την παρατήρησε ο Ohnes.

1.3.4 Ειδική θερμότητα

Η ειδική θερμότητα των κανονικών μετάλλων σε χαμηλές θερμοκρασίες περιγράφεται από μία σχέση της μορφής $c(T) = AT + BT^3$ όπου ο γραμμικός όρος αναφέρεται στις διεγέρσεις των ηλεκτρονίων και ο κυβικός στις ταλαντώσεις του πλέγματος. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της ειδικής θερμότητας με τη θερμοκρασία.



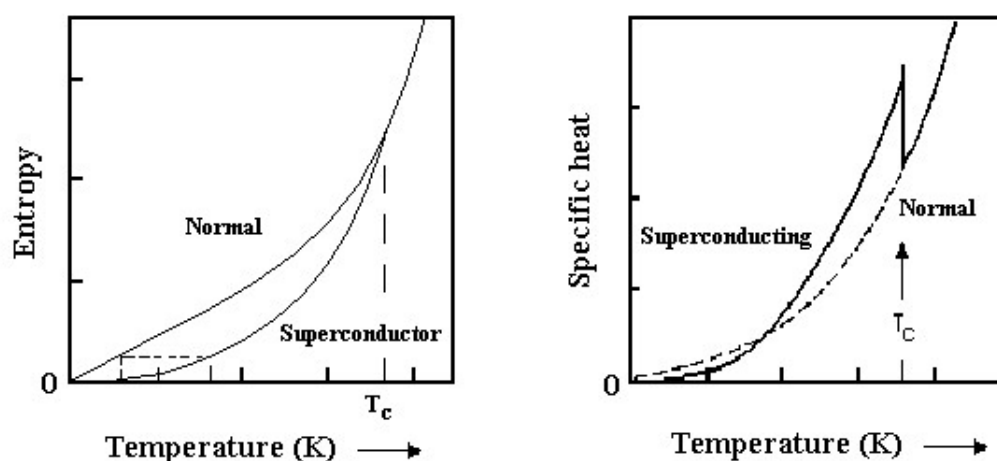
Variation of C_v with T

Σχήμα 1.5: Μεταβολή της ειδικής θερμότητας συναρτήσει της θερμοκρασία για τα κανονικά στερεά

Στο όριο των χαμηλών θερμοκρασιών στα κανονικά μέταλλα η ειδική θερμότητα μεταβάλλεται όπως ο κυβικός όρος ενώ αντίθετα στους υπεραγωγούς αυτή η μεταβολή της ειδικής θερμότητας διαφέρει σημαντικά. Με την ελάττωση της θερμοκρασίας κάτω από την κρίσιμη T_c σε μηδενικό μαγνητικό πεδίο η ειδική θερμότητα κάνει ένα άλμα απότομα σε μία υψηλή τιμή και στη συνέχεια φθίνει εκθετικά κάτω από την τιμή που αναμένεται για ένα κανονικό μέταλλο. Έτσι στην υπεραγωγίμη κατάσταση ο γραμμικός όρος των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας αντικαθίσταται από ένα όρο ο οποίος μεδενίζεται πιο γρήγορα σε χαμηλές θερμοκρασίες και είναι της μορφής $\exp -\Delta/kT$, αυτή είναι συμπεριφορά συστήματος του οποίου τα διεγερμένα επίπεδα διαχωρίζονται από τα θεμελιώδη με ενέργεια 2Δ . Το ενεργειακό χάσμα Δ είναι της τάξης kT_c .

1.3.5 Εντροπία

Η εντροπία ελαττώνεται σημαντικά σε όλους τους υπεραγωγούς με ψύξη κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία. Η ελάττωση αυτή μας δείχνει ότι η υπεραγωγίμη κατάσταση έχει μεγαλύτερη τάξη από την κανονική κατάσταση του δείγματος. Τα ηλεκτρόνια που διεγείρονται θερμικά στην κανονική κατάσταση βρίσκονται σε τάξη στην υπεραγωγίμη φάση.



Σχήμα 1.6: Στις εικόνες φαίνονται οι διαφορές στη μεταβολή της εντροπίας και της ειδικής θερμότητας μεταξύ των κανονικών και των υπεραγωγίμων στερεών

1.3.6 Μαγνητικές ιδιότητες: Κρίσιμο πεδίο

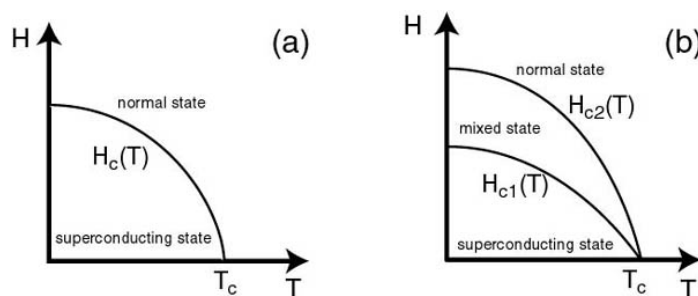
Όταν ένα υπεραγωγίμο δείγμα βρίσκεται στην υπεραγωγίμη φάση του κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία και εφαρμόζουμε ένα μαγνητικό πεδίο H ένα μέρος της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου καταναλώνεται ώστε να δημιουργηθούν τα επιφανειακά ρεύματα στο δείγμα με αποτέλεσμα να μηδενιστεί το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του δείγματος. Αν η τιμή του εφαρμοζόμενου πεδίου είναι πολύ μεγάλη τότε είναι ενεργειακά προτιμότερο για το σύστημα να επιστρέψει στην κανονική του κατάσταση με αποτέλεσμα να διεισδύσει το πεδίο στο εσωτερικό του. Αν και η κανονική κατάσταση έχει μεγαλύτερη ελεύθερη ενέργεια από την υπεραγωγίμη σε μηδενικό πεδίο, σε αρκετά υψηλά εφαρμοζόμενα μαγνητικά πεδία η αύξηση της ενέργειας αντισταθμίζεται από την ελάττωση της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου

που συμβαίνει όταν απομακρύνονται τα επιφανειακά ρεύματα θωράκισης και διεισδύει το πεδίο στο εσωτερικό του δείγματος.

Ο τρόπος που γίνεται η διείσδυση του πεδίου στο εσωτερικό του υπεραγωγού όταν αυτό αυξηθεί εξαρτάται γενικά από τη γεωμετρία του δείγματος. Για ίδια γεωμετρία υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους γίνεται αυτό και διαχωρίζουν ουσιαστικά τους υπεραγωγούς σε δύο κατηγορίες.

1.3.7 Υπεραγωγοί τύπου 1

Για τους υπεραγωγούς της κατηγορίας αυτής υπάρχει μία τιμή για το εφαρμοζόμενο πεδίο η οποία ονομάζεται κρίσιμο πεδίο H_c και η οποία αυξάνεται με την ελάττωση της θερμοκρασίας. Όταν το εφαρμοζόμενο πεδίο υπερβεί αυτή την κρίσιμη τιμή τότε το υπεραγωγίμο δείγμα περνάει στην κανονική κατάστασή του και το πεδίο διεισδύει πλήρως σε αυτό. Όταν το εφαρμοζόμενο πεδίο έχει τιμή κάτω από την κρίσιμη ο υπεραγωγός εμφανίζει τη διαμαγνητική συμπεριφορά του.



Σχήμα 1.7: Στην εικόνα φαίνονται οι μεταβολές του μαγνητικού πεδίου με τη θερμοκρασία για τους δύο τύπους υπεραγωγών

1.3.8 Υπεραγωγοί τύπου 2

Στους υπεραγωγούς τύπου 2 αντιστοιχούν δύο χαρακτηριστικές τιμές του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου οι H_{c1} και H_{c2} . Όταν το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο έχει τιμή κάτω από την H_{c1} δεν υπάρχει καμία διείσδυση αυτού μέσα στον υπεραγωγό. Για μεγάλες τιμές του πεδίου πάνω από την H_{c2} το πεδίο διεισδύει πλήρως στο δείγμα και αυτό επανέρχεται στην κανονική του κατάσταση. Όταν η ένταση του πεδίου έχει τιμές μεταξύ των δύο κρίσιμων τιμών υπάρχει μερική διείσδυση των μαγνητικών δυναμικών γραμμών μέσα στο υπεραγωγίμο δείγμα και αυτό βρίσκεται σε μία κατάσταση μίξης με αρκετά πολύπλοκη μικροσκοπική δομή. Έχει προταθεί από τον Α.Α. Abrikosov ότι στην κατάσταση μίξης το πεδίο διεισδύει μερικά στο δείγμα με τη μορφή λεπτών νημάτων ροής μέσα στα οποία το πεδίο είναι

ισχυρό ενώ έξω από αυτά ο υπεραγωγός έχει τη συνήθη διαμαγνητική συμπεριφορά του με μηδενική τιμή του πεδίου. Γύρω από κάθε νήμα εμφανίζεται ένα δινορεύμα θωράκισης. Η υπόθεση αυτή έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά.

Οι τιμές των κρίσιμων πεδίων H_c για τους υπεραγωγούς τύπου 1 είναι της τάξης των 100 Gauss αλλά για τους λεγόμενους σκληρούς υπεραγωγούς τύπου 2 είναι έως και 10^5 Gauss για αυτό και οι τελευταίοι είναι πιο χρήσιμοι πρακτικά.

1.4 Εξισώσεις London

Η θεωρία London θεμελιώθηκε από τους αδερφούς London το 1935 με σκοπό να δώσει μία περιγραφή για το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας και να εξηγήσει το φαινόμενο Meissner. Δεν αποτελεί μια ολοκληρωμένη θεωρία για το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας οσοδήποτε περιγράφει ικανοποιητικά το φαινόμενο Meissner. Η θεωρία London στηρίζεται στο μοντέλο των δύο ρευστών των Casimir και Gorter.

Το φαινόμενο Meissner δε μπορεί να περιγραφεί με τη θεώρηση μόνο της τέλει αγωγιμότητας. Αυτό σημαίνει ότι για ένα τέλει αγωγό όπου η ειδική αντίσταση τείνει στο μηδέν, από το νόμο του Ohm $\vec{E} = \rho \vec{j}$ εφόσον η πυκνότητα ρεύματος έχει πεπερασμένη τιμή τότε θα πρέπει να είναι $\vec{E} = 0$ και με βάση το νόμο του Faraday $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ θα πρέπει επίσης να ισχύει $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. Η παρατήρηση όμως μας δείχνει ότι το μαγνητικό πεδίο μπορεί να αλλάξει με ψύξη του υπεραγωγού κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία. Μία ακόμη διαφορά του υπεραγωγού σε σχέση με τον τέλει αγωγό είναι ότι ο τελευταίος δεν μπορεί να δώσει μία μόνιμη θωράκιση με την ανάπτυξη δινορευμάτων διότι το πεδίο θα διεισδύει περίπου ένα εκατοστό ανά ώρα. Ο διαχωρισμός των τέλει αγωγών από τους υπεραγωγούς γίνεται περισσότερο αντιληπτός αν λάβουμε υπόψη ότι η υπεραγωγίμη κατάσταση είναι η μακροσκοπική εκδήλωση κβαντομηχανικών φαινομένων όπως αποδείχτηκε αργότερα.

Η βασική υπόθεση την οποία έκαναν οι αδερφοί London είναι ότι μόνο ένα ποσοστό των ελεύθερων ηλεκτρονίων συμβάλουν στο υπερέυμα $\frac{n_s(T)}{n}$ όπου n_s είναι η πυκνότητα των υπεραγωγίμων ηλεκτρονίων και n η ολική, το υπόλοιπο ποσοστό αποτελεί ένα κανονικό ρευστό πυκνότητας $n - n_s$ το οποίο δε συμβάλει στο υπερέυμα και δε λαμβάνεται υπόψη στα αποτελέσματα της θεωρίας. Η πυκνότητα n_s προσεγγίζει την ολική πυκνότητα των ελεύθερων ηλεκτρονίων αγωγιμότητας για θερμοκρασίες κάτω από την κρίσιμη T_c ενώ τείνει στο μηδέν όταν με αύξηση της θερμοκρασίας αυτή πλησιάζει την κρίσιμη.

Αν θεωρήσουμε u_s την ταχύτητα των υπεραγωγίμων ηλεκτρονίων τότε για ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} το οποίο δημιουργείται στο υπεραγωγίμο δείγμα θα ισχύει ο νόμος του νεύτωνα $m \frac{d\vec{u}_s}{dt} = -e\vec{E}$, η πυκνότητα ρεύματος που δημιουργούν τα ηλεκτρόνια είναι $\vec{j} = -en_s \vec{u}_s \Rightarrow \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}$ την οποία αν αντικαταστήσουμε στο νόμο του Faraday θα έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{j} + \frac{n_s e^2}{mc} \vec{B}) = 0$$

και η εξίσωση αυτή μαζί με το νόμο του Ampere $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ καθορίζουν την πυκνότητα ρεύματος και το μαγνητικό πεδίο μέσα στον υπεραγωγό.

Οι δύο εξισώσεις ορίζουν για κάθε στατικό πεδίο \vec{B} και μία σταθερή πυκνότητα ρεύματος \vec{j} . Αυτά τα ανεξάρτητα του χρόνου μεγέθη αποτελούν τετριμένες λύσεις των εξισώσεων και αυτές ισχύουν για αυθαίρετο στατικό μαγνητικό πεδίο. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με την παρατηρούμενη συμπεριφορά των υπεραγωγών οι οποίοι δεν επιτρέπουν τη διέλευση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό τους. Οι F.London και H.London περιόρισαν το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{j} + \frac{n_s e^2}{mc} \vec{B}) = 0$$

σε εκείνες οι οποίες υπακούουν στη σχέση $\nabla \times \vec{j} = -\frac{n_s e^2}{mc} \vec{B}$ η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση London.

Στην τελική τους μορφή οι εξισώσεις είναι

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \vec{B}$$

$$\nabla^2 \vec{j} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \vec{j}$$

και προβλέπουν μία σταθερή ανεξάρτητη του χρόνου τιμή για το μαγνητικό πεδίο η οποία είναι μηδέν.

Το ρεύμα και το μαγνητικό πεδίο μπορούν να υπάρχουν μέσα σε μία απόσταση λ από την επιφάνεια του υπεραγωγού που ονομάζεται βάθος διείσδυσης London $\lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}$ το οποίο έχει μέγεθος μερικά Angstrom. Σε απόσταση μεγαλύτερη από το βάθος διείσδυσης το πεδίο μηδενίζεται.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Landau

2.1 Θεωρία Landau

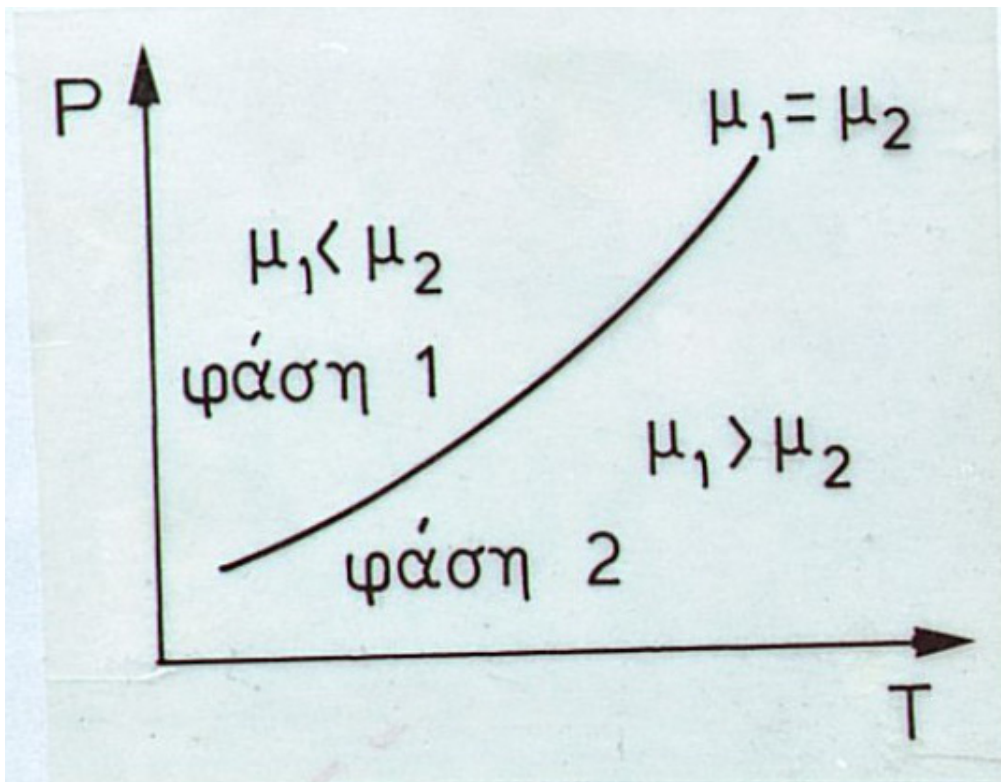
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία του Landau για τις μετατροπές φάσης θερμοδυναμικών συστημάτων όπως είναι τα ρευστά, τα στερεά κτλ.

Από τη θερμοδυναμική γνωρίζουμε ότι φάση είναι ένα ομογενές τμήμα του θερμοδυναμικού συστήματος το οποίο οριοθετείται από επιφάνειες μέσα από τις οποίες οι ιδιότητες του συστήματος μεταβάλλονται ασυνεχώς[5]. Μετατροπές φάσης συμβαίνουν πολύ συχνά στην καθημερινή μας ζωή και απαντώνται σε μία πληθώρα φαινομένων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το νερό το οποίο μπορεί να υπάρχει στην υγρή, τη στερεή και την αέρια φάση. Υπάρχει περίπτωση ένα στερεό να έχει διάφορες κρυσταλλικές μορφές, τα μαγνητικά υλικά μπορούν να υποστούν διάφορες μετατροπές φάσης και φυσικά η μετατροπή φάσης με την οποία θα ασχοληθούμε είναι η υπεραγώγιμη μετατροπή. Στις μετατροπές φάσης εκτός των υπόλοιπων θερμοδυναμικών μεταβλητών εισάγεται ως εσωτερική μεταβλητή η μάζα ή ο αριθμός των γραμμομορίων κάθε φάσεως δηλαδή κατά την μετατροπή υπάρχει η δυνατότητα μεταφοράς ύλης από τη μία φάση στην άλλη.

Γνωρίζουμε ότι για ένα σύστημα με δύο φάσεις η συνθήκη ισορροπίας μεταξύ των φάσεων είναι $\mu_1(P, T) = \mu_2(P, T)$ όπου μ είναι το χημικό δυναμικό δηλαδή η γραμμομοριακή συνάρτηση Gibbs $\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{P, T}$ για μετατροπή φάσης με παραμέτρους την θερμοκρασία και την πίεση. Πέρα από την κατάσταση ισορροπίας ισχύει $(\mu_1 - \mu_2)dn_1 < 0$ και επικρατεί η φάση με το μικρότερο χημικό δυναμικό, για παράδειγμα αν το σύστημα βρίσκεται στη φάση 1 τότε θα ισχύει $\mu_1 < \mu_2$. Έτσι λοιπόν οι μετατροπές φάσης χαρακτηρίζονται από καταστάσεις ισορροπίας στις οποίες μία συνάρτηση διαφόρων θερμοδυναμικών μεταβλητών όπως η πίεση, η θερμοκρασία, το μαγνητικό πεδίο κτλ, έχει ίδια τιμή και για τις δύο φάσεις[5].

Από τη θερμοδυναμική επίσης είναι γνωστή η εξίσωση Clausius-Clapeyron

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$



Σχήμα 2.1: Ισορροπία φάσεων

η οποία συσχετίζει την κλίση της καμπύλης φάσεων σε ένα διάγραμμα P-T με ορισμένες εκτατικές μεταβλητές του συστήματος οι οποίες μεταβάλλονται ασυνεχώς κατά την μετατροπή.

Η μετατροπή φάσης αντιστοιχεί σε ένα σημείο στο διάγραμμα P-T για το οποίο είναι τα P,T σταθερά, δηλαδή κατά την μετατροπή αλλάζουν οι περισσότερες εκτατικές μεταβλητές του συστήματος όπως ο όγκος, η εντροπία, η εσωτερική ενέργεια κτλ, ενώ παραμένουν σταθερές οι εντατικές μεταβλητές όπως η πίεση και η θερμοκρασία.

Εφόσον αναφερόμαστε σε μεταβολές κατά τις οποίες πίεση και θερμοκρασία είναι σταθερές, η θερμότητα η οποία ανταλλάσσεται κατά τη μετατροπή θα ισούται με τη μεταβολή της ενθαλπίας $h_1 - h_2 = q$ και ισχύει $H = G + TS$ οπότε ανά γραμμομόριο θα είναι $h = m + Ts$ και προκύπτει για την θερμότητα $q = T(s_1 - s_2)$, αυτή είναι η λανθάνουσα θερμότητα.

Η εξίσωση Clausius-Clapeyron ισχύει για μετατροπές φάσης κατά τις οποίες οι μεταβολές της εντροπίας και του όγκου είναι ασυνεχείς και στις οποίες η λανθάνουσα θερμότητα έχει μη μηδενική τιμή. Επειδή ο όγκος και η εντροπία είναι οι

πρώτες παράγωγοι της συνάρτησης Gibbs

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,n}$$

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,n}$$

υπάρχει μία κατάταξη μεταξύ των διαφόρων μετατροπών φάσης. Οι μικρότερης τάξης παράγωγοι της συνάρτησης Gibbs οι οποίες μεταβάλλονται ασυνεχώς καθορίζουν και την τάξη της μετατροπής. Αν μεταβάλλονται οι πρώτες παράγωγοι ασυνεχώς τότε έχουμε μετατροπή φάσης πρώτης τάξης, αν μεταβάλλονται οι πρώτες παράγωγοι συνεχώς και οι δεύτερες ασυνεχώς τότε έχουμε μετατροπή φάσης δεύτερης τάξης.

Οι μετατροπές φάσης δεύτερης τάξης καλούνται και συνεχείς μετατροπές για το λόγο ότι οι πρώτες παράγωγοι της συνάρτησης Gibbs έχουν συνεχή μεταβολή και σε αυτές δε λαμβάνει μέρος η λανθάνουσα θερμότητα η οποία έχει μηδενική τιμή.

Αν εξετάσουμε την περίπτωση μιας μετατροπής κατά την οποία η μεταβλητή της συνάρτησης είναι μόνο η θερμοκρασία (μπορεί η θεώρηση να γίνει πιο γενική με περισσότερες μεταβλητές) τότε υπάρχει μία φυσική ποσότητα η οποία είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας και μεταβάλλεται κατά την μετατροπή, έχει μηδενική τιμή στη φάση πάνω από την κρίσιμη θερμοκρασία και η κατάσταση του συστήματος χαρακτηρίζεται από μεγάλη αταξία, ενώ έχει μη μηδενική τιμή στη φάση κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία όπου η κατάσταση του συστήματος έχει μεγαλύτερη τάξη. Η ποσότητα αυτή αποτελεί την παράμετρο τάξης για την συνάρτηση του συστήματος μας[6].

Σύμφωνα με τη στατιστική φυσική όλες οι πληροφορίες του συστήματος βρίσκονται στην συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος $z = \sum e^{-\frac{H(n)}{kT}}$ όπου n είναι ο αριθμός των μικροκαταστάσεων και H η χαμιλτονιανή του συστήματος. Η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz δίνεται από τη σχέση $F = -kT \ln z$. Αν μπορέσουμε να υπολογίσουμε την ελεύθερη ενέργεια τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε όλες τις θερμοδυναμικές ποσότητες του συστήματος[6]. Αυτό όμως είναι μία αρκετά δύσκολη διαδικασία και μπορεί να συμβεί μόνο σε μερικές περιπτώσεις. Ο Landau έδειξε με τη θεωρία του ότι υπάρχει μία πιο εύκολη μέθοδος για την εύρεση της ελεύθερης ενέργειας αν λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι κατά την μετατροπή φάσης το σύστημα υφίσταται μία μεταβολή στην οποία περνάει από μία κατάσταση αταξίας σε μία νέα κατάσταση η οποία χαρακτηρίζεται από μεγάλη τάξη. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ποσότητες οι οποίες αποτελούν συναρτήσεις για παράδειγμα της θερμοκρασίας δε μεταβάλλονται ομαλά, οπότε και η ελεύθερη ενέργεια δεν είναι αναλυτική συνάρτηση της θερμοκρασίας. Αυτό είναι το σημείο κλειδί το οποίο οδήγησε στη θεμελίωση της θεωρίας.

Μία συνάρτηση είναι μη αναλυτική σε κάποια σημεία όταν δεν έχει παραγώγους στα σημεία αυτά ενώ μπορεί να είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή γύρω από αυτά, τα σημεία αυτά ονομάζονται ανώμαλα. Τέτοια σημεία αποτελούν και οι καταστάσεις

ισορροπίας των μετατροπών φάσης για την ελεύθερη ενέργεια του συστήματος[6]. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ελεύθερη ενέργεια και ως εκ τούτου η συμπεριφορά του συστήματος να μην είναι ομαλή κατά την μετατροπή φάσης. Παρόλο που κάθε όρος ξεχωριστά στο άθροισμα είναι αναλυτικός για οποιαδήποτε τιμή της θερμοκρασίας

$$F = -kT \ln \sum e^{-\frac{H(n)}{kT}}$$

το αποτέλεσμα του αθροίσματος αποτελεί μία μη αναλυτική συνάρτηση. Η ύπαρξη των ανώμαλων σημείων για την ελεύθερη ενέργεια είναι αποτέλεσμα της παρουσίας ενός άπειρου αριθμού βαθμών ελευθερίας για το σύστημα.

Πιθανές ανωμαλίες μπορεί να αποτελούν οι ασυνέχειες στις πρώτες παραγώγους της ελεύθερης ενέργειας ή σε παραγώγους ανώτερης τάξης. Αυτές χαρακτηρίζουν και τις μετατροπές φάσης σε πρώτη ή ανώτερης τάξης. Όπως γνωρίζουμε στα ανώμαλα σημεία για μία συνάρτηση περιέχεται μεγάλος αριθμός πληροφοριών και απόδειξη για αυτό αποτελεί το θεώρημα του Cauchy οπότε αν μπορέσουμε με κάποιο τρόπο να περιγράψουμε ποιοτικά τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα σημεία αυτά, θα μπορέσουμε να εξάγουμε περισσότερες πληροφορίες για τη φυσική του φαινομένου.

Ο Landau έκανε κάποιες υποθέσεις ώστε να προσδιορίσει την ελεύθερη ενέργεια ενός συστήματος[6].

- Εισήγαγε την παράμετρο τάξης Ψ , για κάθε σύστημα πρέπει να καθορίζεται μία παράμετρος τάξης η οποία είναι μηδέν στην κατάσταση όπου το σύστημα έχει αταξία και μη μηδενική τιμή στην κατάσταση με μεγαλύτερη τάξη κάτω από το κρίσιμο σημείο.
- Υπέθεσε ότι η ελεύθερη ενέργεια προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ενός συναρτησοειδούς που έχει τη μορφή $\tilde{F} = F_0(T) + F_L(T, \Psi)$ όπου $F_0(T)$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση της θερμοκρασίας και ο παράγοντας $F_L(T, \Psi)$ αποτελεί την εξάρτηση από την παράμετρο τάξης.
- Υπέθεσε ότι το συναρτησοειδές $F_L(T, \Psi)$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση της παραμέτρου τάξης και αποτελεί ανάπτυγμα αυτής το οποίο έχει πολυωνυμική μορφή και υπακούει σε όλες τις συμμετρίες που σχετίζονται με την παράμετρο τάξης.

Όλη η τετριμμένη εξάρτηση από την θερμοκρασία βρίσκεται στους πρώτους όρους χαμηλότερης τάξης του αναπτύγματος της $F_L(T, \Psi)$.

Στο ανάπτυγμα της $F_L(T, \Psi)$ θα υπάρχουν κάποιες φαινομενολογικές παράμετροι οι οποίες θα εξαρτώνται από τη θερμοκρασία αλλά κοντά στο σημείο μετατροπής θα έχουν αμελητέα συνεισφορά στο αποτέλεσμα.

Επιστρέφοντας στη σχέση της ελεύθερης ενέργειας μπορούμε να αντικαταστήσουμε το άθροισμα του δεξιού μέλους με ολοκλήρωμα του συναρτησοειδούς για

όλους τους βαθμούς ελευθερίας που σχετίζονται με την παράμετρο τάξης.

$$F = -kT \ln \sum e^{-\frac{H(n)}{kT}} \Rightarrow e^{-\frac{f}{kT}} = \sum e^{-\frac{H(n)}{kT}} = e^{-\frac{f_0}{kT}} \int \delta\psi e^{-\frac{f_L(T, \psi)}{kT}}$$

Ετσι αντί να ακολουθήσουμε μία πιο δύσκολη διαδικασία καθορίζοντας τις μικροκαταστάσεις ενός συστήματος οι οποίες αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Schrodinger ώστε να υπολογίσουμε τα θερμοδυναμικά μεθέθη του συστήματος, μπορούμε να αναπτύξουμε την ελεύθερη ενέργεια σε όρους της παραμέτρου τάξης κοντά στο σημείο μετατροπής και να φτάσουμε στη λύση με πιο εύκολο τρόπο.

Το ανάπτυγμα της ελεύθερης ενέργειας κοντά στο σημείο μετατροπής ως προς την παράμετρο τάξης στην πιο απλή μορφή του θα είναι

$$f(T) = f_0(T) + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4, \alpha > 0, \beta > 0$$

Για τους υπεραγωγούς η παράμετρος τάξης είναι ένας μιγαδικός αριθμός και σχετίζεται με την κυματοσυνάρτηση των ζευγών Cooper των ηλεκτρονίων τα οποία προβλέπει η θεωρία BCS.

Η κυματοσυνάρτηση παραμένει αμετάβλητη τοπικά κατά τον μετασχηματισμό φάσης $\psi(r) \rightarrow \psi(r)e^{i\Phi(r)}$ οπότε παραμένει αμετάβλητη σε μετασχηματισμό βαθμίδας.

Με βάση όλα αυτά μπορούμε να γράψουμε τη σχέση για την ελεύθερη ενέργεια για τους υπεραγωγούς. Μπορούμε να αφαιρέσουμε την αυθαίρετη φάση που αναφέραμε χωρίς να αλλάξει η φυσική του προβλήματος. Για τους όρους κλίσης εισάγουμε τον τελεστή κλίσης $\hbar\nabla - i2e\vec{A}$. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου είναι

$$B^2/2\mu_0 = (\nabla \times \vec{A})^2/2\mu_0$$

και τελικά η ελεύθερη ενέργεια έχει τη μορφή

$$f_s = \frac{a}{2} |\psi|^2 + \frac{c}{4} |\psi|^4 + \frac{1}{2} g \left| \left(\nabla - i \frac{2e}{\hbar} \vec{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{c^2}{8\pi} |\nabla \times \vec{A}|^2$$

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Ginzburg Landau

Η θεωρία Ginzburg–Landau θεμελιώθηκε από τους Vitaly Lazarevich Ginzburg και Lev Landau αρκετά χρόνια πριν την εμφάνιση της μικροσκοπικής θεωρίας BCS. Είναι μία μακροσκοπική φαινομενολογική θεωρία για την υπεραγωγιμότητα η οποία καταλήγει σε δύο διαφορετικές εξισώσεις με τις συνοριακές συνθήκες τους. Αποτελεί την πρώτη κβαντική θεωρία για την υπεραγωγιμότητα καθότι η θεωρία London δεν λαμβάνει υπόψη τα κβαντικά φαινόμενα και δεν αποτελεί μία ολοκληρωμένη θεωρία για το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας. Η θεωρία αυτή αποτελεί ένα θρίαμβο της φυσικής διαίσθησης και βασίζεται στην προγενέστερη θεωρία του Landau για τις μετατροπές φάσης 2ης τάξης. Οι μετατροπές φάσης 2ης τάξης είναι αυτές στις οποίες η κατάσταση του συστήματος μεταβάλλεται συνεχώς ενώ η συμμετρία του έχει ασυνεχή μεταβολή.

Στην θεωρία G–L η κυματοσυνάρτηση εισάγεται ως παράμετρος τάξης. Η παράμετρος $|\Psi(\vec{r})|^2 = n_s/2$ έχει μηδενική τιμή για θερμοκρασίες πάνω από την κρίσιμη ενώ έχει πεπερασμένη τιμή για θερμοκρασίες κάτω από αυτή και παριστάνει την τοπική πυκνότητα των υπεραγωγίων ηλεκτρονίων.

Η ελεύθερη ενέργεια του συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως ανάπτυγμα όρων της παραμέτρου τάξης για θερμοκρασίες κοντά στην κρίσιμη.

Στην απλούστερη περίπτωση ενός ομοιογενούς υπεραγωγού χωρίς την παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, η παράμετρος τάξης $|\Psi|^2$ δεν είναι συνάρτηση του \vec{r} και για θερμοκρασίες $T \leq T_c$ το ανάπτυγμα της ελεύθερης ενέργειας θα έχει τη μορφή

$$F_s(0) = F_n + \alpha |\Psi|^2 + \beta/2 |\Psi|^4 \quad \text{για } \alpha T_c - T \ll T_c \quad (3.1)$$

Οι όροι του Ψ λείπουν διότι η ελεύθερη ενέργεια πρέπει να είναι πραγματική ποσότητα ενώ οι όροι $|\Psi|^{2n+1}$ λείπουν διότι η ελεύθερη ενέργεια πρέπει να είναι αναλυτική στο $\Psi = 0$.

Τα α, β είναι φαινομενολογικές παράμετροι οι οποίες είναι χαρακτηριστικές για το υλικό ενώ εξαρτώνται από τη θερμοκρασία.

Το $|\psi_0|^2$ για το οποίο η ελεύθερη ενέργεια έχει ελάχιστο με παραγωγή της σχέσης θα είναι

$$\frac{dF_s}{d|\Psi|} = 2\alpha|\Psi| + 2\beta|\Psi|^3 = 0 \Rightarrow \alpha|\Psi| + \beta|\Psi|^3 = 0 \Rightarrow |\Psi|(\alpha + \beta|\Psi|^2) = 0 \Rightarrow |\Psi| = 0 \quad \text{ή}$$

$$|\Psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Η τετριμμένη λύση $|\Psi| = 0$ είναι για την κανονική κατάσταση όπου η παράμετρος τάξης είναι μηδενική. Έτσι έχουμε την ακόλουθη μη μηδενική λύση

$$|\Psi_0|^2 = \frac{-\alpha}{\beta} \quad (3.2)$$

Καθώς το μέτρο μπορεί να είναι ένας θετικός αριθμός ή μηδέν όταν το δεξίό μέλος της εξίσωσης είναι θετικό τότε υπάρχει μη μηδενική λύση για την παράμετρο $|\Psi|^2$. Αυτό το επιτυγχάνουμε αν θεωρήσουμε την ακόλουθη θερμοκρασιακή εξάρτηση για την παράμετρο α ως $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$ με $\frac{\alpha_0}{\beta} > 0$.

Έτσι για θερμοκρασίες $T > T_c$ στην κανονική κατάσταση θα είναι $\frac{\alpha(T)}{\beta} > 0$ οπότε $|\Psi|^2$ και έτσι μόνο η $|\Psi|^2 = 0$ θα αποτελεί λύση.

Για θερμοκρασίες $T < T_c$ στην υπεραγωγίμη κατάσταση θα είναι $\frac{\alpha(T)}{\beta} < 0$ και η λύση θα είναι $|\Psi|^2 = -\frac{\alpha_0(T-T_c)}{\beta}$.

Η παράμετρος τάξης τείνει στο μηδέν καθώς η θερμοκρασία τείνει στην κρίσιμη από κάτω.

Η παράμετρος β θα είναι $\beta = \sigma\tau\alpha\theta. > 0$

Αν θεωρήσουμε τη διαφορά της ενέργειας μεταξύ της κανονικής και της υπεραγωγίμης φάσης τότε προκύπτει

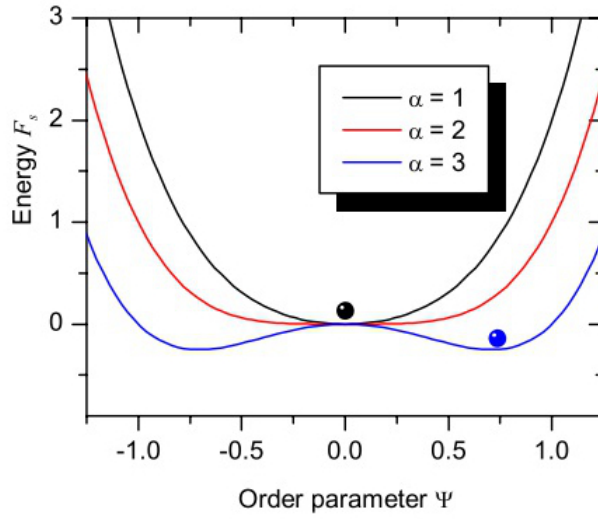
$$F_s - F_n = \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 = \alpha\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\beta}{2}\frac{\alpha^2}{\beta^2} = -\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta} = -\frac{\alpha^2}{2\beta} = \mu_0 \frac{H_c^2}{2}$$

Οπότε το κρίσιμο πεδίο θα είναι $H_c^2 = \frac{\alpha^2}{\mu_0\beta} = \frac{\alpha_0^2(T-T_c)^2}{\mu_0\beta}$.

3.1 Οι εξισώσεις Ginzburg–Landau

Στην περίπτωση ενός ανομοιογενούς υπεραγωγού εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου η πυκνότητα της ενέργειας Gibbs του συστήματος θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$G_s(H) = G_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \underbrace{\frac{1}{2m_*}|-i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi|^2}_{\text{πυκνότητα κινητικής ενέργειας}} + \frac{B^2}{2\mu_0} - \vec{B}\vec{H} \quad (3.3)$$



Σχήμα 3.1: Η συμπεριφορά της F συναρτήσει της παραμέτρου τάξης στην απλή περίπτωση χωρίς την παρουσία μαγνητικού πεδίου για διαφορετικές τιμές του α και για $\beta=1$

η οποία προκύπτει από ένα μετασχηματισμό Legendre της ελεύθερης ενέργειας Helmholtz. G_n είναι η ενέργεια της κανονικής κατάστασης, \vec{A} είναι το διανυσματικό δυναμικό, \vec{H} είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου και \vec{B} η μαγνητική επαγωγή. Η πυκνότητα της κινητικής ενέργειας γράφεται έτσι χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ισχύει $m\vec{v} = \vec{p} - 2e\vec{A}$ και ισχύει $\hat{p} = -i\hbar\nabla$. Η μάζα m^* είναι η μάζα του ζεύγους των υπεραγωγίων ηλεκτρονίων και e το φορτίο τους. Ο τελευταίος όρος αναφέρεται στην πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου. Η παράμετρος τάξης τώρα θα είναι συνάρτηση του \vec{r} .

Αν ολοκληρώσουμε τη σχέση σε όλο τον όγκο του υπεραγωγίου δείγματος θα πάρουμε μία έκφραση για την ενέργεια Gibbs παρακάτω

$$G_s(H) = G_n + \iiint_V \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} |-i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi|^2 dV + \right. \\ \left. + \iiint_V \frac{(\nabla \times \vec{A})^2}{2\mu_0} - (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} \right] dV$$

Εφόσον πήραμε μία μορφή για την ενέργεια Gibbs του συστήματος βλέπουμε ότι αυτή είναι συνάρτηση της παραμέτρου τάξης $|\Psi(\vec{r})|^2$ και του διανυσματικού δυναμικού \vec{A} . Η διαδικασία η οποία θα μας δώσει τις διαφορικές εξισώσεις της θεωρίας γίνεται με βάση τον λογισμό μεταβολών καθώς αναζητούμε τις τιμές των συναρτήσεων που αποτελούν μεταβλητές για το συναρτησοειδές G_s για τις οποίες αυτό, δηλαδή

η ελεύθερη ενέργεια, γίνεται ελάχιστη.

Με βάση αυτό το σκεπτικό αυτό θα πάρουμε τη μεταβολή του συναρτησοειδούς της ενέργειας δG_s ως προς τις μεταβλητές $|\Psi(\vec{r})|^2 = \Psi^*(\vec{r})\Psi(\vec{r})$ και $\vec{A}(\vec{r})$ και θα καταλήξουμε στις δύο διαφορικές εξισώσεις της θεωρίας Ginzburg-Landau με τις συνοριακές συνθήκες τους.

3.1.1 Μεταβολή ως προς Ψ^*

Η μεταβολή του συναρτησοειδούς μας $\delta_{\Psi^*} G_s$ τώρα θα είναι:

$$\delta_{\Psi^*} G_s = \delta \Psi^* \iiint_V \left[\alpha \Psi^* \Psi + \frac{\beta}{2} \Psi^* \Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m} (i\hbar \nabla \Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*) (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) \right] dV$$

$$\delta G_s = \iiint_V \underbrace{\left[\alpha \Psi \delta \Psi^* + \beta \Psi |\Psi|^2 \delta \Psi^* \right]}_1 + \underbrace{\left[\frac{1}{4m} (i\hbar \nabla \delta \Psi^* - 2e\vec{A} \delta \Psi^*) (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) \right]}_2 dV$$

Αφήνοντας κατά μέρος το πρώτο κομμάτι του ολοκληρώματος θα έχουμε για το δεύτερο:

$$2 \rightarrow \iiint_V \left[\frac{1}{4m} (i\hbar \nabla \delta \Psi^* - 2e\vec{A} \delta \Psi^*) (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) \right] dV$$

Μετά από πράξεις ο όρος 2 θα έχει την παρακάτω μορφή.

$$2 \rightarrow \frac{1}{4m} \iiint_V \underbrace{i\hbar \nabla \delta \Psi^* (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi)}_3 dV - \frac{1}{4m} \iiint_V \underbrace{2e\vec{A} \delta \Psi^* (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi)}_4 dV$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε τη διανυσματική ταυτότητα για την απόκλιση

$$\nabla(\delta \Psi^* \vec{a}) = \vec{a} \nabla \delta \Psi^* + \delta \Psi^* \nabla \vec{a} \quad (3.4)$$

Οπότε θα ισχύει:

$$i\hbar \nabla \delta \Psi^* (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) = i\hbar \nabla [\delta \Psi^* (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi)] - i\hbar \delta \Psi^* \nabla (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) \quad (3.5)$$

με αποτέλεσμα από το πρώτο ολοκλήρωμα να προκύψει

$$3 \rightarrow \frac{1}{4m} \iiint_V \underbrace{i\hbar \nabla [\delta \Psi^* (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi)]}_{\text{Gauss}} dV - \frac{1}{4m} \iiint_V i\hbar \delta \Psi^* \nabla (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) dV$$

Το πρώτο από αυτά τα ολοκλήρωματα μετασχηματίζεται σε επιεπιφάνειο με βάση το θεώρημα της απόκλισης του Gauss οπότε προκύπτει:

$$3 \rightarrow \frac{1}{4m} \oint_S i\hbar \delta \Psi^* (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) d\vec{S} - \frac{1}{4m} \iiint_V i\hbar \delta \Psi^* \nabla (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) dV$$

Έτσι από τους όρους 3 και 4 θα προκύψει τελικά:

$$3, 4 \rightarrow \frac{1}{4m} \oint_S i\hbar \delta\Psi^* (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) d\vec{S} + \\ + \frac{1}{4m} \iiint_V \delta\Psi^* (-i\hbar \nabla - 2e\vec{A}) (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) dV$$

και συνολικά η μεταβολή του συναρτησοειδούς θα είναι:

$$\delta G_s = \iiint_V [\alpha\Psi + \beta\Psi |\Psi|^2 (-i\hbar \nabla - 2e\vec{A}) (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi)] \delta\Psi^* dV + \\ + \frac{1}{4m} \oint_S i\hbar (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) \delta\Psi^* d\vec{S} = 0$$

Η οποία θα πρέπει να είναι ίση με μηδέν ώστε να έχουμε στάσιμη τιμή με αποτέλεσμα να είναι ίσοι με μηδέν οι όροι στα δύο ολοκληρώματα ταυτόχρονα και να προκύψει η διαφορική εξίσωση :

$$\alpha\Psi + \beta\Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m} (-i\hbar \nabla - 2e\vec{A})^2 \Psi = 0 \quad (3.6)$$

Και η συνοριακή συνθήκη της:

$$(-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi) \vec{n} = 0 \quad (3.7)$$

Όπου \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της επιφάνειας του υπεραγωγού S το οποίο προκύπτει από το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα.

3.1.2 Μεταβολή ως προς Ψ

Εάν πάρουμε τη μεταβολή του συναρτησοειδούς ως προς τη μεταβλητή ψ τότε αυτή θα μας δώσει τη μιγαδική συζυγή διαφορική εξίσωση αυτής που βρήκαμε παραπάνω. Με την ίδια διαδικασία θα έχουμε:

$$\delta_\Psi G_s = \delta\Psi \iiint_V [\alpha\Psi^*\Psi + \frac{\beta}{2}\Psi^*\Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m} (i\hbar \nabla \Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*) (-i\hbar \nabla \Psi - 2e\vec{A}\Psi)] dV$$

$$\delta_\Psi G_s = \iiint_V \underbrace{[\alpha\Psi^*\delta\Psi + \beta\Psi^*|\Psi|^2\delta\Psi]}_1 + \underbrace{\frac{1}{4m} (i\hbar \nabla \Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*) (-i\hbar \nabla \delta\Psi - 2e\vec{A}\delta\Psi)}_2 dV$$

Παραλείποντας πάλι προς το παρόν τον πρώτο όρο θα έχουμε για το δεύτερο:

$$2 \rightarrow \frac{1}{4m} \iiint_V \underbrace{(-i\hbar \nabla \delta\Psi - 2e\vec{A}\delta\Psi)}_* (i\hbar \nabla \Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*) dV$$

Αναλύοντας το γινόμενο θα είναι:

$$2 \rightarrow \frac{1}{4m} \iiint_V \underbrace{[-i\hbar\nabla\delta\Psi(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)]}_3 dV - \frac{1}{4m} \iiint_V \underbrace{2e\vec{A}\delta\Psi(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)}_4 dV$$

Για τον όρο 3 θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την διανυσματική ταυτότητα της απόκλισης (3.4) η και θα έχουμε μία σχέση παρόμοια της (3.5):

$$-i\hbar\nabla\delta\Psi(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*) = -i\hbar\nabla[\delta\Psi(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)] + i\hbar\delta\Psi\nabla(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*) \quad (3.8)$$

Οπότε το ολοκλήρωμα του όρου 3 θα είναι ίσο με:

$$3 \rightarrow -\frac{1}{4m} \iiint_V \underbrace{i\hbar\nabla[\delta\Psi(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)]}_{\text{Gauss}} dV + \frac{1}{4m} \iiint_V i\hbar\delta\Psi\nabla(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*) dV$$

Όπου στο πρώτο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε πάλι το θεώρημα της απόκλισης του Gauss και θα έχουμε:

$$3 \rightarrow -\frac{1}{4m} \oint_S i\hbar\nabla[\delta\Psi(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)] d\vec{S} + \frac{1}{4m} \iiint_V i\hbar\delta\Psi\nabla(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*) dV$$

Έτσι για τους όρους 3 και 4 συνολικά θα είναι

$$3, 4 \rightarrow -\frac{1}{4m} \oint_S i\hbar\nabla[\delta\Psi(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)] d\vec{S} + \frac{1}{4m} \iiint_V [i\hbar\delta\Psi\nabla(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*) - 2e\vec{A}\delta\Psi(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)] dV$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα αν βγει κοινός παράγοντας ο όρος μέσα στην παρένθεση θα είναι

$$3, 4 \rightarrow -\frac{1}{4m} \oint_S i\hbar\nabla[\delta\Psi(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)] d\vec{S} + \frac{1}{4m} \iiint_V [(i\hbar\delta\Psi\nabla - 2e\vec{A}\delta\Psi)(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)] dV$$

Με αποτέλεσμα συνολικά να έχουμε:

$$\delta G_s = \iiint_V [\alpha\Psi^* + \beta\Psi^*|\Psi|^2 + \frac{1}{4m}(i\hbar\nabla - 2e\vec{A})^2\Psi^*] \delta\Psi dV - \oint_S i\hbar\nabla[\delta\Psi(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)] d\vec{S} = 0$$

Οπότε θα πρέπει οι παραστάσεις μέσα στα ολοκληρώματα να είναι ίσες με μηδέν και έτσι καταλήγουμε στην συζυγή διαφορική εξίσωση της προηγούμενης παραγράφου με τις συνοριακές συνθήκες για αυτή:

$$\alpha\Psi^* + \beta\Psi^*|\Psi|^2 + \frac{1}{4m}(i\hbar\nabla - 2e\vec{A})^2\Psi^* = 0 \quad (3.9)$$

και :

$$(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)\vec{n} = 0 \quad (3.10)$$

3.1.3 Μεταβολή ως προς \vec{A}

Η μεταβολή ως προς \vec{A} θα μας δώσει τη δεύτερη διαφορική εξίσωση της θεωρίας η οποία προβλέπει το υπεραγωγίμο ρεύμα του υπεραγωγού.

Θα είναι

$$\delta_A G_s = \delta\vec{A} \iiint_V \left[\frac{1}{4m}(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)(-i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi) + \frac{(\nabla\mathbf{X}\vec{A})^2}{2\mu_0} - \vec{H}\nabla\mathbf{X}\vec{A} \right] dV$$

$$\begin{aligned} \delta G_s = & \iiint_V \frac{1}{4m} [(-2e\delta\vec{A}\Psi^*)(-i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi) - 2e\delta\vec{A}\Psi(i\hbar\nabla\Psi^* - 2e\vec{A}\Psi^*)] dV \\ & + \iiint_V \left[\frac{2(\nabla\mathbf{X}\vec{A})(\nabla\mathbf{X}\delta\vec{A})}{2\mu_0} - \vec{H}\nabla\mathbf{X}\delta\vec{A} \right] dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta G_s = & \iiint_V \frac{1}{4m} [2e\delta\vec{A}[\Psi^*(i\hbar\nabla\Psi + 2e\vec{A}\Psi) + \Psi(-i\hbar\nabla\Psi^* + 2e\vec{A}\Psi^*)]] dV + \\ & + \iiint_V \left(\frac{\nabla\mathbf{X}\vec{A}}{\mu_0} - \vec{H} \right) \nabla\mathbf{X}\delta\vec{A} dV \end{aligned}$$

$$\delta G_s = \iiint_V \left[\frac{ie\hbar\delta\vec{A}}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + \frac{2e^2\vec{A}}{m}|\Psi|^2\delta\vec{A} + \underbrace{\left(\frac{\nabla\mathbf{X}\vec{A}}{\mu_0} - \vec{H} \right) \nabla\mathbf{X}\delta\vec{A}} \right] dV$$

Για τον τελευταίο όρο του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε τη διανυσματική ταυτότητα

$$\vec{a}\nabla\mathbf{X}\vec{b} = \vec{b}\nabla\mathbf{X}\vec{a} - \nabla(\vec{a}\mathbf{X}\vec{b}) \quad (3.11)$$

Οπότε θα ισχύει

$$\left(\frac{\nabla\mathbf{X}\vec{A}}{\mu_0} - \vec{H} \right) \nabla\mathbf{X}\delta\vec{A} = \delta\vec{A}\nabla\mathbf{X}\left(\frac{\nabla\mathbf{X}\vec{A}}{\mu_0} - \vec{H} \right) - \nabla\left[\left(\frac{\nabla\mathbf{X}\vec{A}}{\mu_0} - \vec{H} \right) \mathbf{X}\delta\vec{A} \right]$$

Οπότε με ολοκλήρωση παίρνουμε:

$$\iiint_V \left(\frac{\nabla \mathbf{X} \vec{A}}{\mu_0} - \vec{H} \right) \nabla \mathbf{X} \delta \vec{A} dV = \iiint_V \delta \vec{A} \nabla \mathbf{X} \left(\frac{\nabla \mathbf{X} \vec{A}}{\mu_0} - \vec{H} \right) dV - \oint_S \underbrace{\left(\frac{\nabla \mathbf{X} \vec{A}}{\mu_0} - \vec{H} \right) \mathbf{X} \delta \vec{A} d\vec{S}}_{\text{Gauss}}$$

Όπου στον τελευταίο όρο χρησιμοποιήσαμε κατευθείαν το θεώρημα της απόκλισης του Gauss. Το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα που προκύπτει μηδενίζεται διότι η μεταβολή $\delta \vec{A}$ είναι μηδέν στο σύνορο του όγκου V που είναι η επιφάνεια S και πολλαπλασιάζεται εξωτερικά[4].

Ο όρος $\nabla \mathbf{X} \vec{H}$ στο πρώτο ολοκλήρωμα πρέπει να είναι μηδέν διότι ισούται με τη μαγνήτιση του υλικού η οποία δεν πρέπει να υπάρχει (διαμαγνητισμός).

Έτσι συνολικά θα έχουμε

$$\delta G_s = \iiint_V \left[\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{2e^2 \vec{A}}{m} |\Psi|^2 + \frac{\nabla \mathbf{X} (\nabla \mathbf{X} \vec{A})}{\mu_0} \right] \delta \vec{A} dV = 0$$

Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{2e^2 \vec{A}}{m} |\Psi|^2 + \frac{\nabla \mathbf{X} (\nabla \mathbf{X} \vec{A})}{\mu_0}$$

Και τελικά

$$\frac{\nabla \mathbf{X} (\nabla \mathbf{X} \vec{A})}{\mu_0} = \vec{J}_s = -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2 \vec{A}}{m} |\Psi|^2 \quad (3.12)$$

Όπου $\frac{\nabla \mathbf{X} (\nabla \mathbf{X} \vec{A})}{\mu_0} = \frac{\nabla \mathbf{X} \vec{B}}{\mu_0} = \vec{J}_s$ είναι το υπεραγωγίμο ρεύμα.

Οι δύο εξισώσεις της θεωρίας G-L φαίνονται παρακάτω

$$\alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m} (-i\hbar \nabla - 2e\vec{A})^2 \Psi = 0 \quad (3.13)$$

$$\vec{J}_s = -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2 \vec{A}}{m} |\Psi|^2 \quad (3.14)$$

3.1.4 Διαστατική απλοποίηση

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε διαστατική απλοποίηση της κυματοσυνάρτησης διαιρώντας με την ποσότητα $|\Psi_0| = \frac{|\alpha|}{\beta} = \frac{n_s}{2}$, η οποία είναι η τιμή της παραμέτρου τάξης για την οποία έχουμε ελάχιστο της ελεύθερης ενέργειας με απουσία μαγνητικού πεδίου όπως είδαμε παραπάνω και εισάγουμε την αδιάστατη κυματοσυνάρτηση $\psi(\vec{r}) = \frac{\Psi(\vec{r})}{|\Psi_0|}$.

Για την πρώτη διαφορική εξίσωση της θεωρίας θα είναι

$$\begin{aligned}
 \alpha\Psi + \beta\Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m}(-i\hbar\nabla - 2e\vec{A})^2\Psi &= 0 \Rightarrow \\
 \alpha\psi + \beta\psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m}(-i\hbar\nabla - 2e\vec{A})^2\psi &= 0 \Rightarrow \\
 \alpha\psi \frac{\beta}{|\alpha|} + \beta\psi |\Psi|^2 + \frac{\beta}{4m|\alpha|}(-i\hbar\nabla - 2e\vec{A})^2\psi &= 0 \Rightarrow \\
 -\beta\psi + \beta\psi |\psi|^2 + \frac{\beta}{4m|\alpha|}(-i\hbar\nabla - 2e\vec{A})^2\psi &= 0 \Rightarrow \\
 -\psi + \psi |\psi|^2 + \frac{1}{4m|\alpha|}(-i\hbar\nabla - 2e\vec{A})^2\psi &= 0 \Rightarrow \\
 (-1)^2 \frac{\hbar^2}{4m|\alpha|} (i\nabla + \frac{2e}{\hbar}\vec{A})^2\psi - \psi + \psi |\psi|^2 &= 0 \Rightarrow \\
 \xi^2 (i\nabla + \frac{2e}{\hbar}\vec{A})^2\psi - \psi + \psi |\psi|^2 &= 0 \Rightarrow \\
 \xi^2 (i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A})^2\psi - \psi + \psi |\psi|^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Η ποσότητα $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4m|\alpha|}}$ που εισάγαμε αποτελεί το ένα από τα δύο βασικότερα χαρακτηριστικά μεγέθη ενός υπεραγωγού και ονομάζεται μήκος συνάφειας.

Εισάγωντας την αδιάστατη κυματοσυνάρτηση στην δεύτερη διαφορική εξίσωση θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 \vec{j}_s &= -\frac{i\hbar e}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{m}|\Psi|^2\vec{A} \Rightarrow \\
 \frac{\beta}{|\alpha|}\vec{j}_s &= -\frac{i\hbar e}{2m}\frac{\beta}{|\alpha|}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{\beta}{|\alpha|}\frac{2e^2}{m}|\Psi|^2\vec{A} \Rightarrow \\
 \frac{\beta}{|\alpha|}\vec{j}_s &= -\frac{i\hbar e}{2m}(\psi^*\nabla\Psi - \psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{m}|\psi|^2\vec{A} \Rightarrow \\
 \frac{\beta^2}{\alpha^2}\vec{j}_s &= -\frac{i\hbar e}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{\beta}{|\alpha|}\frac{2e^2}{m}|\psi|^2\vec{A} \Rightarrow \\
 \frac{\beta}{|\alpha|}\vec{j}_s &= -\frac{i\hbar|\alpha|e}{2m\beta}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{2e^2}{m}|\psi|^2\vec{A} \Rightarrow \\
 \frac{\beta m}{2e^2|\alpha|}\vec{j}_s &= -\frac{i\hbar|\alpha|}{4e\beta}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\vec{A} \Rightarrow \\
 \frac{\beta m}{2e^2|\alpha|\mu_0}\nabla\mathbf{X}(\nabla\mathbf{X}\vec{A}) &= -i\Phi_0(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\vec{A} \Rightarrow \\
 \lambda^2\nabla\mathbf{X}(\nabla\mathbf{X}\vec{A}) &= -i\Phi_0(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\vec{A}
 \end{aligned}$$

Εδώ εισάγαμε το επόμενο χαρακτηριστικό μέγεθος για ένα υπεραγωγό το βάθος διείσδυσης $\lambda = \sqrt{\frac{m\beta}{2e^2|\alpha|\mu_0}}$ το οποίο προκύπτει και από τη θεωρία London. Τα χαρακτηριστικά αυτά μεγέθη καθώς και η φυσική τους σημασία περιγράφονται παρακάτω.

Η συνοριακή συνθήκη θα είναι

$$(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A})\vec{n}\psi = 0$$

Έτσι εισάγοντας την αδιάστατη κυματοσυνάρτηση, οι εξισώσεις Ginzburg-Landau έχουν την ακόλουθη μορφή

$$\xi^2(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A})^2\psi - \psi + \psi|\psi|^2 = 0 \quad (3.15)$$

$$\lambda^2\nabla X(\nabla X\vec{A}) = -i\Phi_0(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\vec{A} \quad (3.16)$$

$$\text{Με συνοριακή συνθήκη } (i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A})\vec{n}\psi = 0 \quad (3.17)$$

Παρακάτω φαίνεται η φυσική σημασία της συνοριακής συνθήκης για τη δεύτερη εξίσωση Ginzburg-Landau αν θεωρήσουμε τις εξισώσεις στην πρώτη τους μορφή τότε η συνοριακή συνθήκη θα είναι

$$(-i\hbar\nabla\Psi - 2e\vec{A}\Psi)\vec{n} = 0$$

και η διαφορική εξίσωση που δίνει το υπεραγωγίμο ρεύμα

$$\vec{J}_s = -\frac{i\hbar e}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{m}|\Psi|^2\vec{A}$$

εκφράζοντας τη συνοριακή συνθήκη ως προς τον όρο του τελεστή ανάδελτα και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση θα είναι

$$\begin{aligned} -i\hbar\nabla\Psi &= 2e\vec{A}\Psi \quad \text{και} \quad i\hbar\nabla\Psi^* = 2e\vec{A}\Psi^* \\ \vec{J}_s &= -\frac{e}{2m}\Psi^*i\hbar\nabla\Psi + \frac{e}{2m}\Psi i\hbar\nabla\Psi^* - \frac{2e^2}{m}|\Psi|^2\vec{A} \Rightarrow \\ \vec{J}_s &= \frac{e}{2m}\Psi^*2e\vec{A}\Psi + \frac{e}{2m}\Psi 2e\vec{A}\Psi^* - \frac{2e^2}{m}|\Psi|^2\vec{A} \Rightarrow \\ \vec{J}_s &= \frac{2e^2}{2m}\vec{A}|\Psi|^2 + \frac{2e^2}{2m}\vec{A}|\Psi|^2 - \frac{2e^2}{m}|\Psi|^2\vec{A} \Rightarrow \\ \vec{J}_s &= \frac{2e^2}{m}\vec{A}|\Psi|^2 - \frac{2e^2}{m}|\Psi|^2\vec{A} = 0 \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο και μας δείχνει ότι στο σύνορο μεταξύ της κανονικής και υπεραγωγίμης κατάστασης το υπεραγωγίμο ρεύμα θα είναι μηδέν.

3.1.5 Μετασχηματισμός βαθμίδας

Οι εξισώσεις Ginzburg-Landau όπως είναι στην τελική τους μορφή παραμένουν αμετάβλητες κάτω από μετασχηματισμό βαθμίδας. Ο μετασχηματισμός $\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\phi$ μας δίνει το ίδιο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Έτσι εφόσον οι εξισώσεις παραμένουν αναλλοίωτες μπορούμε πάντα να επιλέξουμε κατάλληλες εκφράσεις για τις μεταβλητές \vec{A} , ψ όπως

$$\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\phi \quad (3.18)$$

$$\psi = \psi' e^{i\frac{2\pi}{\Phi_0}\phi(\vec{r})} \quad (3.19)$$

με αποτέλεσμα για υπεραγωγό χωρίς οπές η παράμετρος τάξης να είναι πραγματική συνάρτηση.

3.1.6 Μήκος συνάφειας και βάθος διείσδυσης

Η φυσική σημασία του μήκους συνάφειας $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4m|\alpha|}}$ που εισάγαμε πιο πριν, είναι ότι αυτό αποτελεί το χαρακτηριστικό μήκος μέσα στο οποίο η παράμετρος τάξης μεταβάλλεται. Αν θεωρήσουμε υπεραγωγίμο δείγμα στο ημιδιάστημα $x > 0$ στη μία διάσταση και μία λεπτή ταινία κανονικού μετάλλου στο διάστημα $-t < x < 0$ τότε είναι προφανές ότι στο σύνορο μεταξύ υπεραγωγού και κανονικού μετάλλου η πυκνότητα των υπεραγωγίμων ηλεκτρονίων θα είναι μικρότερη σε σχέση με αυτή στον όγκο του υπεραγωγού όπου $\psi = 1$. Αν αναζητήσουμε το χαρακτηριστικό μήκος μέσα στο οποίο η παράμετρος τάξης μεταβάλλεται ώστε να είναι $\psi \rightarrow 1$ τότε για τη μία διάσταση $\psi = \psi(x)$ μπορούμε να διαλέξουμε το διανυσματικό δυναμικό έτσι ώστε η παράμετρος τάξης να είναι πραγματική. Η πρώτη εξίσωση της θεωρίας γίνεται

$$-\xi^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} - \psi + \psi^3 = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η παράμετρος μεταβάλλεται λίγο τότε $\psi = 1 - \epsilon(x)$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση και κρατώντας όρους μόνο μέχρι πρώτης τάξης θα είναι

$$\xi^2 \frac{d^2\epsilon}{dx^2} - 2\epsilon = 0$$

με λύση $\epsilon = \epsilon(0)e^{-\sqrt{2}x/\xi}$. Μπορούμε να πούμε διαφορετικά ότι το μήκος συνάφειας έχει να κάνει με το γεγονός ότι η πυκνότητα των υπεραγωγίμων ηλεκτρονίων δεν μπορεί να αλλάξει απότομα. Υπάρχει δηλαδή ένα ελάχιστο μήκος (ξ) πάνω από το οποίο η δεδομένη μεταβολή μπορεί να πραγματοποιηθεί. Το μήκος συνάφειας κυμαίνεται από μερικά νανόμετρα έως μερικά μικρόμετρα.

Το βάθος διείσδυσης $\lambda = \sqrt{\frac{m\beta}{2e^2|\alpha|\mu_0}}$ το οποίο εισήχθει από την προγενέστερη θεωρία London και το οποίο προκύπτει και στη θεωρία Ginzburg-Landau είναι η

απόσταση στην οποία διεισδύει το μαγνητικό πεδίο μέσα στον υπεραγωγό και έχει την τιμή $1/e$ της τιμής που έχει στην επιφάνεια του υπεραγωγού. Εκτείνεται από 10 έως 100 νανόμετρα.

Η θερμοκρασιακή εξάρτηση και για τα δύο αυτά μεγέθη είναι

$$\lambda \propto (T_c - T)^{-1/2} \quad (3.20)$$

$$\xi \propto (T_c - T)^{-1/2} \quad (3.21)$$

Ο λόγος των δύο χαρακτηριστικών μεγεθών $\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$ ονομάζεται παράμετρος Ginzburg-Landau.

$$\kappa = \sqrt{2} \frac{2\pi}{\Phi_0} \lambda^2 H_{cm}$$

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές

4.1 Το φαινόμενο της γειννίαςσης

Ο ρόλος του μήκους συνάφειας μπορεί να εκτιμηθεί αν θεωρήσουμε μία καλή επαφή NS μεταξύ υπεραγωγού και κανονικού μετάλλου. Τα υπεραγωγίμα ηλεκτρόνια τότε μπορούν να διεισδύσουν από την S περιοχή στην N του κανονικού μετάλλου. Αυτό σημαίνει ότι μερικά λεπτά στρώματα του κανονικού μετάλλου θα γίνουν υπεραγωγίμα κοντά στο σύνορο NS. Αυτό έχει συγχρόνως ως αποτέλεσμα τη μείωση της πυκνότητας των υπεραγωγίμων ηλεκτρονίων και κατά συνέπεια της παραμέτρου τάξης $\psi < 1$ μέσα στο υπεραγωγίμο δείγμα. Αυτό είναι το φαινόμενο της γειννίαςσης.

Στην απλούστερη περίπτωση επαφής NS είναι $T_{cs} \geq T_{cn}$ και $T_{cn} < T < T_{cs}$. Η S υπεραγωγίμη περιοχή είναι για $x > 0$ και η N κανονική περιοχή για $x < 0$.

Η συμπεριφορά της ψ μπορεί να βρεθεί λύνοντας την πρώτη εξίσωση της θεωρίας στη μία διάσταση.

$$-\xi^2 \frac{d\psi^2}{dx} - \psi^2 + 1/2\psi^4 = C$$

όπου C η σταθερά ολοκλήρωσης. Για $x \rightarrow \infty$ είναι $\frac{d\psi}{dx} \rightarrow 0$ και $\psi \rightarrow 1$ και τότε είναι $C = -1/2$. Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$\psi = \tanh \frac{x - x_0}{\sqrt{2}\xi}$$

όπου x_0 είναι σταθερά ολοκλήρωσης η οποία βρίσκεται από τη συνοριακή συνθήκη για $x = 0$. Σε αυτή την περίπτωση είναι $\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{b}$. Η ποσότητα b υπολογίζεται από τη μικροσκοπική θεωρία BCS και παριστάνει την απόσταση στην οποία φθίνει η παράμετρος τάξης μέσα στην N περιοχή.

Το φαινόμενο της γειννίαςσης χρησιμοποιείται στις επαφές (SNS) Josephson όπου η μείωση της πυκνότητας των υπεραγωγίμων ηλεκτρονίων λόγω του φαινομένου με-

ταξύ των υπεραγωγίων ηλεκτροδίων καθίσταται μέσω στρωμάτων κανονικού μετάλλου.

4.2 Η ενέργεια της συνοριακής επιφάνειας SN

Θεωρώντας έναν υπεραγωγό στο ενδιάμεσο στάδιο όπου οι περιοχές S και N έχουν αυθαίρετο σχήμα και μέγεθος αρκετά μεγαλύτερο από τα μήκη ξ, λ και τη συνοριακή επιφάνεια στη μία διάσταση ώστε η S περιοχή να είναι για $x < 0$ και η N για $x > 0$. Το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο στο άξονα z ώστε $B = (0, 0, B)$. Διαλέγουμε τέτοια μορφή πάλι για το διανυσματικό πεδίο ώστε η παράμετρος τάξης να είναι πραγματική και $\vec{A} = (0, A, 0)$. Σε αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις της θεωρίας είναι

$$-\xi^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2\pi\xi^2}{\Phi_0} A^2 \psi - \psi + \psi^3 = 0$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{\psi^2}{\lambda^2} \vec{A}$$

Η πρώτη ολοκλήρωση των εξισώσεων δίνει

$$\left(1 - \frac{2\pi\xi A^2}{\Phi_0}\right) \psi^2 - \frac{1}{2} \psi^4 + \frac{2\pi\xi\lambda^2}{\Phi_0} \frac{dA^2}{dx} + \xi^2 \frac{d\psi^2}{dx} = C \quad (4.1)$$

Η τιμή της σταθεράς C μπορεί να βρεθεί από τη συνοριακή συνθήκη για $x \rightarrow -\infty$ είναι $\psi \rightarrow 1, \frac{d\psi}{dx} \rightarrow 0, \frac{dA}{dx} \rightarrow 0$. Έτσι βρίσκουμε ότι $C = 1/2$. Ισχύει $\sqrt{2}H_{cm} = \Phi_0/2\pi\xi\lambda$ οπότε η εξίσωση ξαναγράφεται

$$\left(\frac{2\pi\xi A^2}{\Phi_0} - 1\right) \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 = \xi^2 \frac{d\psi^2}{dx} + \frac{H^2}{2H_{cm}^2} - \frac{1}{2}$$

Ύστερα απ'όλα αυτά υπολογίζουμε την ενέργεια της SN συνοριακής επιφάνειας. Στην κατάσταση ισορροπίας της ενδιάμεσης κατάστασης η υπεραγωγίμη περιοχή εκτείθεται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο H_{cm} . Η πυκνότητα της ενέργειας Gibbs είναι

$$G_s = F_s - \vec{B}H_{cm}$$

Στο όριο $x \rightarrow -\infty$ το μαγνητικό πεδίο είναι $B \rightarrow 0$ και ισχύει $G_s = F_s$ για απόσταση αρκετά μέσα στην S περιοχή, δηλαδή βαθιά μέσα στον υπεραγωγό.

Στην κανονική περιοχή όπου είναι $x \rightarrow +\infty$ είναι $B = \mu_0 H_{cm}$ και η πυκνότητα της ελεύθερης ενέργειας είναι

$$F = F_n + \mu_0 \frac{H_{cm}^2}{2}$$

όπου F_n είναι η ενέργεια της κανονικής περιοχής N χωρίς την παρουσία μαγνητικού πεδίου. Η πυκνότητα της ενέργειας Gibbs στην κανονική περιοχή είναι

$$G_n = F - BH = F_n + \mu_0 \frac{H_{cm}^2}{2} - \mu_0 H_{cm}^2 = F_n - \mu_0 \frac{H_{cm}^2}{2} = F_s(0)$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μακριά από τη συνοριακή επιφάνεια η πυκνότητα ενέργειας Gibbs στην S και την N περιοχή είναι ίσες. Τι γίνεται όμως με την ενέργεια κοντά στο στην συνοριακή επιφάνεια SN;

Η ενέργεια επιφανειακής τάσης είναι

$$\sigma_{sn} = \int_{-\infty}^{+\infty} [G_s(H) - G_n] dx$$

όπου

$$G_s(H) = F_s(H) - BH$$

και

$$F_s(H) = F_n + \mu_0 H_{cm}^2 \left(-|\psi|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^4 + \xi^2 \left| i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0} A\psi \right|^2 \right) + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

οπότε με βάση αυτή η επιφανειακή τάση θα είναι

$$\sigma_{sn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu_0 H_{cm}^2 \left(-\psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 + \xi^2 \frac{d\psi^2}{dx} + \frac{2\pi\xi A^2}{\Phi_0} \psi^2 \right) + \frac{B^2}{2\mu_0} - BH_{cm} + \mu_0 \frac{H_{cm}^2}{2} \right] dx$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση που βρίκαμε πιο πάνω καταλήγουμε τελικά

$$\sigma_{sn} = \frac{B_c^2}{2\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\xi^2 \frac{d\psi^2}{dx} + \frac{B(B - B_c)}{2B_c^2} \right) dx \quad (4.2)$$

Στην τελευταία σχέση ο δεύτερος όρος του ολοκληρώματος είναι πάντα αρνητικός εφόσον ισχύει $B < B_c$ ενώ ο πρώτος όρος είναι θετικός.

Στη θεωρία London τα κβαντικά φαινόμενα δε λαμβάνονται υπόψη οπότε ισχύει $\frac{d\psi}{dx} = 0$ και κατά συνέπεια $\sigma_{sn} < 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο υπεραγωγός μπορεί να σώσει αρκετή ενέργεια με το σχηματισμό πολλών SN συνοριακών επιφανειών.

Λαμβάνοντας όμως υπόψη τα κβαντικά φαινόμενα η ενέργεια επιφανειακής τάσης μπορεί να γίνει θετική.

Κοντά στην συνοριακή επιφάνεια η παράμετρος τάξης μεταβάλλεται από 0 σε 1 μέσα στο μήκος συνάφειας ξ . Παρόλα αυτά ισχύει $\frac{d\psi}{dx} \frac{1}{\xi}$ και $\frac{\xi^2 d^2\psi}{dx^2} \approx 1$. Έτσι λοιπόν ο όρος αυτός θα δώσει μη μηδενική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα μέσα στο μήκος ξ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} dx \approx \xi$$

Ο όρος $\frac{B(B-B_c)}{B_c^2}$ παίρνει την τιμή 1 στην περιοχή της συνοριακής επιφάνειας και μηδενίζεται στις S και N περιοχές.

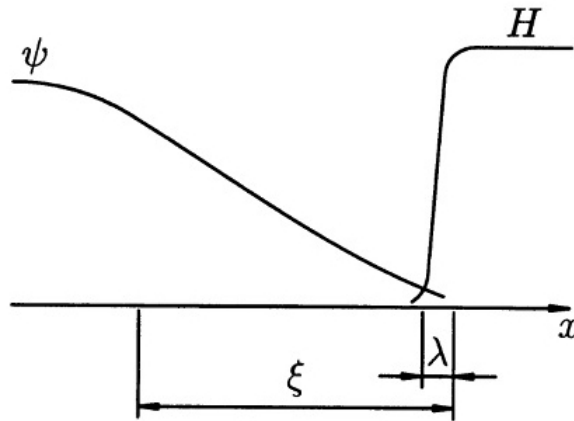
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(B-B_c)}{2B_c^2} dx \lambda$$

Θεωρώντας τώρα δύο οριακές περιπτώσεις:

1. $\lambda \ll \xi$ το οποίο σημαίνει ότι $k \ll 1$. Σε αυτή την περίπτωση η κύρια συνεισφορά στην ενέργεια επιφανειακής τάσης είναι από την παράγωγο της παραμέτρου τάξης. Ακριβείς υπολογισμοί δίνουν

$$\sigma_{sn} = 1.89\mu_0 \frac{H_{cm}^2}{2} \xi$$

Κοντά στο σύνορο το πεδίο δεν διεισδύει όπως στον υπεραγωγό αλλά η υπε-



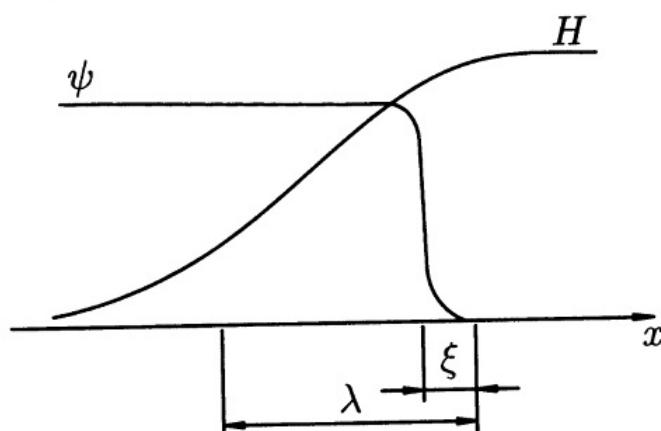
Σχήμα 4.1: Η παράμετρος τάξης και το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή της συνοριακής επιφάνειας SN για $\lambda \ll \xi$

ραγωγιμότητα μειώνεται $\psi \ll 1$ οπότε $\sigma_{sn} > 0$.

Υπεραγωγοί τύπου 1!

2. $\lambda \gg \xi$ οπότε ισχύει $k \gg 1$. Η κύρια συνεισφορά στην ενέργεια της επιφανειακής τάσης σε αυτή την περίπτωση είναι από το μαγνητικό πεδίο και οι ακριβείς υπολογισμοί δίνουν

$$\sigma_{sn} = -\mu_0 \frac{H_{cm}^2}{2} \lambda$$



Σχήμα 4.2: Η παράμετρος τάξης και το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή της συνοριακής επιφάνειας SN για $\lambda \gg \xi$

Κοντά στη συνοριακή επιφάνεια το μαγνητικό πεδίο διεισδύει όπως και σε ένα κανονικό μέταλλο αλλά η ενέργεια αποθηκεύεται λόγω της υπεραγωγίμης κατάστασης $\psi \neq 0$.

Υπεραγωγοί τύπου 2!

Για μερικές τιμές της παραμέτρου Ginzburg Landau θα είναι $\sigma_{sn} = 0$. Αυτό αποτελεί και το σύνορο μεταξύ των υπεραγωγών τύπου 1 και 2.

Σύμφωνα με ακριβείς υπολογισμούς για τους δύο τύπους υπεραγωγών θα ισχύουν τα εξής:

- Αν ισχύει $\lambda < \frac{\xi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$, έχουμε υπεραγωγό τύπου 1 και η ενέργεια επιφανειακής τάσης είναι θετική $\sigma_{sn} > 0$.
- Αν ισχύει $\lambda > \frac{\xi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$, έχουμε υπεραγωγό τύπου 2 και η ενέργεια επιφανειακής τάσης είναι αρνητική $\sigma_{sn} < 0$.

Κεφάλαιο 5

Σχόλια-Συμπεράσματα

Η θεωρία Ginzburg Landau αποτελεί ένα θρίαμβο της φυσικής διαίσθησης διότι αποτελεί μία φαινομενολογική μακροσκοπική θεωρία για ένα φαινόμενο καθαρά κβαντομηχανικό όπως είναι το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας. Η υπεραγωγιμότητα αποτελεί τη μακροσκοπική εκδήλωση καθαρά κβαντομηχανικών φαινομένων και περιγράφεται από τη θεωρία GL με τρόπο καθαρά διαισθητικό. Εισάγεται η παράμετρος τάξης η οποία καθορίζει τις ιδιότητες του συστήματος και η οποία στην κανονική κατάσταση του έχει μηδενική τιμή ενώ κατά τη μεταβολή του συστήματος κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία έχει μη μηδενική τιμή και είναι αυτή που καθορίζει τις φυσικές ιδιότητές του.

Η μικροσκοπική θεωρία BCS η οποία αν και περιγράφει σε μεγαλύτερο βαθμό το φαινόμενο, είναι αρκετά περίπλοκη και δύσκολη στην κατανόησή της με αποτέλεσμα να καθίσταται δυσπρόσιτη. Σε αντίθεση η θεωρία GL μπορεί να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα και προβλέψεις για το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας και ιδιαίτερα για τους υπεραγωγούς τύπου 2 με πιο απλό τρόπο.

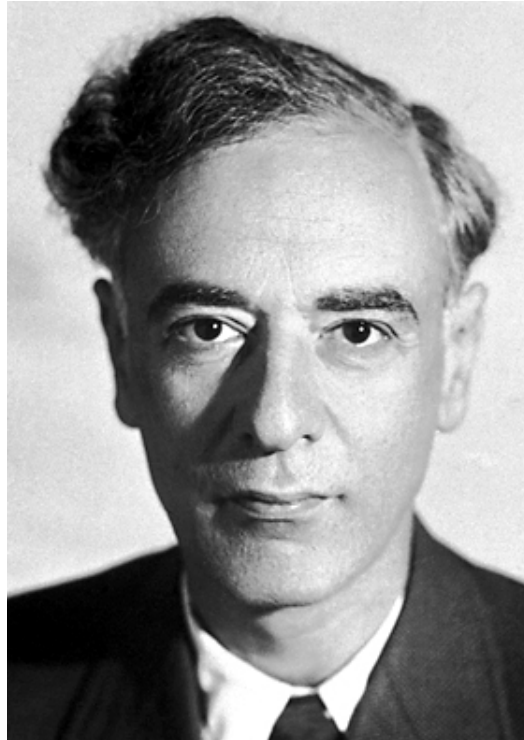
Καθοριστικό ρόλο για την θεωρητική περιγραφή του φαινομένου υπήρξε το φαινόμενο Meissner το οποίο έδωσε το έναυσμα για την πρώτη απόπειρα θεωρητικής εξήγησης με τη θεωρία London. Η θεωρία London αν και περιγράφει ικανοποιητικά το φαινόμενο Meissner δεν αποτελεί ολοκληρωμένη θεωρία για το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας διότι δε λαμβάνει υπόψη της τα κβαντικά φαινόμενα. Με βάση αυτό η θεωρία GL αποτελεί την πρώτη θεωρία για το φαινόμενο αυτό. Τα κβαντικά φαινόμενα λαμβάνονται υπόψη σε αυτή. Επιπλέον προβλέπει ένα χαρακτηριστικό μήκος για κάθε υπεραγωγό το οποίο εισάγεται και στη θεωρία London.

Τα τελευταία χρόνια έχει γίνει σύνδεση της θεωρίας GL με τη θεωρία BCS με αποτέλεσμα οι προβλέψεις που κάνουν τα δύο μοντέλα να μη διαφέρουν τόσο πολύ.

Με την ανακάλυψη των υπεραγωγών υψηλών θερμοκρασιών και τη συνεχή ανάπτυξη της τεχνολογίας η κάθε θεωρία δοκιμάζεται καθημερινά με αποτέλεσμα τη δημιουργία διάφορων μοντέλων τα οποία αποτελούν εξέλιξη των θεμελιωδών αυτών θεωριών με σκοπό την ολοκληρωμένη περιγραφή αυτών των περίπλοκων φυσικών

συστημάτων.

Είναι επίσης αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι διαφορικές εξισώσεις στις οποίες καταλήγει η θεωρία Ginzburg Landau δεν έχουν αναλυτική λύση παρά μόνο σε πολύ απλές περιπτώσεις. Η λύση τους σε πιο ρεαλιστικές περιπτώσεις είναι καθαρά αριθμητική πράγμα το οποίο δηλώνει και τη δυσκολία για τις προβλέψεις που κάνει αυτή.



Βιβλιογραφία

- [1] N.W. Ashcroft and N.D Mermin *Solid State Physics* 1976
- [2] C. Kittel *Introduction to Solid State Physics* fifth edition 1976
- [3] Στυλιανός Η. Μάσεν ,Μιχαήλ Ε. Γρυπαιός *Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής Τόμος Α* 2009
- [4] Στυλιανός Η. Μάσεν *Σημειώσεις Μαθηματικών Μεθόδων Φυσικής 2* 2005
- [5] Κωνσταντίνος Μανωλίκας *Μαθήματα Κλασικής Θερμοδυναμικής* 1997
- [6] Peter D Olmsted *Lectures On Landau Theory Of Phase Transitions*, University of Leeds 2000
- [7] Wikipedia Superconductivity
- [8] <http://physicsgg.me> Υπεραγωγιμότητα