Algebrización de Sistemas Deductivos. La teoría de Blok–Pigozzi. *

Renato Lewin
Pontificia Universidad Católica de Chile

Abril de 1999

1 Introducción

En el último tiempo se ha llamado Lógica Algebraica Abstracta al estudio de sistemas deductivos usando herramientas del álgebra universal.

Los orígenes del estudio algebraico de los sistemas deductivos se remontan, quizás, a los trabajos de G. Boole, vale decir, antes del nacimiento de la lógica matemática. Bien conocida es la relación que existe entre ciertos sistemas deductivos y clases de álgebras. Entre los principales están:

Cálculo Proposicional Clásico	Algebras de Boole
Cálculo Proposicional Intuisionista	Algebras de Heyting
Lógicas multi–valuadas	MV–álgebras
Lógica Modal	Algebras Modales
Lógica de Primer Orden	Algebras Cilíndricas, etc.

¿Cuál es la naturaleza de está relación? ¿Qué condiciones debe satisfacer un sistema deductivo para contar con una clase de álgebras equivalentes?

Los trabajos de Tarski, o más precisamente del grupo de Varsovia, (ver [13]) en los años 20 y 30 son el punto de partida del estudio de los sistemas deductivos en general y de la lógica algebraica tal como se la entiende hoy.

*Estas notas han sido preparadas para un ciclo de charlas dictadas en la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, durante el V Congreso Antonio Monteiro.

En [14] (una versión en inglés aparece en [13]), Tarski introduce el álgebra de fórmulas del cálculo proposicional y define la relación:

$$\varphi \sim \psi \quad \text{si y sólo si} \quad \vdash_{CPC} \varphi \leftrightarrow \psi\,.$$

Enseguida muestra que ésta es lo que hoy llamamos una congruencia y que el álgebra cuociente, que ahora es conocida como el *álgebra de Lindenbaum–Tarski del cálculo proposicional clásico*, es un álgebra de Boole. Recíprocamente, indica como construir un sistema deductivo a partir de una axiomatización de las álgebras de Boole.

En los dos importantes libros de H. Rasiowa y R. Sikorski [12] y H. Rasiowa [11] se decantan varias décadas de resultados en esta línea. El tratamiento dado en estos libros se aplica a sistemas con ciertas particularidades, por ejemplo, presupone la existencia de una implicación con ciertas propiedades standard. Por lo tanto muchos sistemas no son en este sentido algebrizables simplemente porque no cuentan con una implicación, o porque la que tienen no goza de las propiedades adecuadas.

No ha sido sino hasta muy recientemente que se ha dado una definición general y precisa del concepto de algebrizabilidad. Esta ha sido propuesta por W. Blok y D. Pigozzi en [1]. Basados en una generalización del proceso de Lindenbaum–Tarski, ellos proponen un tratamiento más general o "abstracto" del problema, uno que no dependa del lenguaje subyacente del sistema ni de la presencia de ciertos axiomas o reglas predeterminados. Naturalmente, hay muchos sistemas que tampoco son algebrizables en este sentido, sin embargo, no lo son por motivos más profundos y generales que el lenguaje en el que se expresan. ¿Qué tan buena es esta noción de algebrizabilidad? Esta pregunta sólo podrá responderse al ver las aplicaciones que la teoría tenga, especialmente, el uso de técnicas del álgebra universal en las clases de álgebras para obtener resultados sobre las lógicas asociadas.

Varios autores han perfeccionado, extendido o modificado estos conceptos iniciales. Ver por ejemplo [2, 5, 6, 8, 9, 10]. Con todo, la idea esencial sigue siendo la misma, es por eso que he centrado estas charlas en una exposición de esta teoría, como punto de partida para quien se interese en la lógica algebraica.

Estas Notas pretenden ser una introducción y guía para el estudio de [1]. Para facilitarlo, he indicado entre dobles corchetes algunas referencias a páginas (e.g. [[pag. 2]]) o a teoremas (e.g.Teo. [[3.5]]) de esa monografía.

Todas las definiciones necesarias están aquí, de modo que las Notas son autocontenidas. He incluido también un par de demostraciones simplificadas para que el lector perciba cómo se obtienen resultados pasando del sistema deductivo a la clase de álgebras asociadas y viceversa.

2 Sistemas Deductivos

Un *lenguaje proposicional*, o simplemente un *lenguaje*, es un conjunto $\mathcal{L}$ de conectivos lógicos. El *tipo de similaridad* del lenguaje, es decir la aridad de cada uno de los conectivos, está dado por una función de rango $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow \omega$, que en adelante subentenderemos sin mayor mención.

El conjunto $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ de las *fórmulas* de $\mathcal{L}$ se define recursivamente de la manera usual a partir de los conectivos lógicos y de un conjunto *variables proposicionales* $V = \{p_j : j \in \omega\}$ como sigue:

- $V \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$.
- Si $\alpha \in \mathcal{L}$ es un conectivo n–ario y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$, entonces $\alpha(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$.

Una asignación $\sigma : V \longrightarrow \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ se extiende recursivamente de manera única a la función $\bar{\sigma} : \mathcal{F}m_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ como sigue:

$$\bar{\sigma}(\varphi(p_1, \ldots, p_n)) = \varphi(\sigma(p_1), \ldots, \sigma(p_n)) .$$

Dicha función la llamaremos *substitución* y la denotaremos por la misma letra σ. Para cada $\Gamma \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ denotaremos $\sigma(\Gamma)$ al conjunto de fórmulas $\sigma(\Gamma) = \{\sigma(\varphi) : \varphi \in \Gamma\}$.

Una *regla de inferencia* sobre $\mathcal{L}$ es un par $\langle \Gamma, \varphi \rangle$, donde $\Gamma \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$, Γ es finito y $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ (ejemplos de éstas son *modus ponens y necesitación*). Diremos que ψ es *directamente demostrable* a partir de Δ por la regla $\langle \Gamma, \varphi \rangle$, si existe una substitución σ tal que $\sigma(\varphi) = \psi$ y $\sigma(\Gamma) \subseteq \Delta$.

Un *axioma* es una regla de la forma $\langle \emptyset, \psi \rangle$. Cualquier sustitución de un axioma es directamente demostrable a partir de cualquier conjunto de fórmulas Δ.

Un *sistema deductivo* $\mathcal{S}$ sobre $\mathcal{L}$, está determinado por un conjunto de axiomas y de reglas de inferencia. Entenderemos a $\mathcal{S}$ como un par $\langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$

donde $\vdash_{\mathcal{S}}$ es una relación entre conjuntos de fórmulas y fórmulas definida de la manera siguiente:

- $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ si y sólo si ψ pertenece al conjunto más pequeño de fórmulas que contiene a Δ , a todas las substituciones de los axiomas y es cerrado bajo pruebas directas.

La relación $\vdash_{\mathcal{S}}$, llamada *relación de consecuencia* de $\mathcal{S}$, satisface:

Lema 1 [[pag. 5]] *Si $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ es un sistema deductivo, entonces para todo $\Gamma , \Delta \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ y $\varphi , \psi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ se tiene:*

1. *$\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, para todo $\varphi \in \Delta$.*
2. *Si $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ y $\Delta \subseteq \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \psi$.*
3. *Si $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, para todo $\varphi \in \Delta$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \psi$.*
4. *Si $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, entonces existe $\Gamma \subseteq \Delta$ finito tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \psi$. Diremos que $\mathcal{S}$ es* finitario.
5. *Si $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, entonces $\sigma(\Delta) \vdash_{\mathcal{S}} \sigma(\psi)$, para toda substitución σ. Diremos que $\mathcal{S}$ es* estructural

Cualquier relación que satisfaga 1–5 es la relación de consecuencia de algún sistema deductivo. Podemos así definir un sistema deductivo como un par $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$, donde $\vdash_{\mathcal{S}}$ es una relación entre conjuntos de fórmulas y fórmulas que verifica 1–5. Nótese que esta definición no hace alusión alguna a reglas de inferencia ni a axiomas.

Si definimos

$$\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}(\Delta) = \{\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}} \,:\, \Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\},$$

$\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}$ define un operador sobre el conjunto de las fórmulas,

$$\mathcal{C}n_{\mathcal{S}} \,:\, \wp(\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}) \longrightarrow \wp(\mathcal{F}m_{\mathcal{L}})$$

llamado *operador de consecuencia de $\mathcal{S}$* . Las propiedades 1–5 de $\vdash_{\mathcal{S}}$ implican que $\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}$ es un operador de clausura algebraico. Como sabemos, se puede hacer el estudio de sistemas deductivos a partir de operadores de consecuencia ([[pag. 6]]), pero no lo haremos en estas Notas.

Una $\mathcal{S}$–*teoría* es un conjunto T de fórmulas que es cerrado bajo $\vdash_{\mathcal{S}}$, es decir,

$$T \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \implies \varphi \in T.$$

El conjunto de los *teoremas de* $\mathcal{S}$, es decir aquellas fórmulas φ tales que $\emptyset \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, (equivalentemente, aquellas fórmulas directamente demostrables a partir de cualquier conjunto Δ de fórmulas), es la menor $\mathcal{S}$–teoría. Por otra parte, $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ es la mayor $\mathcal{S}$–teoría. Observemos que $\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}(\Delta)$ es la menor $\mathcal{S}$–teoría que contiene a Δ.

El conjunto de todas las $\mathcal{S}$–teorías se denota $Th\mathcal{S}$ ([[pag.7]]) . Sobre este conjunto definimos las operaciones $\wedge^{\mathcal{S}}$ y $\vee^{\mathcal{S}}$, que son respectivamente, la intersección usual de conjuntos y la teoría generada por la unión conjuntista de teorías, es decir, para $T, U \in Th\mathcal{S}$, $T \wedge^{\mathcal{S}} U = T \cap U$ y $T \vee^{\mathcal{S}} U = \mathcal{C}n_{\mathcal{S}}(T \cup U)$. Observemos que la intersección arbitraria de teorías es una teoría y como $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ es la mayor $\mathcal{S}$–teoría, el retículo $\mathbf{Th}\mathcal{S} = \langle Th\mathcal{S}, \wedge^{\mathcal{S}}, \vee^{\mathcal{S}}\rangle$ es un retículo completo. El siguiente lema se desprende fácilmente de las propiedades de los operadores de clausura algebraicos. (Ver por ejemplo [4], Capítulo 1, §4 y §5.)

Lema 2 [[Lema 1.1]] *Sea* $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}}\rangle$ *un sistema deductivo.*

1. *Los elementos compactos de* $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ *son las* $\mathcal{S}$*–teorías finitamente generadas.*

2. *El retículo* $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ *el algebraico.*

3. $Th\mathcal{S}$ *es cerrado bajo uniones dirigidas.*

2.1 Lógica Ecuacional

Una $\mathcal{L}$–*ecuación* (o simplemente *ecuación*) ([[pag. 13]]), es una expresión de la forma $\varphi \approx \psi$, donde $\varphi, \psi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$, denotaremos al conjunto de las ecuaciones de $\mathcal{L}$ por $Eq_{\mathcal{L}}$. Una $\mathcal{L}$–*álgebra* es una estructura $\mathbf{A} = \langle A, (\alpha^{\mathbf{A}} : \alpha \in \mathcal{L})\rangle$, donde A es un conjunto no vacío llamado el *universo* de $\mathbf{A}$ y para cada $\alpha \in \mathcal{L}$, $\alpha^{\mathbf{A}}$ es una operación sobre A de la misma aridad que α.

Un ejemplo importante es el álgebra $\boldsymbol{\mathcal{F}m}_{\mathcal{L}}$, cuyo universo es el conjunto $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ de las fórmulas de $\mathcal{L}$ y cuyas operaciones se definen de la manera obvia: para cada operación n–aria $\alpha \in \mathcal{L}$ y fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$,

$$\alpha^{\boldsymbol{\mathcal{F}m}_{\mathcal{L}}}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,.$$

$\boldsymbol{\mathcal{F}m}_{\mathcal{L}}$ es conocida también como el *álgebra fórmulas de* $\mathcal{L}$ o el *absolutamente libre sobre el conjunto* V de las variables proposicionales.

Sean $\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ y $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$–álgebra. Una función $I : V \longrightarrow A$, definida por $p_i \longmapsto a_i$, $i \in \omega$, se extiende de manera única a

$$\begin{array}{rcl} \bar{I} : \mathcal{F}m_{\mathcal{L}} & \longrightarrow & A \\ \varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n) & \longmapsto & \varphi^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n). \end{array}$$

Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\mathcal{L}$–álgebras. Definimos la relación $\models_{\mathcal{K}}$ entre un conjunto de ecuaciones y una ecuación de la manera siguiente ([[pag. 13]]):

- $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \varphi \approx \psi$ si y sólo si para toda $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y para toda interpretación $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de las variables de $\Gamma \cup \{\, \varphi \approx \psi \,\}$ se tiene

$$\xi^{\mathbf{A}}(\bar{a}) = \eta^{\mathbf{A}}(\bar{a}) \ \text{, para } \xi \approx \eta \in \Gamma \implies \varphi^{\mathbf{A}}(\bar{a}) = \psi^{\mathbf{A}}(\bar{a}).$$

Esta relación es llamada *relación de consecuencia ecuacional determinada por* $\mathcal{K}$.

Podemos definir el concepto de operador de clausura $\mathcal{C}n_{\mathcal{K}}$, el de *teoría ecuacional* y el retículo $\mathbf{Th}\mathcal{K}$ de todas las teorías ecuacionales respecto de $\models_{\mathcal{K}}$. Es fácil ver que la única propiedad de $\vdash_{\mathcal{S}}$ que $\models_{\mathcal{K}}$ no tiene necesariamente es la finitud. Por ejemplo, directamente de la definición se observa que $\models_{\mathcal{K}}$ es estructural. (Ver [[Lema 3.1]]). Para una teoría general de lógica ecuacional, el lector puede consultar [4], Capítulo 2, §14.

3 Lógicas Algebrizables

Intuitivamente, un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es algebrizable si existe una clase $\mathcal{K}$ de álgebras del mismo tipo y existe una correspondencia entre fórmulas de $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ y ecuaciones de $Eq_{\mathcal{L}}$ tal que las relaciones $\vdash_{\mathcal{S}}$ y $\models_{\mathcal{K}}$ sean "equivalentes". Es decir, dada una fórmula α existe una ecuación $\widehat{\alpha}$ y dada una ecuación $\sigma \approx \tau$ existe una fórmula $\widetilde{\sigma \approx \tau}$ tales que :

1. $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \alpha$ si y sólo si $\widehat{\Gamma} \models_{\mathcal{K}} \widehat{\alpha}$,
2. $\Sigma \models_{\mathcal{K}} \sigma \approx \tau$ si y sólo si $\widetilde{\Sigma} \models_{\mathcal{K}} \widetilde{\sigma \approx \tau}$,
3. $\alpha \dashv \vdash_{\mathcal{S}} \widetilde{\widehat{\alpha}}$,
4. $\sigma \approx \tau \;\dashv\models_{\mathcal{K}} \widehat{\widetilde{\sigma \approx \tau}}$.

Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es el Cálculo Proposicional Clásico y $\mathcal{K}$ es la variedad de las álgebras de Boole, haciendo:

- $\widehat{\alpha} = \alpha \approx \top$
- $\widetilde{\sigma \approx \tau} = \sigma \leftrightarrow \tau$,

como sabemos, se verifican las cuatro condiciones de arriba.

3.1 Semánticas Algebraicas Equivalentes

Formalizaremos aquí las ideas intuitivas del párrafo anterior.

Definición 1 [[Def. 2.2]] *Sea $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductivo y $\mathcal{K}$ una clase de $\mathcal{L}$-algebras. $\mathcal{K}$ es una* semántica algebraica *para $\mathcal{S}$ si $\vdash_{\mathcal{S}}$ puede ser interpretado en $\models_{\mathcal{K}}$ de la manera siguiente. Existe un conjunto finito $\delta_i(p) \approx \varepsilon_i(p)$, para $i < n$, de ecuaciones en una variable p, tal que para $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ para cada $j < n$:*

(1) $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ *si y sólo si*
$$\{\delta_i(\psi) \approx \varepsilon_i(\psi) \,:\, i < n\,,\, \psi \in \Gamma\} \models_{\mathcal{K}} \delta_j(\varphi) \approx \varepsilon_j(\varphi)\,; \quad j < n\,.$$

$\delta_i \approx \varepsilon_i$ *son llamadas* ecuaciones de definición *para $\mathcal{S}$ y $\mathcal{K}$.*

Definición 2 [[Def. 2.4]] *$\mathcal{K}$ es una semántica algebraica* equivalente *para un sistema deductivo $\mathcal{S}$ si existe un conjunto finito $\Delta_j(p,q)$, para $j < m$, de fórmulas con dos variables tal que para todo $\varphi \approx \psi \in \mathrm{Eq}_{\mathcal{L}}$ se tiene:*

$$(2)\ \varphi \approx \psi \ =\!\!\mid\models_{\mathcal{K}} \delta_i(\varphi\Delta_j\psi) \approx \varepsilon_i(\varphi\Delta_j\psi)\ ; \quad i < n\,,\, j < m\,.$$

El conjunto de fórmulas $\Delta_j(p,q)$ es llamado *sistema de fórmulas de equivalencia* para $\mathcal{S}$ y $\mathcal{K}$. Abreviaremos $\delta \approx \varepsilon$ para el sistema de ecuaciones de definición y $\Delta(p,q)$ para el sistema de fórmulas de equivalencia.

Lema 3 [[Lema 2.9]] *Sea $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductivo y $\mathcal{K}$ una semántica algebraica equivalente con ecuaciones de definición $\delta \approx \varepsilon$ y fórmulas de equivalencia $\Delta(p,q)$. Entonces para todo $\Sigma \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathcal{L}}$ y toda ecuación $\varphi \approx \psi$,*

$$(3)\ \Sigma \models_{\mathcal{K}} \varphi \approx \psi \quad \textit{si y sólo si} \quad \{\delta\Delta\varepsilon : \delta \approx \varepsilon \in \Sigma\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\Delta\psi,$$

y para cada $\theta \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$,

$$(4)\ \theta \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \delta(\theta)\Delta\varepsilon(\theta).$$

Recíprocamente, si existen fórmulas Δ y ecuaciones $\delta \approx \varepsilon$ que satisfagan (3) y (4), entonces $\mathcal{K}$ es una semántica álgebraica equivalente para $\mathcal{S}$.

Definición 3 *Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ se dice* algebrizable *si tiene una semántica algebraica equivalente.*

A continuación veremos que, esencialmente, todo sistema algebrizable tiene una única semántica equivalente.

Lema 4 [[Cor. 2.11]] *Si $\mathcal{K}$ es una semántica algebraica para $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{K}$ es una semántica algebraica equivalente si y sólo si $\mathcal{K}^Q$, la cuasivariedad generada por $\mathcal{K}$, lo es.*

Esto se debe a que la segunda parte de (2) es equivalente a un sistema de cuasi–identidades

$$\bigwedge_{\psi\in\Gamma} \delta(\psi) \approx \varepsilon(\psi) \quad \Longrightarrow \delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi).$$

Teorema 1 [[Teo. 2.15]] *Sean $\mathcal{S}$ un sistema deductivo algebrizable, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ dos semánticas algebraicas equivalentes. Entonces $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ generan la misma cuasivariedad.*

Idea de la demostración.

(a) Usando las propiedades de $\approx$, se demuestra que $\vdash_{\mathcal{S}} x\varDelta y$ define una relación de congruencia sobre $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$.

(b) $x\,,\, x\varDelta y \vdash_{\mathcal{S}} y\,.$

(i) $x \approx y\,,\ \delta(x) \approx \varepsilon(x) \models_{\mathcal{K}} \delta(x) \approx \varepsilon(y)\,,$	prop. de $\approx$,
(ii) $x \approx y \dashv\models_{\mathcal{K}} \delta(x\varDelta y) \approx \varepsilon(x\varDelta y)\,,$	(2),
(iii) $\delta(x\varDelta y) \approx \varepsilon(x\varDelta y)\,, \delta(x) \approx \varepsilon(x) \models_{\mathcal{K}} \delta(y) \approx \varepsilon(y)\,,$	(i), (ii),
(iv) $x\varDelta y\,,\, x \vdash_{\mathcal{S}} y\,,$	(1).

Sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ dos semánticas algebraicas equivalentes al sistema $\mathcal{S}$ y sean $x\varDelta y$ y $x\varDelta' y$ sus respectivas fórmulas de equivalencia.

(c) $x\varDelta y \dashv\vdash_{\mathcal{S}} x\varDelta' y\,.$

Consideramos $\alpha(p) = x\varDelta' p\,.$ Entonces

$x\varDelta y \vdash_{\mathcal{S}} \alpha(x)\varDelta\alpha(y)\,,$	(a),
$x\varDelta y \vdash_{\mathcal{S}} (x\varDelta' x)\varDelta(x\varDelta' y)\,,$	def.,
$x\varDelta y \vdash_{\mathcal{S}} (x\varDelta' y)\,,$	(a), (b).

Similarmente probamos en la otra dirección.

(d) $\mathcal{K}^Q = \mathcal{K}'^Q\,.$

$\Sigma \models_{\mathcal{K}} \varphi \approx \psi$ si y sólo si $\{\alpha\varDelta\beta : \alpha \approx \beta \in \Sigma\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\varDelta\psi\,,$	(3),
$\Sigma \models_{\mathcal{K}} \varphi \approx \psi$ si y sólo si $\{\alpha\varDelta'\beta : \alpha \approx \beta \in \Sigma\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\varDelta'\psi\,,$	(c),
$\Sigma \models_{\mathcal{K}} \varphi \approx \psi$ si y sólo si $\Sigma \models_{\mathcal{K}'} \varphi \approx \psi\,,$	(3).

□

El recíproco de este teorema es falso. Existen sistemas deductivos distintos que tienen la misma semántica algebraica equivalente. Ver ejemplo en [[Sección 5.2.4]].

3.2 Semánticas Matriciales

Una *$\mathcal{L}$-matriz* ([[pag. 8]]) es un par $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, F \rangle$, donde $\mathbf{A}$ es una $\mathcal{L}$-álgebra y F es un subconjunto del universo de $\mathbf{A}$, los elementos de F son llamados *elementos designados de A.* Para una clase de matrices $\mathcal{M}$ definimos la relación $\models_{\mathcal{M}}$ entre un conjunto de fórmulas y una fórmula de la manera siguiente:

- $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \varphi$ si y sólo si para toda $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ y para toda interpretación $\bar{a}$ de las variables de $\Gamma \cup \{\varphi\}$,

$$\psi^{\mathbf{A}}(\bar{a}) \in F, \text{ para todo } \psi \in \Gamma \implies \varphi^{\mathbf{A}}(\bar{a}) \in F.$$

Una matriz $\mathcal{A}$ es un *modelo matricial* de $\mathcal{S}$ si

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \implies \Gamma \models_{\{\mathcal{A}\}} \varphi,$$

en tal caso F se denomina un *$\mathcal{S}$-filtro.*

Observemos que si T es una $\mathcal{S}$-teoría, entonces $\langle \boldsymbol{\mathcal{F}m}_{\mathcal{L}}, T \rangle$ es un modelo matricial de $\mathcal{S}$. Estas matrices se llaman *matrices de Lindenbaum* para $\mathcal{S}$.

Definición 4 *Sea $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductivo. Una clase de matrices $\mathcal{M}$ es una* semántica matricial *de $\mathcal{S}$ si para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ se tiene*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \quad \textit{si y sólo si} \quad \Gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi.$$

Por ejemplo, la clase de todas las matrices de Lindenbaum para $\mathcal{S}$ y la clase de todos los modelos matriciales de $\mathcal{S}$ son semánticas matriciales.

4 El Operador de Leibniz

Definición 5 [[Def. 1.4]] *Sean $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-álgebra y $F \subseteq A$. Definimos la relación binaria sobre A:*

$$\Omega_{\mathbf{A}} F = \left\{ \begin{array}{ll} \langle a, b \rangle : & \varphi^{\mathbf{A}}(a, \bar{c}) \in F \iff \varphi^{A}(b, \bar{c}) \in F, \textit{ para todo} \\ & \varphi(p, q_1, \ldots, q_n) \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}} \textit{ y todo } \bar{c} \in A^n \end{array} \right\}.$$

La relación $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}F$ se llama la *relación de Leibniz en* $\mathbf{A}$ *sobre* F. El operador sobre las partes de A, que denotaremos $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}$, es llamado *operador de Leibniz sobre* A. Si $\mathbf{A}$ es el álgebra de fórmulas $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$, el operador de Leibniz se denota simplemente $\boldsymbol{\Omega}$.

De la definición anterior se desprende inmediatamente que $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}F$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Intuitivamente, nos dice que $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}F$ identifica todos aquellos elementos de A que el álgebra $\mathbf{A}$ no puede distiguir relativamente a un conjunto F. Evidentemente esta definición es inmanejable desde el punto de vista práctico: difícilmente podremos calcular $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}F$ en un caso particular a partir de ella. Un par de teoremas nos ayudarán en esto.

Una congruencia Θ de $\mathbf{A}$ se dice *compatible* con el subconjunto F de A, si para todo $a, b \in A$, si $a \in F$ y $\langle a\, , b\rangle \in \Theta$ entonces $b \in F$.

Teorema 2 [[Teo. 1.5]] *Para toda álgebra* $\mathbf{A}$ *y cualquier* $F \subseteq A$, $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}F$ *es la mayor congruencia compatible con* F.

Teorema 3 [[Teo. 1.6]] *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra y* $F \subseteq A$. *Sea* Θ *una relación binaria sobre* A *que es elementalmente definible sobre la matriz* $\langle \mathbf{A}, F\rangle$ *con parámetros y sin igualdad:*

(i) Si Θ *es reflexiva, entonces* $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}F \subseteq \Theta$.

(ii) Si además Θ *es una congruencia compatible con* F, *entonces* $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}F = \Theta$.

5 Los Retículos de Teorías de $\mathcal{S}$ y de $\mathcal{K}$

La esencia de la teoría de algebrización desarrollada por Blok y Pigozzi, está en el siguiente teorema. Daremos su demostración porque ilustra cómo las ecuaciones de definición y las fórmulas de equivalencia aparecen más o menos naturalmente.

Teorema 4 [[Teo. 3.7]] *Sea* $\mathcal{S}$ *un sistema deductivo y* $\mathcal{K}$ *una cuasivariedad. Entonces* $\mathcal{K}$ *es la semántica algebraica equivalente de* $\mathcal{S}$ *si y solamente si existe un isomorfismo entre* $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ *y* $\mathbf{Th}\mathcal{K}$ *que conmuta con sustituciones.*

Idea de la demostración.

Supongamos que $\mathcal{K}$ es la semántica algebraica equivalente de $\mathcal{S}$. Entonces

$$\begin{array}{rlll} \Omega_{\mathcal{K}} : & \mathbf{Th}\mathcal{S} & \longrightarrow \mathbf{Th}\mathcal{K} \\ & T & \longmapsto \mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi) \ : \ \varphi \in T\} \end{array}$$

preserva el orden y las uniones dirigidas. De ahí es fácil demostrar que $\Omega_{\mathcal{K}}$ es un isomorfismo de retículos que conmuta con sustituciones.

Por otro lado, supongamos que $h \ : \ \mathbf{Th}\mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{Th}\mathcal{K}$ es un isomorfismo que conmuta con sustituciones.

Consideramos la $\mathcal{S}$–teoría $T = \mathcal{C}n_{\mathcal{S}}\{p\}$. Como T es compacta, su imagen $\theta = h(t)$ también lo es y por lo tanto, es finitamente generada, (ver Lema 2). O sea,

$$\theta = \mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\kappa_i(p, r_1, \ldots, r_k) \approx \tau_i(p, r_1, \ldots, r_k) \ : \ i < n\}.$$

Sea σ una sustitución tal que

$$\begin{array}{rcll} \sigma(p) & \approx & p & \\ \sigma(r_j) & \approx & p\,, & \qquad \text{para } j \leq k\,. \end{array}$$

Usando el hecho de que h conmuta con sustituciones, se demuestra que

$$\sigma(T) = \mathcal{C}n_{\mathcal{S}}\{\sigma(p)\} = T\,,$$

luego (con un abuso de notación),

$$\begin{array}{rcl} \theta = h(T) = h(\sigma(T)) & = & \sigma(h(T)) \\ & = & \sigma(\mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\kappa_i(p, r_1, \ldots, r_k) \approx \tau_i(p, r_1, \ldots, r_k) \ : \ i < n\} \\ & = & \mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\kappa_i(p, p, \ldots, p) \approx \tau_i(p, p, \ldots, p) \ : \ i < n\}\,. \end{array}$$

Hagamos $\delta_i(p) = \kappa_i(p, p, \ldots, p)$ y $\varepsilon_i(p) = \tau_i(p, p, \ldots, p)$, para $i \leq n$. Entonces

$$\begin{array}{rll} \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi & ssi & \mathcal{C}n_{\mathcal{S}}\{\varphi\} \subseteq \mathcal{C}n_{\mathcal{S}}T \\ & ssi & h(\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}\{\varphi\}) \subseteq h(\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}T) \\ & ssi & \mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi)\} \subseteq \mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\delta(\gamma) \approx \varepsilon(\gamma) \ : \ \gamma \in \Gamma\} \\ & ssi & \{\delta(\gamma) \approx \varepsilon(\gamma) \ : \ \gamma \in \Gamma\} \models_{\mathcal{K}} \delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi)\,. \end{array}$$

Similarmente, $\theta = Cn_{\mathcal{K}}\{p \approx q\}$ es una $\mathcal{K}$–teoría compacta, luego $h^{-1}(\theta)$ también lo es y por lo tanto, es generada por un conjunto finito de fórmulas $\{\varphi_j(p, q, r_1, \ldots, r_k)\} : j < m$.

Haciendo $\Delta(p, q) = \varphi(p, q, p, \ldots, p)$, se cumple

$$p \approx q \;\;=\!\!|\!\!\models_{\mathcal{K}}\; \delta(p\Delta q) \approx \varepsilon(p\Delta q)\,,$$

completando la demostración del teorema. □

El isomorfismo $\Omega_{\mathcal{K}}T$ del teorema puede encontrarse de la siguiente manera.

Lema 5 [[Lema 3.8]] *Sea $\mathcal{S}$ algebrizable y $\mathcal{K}$ su semántica algebraica equivalente $\mathcal{K}$. Sea Δ el sistema de equivalencias para $\mathcal{K}$. Entonces para $T \in Th\mathcal{S}$,*

$$\Omega_{\mathcal{K}}T = \{\varphi \approx \psi : \varphi\,\Delta\,\psi \in T\}.$$

6 Criterios de Algebrizabilidad

Hay dos importantes caracterizaciones para los sistemas algebrizables.

6.1 Algebrizabilidad y el Operador de Leibniz

Lema 6 [[Teo. 4.1]] *Sea $\mathcal{S}$ algebrizable y $\mathcal{K}$ su semántica algebraica equivalente $\mathcal{K}$. Entonces para cada $T \in Th\mathcal{S}$*

$$\mathbf{\Omega}T = \{\langle\varphi, \psi\rangle : \varphi \approx \psi \in \Omega_{\mathcal{K}}T\} = \{\langle\varphi, \psi\rangle : \varphi\Delta\psi \in T\}.$$

Teorema 5 [[Teo. 4.2]] *Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es algebrizable si y sólo si el operador de Leibniz sobre $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ cumple las condiciones:*

(i) $\mathbf{\Omega}$ *es inyectivo y preserva el orden de* $\mathbf{Th}\mathcal{S}$.

(ii) $\mathbf{\Omega}$ *preserva uniones de subconjuntos dirigidos en* $\mathbf{Th}\mathcal{S}$.

Idea de la demostración.

Se define

$$\mathcal{K} = \{\boldsymbol{\mathcal{F}m}_{\mathcal{L}}/\theta \;:\; \theta \in \mathbf{\Omega}Th\mathcal{S}\}$$

y se demuestra que $\mathbf{\Omega}$ es un isomorfismo entre $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ y $\mathbf{Th}\mathcal{K}$. Aplicamos entonces el teorema 4. □

6.2 Algebrizabilidad y Términos

Teorema 6 [[Teo. 4.7]] *Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es algebrizable si y sólo si existen un sistema de fórmulas de equivalencia Δ y un sistema de ecuaciones de definición $\delta \approx \varepsilon$ que satisfacen las condiciones siguientes para $\varphi\,,\psi\,,\theta \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$.*

(i) $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi\,\Delta\,\varphi\,,$

(ii) $\{\varphi\,\Delta\,\psi\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi\,\Delta\,\varphi\,,$

(iii) $\{\varphi\,\Delta\,\psi\,,\psi\,\Delta\,\theta\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\,\Delta\,\theta\,,$

(iv) *Para todo conectivo n–ario α de $\mathcal{L}$,*
$\{\varphi_1\,\Delta\,\psi_1,\ldots,\varphi_n\,\Delta\,\psi_n\} \vdash_{\mathcal{S}} \alpha(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)\,\Delta\,\alpha(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)\,,$

(v) $\theta \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \delta(\theta)\,\Delta\,\varepsilon(\theta)\,.$

Idea de la demostración.

Se define
$$\Omega_\Delta T = \{\varphi \approx \psi : \varphi\,\Delta\,\psi \in T\}$$
y se demuestra que Ω_Δ es inyectivo y preserva uniones dirigidas. Por último se demuestra que $\Omega_\Delta = \mathbf{\Omega}$ y se aplica el teorema 5. □

Corolario 1 [[Cor. 4.8]] *Una condición suficiente para que un sistema deductivo $\mathcal{S}$ sea algebrizable es que exista un sistema Δ de fórmulas de equivalencia que satisfaga las condiciones (i)-(iv) del teorema anterior y adicionalmente las condiciones.*

(vi) $\{\varphi\,,\varphi\,\Delta\,\psi\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, *(conocida como regla de corte).*

(vii) $\{\varphi\,,\psi\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\,\Delta\,\psi$, *(conocida como regla G, por Gödel).*

En este caso la ecuación de definición es $p \approx p\,\Delta\,p$.

6.3 Algebrizabilidad y Matrices

Existe una conexión estrecha entra las semánticas algebraicas y las semánticas matriciales de un sistema deductivo algebrizable.

El siguiente teorema es muy útil, especialmente para verificar que un sistema no es algebrizable. Dada una cuasivariedad $\mathcal{K}$ y una $\mathcal{L}$–álgebra $\mathbf{A}$, diremos que una congruencia Θ de $\mathbf{A}$ es una $\mathcal{K}$*–congruencia* si el cuociente $\mathbf{A}/\Theta \in \mathcal{K}$.

Teorema 7 [[Cor. 5.1]] *Sea $\mathcal{S}$ algebrizable y $\mathcal{K}$ una cuasivariedad. Entonces $\mathcal{S}$ es algebrizable con semántica algebraica equivalente $\mathcal{K}$ si y sólo si para toda $\mathcal{L}$–álgebra $\mathbf{A}$, el operador de Leibniz $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}$ es un isomorfismo entre los retículos de $\mathcal{S}$–filtros y de $\mathcal{K}$–congruencias de $\mathbf{A}$.*

Lema 7 [[Lema 5.2]] *Sea $\mathcal{S}$ algebrizable y sea Δ un sistema de fórmulas de equivalencia. Entonces para toda $\mathcal{L}$–álgebra $\mathbf{A}$ y todo $\mathcal{S}$–filtro $F \subseteq A$*

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}} F = \{\langle \varphi, \psi \rangle : \varphi \, \Delta^{\mathbf{A}} \, \psi \in F\}.$$

Una matriz $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ se dice *reducida* si $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}} F = I_{\mathbf{A}}$, la identidad sobre A. La matriz cuociente $\langle \mathbf{A}/\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}} F, F/\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}} F \rangle$ es una matriz reducida.

Teorema 8 [[Cor. 5.3]] *Sean $\mathcal{S}$ algebrizable, $\mathcal{K}$ la cuasivariedad que es su semántica algebraica equivalente y $\mathcal{M}^*$ la clase de todas las $\mathcal{S}$–matrices reducidas. Entonces $\mathcal{K}$ es la clase de los reductos algebraicos de $\mathcal{M}$, es decir,*

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{A} : \langle \mathbf{A}, F \rangle \in \mathcal{M}^*, \text{ para algún } \mathcal{S}\text{-filtro } F\}.$$

Bibliografía

[1] Blok, W. J. and Pigozzi, D., *Algebraizable Logics*, Memoirs of the A.M.S., **77** Nr. 396 (1989).

[2] Blok, W. J. and Pigozzi, D., *Algebraic Semantics for Universal Horn Logic without Equality*, in A. Romanowska, J. D. H. Smith (eds.) Universal Algebra and Quasigroup Theory, Heldermann, Berlin, (1992), 1–56.

[3] Blok, W. J. and Pigozzi, D., *Protoalgebraic Logics*, Studia Logica **45** (1986), 337–369.

[4] Burris, S., and Sankappanavar, H. P., *A Course in Universal Algebra*, Springer–Verlag, New York, 1981.

[5] Czelakowski, J., *Consequence Operations. Foundational Studies*, Reports of the Research Project: Theories, Models, Cognitive Schemata, Institute of Philosophy and Sociology, Polish Academy of Sciences, Warszawa, 1992.

[6] Czelakowski, J. *Equivalential logics I, II*, Studia Logica **40** (1981), 227–236 and 335–372.

[7] Czelakowski, J. *Reduced Products of Logical Matrices*, Studia Logica **39** (198), 19–43.

[8] Font, J. and Jansana, R., *A General Algebraic Semantics for Deductive Systems*, Lecture Notes in Logic **7**, Springer Verlag, (1996).

[9] Herrmann, B., *Equivalential and Algebraizable Logics*, Studia Logica **57** (1997), 419–436.

[10] Herrmann, B., *Characterizing Equivalential and Algebraizable Logics and Definability by the Leibniz Operator*, Studia Logica **58** (1997), 305–323.

[11] Rasiowa, R., *An Algebraic Approach to Non–Classical Logics*, North–Holland Pub. Co., Amsterdam, 1974.

[12] Rasiowa, R. and Sikorski, R., *The Mathematics of Metamathematics*, Polska Akademia Nauk, Warsawa, 1963.

[13] Tarski, A., *Logic, Semantics, and Metamathematics, papers from 1923 to 1938*, Hackett Pub. Co., Indianapolis, Indiana, 1983.

[14] Tarski, A., *Grundzüge des Systemenkalküs. Erster Teil.*, Fundamenta Mathematica, **25** (1935), 503–526.