Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1980.

COMPACTIFICACIONES DIFERENCIABLES

Gustavo Corach y Angel Rafael Larotonda (*)

Dedicado al Profesor Luis A. Santaló

0. INTRODUCCION.

Es un hecho conocido que la teoría de las álgebras de Banach conmutativas permite "algebrizar" el problema de la caracterización de las compactificaciones de un espacio completamente regular X (ver [3] Algèbres de Banach Commutatives 8.1).

El objeto de esta nota es mostrar un desarrollo análogo para la teoría de las C^∞-álgebras (expuesta en [1]) y las compactificaciones diferenciables de una variedad X (definiciones en §3).

1. INMERSIONES, SUMERSIONES, SEPARACION.

En lo que sigue convendremos en llamar *variedad* a una variedad C^∞ paracompacta (sin borde) de dimensión finita.

Las álgebras que consideraremos son las C^∞-álgebras, es decir, las que son isomorfas a $C^\infty(X)$ para alguna variedad X. Una caracterización de ellas se encuentra en [1], §8. De allí conviene tener presente el resultado siguiente:

"A es una C^∞-álgebra si y solamente si

a) A es un álgebra de Fréchet m-convexa formalmente real

b) A es fuertemente regular

c) $\Omega(A)$ es un A-módulo proyectivo

d) la diagonal Δ es un ideal de $A \hat{\otimes} A$ de tipo finito y Δ^2 es cerrado

e) A es topológicamente finitamente generada

f) para cada $h \in X(A)$ se verifica $A^+ \cap M(h) \subset M(h)^2$

g) A es diferenciablemente completa."

(Para la notación y definiciones generales, ver [1]).

(*) El primero de los autores contó con el apoyo de una beca del CONICET.

Sea $f\colon A \to B$ un morfismo de C^∞-álgebras. Para cada $h \in X(B)$ definimos $f^*(h) = hf \in X(A)$. Obtenemos así una aplicación $f^*\colon X(B) \to X(A)$. En [1], §8 se prueba que f^* es diferenciable; más precisamente, la aplicación lineal tangente de f^* en el punto $h \in X(B)$ se obtiene como sigue: si $M(f^*(h)) = \{a \in A\colon \hat{a}(f^*(h)) = 0\} = \{a \in A\colon \widehat{f(a)}(h) = 0\}$ y $M(h) = \{b \in B\colon \hat{b}(h) = 0\}$
entonces $f(M(f^*(h))) \subset M(h)$ y $f(M(f^*(h))^2) \subset M(h)^2$; si definimos $f_h = f|M(f^*(h))\colon M(f^*(h)) \to M(h)$, por lo anterior queda bien definida una aplicación lineal

$$\bar{f}_h\colon M(f^*(h))/M(f^*(h))^2 \to M(h)/M(h)^2$$

que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{array}{ccc} M(f^*(h)) & \xrightarrow{f_h} & M(h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M(f^*(h))/M(f^*(h))^2 & \xrightarrow{\bar{f}_h} & M(h)/M(h)^2 \end{array} \tag{1}$$

y así la aplicación tangente de f^* en $h \in X(B)$ es la traspuesta de $\bar{f}_h$:

$$T_h(f^*) = (\bar{f}_h)^t\colon [M(h)/M(h)^2]^* \longrightarrow [M(f^*(h))/M(f^*(h))^2]^* \tag{2}$$

Este hecho permite formular en el lenguaje de las C^*-álgebras las propiedades locales de una aplicación entre variedades (cf. [2], XVI).

PROPOSICION 1.1. *Sea* $f\colon A \to B$ *un morfismo de* C^∞*-álgebras y sea* $f^*\colon X(B) \to X(A)$ *la aplicación* C^∞ *asociada.*

a) f^* *es una inmersión si y sólo si para cada* $h \in X(B)$ *se verifica*

$$M(h) = f(M(f^*(h))) + M(h)^2.$$

b) f^* *es una sumersión si y sólo si para cada* $h \in X(B)$ *se verifica*

$$f_h^{-1}(M(h)^2) = M(f^*(h)).$$

Demostración. Ambas afirmaciones resultan del diagrama (1) y del hecho de que $T_h(f^*)$ es inyectiva (resp. suryectiva) si y sólo si $\bar{f}_h$ es suryectiva (resp. inyectiva).

Precisamos ahora algunas definiciones.

DEFINICION 1.2. Sea B una C^∞-álgebra, sea $S \subset B$ una subálgebra; diremos que S *distingue los puntos de* $X(B)$ si para cada par de elementos distintos h_1, h_2 de $X(B)$ existe un $s \in S$ que verifica $\hat{s}(h_1) \neq s(h_2)$. Se dirá que S es una *subálgebra separadora* si para cada cerrado $F \subset X(B)$ y cada $h \in X(B)$ existe un $s \in S$ tal que $\hat{s}(h) = 1$ y $\hat{s}|F = 0$ (se expresa este hecho diciendo que s separa a F y h).
Cuando $f\colon A \to B$ es un morfismo de C^∞-álgebras, diremos que f *distingue los puntos de* $X(B)$ (resp: f *es un morfismo separador*) si ello ocurre con la subálgebra $S = f(A)$ de B.

OBSERVACIONES 1.3. i) Obviamente toda subálgebra separadora de B distingue los puntos de X(B).

ii) Es evidente asimismo que un morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ de C^∞-álgebras distingue los puntos de X(B) si y sólo si la aplicación $f^*\colon X(B) \longrightarrow X(A)$ es inyectiva.

iii) Para toda C^∞-álgebra B, la subálgebra $B_o = \{b \in B\colon \operatorname{sop}(\hat{b})$ es compacto$\}$ es una subálgebra separadora. Es un hecho conocido que esta subálgebra es densa en B (cf. [1]).
En particular toda subálgebra $S \supset B_o$ resulta separadora.

iv) No obstante una subálgebra $S \subset B$ puede ser separadora sin contener a B_o. EJEMPLO. Sea $B = C^\infty(R)$ y sea S la subálgebra imagen del cálculo operacional unívocamente definido por $t \longrightarrow x$, donde $x(t) = t^3$ (de otra forma, S consiste de las aplicaciones del tipo $t \longrightarrow f(t^3)$ con $f \in C^\infty(R)$). No puede ser $B_o \subset S$ pues para toda $x \in S$ se verifica $x'(0) = 0$ y sin embargo S es separadora ya que $t \longrightarrow t^3$ es un homeomorfismo de R sobre R.

LEMA 1.4. *Sea* $f\colon A \longrightarrow B$ *un morfismo de* C^∞*-álgebras. Entonces* f *es separador si y sólo si* $f^*\colon X(B) \longrightarrow X(A)$ *es un homeomorfismo entre* X(B) *y* $f^*(X(B))$.

Demostración. Supongamos que f es separador; se probará que para todo cerrado $F \subset X(B)$ es $f^*(F) = \overline{f^*(F)} \cap f^*(X(B))$. Esto es trivial si $F = X(B)$. Sea entonces $h \in X(B) - F$. Siendo f^* inyectiva (1.3 i) y ii)) resulta que $f^*(h) \in f^*(X(B)) - f^*(F)$, así que si $f(a)$ separa a F y h tendremos $\hat{a}(f^*(h)) = 1$ y $\hat{a}|f^*(F) = 0$, luego $\hat{a}|\overline{f^*(F)} = 0$. Por consiguiente $f^*(h) \notin \overline{f^*(F)}$ como queríamos probar.

Recíprocamente, si f^* es homeomorfismo y $F \subset X(B)$ es cerrado, para cada $h \in X(B) - F$ resulta $f^*(h) \in f^*(X(B) - F) = f^*(X(B)) - f^*(F)$, luego $f^*(h) \notin \overline{f^*(F)}$. Si $a \in A$ separa a $\overline{f^*(F)}$ y $f^*(h)$, es claro entonces que a separa a F y h.

PROPOSICION 1.5. *Sea* $f\colon A \longrightarrow B$ *un morfismo de* C^∞*-álgebras. Entonces:*

i) f *es inyectiva si y sólo si* $f^*(X(B))$ *es un subespacio denso de* X(A).

ii) f *es suryectiva si y sólo si* $f^*\colon X(B) \longrightarrow X(A)$ *es una inmersión regular sobre una subvariedad cerrada de* X(A).

(Recordemos que una inmersión $g\colon X \longrightarrow Y$ se dice *regular* si es un homeomorfismo sobre su imagen; ello implica automáticamente que g(X) es una subvariedad de Y y que la aplicación $g\colon X \longrightarrow g(X)$ es un difeomorfismo, [2]).

Demostración. i) Sea I el ideal $f^{-1}(0)$; claramente la "cápsula" de I (esto es, el conjunto de los $h \in X(A)$ tales que $h(I) = 0$) coincide con la clausura de $f^*(X(B))$ para la topología de Jacobson. Como A es fuertemente regular, tendremos

$$\overline{f^*(X(B))} = \{h \in X(A) : I \subset M(h)\}$$

y de aquí resulta la tesis (cf. [1], §1) ya que A es sin radical.

ii) Una afirmación es bien conocida ("teorema de Tietze C^∞", ver [2]). Para la otra afirmación, notemos en primer ~~lugar~~ que, por el teorema del gráfico cerrado, B se identifica al cociente de A por el ideal cerrado $I = f^{-1}(0)$. De esto sigue que la aplicación $f^*: X(B) \to X(A)$ define un homeomorfismo (para las respectivas topologías de Jacobson) de X(B) sobre el cerrado "cápsula" de I, esto es,

$$\{h \in X(A) : h(I) = 0\} = \cap\{\hat{x}^{-1}(0) ;\ x \in I\}$$

Sigue de esto y de la regularidad de A y B que f^* es un homeomorfismo sobre su imagen.

Falta ver que f^* es una inmersión, para lo cual verificaremos la condición a) de 1.1; notemos que, debido a la suryectividad de f, se tiene $f(M(f^*(h))) = M(h)$ para todo $h \in X(B)$, y de aquí sigue la tesis.

El siguiente resultado resume algunas equivalencias útiles:

PROPOSICION 1.6. *Sea* $f: A \to B$ *un morfismo de* C^∞*-álgebras. Son equivalentes:*

a) $f^*: X(B) \to X(A)$ *es una inmersión regular (o lo que es igual, es un difeomorfismo sobre una subvariedad de* X(A)).

b) $f(A) \supset B_o$.

c) f(A) *es una subálgebra separadora y densa.*

Demostración. Supongamos que vale a); con identificaciones evidentes para probar b) es suficiente ver que si $Y \subset X$ es una subvariedad de una variedad diferenciable X entonces toda aplicación $u \in C^\infty(Y,R)$ con soporte compacto admite una extensión $\bar{u} \in C^\infty(X,R)$. Como esto es evidente si Y es cerrada o abierta, resulta cierta en el caso general (ya que Y es subvariedad cerrada de una subvariedad abierta).

Trivialmente b) $\Rightarrow$ c).

Finalmente supongamos que vale c). Por 1.4 resulta que $f^*: X(B) \to X(A)$ es un homeomorfismo sobre su imagen, de modo que sólo falta ver que f^* es una inmersión, o lo que es igual, que para cada $h \in X(B)$ la aplicación $\bar{f}_h$ es un epimorfismo (cf. (1)).

Como $\dim(M(h)/M(h)^2) < \infty$ es suficiente probar que la imagen de $\bar{f}_h$ es densa; pero esto es consecuencia de un hecho aún más fuerte: "para cada $h \in X(B)$ $f_h(M(f^*(h))) = M(h) \cap f(A)$ es denso en M(h)" que se deduce del

LEMA 1.7. *Sea* E *un espacio vectorial localmente convexo sobre* **R**, *sea* $H \subset E$ *un hiperplano cerrado y sea* $S \subset E$ *un subespacio vectorial denso. Entonces* $H \cap S$ *es denso en* H.

Demostración. Sea $H = \varphi^{-1}(0)$ con $\varphi: E \to R$ lineal y continua, y sean E^+ (resp: E^-) los semiespacios abiertos $\varphi^{-1}((0,\infty))$ (resp: $\varphi^{-1}((-\infty,0))$). Sea $x_o \in H$, U un entorno de 0. Si V es un entorno abierto convexo de 0 con $V \subset \frac{1}{2} U$, existen elementos $s_1 \in S$, $s_2 \in S$ tales que

$$s_1 \in (x_o+V) \cap (S \cap E^+) \qquad s_2 \in (x_o+V) \cap (S \cap E^-)$$

Por consiguiente para un conveniente $t \in [0,1]$ será $s = ts_1+(1-t)s_2 \in \in H \cap S$, y entonces $x_o - s \in V + V \subset U$.

2. ALGEBRAS A INVERSA CONTINUA.

Recordamos que un álgebra m-convexa A se dice un *álgebra a inversa continua* (o una Q-*álgebra*) si el conjunto U(A) de elementos inversibles de A es abierto [4]. En la misma referencia se prueba que un álgebra de Fréchet m-convexa es a inversa continua si y solamente si X(A) es compacto (equivalente a su vez al hecho de que todo $x \in A$ tiene espectro acotado; ver [4], §13). En particular, si X es una variedad diferenciable, $C^\infty(X)$ es a inversa continua si y sólo si X es compacta.

3. COMPACTIFICACIONES DIFERENCIABLES.

DEFINICION 3.1. Sea X una variedad diferenciable. Una *compactificación diferenciable* de X es un par (Y,α), siendo Y una variedad compacta y $\alpha: X \to Y$ es una inmersión regular con imagen densa.

Como nos restringimos al estudio de variedades de dimensión finita, X es localmente compacta; en consecuencia la imagen de α es un abierto (denso) de Y y para cada $x \in X$ la dimensión de X en x coincide con la dimensión de Y en $\alpha(x)$.

TEOREMA 3.2. *Sea* A *una* C^∞-*álgebra,* X *una variedad diferenciable e* $i: A \to C^\infty(X)$ *un morfismo inyectivo. Entonces el par* $(X(A)),i^*)$ *es una compactificación diferenciable de* X *si y solamente si*

(I) $i(A)$ *es separadora y densa.*

(II) A *es a inversa continua.*

Demostración. Es consecuencia de 1.5 i) y 1.6 (cf. §2).

Vamos a probar ahora que la correspondencia entre las compactificaciones y las subálgebras de $C^\infty(X)$ que están en las condiciones de 3.2 respeta el orden.

Sea C la clase de las subálgebras de $C^\infty(X)$ que están en las condiciones de 3.2, ordenada por inclusión: $A_1 \leqslant A_2$ si y sólo si $A_1 \subset A_2$. Sea C* la clase de las compactificaciones diferenciables de X. Defini-

mos en C* la siguiente relación de orden:
$(Y_1,\alpha_1) \leqslant (Y_2,\alpha_2)$ si y sólo si existe una aplicación diferenciable $\theta: Y_2 \to Y_1$ tal que $\theta\ \alpha_2 = \alpha_1$:

$$\begin{tikzcd} & Y_2 \arrow[d, "\theta"] \\ X \arrow[ur, "\alpha_2"] \arrow[r, "\alpha_1"'] & Y_1 \end{tikzcd}$$

Diremos que las dos compactificaciones son equivalentes cuando $(Y_1,\alpha_1) \leqslant (Y_2,\alpha_2) \leqslant (Y_1,\alpha_1)$.

TEOREMA 3.3. *Consideremos las correspondencias:*

$C \longrightarrow C^*$ *definida por* $A \longrightarrow (X(A),i^*)$

y $C^* \longrightarrow C$ *definida por* $(Y,\alpha) \longrightarrow A_Y = \{\psi\ \alpha : \alpha \in C^\infty(Y)\}$;

ambas correspondencias conservan el orden. Más aún, (Y_1,α_1) *es equivalente a* (Y_2,α_2) *si y sólo si* $A_{Y_1} = A_{Y_2}$.

Demostración. Si $A_1 \leqslant A_2$ hay un diagrama conmutativo evidente

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[d, "j"'] \arrow[r, "i_1"] & C^\infty(X) \\ A_2 \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd}$$

que induce un diagrama conmutativo entre las variedades correspondientes

$$\begin{tikzcd} X(A_1) & X \arrow[l, "i_1^*"'] \arrow[dl, "i_2^*"] \\ X(A_2) \arrow[u, "j^*"] & \end{tikzcd}$$

La conmutatividad de este diagrama es precisamente lo que expresa la relación $(X(A_1),i_1^*) \leqslant (X(A_2),i_2^*)$.

Recíprocamente si $(Y_1,\alpha_1) \leqslant (Y_2,\alpha_2)$ y $\theta\ \alpha_2 = \alpha_1$ entonces

$$A_{Y_1} = \{\psi\ \alpha_1 : \psi \in C^\infty(Y_1)\} = \{\psi\ \theta\ \alpha_2 : \psi \in C^\infty(Y_1)\} \subset A_{Y_2}.$$

En consecuencia si (Y_1,α_1) es equivalente a (Y_2,α_2) entonces $A_{Y_1} \subset A_{Y_2} \subset A_{Y_1}$.

Debe notarse que, salvo equivalencias, las correspondencias anteriores son recíprocas una de otra.

En efecto, dada una subálgebra A en las condiciones de 3.2 obtenemos la compactificación $(X(A),i^*)$; el álgebra que corresponde a esta compactificación es $A_{X(A)} = \{\psi_i^*: \psi \in \hat{A} = C^\infty(X(A))\} = \{\hat{a}i^*: a \in A\} =$ $= \{\widehat{i(a)}; a \in A\}$ o sea $A_{X(A)} \simeq \hat{A}$.

Análogamente dada una compactificación (Y,α) obtenemos un álgebra A_Y y la compactificación correspondiente $(X(A_Y),i^*)$ es equivalente a (Y,α) ya que el morfismo $\psi \longrightarrow \psi\alpha$ de $C^\infty(Y)$ en A_Y es un isomorfismo algebraico (luego topológico por gráfico cerrado) (cf. [1], 4.1 y 4.3).

EJEMPLO 3.4. Consideremos en $C^\infty(R)$ la derivación $D = \frac{1}{2}(1+t^2)\frac{d}{dt}$ y sea A la subálgebra definida por: $f \in A \iff$ para todo $n \geqslant 0$ la función $t \longrightarrow (D^n f)(t)$ es acotada.

Es fácil ver que las seminormas $p_n(f) = \sup\{|D^n f(t)| : t \in R\}$ definen en A una estructura de álgebra de Fréchet a inversa continua y que la inclusión $i: A \longrightarrow C^\infty(R)$ es un morfismo separador con imagen densa (de hecho, $C_o(R) \subset i(A)$).

Si $x(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $y(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ entonces $x \in A$, $y \in A$, y como $x^2+y^2 = 1$, sigue que la aplicación $\varphi: X(A) \longrightarrow S^1$ dada por $\varphi(h) = (h(x),h(y))$ es continua. Utilizando la proyección estereográfica $t \longrightarrow (x(t),y(t))$ resulta enseguida que $A \approx C^\infty(S^1)$, de modo que el par $(X(A),i^*)$ es una compactificación de R en el sentido de la definición 3.1.

REFERENCIAS

[1] CORACH, G. y LAROTONDA, A.R., *Algebras de funciones diferenciables*, Revista de la Unión Mat. Arg.. vol.29 (1979), 1-37.

[2] DIEDONNE, J., *Eléments d'analyse*, Ch. XVI, Gauthier-Villars (1970).

[3] GUICHARDET, A., *Leçons sur certaines algèbres topologiques*, Gordon & Breach (1967).

[4] MICHAEL, E., *Locally multiplicatively-convex topological algebras*, Memoirs of the A.M.S., 11 (1952).

Universidad Nacional de Buenos Aires
Argentina.

Recibido en diciembre de 1977.