6. Základní pojmy teorie hromadné obsluhy (THO)

6.1. Motivace

THO je matematická disciplína, která se zabývá matematickým modelováním činnosti systému hromadné obsluhy (SHO), tj. systému zákazník – obslužná linka – obsluha. THO se používá pro modelování komunikačních, dopravních, obchodních a zdravotnických systémů a výrobních procesů. Počátky THO spadají do 30. let 20. století a jsou spjaty především s modelováním provozu telefonních ústředen.

6.2. Základní pojmy

Základní jednotkou SHO je trojice zákazník – obslužná linka – obsluha.

Zákazník je subjekt, který vyžaduje vyřízení svého požadavku. Např. zákazník je telefonní účastník, který vyžaduje uskutečnění telefonního spojení.

Obslužná linka je osoba nebo zařízení, které zpracovává požadavky zákazníků, např. to může být telefonní ústředna.

Obsluha je činnost, která vede k uspokojení požadavku zákazníka, např. spojení s volaným účastníkem.

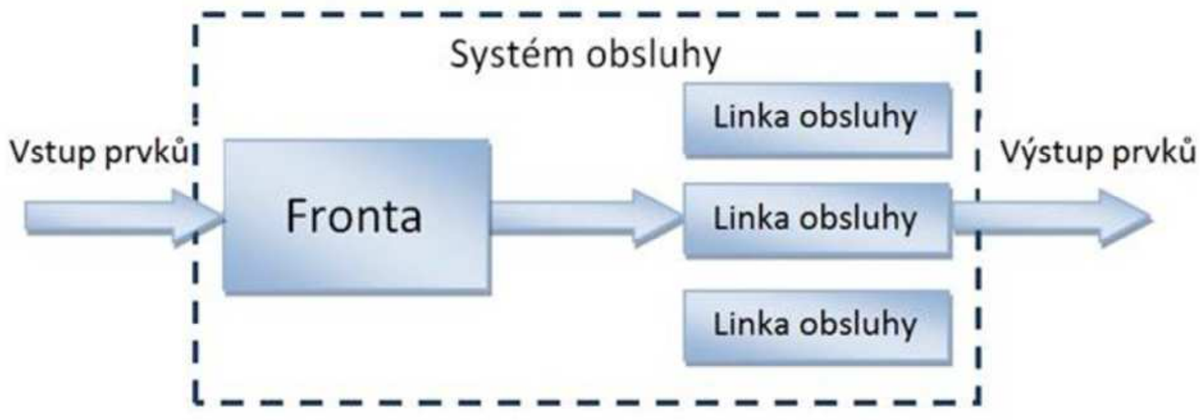
Do SHO přicházejí zákazníci ve **vstupním proudu**, což je posloupnost okamžiků příchodů zákazníků do SHO. Okamžiky příchodů mohou být deterministické nebo náhodné a počet zákazníků může být omezený nebo neomezený.
Zdroj zákazníků může být prakticky neomezený (řádově tisíce – klienti banky, auta, která jezdí k benzínové čerpací stanici, registrovaní pacienti lékaře, klienti mobilního operátora) nebo omezený (stroje ve výrobní hale, které je nutné udržovat a opravovat).
Pokud zákazníci nemohou být po svém příchodu do SHO okamžitě obslouženi, řadí se do fronty. Způsob řazení zákazníků do fronty a výběr zákazníků k obsluze se nazývá **frontový režim**.

Nejznámější frontové režimy jsou:
FIFO (první vstupuje, první je obsloužen)
LIFO (poslední vstupuje, první je obsloužen)
SIRO (obsluhy v náhodném pořadí)
PRI (obsluha podle priorit).

Doba obsluhy může být:
pevná (tj. stejná pro všechny zákazníky)
závislá na typu zákazníka
náhodná

Výstupní proud je posloupnost okamžiků výstupů zákazníků ze SHO. Vlastnosti výstupního proudu jsou závislé na vlastnostech vstupního proudu a na době obsluhy.

Základní struktura SHO



Úloha THO: najít funkční závislost veličin, které charakterizují kvalitu činnosti SHO na charakteristikách vstupního proudu, linek obsluhy a na způsobu organizace SHO jako celku.

Příklady SHO

systém	obslužné linky	zákazníci
banka	úředníci	klienti banky
samoobsluha	pokladny	nakupující
poliklinika	lékaři	pacienti
benzínová čerpací stanice	čerpadla	vozidla
dopravní systém	křižovatky se semafory	vozidla

6.3. Dělení SHO podle různých kritérií

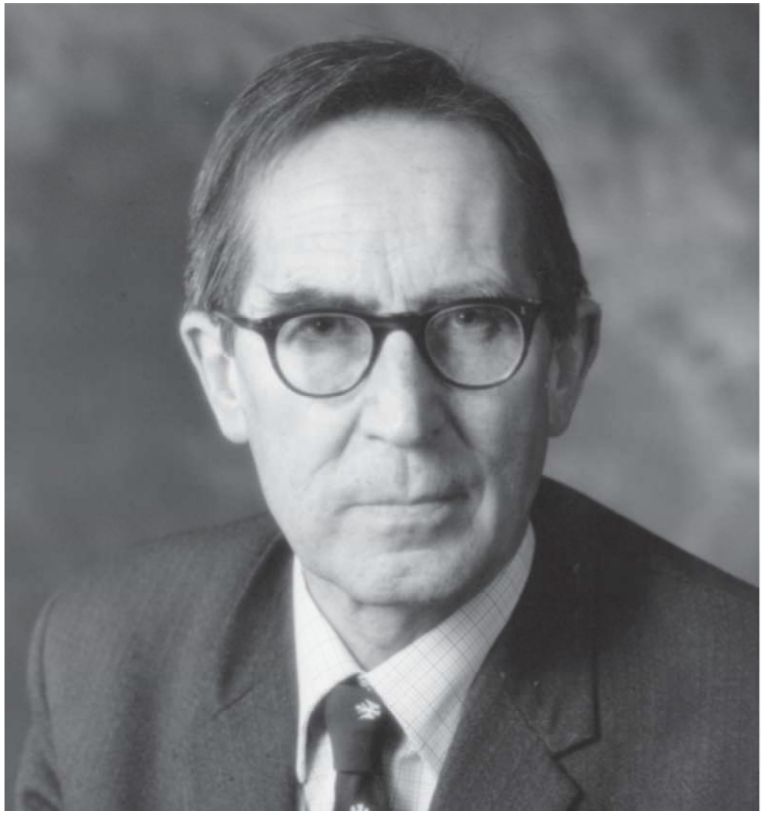
a) Podle typu matematického modelu
- markovské modely (doby mezi příchody zákazníků se řídí exponenciálním rozložením)
- semimarkovské modely (doby mezi příchody zákazníků se řídí Erlangovým rozložením)
- nemarkovské modely

b) Podle počtu zákazníků
- systém s ohraničeným počtem zákazníků
- systém s neohraničeným počtem zákazníků

c) Podle čekání zákazníků na obsluhu
- systém bez čekání (zákazník, který se nedostane k obsluze hned po příchodu, nečeká a odchází)
- systém s čekáním (zákazník nemůže odejít bez obsloužení. Jsou-li všechny linky obsazené, čeká ve frontě, která je buď ohraničená nebo neohraničená)
- systém smíšený (zákazník čeká ve frontě jen tehdy, je-li splněna nějaká dodatečná podmínka)

6.4. Kendallova klasifikace SHO

David Georg Kendall (1918 – 2007): britský statistik, působil na univerzitách v Oxfordu a Cambridge. Patřil ke světové špičce v oblasti teorie pravděpodobnosti a analýzy dat a byl jedním ze zakladatelů stochastické geometrie.



Při Kendallově klasifikaci se SHO dělí podle:
- rozložení doby mezi příchody zákazníků
- rozložení doby obsluhy
- počtu linek obsluhy
- kapacity systému
- frontového režimu.

Používá se označení X/Y/n nebo X/Y/n/m/z

X … označuje rozložení doby mezi příchody zákazníků
Y … označuje rozložení doby obsluhy
n … počet linek obsluhy
m … kapacita systému
z … frontový režim

Na místě X a Y mohou být tyto symboly:
M pro exponenciální rozložení
E_k pro Erlangovo rozložení s parametrem k
D pro degenerované rozložení
G pro obecné rozložení

Na místě n a m: čísla 1, 2, …

Na místě z: FIFO, LIFO, SIRO, PRI

Např. M/D/2/∞/FIFO je systém, kde vstupní proud tvoří Poissonův proces, doba obsluhy je konstantní, v systému jsou dvě linky, systém má neomezenou kapacitu a frontový režim je „první vstoupí, první je obsloužen“.

6.5. Používaná označení v SHO

λ … intenzita vstupního proudu (průměrný počet zákazníků, kteří vstoupí do SHO za jednotku času)
μ … intenzita obsluhy (průměrný počet zákazníků, které linka obslouží za jednotku času)

$$\beta = \frac{\lambda}{\mu}$$

ρ … intenzita provozu (základní charakteristika systému, často se udává v %)

Časové charakteristiky
W … doba pobytu zákazníka v systému
W_S … doba obsluhy
W_Q … doba čekání zákazníka v systému
Je zřejmé, že $W = W_S + W_Q$.

Charakteristiky týkající se počtu zákazníků
N … počet zákazníků ve stabilizovaném systému – nezávisí již na čase t
N_S … počet obsluhovaných zákazníků
N_Q … počet zákazníků ve frontě
Je zřejmé, že $N = N_S + N_Q$.

Pravděpodobnostní charakteristiky
a_0 … pravděpodobnost, že systém je prázdný
a_j … pravděpodobnost, že v systému je právě j zákazníků
P_Q … pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě
P_Z … pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut

Nákladové charakteristiky
Pokud je uživatel schopen ohodnotit náklady na čekání zákazníka, náklady na prostoj či provoz linek obsluhy, je možno systém optimalizovat vzhledem na jeho nákladovou efektivnost.
Je možno určit např. optimální intenzitu obsluhy nebo optimální počet obslužných linek.

6.6. Littleův vzorec

V systémech s neomezeným zdrojem zákazníků platí, že střední hodnota počtu zákazníku v systému (resp. ve frontě resp. u obsluhy) je rovna součinu intenzity vstupního proudu a střední hodnoty doby pobytu zákazníka v systému (resp. ve frontě resp. u obsluhy):

$$E(N) = \lambda E(W)$$
$$E(N_Q) = \lambda E(W_Q)$$
$$E(N_S) = \lambda E(W_S)$$

Za předpokladu, že známe intenzity λ, μ, lze ze znalosti aspoň jedné charakteristiky $E(N)$, $E(N_Q)$, $E(N_S)$, $E(W)$, $E(W_Q)$, $E(W_S)$ ostatní charakteristiky dopočítat.

6.7. Metody zkoumání SHO

Existují dvě různé metody zkoumání SHO.

Analytická metoda: Analytik zná nebo je schopen odvodit vzorce pro výpočet jednotlivých charakteristik systému. Pak stačí jenom dosadit do těchto vzorců konkrétní parametry systému.
Nevýhoda: analytické řešení je známé jenom u několika nejjednodušších modelů.

Simulační metoda: Systém nahradíme simulačním modelem a jeho činnost mnohonásobně nezávisle simulujeme na počítači. Jednotlivé výstupní charakteristiky systému pak nahradíme jejich odhady, např. střední hodnotu průměrem, pravděpodobnost relativní četností apod. Takto lze analyzovat i velmi složité systémy.

6.8. Intenzita provozu v SHO s jednou linkou obsluhy

V tomto případě je intenzita provozu $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Mohou nastat tři různé situace:

a) Intenzita vstupu = intenzita obsluhy: $\rho = 1$

Ideální situace, netvoří se fronta a linka obsluhy je využita na 100 %.

b) Intenzita vstupu < intenzita obsluhy: $\rho < 1$

Nově příchozí zákazník je obsloužen bez čekání, ale linka obsluhy je po určitou dobu nevyužita. Využití linky je 100* ρ %.

c) Intenzita vstupu > intenzita obsluhy: $\rho > 1$

Nestabilní systém, začínají se postupně hromadit zákazníci, i když linka obsluhy pracuje nepřetržitě. Pokud zákazníci nečekají na obsluhu a odcházejí, jde o systém se ztrátami.

6.9. Ilustrace SHO s jednou linkou obsluhy

Máme k dispozici záznamy o okamžicích příchodů a odchodů 16 zákazníků do SHO během 8 hodin.

č. zák.	příchod	odchod	doba čekání	doba mezi příchody	obsluha	prostoj	celkem
1	0,20	0,30	0	20	10	20	10
2	0,40	1,10	0	20	30	10	30
3	0,50	1,30	20	10	20	0	40
4	2,10	3,10	0	80	60	10	60
5	3,20	3,50	0	70	30	10	30
6	3,40	4,10	10	20	20	0	30
7	4,10	4,40	0	30	30	0	30
8	4,20	5,00	20	10	20	0	40
9	4,50	5,50	10	30	50	0	60
10	5,10	6,00	40	20	10	0	50
11	5,50	6,10	10	40	10	0	20
12	6,20	6,40	0	30	20	10	20
13	6,40	6,50	0	20	10	0	10
14	7,10	7,30	0	30	20	20	20
15	7,40	7,50	0	30	10	10	10
16	7,50	8,00	0	10	10	0	10

Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ (tj. střední hodnota počtu zákazníků, kteří vstoupí do SHO za jednotku času, je λ). Za časovou jednotku zvolíme 1 hodinu.

Odhad parametru λ: $\hat{\lambda} = \frac{16}{8} = 2$.

Počty zákazníků v jednohodinových intervalech se mají řídit Poissonovým rozložením.

č. hodiny	1	2	3	4	5	6	7	8
počet zákazníků	3	0	1	2	3	2	2	3

Použijeme jednoduchý test Poissonova rozložení hladinu významnosti zvolíme 0,05.

m = 2

$$s^2 = \frac{1}{7}\left[(3-2)^2 + (0-2)^2 + \ldots + (3-2)^2\right] = \frac{8}{7}$$

Testová statistika: $K = \frac{(n-1)s^2}{m} = \frac{7 \cdot \frac{8}{7}}{2} = 4$

Kritický obor: $W = \langle 0, \chi^2_{0,025}(7) \rangle \cup \langle \chi^2_{0,975}(7), \infty) = \langle 0; 1,69 \rangle \cup \langle 16,01; \infty)$

$K \notin W \Rightarrow H_0$ nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Odhad parametru μ: průměrná doba obsluhy je $m = \frac{1}{16}(10 + 30 + \ldots + 10) = 22{,}5 \min = 0{,}375\text{h}$

$\hat{\mu} = \frac{1}{m} = 2{,}\overline{6}$ zákazníků za 1 h.

Doba obsluhy se má řídit exponenciálním rozložením. Použijeme Darlingův test, hladinu významnosti volíme 0,05.
m = 22,5

$$s^2 = \frac{1}{15}\left[(10 - 22{,}5)^2 + (30 - 22{,}5)^2 + \ldots + (10 - 22{,}5)^2\right] = 220$$

$$K = \frac{(n-1)s^2}{m^2} = \frac{15 \cdot 220}{22{,}5^2} = 6{,}5185$$

Kritický obor: $W = \left\langle 0, \chi^2{}_{0,025}(15)\right\rangle \cup \left\langle \chi^2{}_{0,975}(15), \infty\right) = \langle 0; 6{,}262\rangle \cup \langle 27{,}488; \infty)$

$K \notin W \Rightarrow$ H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Využití systému: $\hat{\rho} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\mu}} = \frac{2}{2{,}\overline{6}} = 0{,}75$, tedy systém je využit na 75 %.

Doba mezi příchody zákazníků se má řídit exponenciálním rozložením. Použijeme Darlingův test, hladinu významnosti volíme 0,05.

$$m = \frac{1}{16}(20 + 20 + \ldots + 10) = 29{,}375$$

$$s^2 = \frac{1}{15}\left[(20 - 29{,}375)^2 + (20 - 29{,}375)^2 + \ldots + (10 - 29{,}375)^2\right] = 392{,}9167$$

$$K = \frac{(n-1)s^2}{m^2} = \frac{15 \cdot 392{,}9167}{29{,}375^2} = 6{,}8302$$

Kritický obor: $W = \left\langle 0, \chi^2{}_{0,025}(15) \right\rangle \cup \left\langle \chi^2{}_{0,975}(15), \infty \right) = \left\langle 0; 6{,}262 \right\rangle \cup \left\langle 27{,}488; \infty \right)$

$K \notin W \Rightarrow$ H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.