MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

KOMBINATORIKA NA STŘEDNÍ ŠKOLE

Rigorózní práce

ZUZANA VOGLOVÁ

BRNO 2006

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně a použitou literaturu jsem uvedla v závěru.
V Brně dne 24. 9. 2006 ……………………

Obsah

Úvod

V rámci diplomové práce jsem vytvořila sbírku příkladů z diskrétní matematiky. Využívala jsem ji ve cvičení z kombinatoriky, která jsem vedla po celou dobu doktorského studia. Během výuky jsem zjistila, že si studenti přináší ze středních škol spoustu nepřesných a někdy i úplně špatných informací. Zamýšlela jsem se tedy nad výukou kombinatoriky na středních školách a nad tím, jak jsou učitelé na toto téma připraveni. Rozhodla jsem se o výuce kombinatoriky uskutečnit malý průzkum mezi středoškolskými učiteli. Účelem tohoto průzkumu bylo zjistit, jakým způsobem je kombinatorika na středních školách vyučována, jaká jsou její úskalí i přednosti, jaký vztah mají k této části matematiky žáci i samotní učitelé. Průzkum byl proveden v dubnu letošního roku formou elektronického dotazníku, který jsem zaslala asi třem stovkám učitelů po celé České republice. Výsledkům tohoto dotazníku a návrhům na zlepšení výuky kombinatoriky na středních školách je věnována celá první kapitola této práce.

Tématem druhé kapitoly je historie kombinatoriky. Každá vědní disciplína prošla více či méně dlouhým vývojem a studenti by měli mít alespoň lehké povědomí o historii studovaných témat, neboť historie může vhodně dokreslit celý obraz studované problematiky. Kořeny kombinatoriky sahají až do období několika tisíc let před naším letopočtem, historie této části matematiky je velmi rozmanitá a zajímavá. Ve středoškolských učebnicích však historii kombinatoriky není věnována pozornost. Proto jsem alespoň stručně popsala historii těch částí kombinatoriky, které se vyučují na střední škole a které by mohly studenty zaujmout.

Při úvahách o současné výuce kombinatoriky (a matematiky vůbec) bylo nevyhnutelné zabývat se také otázkou multimediální výuky. I když si myslím, že počítač, projektor či interaktivní tabule nikdy nemůže zcela nahradit tabuli a křídu, přesto jsou v matematice části, v nichž by bylo vhodné využít výhody, které nám výpočetní technika nabízí. Také v kombinatorice existuje spousta témat, u nichž by multimediální zpracování mohlo být vhodnou pomůckou při výuce. Proto jsem se rozhodla vytvořit multimediální sbírku příkladů z kombinatoriky. Sbírku připravuji společně s kolegyní Mgr. Pavlou

Zagorovou, která zajišťuje technickou realizaci celé věci, já vytvářím sbírku po obsahové stránce. S postupem času se ke středoškolské kombinatorice přidaly další části diskrétní matematiky, které jsou vyučovány na vysoké škole a také teorie grafů. Původní nápad vytvořit multimediální sbírku se začal rozšiřovat, k příkladům jsme přidaly také výkladové části, historii, interaktivní testy, generátor písemek, applety a jednoduché programy. Sbírka je po technické stránce vytvořena, její podstatné části jsou naplněny. Předpokládáme však, že se bude nadále rozvíjet a doplňovat. Součástí sbírky je i moje diplomová práce, která je celá zařazena do první kapitoly kombinatorické části. Popis multimediální sbírky je náplní třetí kapitoly této práce.

O multimediální sbírce jsme už referovaly na konferenci v Českých Budějovicích a v Ružomberoku. V listopadu ji budeme prezentovat na konferenci pro středoškolské učitele v Srní. Potřebovaly jsme tedy sbírku pojmenovat kratším výstižným názvem, který by byl pro uživatele jednoduše zapamatovatelný. Po dlouhém váhání jsme vybraly název *MuDisMat*, který v sobě skrývá to nejdůležitější - Multimediální Diskrétní Matematika. MuDisMat je nyní vystaven na stránce **http://xzagorov.webzdarma.cz/MuDisMat/**. Do budoucna bude zpřístupněn na webovských stránkách Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity.

Práce byla psána v systému LaTeX.

Kapitola 1

Kombinatorika na střední škole

1.1 Dotazník a jeho výsledky

Kombinatorika se na gymnáziích a středních odborných školách vyučuje většinou na konci druhého ročníku. K zvládnutí tohoto učiva žáci nepotřebují téměř žádné předchozí vědomosti, postačí jim základní algebraické znalosti, dobré logické myšlení a často také zdravý selský rozum. Přesto (nebo možná právě proto) patří kombinatorika k obtížnějším částem matematiky, se kterou mívají problém i jinak dobří studenti. Kombinatorika se od ostatních matematických disciplín liší v několika základních bodech, má hned několik předností, ale i nevýhod.

Jednou ze základních odlišností je, že studentům nemůžeme dát přesný a univerzální návod, jak úlohy řešit. Některým žákům vyhovuje, že se nemusí učit nazpaměť žádné postupy a vzorečky. Ostatní žáci si však se samostatným řešením úloh, které vyžaduje především jejich logické uvažování, neví rady. Nevýhodou kombinatoriky je určitě i to, že u velké části příkladů není možná zkouška. Student je často odkázán jen na svůj vlastní odhad a dobrý úsudek.

Už na základní škole se žáci setkávají s úlohami, které vyžadují tzv. kombinatorické myšlení. Zadané úlohy řeší mnohdy vypisováním všech možností. Proto je dobré i na střední škole začít těmi příklady, kdy je možné vypsat všechny možnosti. Pro některé žáky je tento postup vhodnou zkouškou jejich řešení, pro jiné je samotným řešením, při němž si cvičí kombinatorický způsob uvažování. Zjistí, že se jim při výčtu všech možností vyplatí postupovat systematicky, uvědomí si spoustu zákonitostí a možná i objeví vztahy, které by jim učitelé jinak předložili jako daný fakt. Navíc se jim tento způsob později bude hodit i u složitějších příkladů, při jejichž řešení je často nejefektivnější částečné vypsání některých možností. Je dobré u studentů také trénovat správný odhad. I to jim může sloužit pro částečnou kontrolu výsledku. Vzhledem k nemožnosti zkoušky u kombinatoriky více než kde jinde platí, že cvičení dělá mistra.

Kombinatorika má však také spoustu již zmiňovaných kladných stránek, na které bychom měli studenty upozornit. Motivující pro studenty může být také to, že se v kombinatorice setkávají s příklady, které jsou často zábavné a praktické a je v nich vidět konkrétní spojení s reálným životem.

Zajímalo mě, jaký názor mají na kombinatoriku středoškolští učitelé, které části kombinatoriky učí a jaké metody používají, či zda kombinatorika dělá studentům větší problémy než jiné části matematiky. Proto jsem vytvořila dotazník, který jsem v dubnu 2006 rozeslala na střední školy (gymnázia i střední odborné školy) po celé České republice. V druhé příloze je dotazník vytištěn tak, jak jej dostali učitelé. Dotazník vyplnilo a zpátky zaslalo 133 učitelů, z toho 87 z gymnázií a 46 ze středních odborných škol.

Dotazník obsahoval 13 otázek, ke každé otázce bylo na výběr 2 až 9 odpovědí. Učitelé mohli zodpovědět libovolné otázky, mohli zvolit i několik odpovědí na jednu otázku současně. Toho často využívali, pokud se nemohli rozhodnout mezi dvěma možnostmi. Velká část učitelů do dotazníku dopisovala různé poznámky a postřehy k výuce kombinatoriky, které získali během své učitelské praxe. Spousta učitelů také vyjádřila zájem o výsledky tohoto dotazníku. Níže jsou uvedeny otázky, které byly učitelům položeny a procentuální vyhodnocení jednotlivých odpovědí.

1. Jaký máte postoj ke kombinatorice?	
Učím kombinatoriku rád(a).	59%
Kombinatorika nepatří mezi má nejoblíbenější témata.	38%
Učím kombinatoriku nerad(a).	3%

2. Jaký mají podle vašich zkušeností žáci zájem o kombinatoriku?	
Mají velký zájem.	27,5%
Kombinatorika je pro ně méně zajímavá.	66%
Žáci nemají o kombinatoriku zájem.	8%

3. Kolik vyučovacích hodin věnujete výuce kombinatoriky?

4. Prošli jste na vysoké škole kurzem kombinatoriky?	
ano	77%
ne	23%

5. Máte pocit, že v kombinatorice vynikají jiní žáci než obvykle?	
Prospívají stejní žáci jako obvykle.	42%
Prospívají i horší studenti.	46%
Kombinatorika dělá problém i lepším studentům.	32%

6. Zašrtněte, které kapitoly v rámci kombinatoriky probíráte.	
kombinační čísla a faktoriály	99%
binomická věta	97%
pravidlo součtu a součinu	89%
Dirichletův princip	14%
princip inkluze a exkluze	16%
variace, kombinace a permutace bez opakování	100%
variace s opakováním	93%
permutace s opakováním	79%
kombinace s opakováním	68%

7. Používáte při výuce matematiky počítače?	
často	5%
občas	32%
téměř nikdy	63%

8. Používáte počítač při přípravě na výuku?	
často	30%
občas	48%
téměř nikdy	23%

9. K přípravě na výuku kombinatoriky používáte:	
učebnice (uveďte jaké)	90%
vlastní poznámky	68%
jiné	28%

10. Uvítali byste multimediální sbírku příkladů z kombinatoriky?	
ano, zapojil(a) bych ji do výuky	68%
ano, ale používal(a) bych ji pouze pro přípravu na výuku	34%
ne	4%

11. Jsem	
žena	64%
muž	36%

12. Můj věk je	
do 35 let	15%
36 - 45 let	36%
nad 46 let	49%

13. Na jakém typu střední školy učíte?	
gymnázium	65%
střední odborná škola	35%

Spíš než procentuální vyhodnocení jednotlivých odpovědí bylo zajímavé sledovat každý dotazník zvlášť a souvislosti mezi jednotlivými odpověďmi. Projevily se zde některé očekávané i méně předpokládané skutečnosti.

Učitelé věnují kombinatorice 9 - 50(!) vyučovacích hodin. Na gymnáziích je to v průměru 21 hodin, na středních odborných školách jen 15 hodin. Na některých školách, kde je matematice věnována větší pozornost, bývá kombinatorika navíc zařazována i do matematických seminářů. Zároveň však učitelé přiznávají, že vzhledem k tomu, že je kombinatorika zařazena až na konec školního roku, ne vždy je možné dodržet daný počet hodin a probrat beze zbytku všechnu naplánovanou látku.

59 % učitelů odpovědělo, že učí kombinatoriku rádi. Zbylých 41 % přiznává, že kombinatorika není jejich oblíbené téma, popřípadě ji učí vyloženě neradi. Tento výsledek není nijak zvlášť překvapující, neboť v každé části matematiky se najdou učitelé, kteří dané téma nemají rádi. Zajímavější je sledovat důvody neoblíbenosti a další souvislosti. Polovina učitelů, kteří v dotazníku odpověděli, že kombinatoriku učí neradi, jsou učitelé, kteří na vysoké škole neprošli kurzem kombinatoriky či diskrétní matematiky. Je přirozené, že pokud učitel nemá v dané problematice dostatečný nadhled a nebyl na ni na vysoké škole dostatečně připraven, není pro něj příjemné

toto téma učit.

62 % všech učitelů, kteří neprošli kurzem kombinatoriky, jsou učitelé z nejstarší věkové kategorie (nad 46 let), pouze 7 % jsou učitelé mladší 35 let. Z toho se dá usuzovat, že kombinatorika a diskrétní matematika nebyla v 60. a 70. letech do výuky na vysokých školách vůbec zařazována .

Očekávaná byla také vazba mezi učiteli a žáky, je však těžší určit její směr. Z dotazníku vyplynulo, že pokud učitelé neučí kombinatoriku rádi, ani žáci potom nemají o toto téma větší zájem. Učitel by měl žáky motivovat mnoha způsoby a jedním z důležitých způsobů motivace je určitě i to, že učitel projevuje o dané téma zájem a učí je rád. Na druhé straně také učitelé potřebují vidět zpětnou vazbu od žáků. Pro zajímavost cituji některé názory učitelů:

„*Samotná látka mne celkem baví, ale protože vím, že pro studenty je náročná, netěším se na ni.*“

„*Každý rok doufám, že zaujmu více studentů. Komu to jde, tak ho to samozřejmě baví.*“

Zajímavé bylo také hodnocení studentů. Asi 42 % učitelů sice tvrdí, že prospívají stejní žáci jako obvykle, nicméně 46 % učitelů odpovědělo, že v kombinatorice dobře prospívají i jinak nepříliš úspěšní studenti. Naopak 32 % dotazovaných říká, že kombinatorika je pro některé dobré studenty náročnější než ostatní učivo. Důvody jsou zřejmé, kombinatorika vyžaduje jiný způsob přemýšlení než užíváme v jiných částech matematiky. Žáci, kteří doposud prospívali hlavně díky naučeným postupům, mají v kombinatorice problémy. Zde totiž není možné studentům předložit univerzální návod, s jehož pomocí by mohli řešit všechny úlohy. Naopak líní studenti, kterým bylo dříve zatěžko naučit se něco nazpamět, mají šanci, pokud mají dobré logické myšlení a jistý kombinatorický talent. K řešení velké řady kombinatorických úloh totiž nepotřebují znát prakticky nic kromě základních algebraických operací.

„*Úspěch nekoreluje zcela se známkou z jiných partií. Tak je to ale i např. u stereometrie.*“

„*Záleží zejména na přístupu jednotlivých studentů a jejich kombinatorických vlohách - někteří slabí studenti se v kombinatorice náhle výrazně zlepší, naopak některým jinak zdatným dělá kombinatorika (zejm. slovní úlohy) nečekané potíže.*“

„*Řekla bych, že úspěšnost při řešení kombinatorických úloh a tím také jejich oblíbenost je velmi rozdílná, úspěšní bývají někdy právě žáci, kteří mají s jinými tématy problémy, ale vykazují určitou kombinatorickou představivost. Úspěšnější bývají chlapci než děvčata.*“

„*Studenti (ti, kteří nepřemýšlejí) mi vyčítají, že je nedokážu kombinatoriku naučit. Řekněte nám návod, jak se to počítá. . . .* “

V otázce číslo 6 měli učitelé zaškrtnout, které kapitoly v rámci kombinatoriky probírají. Na všech středních školách jsou dle očekávání probírána kombinační čísla, faktoriály a práce s nimi, všichni se také zabývají variacemi, kombinacemi a permutacemi bez opakování, téměř všichni projdou také binomickou větu a variace s opakováním. Permutace s opakováním probírá pouze 79 % učitelů, kombinace s opakováním už jen 68 %. Princip inkluze a exkluze je vyučován jen v 16 % případů a Dirichletův princip jen ve 14 %. To je škoda, protože se jedná o pravidla velmi jednoduchá (s nejjednodušší verzí principu inkuze a exkluze se setkáváme už v první třídě základní školy), použitelná a užitečná v každodenním životě a při řešení celé řady zajímavých a zábavných úloh. Určitě by stálo za to, věnovat jim alespoň trochu pozornosti. Je zarážející, že ne všichni učitelé uvedli, že probírají pravidlo součtu a součinu. Přitom jsou to nejdůležitější a nejužitečnější pravidla používaná v kombinatorice. Na základě jejich znalosti lze vyřešit velkou část všech středoškolských příkladů. Dokonce pomocí nich lze vysvětlit příklady, jejichž řešení by jinak vedlo na užití vztahů pro variace a permutace bez i s opakováním. Používání těchto pravidel vede studenty k přemýšlení a ne jen k bezduchému odhadování, zda se v daném případě jedná o variace či kombinace. Lze předpokládat, že mezi 11 % učitelů, kteří v dotazníku nezaškrtli pravidlo součtu a součinu, je většina těch, kteří je považují za naprosto samozřejmá a uvádějí je pouze bez jejich názvů jako součást „kombinatorického myšlení“. Doufejme, že mezi nimi není žádný učitel, který by chtěl kombinatorické úlohy řešit bez jejich znalosti užití, pouze s pomocí vztahů pro jednotlivé skupiny prvků.

„*Pro celou třídu beru nenáročný základ, aby je to bavilo a to se mi daří. Permutace a kombinace s opakováním prozradím jen maturantům. Snažím se o přemýšlení, vzorce jen kde jsou nezbytně nutné.* “

Obvykle učitelé používají při přípravě na výuku učebnice a vlastní poznámky. Z učebnic jsou to nejčastěji [4], [12], [13]. Hojně také využívají příklady z Matematické olympiády, úlohy ze soutěže Matematický klokan, materiály z různých seminářů a konferencí, příklady z přijímacích zkoušek na vysoké školy, vysokoškolská skripta a úlohy rekreační matematiky. Nicméně 96 % všech učitelů by uvítalo multimediální sbírku příkladů z kombinatoriky, dvě třetiny z nich by ji rádi zařadili i do výuky.

„*Úlohy lze najít v nejrůznějších učebnicích, ale nejlépe je najít vlastní úlohy z každodenní praxe - prostě chodit nějaký čas po světě s myšlenkami na kombinatoriku!* “

„*Těším se na novou sbírku, či jinou obsahově zajímavou pomůcku pro výuku kombinatoriky.*“

„Cokoliv, co mi pomůže vylepšit výuku kombinatoriky, uvítám. Multimediální výuka naráží na problém celé třídy ve výuce a počítačové učebny pro polovinu třídy."

Poslední reakcí jsme se dostali k další důležité otázce a tou je využití počítačů ve výuce matematiky. Drtivá většina učitelů nevyužívá počítač ve výuce nikdy. Počítač sice při výuce matematiky nemůže nahradit tabuli a křídu, ale přece jen existují části matematiky, kde se využití počítačů přímo nabízí. Také v kombinatorice by bylo možné počítače využít a to zejména díky různým appletům a programům, které ukazují vztahy mezi kombinačními čísly a kombinací, variací či permutací po zadávání různých „vstupních údajů". Navíc v naší počítačové době má multimediální učebnice větší šanci zaujmout studenty než klasická učebnice. Užití počítačů přímo ve výuce však často není školou umožněno, počítačové učebny jsou malé a bývají využívány především k výuce výpočetní techniky. Dalším problémem může být nepřipravenost učitelů na tento způsob výuky.

Na dotazník odpovědělo 86 žen a 47 mužů. Nejvíce odpovědí zaslali učitelé z nejstarší věkové skupiny, nejméně potom učitelé nejmladší.

V následující kapitole se pokusím popsat chyby, které se někdy při výuce kombinatoriky objevují. Dále poukážu na možnosti, jak žáky (a možná i učitele) od kombinatoriky neodrazovat, jak je motivovat a kombinatoriku co nejjednodušeji vysvětlit.

1.2 Jak učit kombinatoriku

Než začneme probírat jakoukoliv část matematiky, je vhodné, promluvit o této disciplíně, její *historii* a *aplikacích*. Studenty by mohlo zaujmout, jak „staré" některé věci jsou a že je znali lidé několik stovek i tisíc let před námi. Povědomí o aplikacích a užitečnosti té které disciplíny potom třeba zabrání častým otázkám: „*K čemu nám to bude?*" nebo „*Proč se to máme učit?*".

V další části počítáme se studenty jednoduché příklady, v jejichž řešení se objevují součiny po sobě jdoucích přirozených čísel. Ukážeme jim, že počítání těchto příkladů je snadnější, pokud zavedeme nový pojem *faktoriál přirozeného čísla* a naučíme je s ním pracovat. Dobré je ukázat i některé zajímavé vlastnosti této funkce, např. velmi rychlý růst hodnot $n!$ s rostoucím číslem n. Je vhodné ukázat i vyjádření součinu několika po sobě jdoucích přirozených čísel pomocí podílu dvou faktoriálů. Toto vyjádření najde uplatnění při řešení dalších příkladů.

Příklad: Součin čísel 7, 8, 9, 10, 11 a 12 vyjádřete jako podíl dvou faktoriálů.

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12!}{6!}$$

Nyní seznámíme studenty se základními kombinatorickými pravidly - pravidlem součtu a součinu. Tato pravidla používají žáci mnohem dříve, než se s nimi seznámí v kombinatorice, aniž by o tom věděli.

Pravidlo součtu říká, že pokud máme konečné množiny takové, že každé dvě jsou navzájem disjunktní, potom počet prvků množiny, která je sjednocením všech těchto množin, je roven součtu počtu prvků jednotlivých množin. Pravděpodobně už na základní škole se žáci setkají s úlohou, kdy mají zadaný trojúhelník, který je rozdělen na několik menších trojúhelníků. Úkolem je zjistit, kolik trojúhelníků je celkem na obrázku. Většinou žák nejprve spočítá všechny malé trojúhelníčky o straně jedna, potom najde trojúhelníky o straně dvě a takto pokračuje dál, až se dostane k největšímu trojúhelníku. Všechny částečné výsledky sečte a získá celkový počet všech trojúhelníků na obrázku. Nevědomky tak použil kombinatorické pravidlo součtu.

Pravidlo součinu lze formulovat takto: Počet všech uspořádaných k - tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$. Typickým příkladem na použití pravidla součinu je vytváření několikaciferných čísel, v nichž se číslice mohou či nemusí opakovat. Jednodušší příklady tohoto typu je schopen vyřešit i žák na základní škole a to většinou vypsáním všech možností. Je dobré těmito příklady začít i na střední škole.

Příklad: Kolik dvojciferných přirozených čísel lze vytvořit užitím číslic 1, 2 a 3?

Řešení:

a) Vypíšeme všechny možnosti:

11	12	13
21	22	23
31	32	33

Všech požadovaných dvojciferných čísel je 9.

b) Vytváříme uspořádanou dvojici - nachystáme dvě tečky pro dvě číslice.

$$\circ \quad \circ$$

První místo (tečku) můžeme obsadit 3 způsoby, druhé místo také.

$$\begin{matrix} 3 & 3 \\ \circ & \circ \end{matrix}$$

Podle pravidla součinu existuje $3 \cdot 3 = 9$ dvojciferných čísel vytvořených pouze z cifer 1, 2 a 3.

„Tečkovací" metoda je pro studenty velmi dobře pochopitelná a použitelná ve velkém množství úloh. Svým způsobem je to univerzální návod, jak dále řešit úlohy, v nichž záleží na pořadí prvků.

Nyní přicházejí na řadu skupiny prvků s určitými vlastnostmi, tedy *variace, permutace a kombinace* s opakováním i bez něj. Tyto pojmy jsou pro studenty dosti neprůhledné a často si je pletou. Student by sice tyto pojmy měl znát, ale není nutné je používat přímo při řešení příkladů.

Místo pojmu variace (s opakováním i bez něj) můžeme mluvit o uspořádaných k-ticích, v nichž se prvky mohou či nemohou opakovat. Pojem permutace bez opakování lze také nahradit uspořádanou n-ticí vytvořenou z n prvků. Všechny příklady, které vedou na použití vztahů pro variace, lze řešit použitím pravidla součinu a „tečkovací" metody. Zde se potom uplatní vyjádření součinu několika po sobě jdoucích přirozených čísel pomocí podílu faktoriálů.

Příklad: V sešitě máme vedle sebe nakreslené tři kroužky. Kolika způsoby je můžeme obarvit, máme-li k dispozici 6 různých pastelek?

Řešení: a) Můžeme-li každou pastelku použít pouze jednou, můžeme první kroužek obarvit jednou ze 6 barev, druhý jednou z 5 a třetí jednou ze 4 barev. Máme tedy

$$\begin{matrix} 6\cdot & 5\cdot & 4 \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix}$$

tj. 120 možností.

b) Můžeme-li kteroukoliv barvu použít víckrát, máme

$$\begin{matrix} 6\cdot & 6\cdot & 6 \\ \circ & \circ & \circ \end{matrix}$$

tj. 216 možností.

Pokud přece jen chceme zavést pojem variace a vztahy pro jejich počty, je nutné tyto vztahy podrobně odvodit. Těžko si student po několika hodinách vzpomene, zda je $V_o(k, n) = k^n$ nebo $V_o(k, n) = n^k$.

Častou chybou při výuce je nesprávná interpretace faktu, že variace jsou skupiny prvků, u nichž záleží na pořadí. Žáci z výkladu učitele často získávají nesprávný dojem, že ono pořadí v definici je určeno pořadím, v němž prvky ze základní množiny vybíráme. Když jsou v osudí čísla, která postupně vytahujeme a zapisujeme, je pořadí v příslušné variaci samozřejmě určeno pořadím jejich vybírání. Jestliže však tato čísla po vytažení seřadíme do neklesající posloupnosti, nesouvisí jejich pořadí v dané variaci s tím, v jakém pořadí jsme je z osudí vybírali.

Před tím, než začneme probírat kapitolu kombinace, musíme studentům vysvětlit kombinační čísla a naučit je s nimi pracovat. Opět je dobré k nim dojít na základě několika lehkých příkladů. Na *Pascalově trojúhelníku* můžeme demonstrovat spoustu zajímavých vztahů mezi nimi.

Při vysvětlování pojmu kombinace je dobré upozornit studenty, že se vlastně jedná o k-prvkové podmnožiny n-prvkové množiny. Je ovšem nutné, aby studenti správně chápali pojem množina, aby věděli, že v množině se nemohou prvky opakovat a nezáleží na jejich pořadí. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ udává počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.

Skupiny prvků, které nazýváme permutace s opakováním, můžeme jednoduše popsat na následujícím příkladu:

Příklad: Kolika způsoby lze na poličku postavit 2 knihy v červených a 3 knihy v modrých obalech, záleží-li nám pouze na pořadí barev obalů?

Řešení: Nejprve postavíme do řady všech pět knih. To můžeme učinit 5! způsoby. Jestliže nám nezáleží na pořadí červených knih, výsledek budeme dělit dvěma (každé uspořádání červených knih je ve výsledku započítáno dvakrát). Protože nám nezáleží ani na pořadí modrých knih (ty můžeme v jednom uspořádání přemístit 3! způsoby), výsledek dělíme ještě 3!. Celkem máme tedy $\frac{5!}{2!3!}$.

Vztah platící pro počty permutací s opakováním je docela zřejmý a pro studenty dobře pochopitelný.

Nejobávanější skupinou prvků jsou kombinace s opakováním. Tady je těžké (ale velmi nutné) studentům vysvětlit, jaký je rozdíl mezi kombinacemi a kombinacemi s opakováním. Opakování v různých příkladech může a nemusí znamenat skutečné opakování konkrétních objektů. Vytváříme-li například ze skupiny několika dívek a několika chlapců volejbalové družstvo, vybíráme šest dětí. V určitých případech pro nás mohou být podstatné pouze počty dívek a chlapců v družstvu. Tuto šestici potom můžeme považovat za kombinaci s opakováním. Opakování zde ovšem neznačí opakování dítěte, ale opakování vlastnosti „chlapec“ nebo „dívka“.

Při vysvětlování pojmu kombinace s opakováním a řešení příkladů se nyní uplatní takzvaná „přihrádková metoda“. Nejprve dáme studentům za úkol „rozdělit“ 5 stejných kuliček do tří očíslovaných přihrádek. Pak spolu se studenty zkusíme vymyslet, jak jednoduše a rychle sdělit ostatním spolužákům, jak rozdělili svoje kuličky. Každé takové rozdělení lze jednoduše zapsat pomocí teček a čárek tak, že počet teček před první čárkou značí počet kuliček v první přihrádce, počet teček mezi 1. a 2. čárkou značí počet kuliček v druhé přihrádce a počet teček za druhou čárkou značí počet kuliček v poslední přihrádce. Pokud jsme umístili do 1. a 2. přihrádky po dvou kuličkách a do poslední přihrádky jednu kuličku, zapíšeme:

$$\circ\,\circ\,|\,\circ\,\circ|\circ$$

Takové přiřazení je zřejmě vzájemně jednoznačné, každé rozdělení lze zapsat pomocí dvou čárek a tří teček. Kolik takových způsobů existuje, už bylo uvedeno v předchozím odstavci. Stejným způsobem můžeme řešit všechny příklady, které by jinak vedly na použití vztahu pro kombinace s opakováním.

Příklad: V obchodě mají pět druhů čokolád (všechny v dostatečném množství). Chceme koupit sedm tabulek čokolády. Kolika způsoby to můžeme učinit?

Řešení: Příklad řešíme opět pomocí přihrádkové metody. Tentokrát rozmísťujeme sedm teček (sedm tabulek čokolády) a čtyři čárky (čtyři přepážky mezi pěti přihrádkami).

Pokud jsme přece jen používali označení variace, kombinace a permutace, potom na závěr na jednoduchém příkladu ukážeme, že se na jednu konkrétní skupinu objektů můžeme někdy dívat jako na variace a jindy jako kombinace bez i s opakováním.

Příklad: Ve třídě je 15 dívek a 14 chlapců, z nich vybíráme 5 dětí. Losem jsme vybrali tyto děti (v tomto pořadí): Marie, Adam, Klára, Petr a Dana.

a) Pokud nás zajímá, které dítě jsme vybrali jako první, které druhé atd., díváme se na tuto skupinu dětí jako na variaci $V(5, 29)$.

b) V případě, že při losování budeme zapisovat pouze *dívka, chlapec, dívka, chlapec, dívka*, díváme se na tuto skupinu jako na variaci s opakováním - $V_o(5, 2)$.

c) Jestliže vylosovanou skupinu dětí postavíme „do hloučku“ před tabuli, díváme se na tuto skupinu jako na kombinaci - $K(5, 29)$. (Uvědomme si, že je to totéž, jako kdybychom dopředu stanovili jejich uspořádní - např. podle výšky či abecedy!)

d) Pokud se na tuto skupinu dětí díváme pouze jako na skupinu dvou chlapců a tří dívek, jde o kombinaci s opakováním - $K_o(5, 2)$.

Dirichletův princip je jednoduché tvrzení, s jehož důsledky se setkáváme v každodenním životě. Pomocí Dirichletova principu je možné řešit spoustu jednoduchých zábavných úloh, ale i úloh složitějších. Dirichletův princip říká, že při každém rozdělení n předmětů do k přihrádek, kde $k < n$, existuje alespoň jedna přihrádka obsahující alespoň dva předměty.

Příklad: Dokažte, že v Praze žijí alespoň dva lidé, kteří mají stejný počet vlasů.

Řešení: Předpokládejme, že v Praze žije asi 1 000 000 obyvatel. Bylo dokázáno, že člověk může mít na hlavě až 500 000 vlasů. Obyvatele rozdělíme do skupin očíslovaných čísly 0 - 500 000, podle počtu jejich vlasů. V „nejhorším“ případě bude prvních 500 001 obyvatel rozděleno tak, že v každé skupině bude právě jeden člověk. 500 002. člověk však už zcela jistě bude patřit do některé skupiny, v níž už je zařazen jiný člověk. Dokázali jsme tedy, že v Praze existují alespoň dva lidé se stejným počtem vlasů.

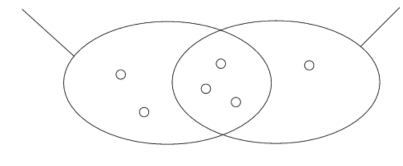
Příklad: Je dáno pět přirozených čísel. Dokažte, že z nich lze vybrat několik čísel tak, že jejich součet je dělitelný pěti.

Řešení: Daná přirozená čísla označme a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Utvořme součty $s_1, ..., s_5$ tak, že $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, ..., s_5 = a_1 + a_2 + ... + a_5$. Pokud je některý ze součtů dělitelný pěti, jsme hotovi. Pokud ne, rozdělíme čísla $s_1, ..., s_5$ do čtyř skupin tak, že v i-té skupině budou čísla, která po dělení číslem pět dávají zbytek $i, i = 1, 2, 3, 4$. Podle Dirichletova principu aspoň v jedné skupině budou dvě čísla. Ta označíme s_m, s_n, kde $m < n$. Potom $s_n - s_m$ je dělitelné pěti. Rozdíl $s_n - s_m$ lze zapsat jako $a_1 + a_2 + ... + a_m + ... + a_n - (a_1 + a_2 + ... + a_m) = a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n$. Mezi danými čísly lze tedy vybrat několik tak, aby jejich součet byl dělitelný pěti.

Podobně jako kombinatorická pravidla součtu a součinu je *princip inkluze a exkluze* používán v jednoduchých případech intuitivně. Začneme tedy těmito jednoduchými příklady.

Příklad: Pět z mých domácích zvířat se živí rostlinnou stravou, čtyři zvířata žerou maso. Tři ze všech mých zvířat jsou všežravci. Kolik zvířat chovám?

Řešení: Situaci lze znázornit takto:

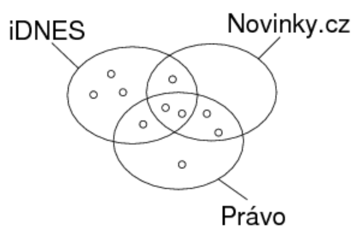


Jednoduše lze spočítat, že máme celkem 6 zvířat. Platí:

$$| B \cup M | = | B | + | M | - | B \cap M | .$$

Příklad: Zeptala jsem se svých deseti kamarádů, které zpravodajské servery na internetu navštěvují. Sedm z nich odpovědělo, že iDNES, šest Novinky.cz, pět deník Právo. Tři uvedli, že čtou současně iDNES a deník Právo, tři iDNES a Novinky.cz, čtyři deník Právo a Novinky.cz. Kolik z mých kamarádů navštěvuje současně všechny tři stránky?

Řešení:



Po procvičení těchto jednoduchých příkladů můžeme jejich zobecněním získat princip inkluze a exkluze: Nechť N je konečná množina, prvky množiny N mohou mít vlastnosti $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. Symbolem $N(\alpha_{i1}\alpha_{i2}\cdots\alpha_{ik}\alpha'_{j1}\alpha'_{j2}\cdots\alpha'_{jl})$ označíme počet prvků mnžiny N, které mají vlastnosti $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik}$ a současně nemají žádnou z vlastností $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{jl}$ (bez ohledu na to, zda mají či nemají vlastnosti, které nejsou uvedeny ve výčtu $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik}, \alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{jl}$). Pak platí:

$$N(\alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_n) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \cdots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + \cdots$$

$$+N(\alpha_1\alpha_n) + \cdots + N(\alpha_{n-1}\alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - \cdots - N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) + \cdots$$

$$+(-1)^n N(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n).$$

Kapitola 2

Historie kombinatoriky

V následující kapitole je stručně shrnuta historie kombinatoriky od starověku až po 21. století. V MuDisMatu je většina informací z této kapitoly uvedena v rámci historických zajímavostí. Je zde také mnoho dalších poznámek a životopisy významných osobností, které se podílely na vývoji kombinatoriky a teorie grafů.

Odpovědět na otázku, co je to kombinatorika a kam až sahají její kořeny, je velmi komplikované. Pokud se na heslo *kombinatorika* podíváme do nejrůznějších encyklopedií či slovníků, většinou zjistíme, že se jedná o část finitní matematiky, která studuje vlastnosti konečných množin a jejich podmnožin. Často se zde také uvádí, že kombinatorika vznikla v 17. století a to pouze jako podpůrná část teorie pravděpodobnosti. Situace je však mnohem složitější a hlavně zajímavější, než by se na první pohled mohlo zdát.

2.1 Kombinatorika ve starověku

Podobně jako matematika provází lidstvo celou jeho historií, také kombinatorika se v historii objevuje už překvapivě dávno. První „kombinatorické" poznatky, příklady a výsledky můžeme najít již v období kolem roku 2000 př. n. l. Texty vztahující se ke kombinatorice nacházíme nejčastěji u indických a čínských civilizací. Většinou je však složité určit i přibližné datum vzniku těchto textů, obsahují řadu poznámek a záznamů, které často nejsou původní a do textů se dostaly během pozdější doby. Řada prací se vůbec nedochovala, existují pouze odkazy na ně.

2.1.1 Základní pravidla pro počítání

Vystopovat historii základních kombinatorických pravidel pro počítání je složité i z dalších důvodů. Kombinatorická pravidla jsou natolik jednoduchá, že byla používána často pouze intuitivně, bez konkrétního doložení jejich znalosti. Z mnohých příkladů je zřejmé, že lidé tato pravidla znali, nicméně je nikde nenajdeme přesně popsána.

Jedním z nejstarších matematických textů je *Rhindův papyrus* z roku asi 1650 př. n. l. V něm můžeme najít příklady, které dokládají znalost základních pravidel pro počítání. Zajímavé je, že se tyto příklady s drobnými obměnami objevovaly v různých obdobích u různých autorů. V úloze 79 v Rhindově papyru je řešena otázka, kterou bychom mohli interpretovat takto:

„*Máme sedm domů, v každém domě je sedm koček.*
Každá kočka zabije sedm myší,
každá myš by sežrala sedm klasů pšenice,
z každého klasu by se vypěstovalo sedm měřic zrna.“

S nápadně podobným problémem se můžeme setkat také v díle *Liber Abaci* z roku 1202. Autor *Fibonacci* (1170–1240) píše:

„*Sedm starých žen jde do Říma;*
každá vede sedm mezků;
každý mezek nese sedm pytlů;
v každém pytli je sedm bochníků;
v každém bochníku je sedm nožů;
každý nůž je v sedmi pochvách.
Jaký je celkový počet všech věcí?“

Podobnou říkanku můžeme najít také v Oxfordském slovníku citací z roku 1953:

„*Když jsem šel do St. Ives,*
potkal jsem muže se sedmi ženami,
každá žena nesla sedm pytlů,
v každém pytli bylo sedm koček,
každá kočka měla sedm koťat,
Koťata, kočky, pytle, ženy.
Kolik jich šlo do St. Ives?“

Nikdy se asi nedozvíme, zda spolu tyto příklady souvisí, zda jejich autoři znali předchozí díla. Zřejmé však je, že základní pravidla pro počítání byla známa už několi tisíc let před naším letopočtem.

2.1.2 Variace, kombinace, permutace

Potíže při studiu historie permutací a kombinací způsobuje hlavně to, že ve starších matematických textech nebyl velmi často dodržován přesný význam těchto pojmů. Musíme tedy počítat s tím, že když se v textu s některým z těchto výrazů setkáme, nemusí mít vždy takový význam, v jakém jej používáme dnes.

Pravděpodobně první příklady užití těchto pravidel pro počítání a vztahů pro počty variací s opakováním můžeme najít už ve slavné *Knize proměn*, která pochází z Číny z roku 2200 př. n. l. Čínský systém byl založen na dvou znacích Jang (–) a Jin (- -), které se uspořádávaly do tzv. trigramů a hexagramů, což jsou skupiny po třech a po šesti. Staří Číňané se zabývali otázkou, kolik takových trigramů a hexagramů je možné sestavit.

Také v indické matematice se s otázkami týkajícími se permutací a kombinací setkáváme poměrně často. Už v 5. - 2. století př. n. l. se v dílech indických matematiků objevují příklady, které by mohly dokládat znalost kombinací a vztahů pro jejich počty. Většinou se však jedná o příklady kombinací vytvářených jen z malých skupin prvků. Není proto zřejmé, že Indové znali pravidla pro počty kombinací. Výsledky bylo možné získat jednoduchým vypsáním všech možností. Snad nejznámější je příklad, který se objevil v 6. století v lékařském spise ze Susruty. Autor v něm pojednává o různých kombinacích chutí, které můžeme získat ze šesti základních: sladké, kyselé, slané, ostré, hořké a trpké. U příkladu je uveden výpis všech typů kombinací (po jedné, po dvou, ...) a jejich počty. Typický je také příklad o vytváření slov z různě dlouhých slabik.

Teprve v 6. st. n. l. se v práci *Brihatsamhita* známého indického astrologa *Varahamihiru* (505–587) objevil příklad, v němž se míchají čtyři různé vůně z 16 možných. Autor v textu jednoduše uvádí, že takových možností je 1820, což je správný výsledek. Je velmi nepravděpodobné, že by Varahamihira vypisoval všechny možnosti. A pokud ano, jednalo by se o poměrně dlouhý seznam, který by si jistě zasloužil být v textu uveden. Předpokládáme tedy, že autor získal výsledek přímým použitím vztahu pro počet k-prvkových kombinací z n prvků.

V sedmém století začala indická matematika pronikat na západ. Arabové si velmi rychle osvojili poznatky Indů a začali je běžně používat. Matematik *Ibn-Ahmad al-Halil* (1320–1380) ve své práci uvádí příklad, v němž se zabývá počty slabik vytvořených z několika písmen. Z jeho výpočtů je patrné, že rozuměl základním pravidlům pro hledání počtu kombinací a permutací. Velkým přínosem Arabů v oblasti kombinatoriky jsou jejich práce o magických čtvercích a binomické větě, o nichž se zmíníme později.

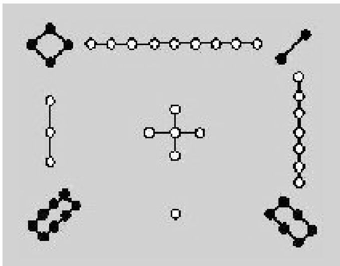
Od 12. století se začaly vztahy pro počet kombinací a variací objevovat v celé řadě jazyků v různých kontextech. Pravděpodobně první obecné vyjádření vztahů pro kombinace a permutace v moderní terminologii můžeme najít v díle *Cursus Mathematicus* z roku 1634, jehož autorem je francouzský matematik *Herigonus* (1580–1643).

2.1.3 Magické čtverce

Magické čtverce fascinují lidstvo již několik tisíc let. Pravděpodobně prvním příkladem magického čtverce je diagram Lo-šu z období starověké Číny. Jedná se o obrázkový záznam čtverce,

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$$

který měla podle mnohých pověstí na krunýři posvátná želva, která vylezla z řeky Lo-šu, aby zachránila město před povodní.



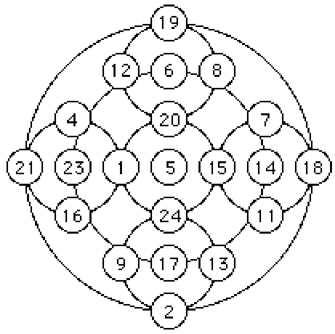
Obr. 2.1: Diagram Lo-šu

V této době však byly magické čtverce považovány jen za mystické objekty, nikoliv objekty matematické.

V čínské matematice se můžeme setkat i s magickými čtverci řádu vyššího než tři. Matematik *Jang Hui* (1238–1298) dokázal konstruovat magické čtverce řádu 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10. Zabýval se také magickými kruhy; jeden jednoduchý magický kruh je na následujícím obrázku.

Hui už však magickým čtvercům nepřipisoval žádné mystické vlastnosti, dokonce je nazýval pouze číselnými diagramy. Považoval je za zajímavé objekty, které by mohly k matematice přivést více zájemců. V jeho díle se objevil také tzv. Velký Lo-šu, což je magický čtverec řádu 9, který se skládá z devíti malých magických čtverců třetího řádu.

V indické matematice můžeme magické čtverce nalézt v 11. a 12. století. Z té doby se dochoval nápis na pomníku z města Khajuraho, na němž



Obr. 2.2: Magický kruh

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

Obr. 2.3: Velký Lo-šu

je vyobrazen magický čtverec 4. řádu. V díle indického matematika *Narayana Pandita* (1340–1400) - *Ganita-Kaumudi* z roku 1356 se potom objevily perfektní magické čtverce, magické kruhy, obdélníky, trojúhelníky a je zde naznačena také souvislost mezi magickými čtverci a aritmetickými posloupnostmi. Je však velmi pravděpodobné, že se v Indii (odkud pochází první kombinatorické znalosti) magické čtverce objevily mnohem dříve.

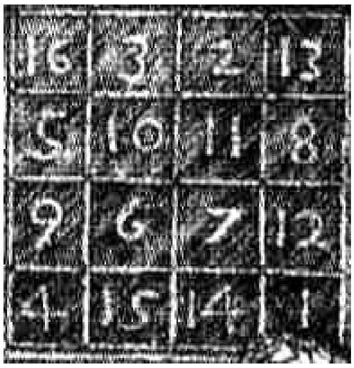
Není přesně známo, kdy se magické čtverce dostaly z čínské matematiky do arabské. Tento přínos bývá často spojován se jménem *Džabír Ibn Hajján* (asi 780 n. l.). Arabové měli o magické čtverce obrovský zájem, často je využívali zejména při sestavování horoskopů.

První příklad čtverce vyššího řádu než 3 můžeme najít v druhé knize díla *Encyclopaedia* (asi 990), která byla sepsána skupinou arabských matematiků, kteří jsou známí pod jménem *Ikhwan-al-Safa*. V této knize jsou uvedeny čtverce 3., 4., 5. a 6. řádu a je v ní napsáno, že existují čtverce řádu 7, 8 i 9. Není v ní však uvedeno žádné obecné pravidlo pro konstrukci těchto magických čtverců.

V řecké matematice se objevily magické čtverce až v práci matematika *Moschopoulose* (1282–1328) asi z roku 1315. Je zde popsáno také obecné pravidlo pro sestrojení magických čtverců lichých řádů a řádů dělitelných čtyřmi.

Magické čtverce můžeme najít také v malířství či architektuře. Snad nejznámějším obrazem, na němž se vyskytuje magický čtverec třetího řádu, je *Dürerův* (1471–1528) obraz *Melancolia* z roku 1514.

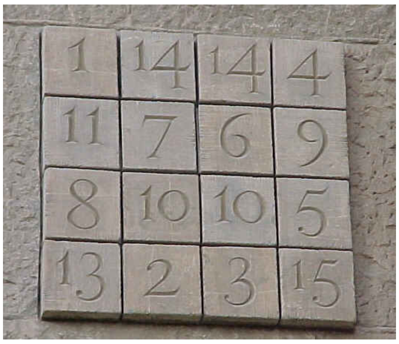
Obr. 2.4: Dürerův obraz *Melancolia*



Obr. 2.5: Detail obrazu Melancolia

„Zdeformovaný“ magický čtverec čtvrtého řádu můžeme najít na fasádě kostela Sagrada Família v Barceloně. Jedná se o pozměněný magický čtverec, v němž se však opakují dvě čísla. Součet čísel ve všech řádcích, sloupcích, úhlopříčkách a dokonce i součet čtyř čísel uprostřed je 33 (věk Ježíše Krista při umučení). Fasáda je dílem sochaře *Josepa Subirachse*, architektem byl *Antoni Gaudí*.

Obr. 2.6: Fasáda kostela *Sagrada Família*



Obr. 2.7: Detail fasády

Latinské čtverce se objevily až na počátku 18. století v práci *Récréations Mathématiques*. Autor *Ozanam* (1640–1717) v ní uvádí příklad uspořádání 16 karet do čtverce 4x4, přičemž v každém řádku i v každém sloupci musí být jedno eso, jeden král, jedna dáma, jeden spodek a karty všech čtyř barev. Otázkou latinských čtverců se zabýval také *Euler* (1707–1783), který si všiml, že dvojice ortogonálních latinských čtverců mohou být užitečné při konstrukci magických čtverců. V roce 1728 zformuloval slavnou úlohu o 36 důstojnících: „*Sestavte 36 důstojníků 6 různých hodností ze šesti různých pluků do čtverce tak, aby v žádné řadě ani žádném zástupu nestáli dva důstojníci stejné hodnosti ani dva důstojníci ze stejného pluku.*“ Protože se mu konstrukce těchto ortogonálních latinských čtverců nedařila, vyslovil hypotézu, že neexistují ortogonální latinské čtverce šestého řádu a dokonce ani řádu $4k+2(k=1,2,...)$. První část jeho hypotézy byla v roce 1900 dokázána. Druhá část byla dlouhou dobu považována za správnou, vyvrácena byla až roku 1959.

2.1.4 Aritmetický trojúhelník a kombinační čísla

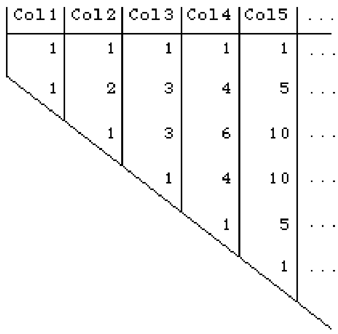
Aritmetickým trojúhelníkem nazýváme schéma, které se skládá z kombinačních čísel:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Aritmetický trojúhelník bývá velmi často nazýván Pascalův trojúhelník, i když se objevil mnohem dříve než v díle tohoto slavného matematika. *Pascal* (1623–1662) ve své významné knize *Traité du triangle arithmétique* (tj. *Pojednání o aritmetickém trojúhelníku*) toto schéma popsal, výsledky které uvádí však většinou nejsou jeho původní. Velkým přínosem této knihy je to, že je psána velmi srozumitelně a jasně a kombinační čísla jsou zde popsána jako koeficienty v binomickém rozvoji i jako čísla udávající počty k-prvkových podmnožin dané množiny.

První zmínku o aritmetickém trojúhelníku můžeme najít v díle islámského matematika *Al-Karádží* (953–1029). Jeho dílo se sice nedochovalo, ale bylo podrobně popsáno jiným islámským matematikem *Al-Samawalem* (1130–1180).

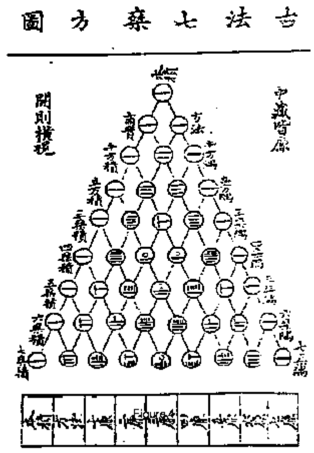
V 11. století se aritmetický trojúhelník objevil i v díle arabského astronoma, básníka, filozofa a matematika *Umara Chajjáma* (1048–1131), jeho dílo se však taktéž nedochovalo.



Obr. 2.8: Aritmetický trojúhelník z díla Al-Karádžího

Arabský matematik a astronom *Al-Tusi* (1201–1274) ve svém rukopise *Aritmetika s pomocí desky a písku* z roku 1265 také popisuje aritmetický trojúhelník, binomický rozvoj a některé vztahy mezi binomickými koeficienty. Dalším arabským dílem, v němž je aritmetický trojúhelník uveden, je *Klíč k aritmetice* z roku 1427. Jeho autorem je *Al-Kaši* (1380–1429).

Také v Číně znali toto schéma již mnohem dříve než v 17. století. Aritmetický trojúhelník popsal např. matematik *Chu Shih-Chieh* (1260–1320) v roce 1303. Na následujícím obrázku je ukázka trojúhelníku z jeho díla.



Obr. 2.9: Aritmetický trojúhelník z díla Chu Shih-CHieha

I v Evropě můžeme aritmetický trojúhelník najít mnohem dříve než u Pascala. Najdeme ho v knize *De Arithmetica*, jejímž autorem je německý matematik *Jordanus de Nemor* (1225–1260). Snad poprvé v tištěné podobě se vyskytl tento trojúhelník v knize *Cosmographia Petra Apiana* (1495–1552) v roce 1527, o několik let později v německé knize *Arithmetica integra* matematika *Michaela Stifela* (1487–1567). Od této doby patřil aritmetický trojúhelník k běžným znalostem evropských matematiků.

2.2 Počátky moderní kombinatoriky

Počátky moderní kombinatoriky řadíme do 17. století. V této době bylo napsáno hned několik prací, které významně přispěly k rozvoji kombinatoriky. V roce 1665 to bylo Pascalovo *Traité du triangle arithmétique.* Významným podnětem pro napsání této práce byly hazardní hry a problém předpovídání výsledků při těchto hrách. Tyto otázky byly také významným spojením mezi středověkou a moderní matematikou. O rok později vychází *Leibnizova* (1646–1716) práce *Dissertatio de Arte Combinatoria (Arc combinatoria).* Lebnizovo dílo bývá často řazeno spíše mezi spisy filozofické, neboť matematice je věnována pouze část této práce. Autor v něm uvádí aritmetický trojúhelník a jeho použití pro stanovení počtu kombinací a několik tvrzení, které bychom mohli řadit do teorie čísel. Leibniz také přišel s myšlenkou rozkladů celých čísel, většinu svých rukopisů na toto téma však nikdy nepublikoval. V letech 1678 - 1685 se zabýval kombinatorikou také významný matematik *Jakob Bernoulli* (1654–1705). Své poznatky shrnul v nedokončeném spise *Ars Conjectandi*, které bylo vydáno až po jeho smrti roku 1713.

Tato práce má několik částí; první část je věnována hazardním hrám, druhou část můžeme považovat za učebnici kombinatoriky, třetí část je jakousi sbírkou kombinatorických úloh a poslední se věnuje pravděpodobnostnímu počtu. V druhé části Bernoulli popisuje různé skupiny prvků, jejich vlastnosti a vztahy pro jejich počty. Dnešní učebnice středoškolské kombinatoriky se od této „učebnice“ příliš neliší, základní myšlenky odvozování vztahů pro tyto skupiny zůstaly nezměněny. Bernoulli chápal kombinatoriku již jako samostatnou matematickou disciplínu. Vydání díla *Ars conjectandi* můžeme považovat za završení období formování kombinatoriky, další vývoj kombinatoriky byl tímto dílem silně ovlivněn.

Jednou z nejvýznamnějších osobností, která se podílela na vývoji kombinatoriky byl Leonhard Euler. Zabýval se rozklady, latinskými čtverci, vytvořujícími funkcemi atd. Při studiu rozkladů odvodil vztah platící pro vytvořujíci funkci posloupnosti $(p(n))_{n=1}^{\infty}$, kde $p(n)$ udává počet všech rozkladů čísla n

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1}.$$

Další významnou osobností, která zasáhla do vývoje kombinatoriky, byl na přelomu 17. a 18. století francouzský matematik *Abraham de Moivre* (1667–1754). Jemu bývá často připisován „objev“ principu inkluze a exkluze, který použil při řešení dnes dobře známého *problému derangement (problém šatnářky).* Formulace tohoto problému je jednoduchá: „*Do šatny odevzdalo n osob svůj klobouk. Jaká je pravděpodobnost toho, že když všichni ztratili lístek od šatny a šatnářka jim klobouky při odchodu vydávala zcela nahodile, dostal alespoň jeden člověk svůj klobouk?*“

Princip inkluze a exkluze je bezpochyby mnohem starší a vystopovat jeho původ je téměř nemožné. De Moivre byl však prokazatelně první, který jej přesně popsal. Problém derangement (hledání počtu permutací n-prvkové množiny, které nemají pevný bod) poprvé řešil francouzský matematik *Pierre Montmort* (1678–1719), později se ním nezávisle na něm zabýval také Euler. V souvislosti s principem inkluze a exkluze se objevila ještě další známá úloha - *Úloha o hostech (the ménage problem)*: „*Kolika způsoby můžeme rozsadit kolem kulatého stolu n manželských párů tak, aby se muži a ženy pravidelně střídali a žádní dva manželé přitom neseděli vedle sebe?*“ S touto úlohou se poprvé můžeme setkat v roce 1891 u *Edouarda Lucase* (1842–1891). Po něm řešilo úlohu hned několik matematiků, explicitní výsledek však získal až v roce 1934 *Jean Touchard*(1918–1971). Ten však uvádí výsledek bez důkazu. Důkaz přidal až v roce 1943 *Irving Kaplansky* (1917–2006).

De Moivre byl také prvním, který se zabýval využitím vytvořujících funkcí při řešení lineárních rekurentních formulí s konstantními koeficienty. Se speciálním případem rekurentní formule se však setkáváme už ve 13. století, v díle *Liber Abaci* slavného matematika Fibonacciho. Fibonacci popisoval rozmnožování králíků a růst jejich populace a získal posloupnost čísel (počty nově narozených králíků), v níž je každý člen roven součtu dvou členů předcházejících. Objevit rekurentní formuli, jejímž řešením je právě taková posloupnost (dnes nazývaná posloupnost Fibonacciových čísel) se podařilo až de Moivrovi v roce 1730.

V 19. století se kombinatorika stala běžnou součástí matematiky. První anglicky psanou prací je *Essays on the Combinatorial Analysis* z roku 1818. Jejím autorem je anglický architekt a soukromý učitel matematiky *Peter Nicholson* (1765–1844).

Významným datem ve vývoji kombinatoriky je jistě i rok 1901, kdy byla v Lipsku vydána první učebnice kombinatoriky - *Lehrbuch der Combinatorik.* Jejím autorem je německý matematik *Eugen Netto* (1848–1919). Jedná se o rozsáhlé dílo, které shrnuje tehdejší kombinatorické znalosti.

Ve 20. století zaznamenala kombinatorika opravdu bouřlivý rozvoj. V souvislosti s rozvojem výpočetní techniky se začala rozvíjet celá diskrétní matematika, docházelo k její vnitřní diferenciaci a začala vznikat celá řada nových částí matematiky. Kombinatorika se dostala do popředí zájmu mnoha matematiků, začala vycházet celá řada kombinatorických časopisů, pořádají se důležité konference, kombinatorika je využívána v celé řadě jiných matematických disciplín i mimo matematiku.

Kapitola 3

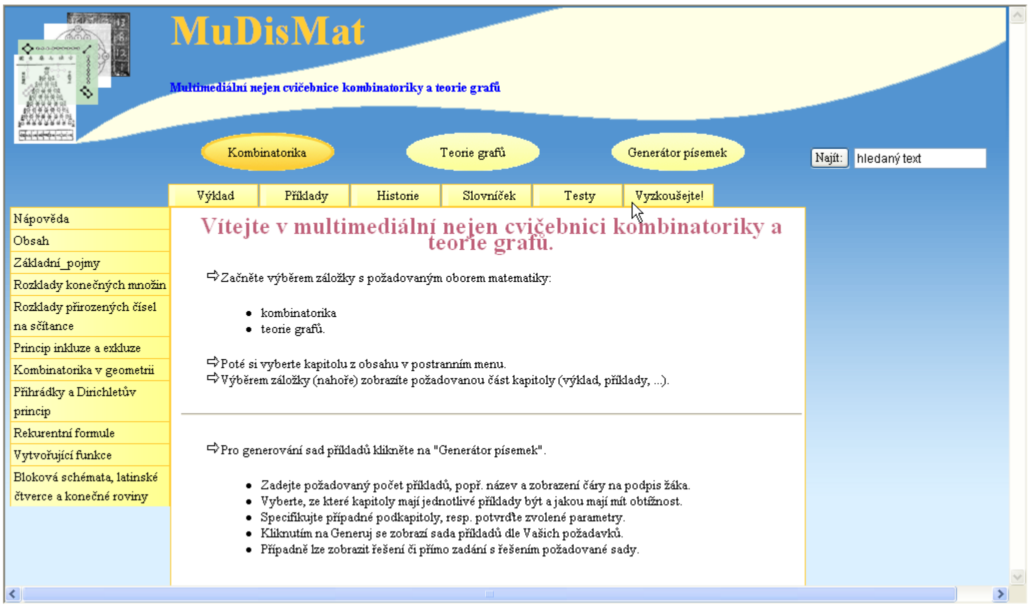
MuDisMat

MuDisMat se skládá ze dvou základních částí - **kombinatoriky** a **teorie grafů**.

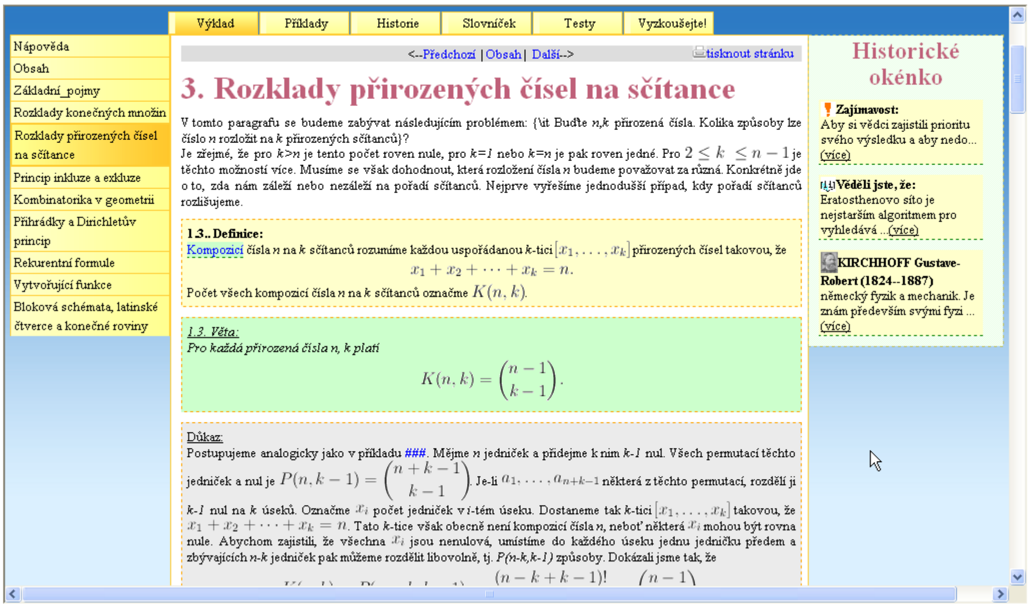
Část kombinatorika je rozdělena na následující kapitoly: základní pojmy; rozklady konečných množin; rozklady přirozených čísel na sčítance; princip inkluze a exkluze; kombinatorika v geometrii; přihrádky a Dirichletův princip; rekurentní formule; vytvořující funkce; bloková schémata; latinské čtverce a konečné roviny. Teorie grafů je rozdělena takto: základní pojmy; souvislé grafy; stromy; mosty; artikulace a některé grafové charakteristiky; eulerovské a hamiltonovské grafy; rovinné grafy; barvení grafů; grafové algoritmy.

U každé kapitoly je dále k dispozici výkladová část, část obsahující řešené příklady, mnohavýběrové testy s on-line vyhodnocováním, historické okénko, oddíl „vyzkoušejte“ a překladový česko - anglický a anglicko - český slovník matematických pojmů.

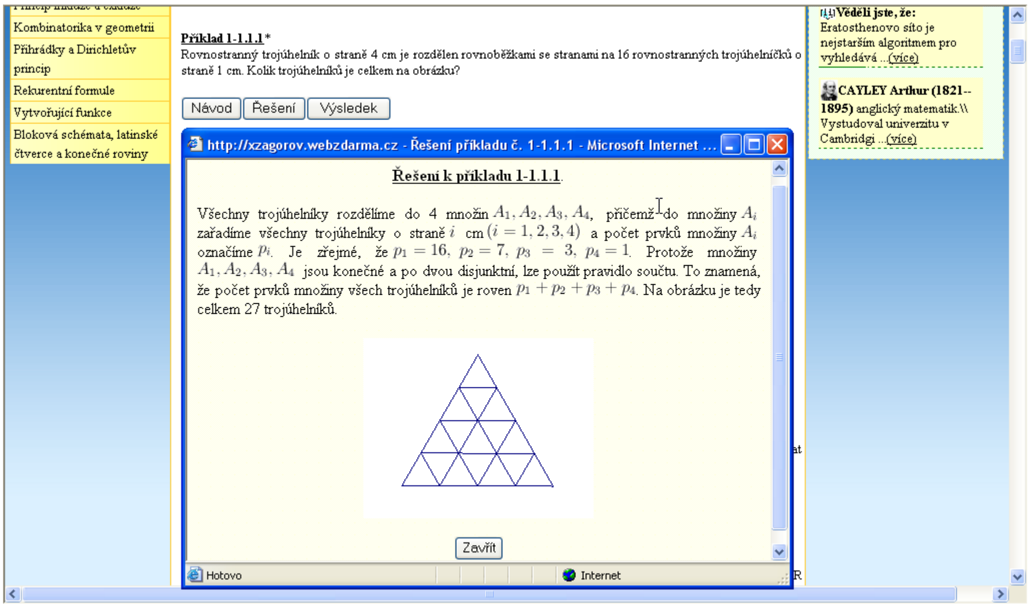
Z prvního obrázku je zřejmé rozvržení cvičebnice. Po levé straně je k dispozici hlavní menu, záložky tvoří jednotlivé kapitoly. Odkazy na podkapitoly se objeví jako rozbalovací podmenu najetím myši na název dané kapitoly. Po kliknutí na název některé kapitoly či podkapitoly text uprostřed stránky automaticky roluje na požadované místo. **Historické okénko** je umístěno v pravé části stránky. Nad ním je neustále k dispozici okénko **Najít**. Slouží k vyhledávání zadaných témat či hesel v rámci sbírky. Student bude odkázán na to místo sbírky, v němž je dané téma probíráno. Dotaz je přesměrován na vybraný vyhledávač, hledání bude primárně probíhat v rámci sbírky.



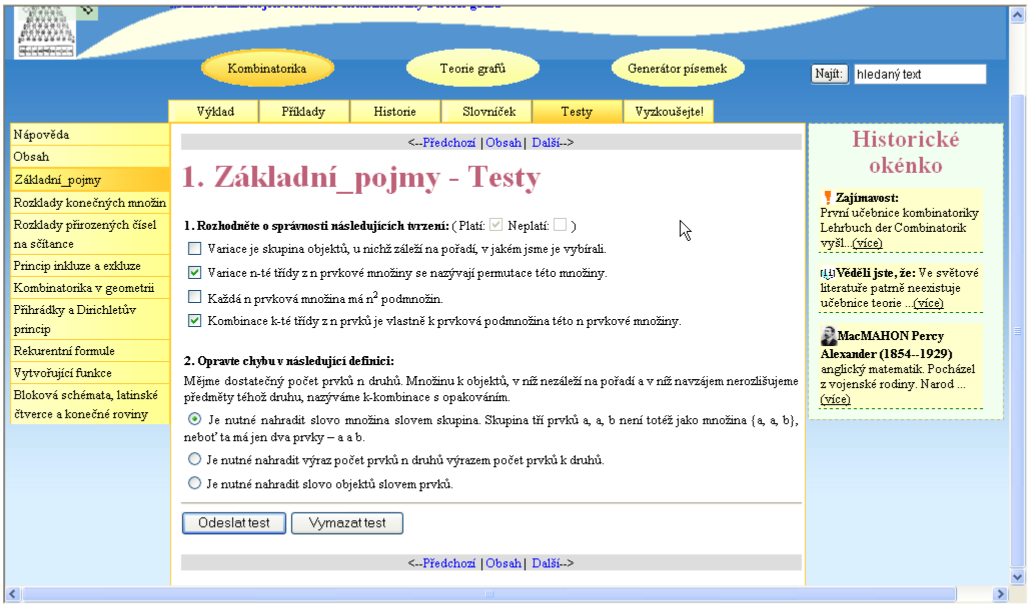
Ve **výkladové části** jsou uvedeny základní definice, věty a vztahy potřebné k řešení následujících úloh. Při zpracovávání výkladové části byla využita skripta [5].



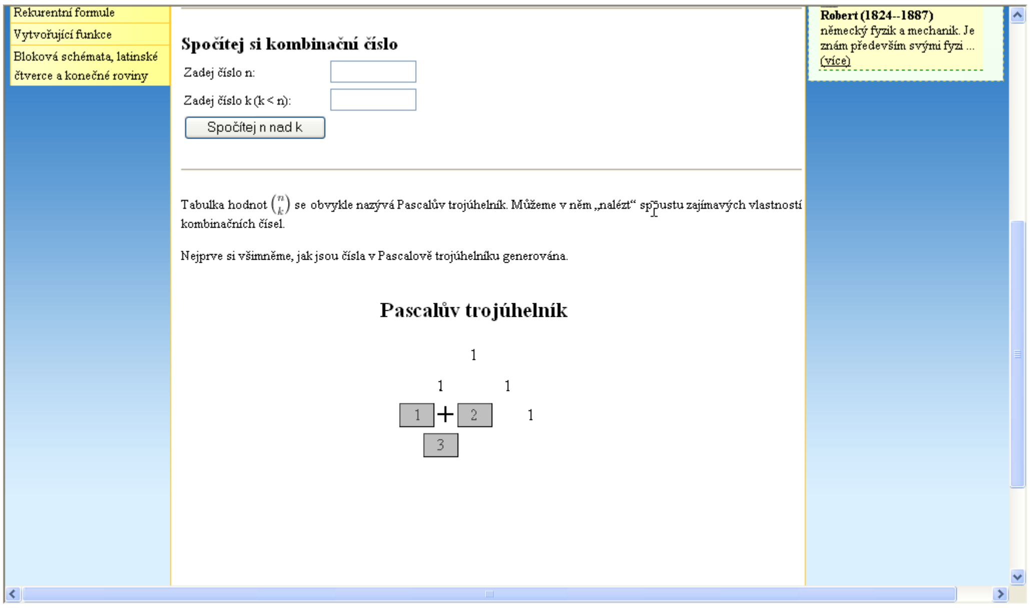
V další části jsou **příklady** a cvičení. U příkladů jsou k dispozici tři ikonky - *nápověda, řešení a výsledek*. Po kliknutí na ikonku *nápověda* se otevře samostatné okno, v němž je uvedena krátká nápověda, která může sloužit studentovi, pokud si neví rady s řešením. V případě, že studentovi tato nápověda nepomůže a dál nebude schopen příklad vyřešit, může využít ikonku *řešení*. Otevře se okno, v němž je kompletní řešení zadaného příkladu. Pokud student příklad vyřešil bez použití těchto nápověd, může kliknout jen na ikonku *výsledek*, kde je uveden pouze číselný výsledek příkladu.



Po té, co si žák nastuduje teorii, popřípadě procvičí teorii na řadě příkladů, má k dispozici mnohovýběrový **test** s on-line vyhodnocováním. Ke každé z otázek dostane na výběr několik odpovědí, z nichž může být správná jen jedna, ale klidně všechny. V případě, že označí nesprávný počet odpovědí, bude otázka vyhodnocena jako nesprávně zodpovězená. Po vyplnění formuláře student klikne na *odeslat test* a počítač automaticky odpovědi vyhodnotí. V hodnocení se objeví počet správně a počet špatně zodpovězených otázek.



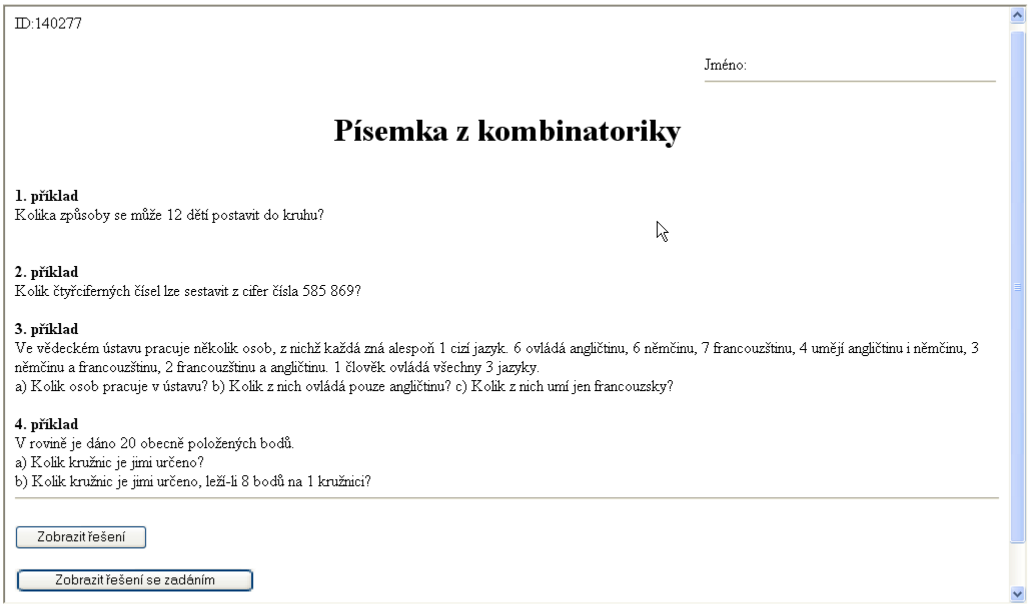
Významnou součástí cvičebnice je jistě část **Vyzkoušejte**. V ní jsou umístěny nejrůznější programy, interaktivní applety, grafy a tabulky, které mohou studentům sloužit k samostatnému experimentování a objevování nových zajímavých souvislostí. Jsou zde také vystaveny odkazy na zajímavé internetové stránky, které se věnují probíraným tématům. Tato část je vhodná pro zpestření výuky na střední škole, poslouží studentům k lepšímu vhlédnutí do tématu. V grafové části je k dispozici také jednoduchý program na vykreslování libovolných grafů a několik základních grafových algoritmů.



Pro snazší orientaci v anglické literatuře je neustále k dispozici překladový anglicko - český a česko - anglický slovník, v němž jsou uvedeny základní matematické pojmy.

Během práce se sbírkou je po pravé straně pořád otevřené tzv. **Historické okénko**. V něm je formou upoutávek (novinové články) student upozorňován na spoustu zajímavostí o daném tématu. Po kliknutí na tlačítko *více* (které je u každého nadpisu) se otevře okno s kompletní historií. Zde jsou umístěny biografie významných osobností, které se podílely na vzniku a vývoji kombinatoriky a teorie grafů, starší příklady v takové podobě, v jaké byly uváděny v historických textech, různé zajímavosti a historické souvislosti. Toto okénko by mělo u studentů prohloubit znalosti o historii kombinatoriky (a matematiky vůbec) a vzbudit jejich zájem o další studium tohoto předmětu.

Generátor písemek může sloužit pro učitele (středoškolské i vysokoškolské) k snadnému zadávání písemek, ale také pro studenty, kteří si mohou zkoušet cvičné písemky. Do okna generátoru uživatel zadá požadovaný počet příkladů, stupeň jejich obtížnosti a kapitoly, z nichž mají být úlohy vybrány. Je také možné zvolit název písemky, popřípadě kolonku na jméno žáka, třídu, atd. Pro žáky je výhodné, že generátor je schopen zadat sadu příkladů nahodile, bez toho, aniž by žák musel vybrat požadovaná témata. To je sice pro studenta náročnější, nicméně nadarmo se neříká: „Těžko na cvičišti, lehko na bojišti.“ Tento způsob generování příkladů je výhodou oproti tištěné sbírce, kde je většina příkladů zařazena do příslušné kapitoly a žák je při řešení tímto zařazením ovlivněn. Pro snadnější kontrolu příkladů je možné si nechat k zadaným příkladům počítačem vytvořit také vzorová řešení.



V příloze 1 je vzorová písemka získaná generátorem písemek a její řešení.

Závěr

Z dotazníku vyplynulo, že kombinatorika sice není nejoblíbenějším tématem žáků a často ani učitelů, je však příjemnou změnou a má šanci zaujmout i žáky, kteří předtím o matematiku neprojevovali větší zájem. Neoblíbenost této části matematiky spočívá především v její obtížnosti a odlišnosti od jiných témat. Je tedy jen na nás učitelích, jak dokážeme studenty zaujmout, motivovat, s jakým nadšením jim budeme matematické znalosti předávat a jak jim pomůžeme tuto náročnější část matematiky zvládnout.

Věřím, že také MuDisMat by mohl přispět ke zlepšení výuky a hlavně, že by mohl k této části matematiky přivést více nadšených studentů. MuDisMat bude vyvěšen na webovských stránkách Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity a informace o něm bude zaslána do odborných periodik.

Literatura

[1] Biggs, N. L., Lloyd, E. K., Wilson, R. J.: *Handbook of Combinatorics*, The Mit Press, Cambridge, Massachusetts, 1995

[2] Biggs, N. L.: *The roots of combinatorics*, Historia Math. **6** (1979), 109 - 136

[3] Bukovský, L., Kluvánek, I.: *Dirichletov princíp*, Mladá fronta, Praha, 1980

[4] Calda, E.,Dupač, V.: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, Prometheus, Praha, 1993

[5] Fuchs, E.: *Diskrétní matematika pro učitele*, Masarykova univerzita, Brno, 2001

[6] Fuchs, E.: *Teorie množin pro učitele*, Masarykova univerzita, Brno, 1999

[7] Goodaire, E. G. - Parmenter, M. M.: *Discrete Mathematics with Graph Theory*, Prentice Hall, 1997

[8] Katz, J. B.: *History of Mathematics*, 1998

[9] Koman, M., Vyšín, J.: *Malý výlet do moderní matematiky*, Mladá fronta, Praha, 1970

[10] Kučera, R., Šimša, J., Herman, J.: *Metody řešení matematických úloh II* , Masarykova univerzita, Brno, 1991

[11] Lipschutz, S.: *Discrete Mathematics*, Schaum‘s Outline Press, The McGraw-Hill, 1976

[12] Petáková, J.: *Matematika*, Prometheus, Praha, 2000

[13] Petránek, o., Calda, E., Hebák, P.: *Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1989

[14] Netto, E.: *Lehrbuch der Combinatorik*, Verlag von B. G. Teubner, Lipsko, 1901.

[15] Vilenkin, N. J.: *Kombinatorika*, SNTL Praha, 1977

[16] Vrba, A.: *Kombinatorika*, Mladá fronta, Praha, 1980

[17] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html

[18] http://markfarrar.co.uk/msqhst01.htm