

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2022

NIKOL LORKOVÁ

**MASARYKOVA
UNIVERZITA**
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Modely laseru

Bakalářská práce

Nikol Lorková

Vedoucí práce: RNDr. Lenka Přibylová, Ph.D.

Brno 2022

Bibliografický záznam

Autor: Nikol Lorková
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita
Ústav matematiky a statistiky

Název práce: Modely laseru

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Modelování a výpočty

Vedoucí práce: RNDr. Lenka Příbylová, Ph.D.

Akademický rok: 2021/2022

Počet stran: xv + 44

Klíčová slova: Laser, Bifurkace; Synchronizace; Oscilace; Dynamický systém;
Transkritická bifurkace; Hopfova bifurkace; Cusp bifurkace

Bibliographic Entry

Author: Nikol Lorková
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Laser models

Degree Programme: Mathematics

Field of Study: Modelling and computations

Supervisor: RNDr. Lenka Příbylová, Ph.D.

Academic Year: 2021/2022

Number of Pages: xv + 44

Keywords: Laser; Bifurcation; Synchronisation; Oscillations; Dynamical system; Transcritical bifurcation; Hopf bifurcation; Cusp bifurcation

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme matematickým modelům popisujícím laser. V teoretické části jsou shrnuty základní pojmy z teorie dynamických systémů a následně jsou zde popsány vybrané příklady lokálních bifurkací včetně některých bifurkací na toru. V hlavní části práce se věnujeme analýze tří modelů laseru. První popisuje laser pomocí populačního modelu a zabývá se změnou populace fotonů v čase. V tomto modelu dokazujeme existenci prahové hodnoty laseru. Další dva modely popisují laser z fyzikálního hlediska a zaměřují se tedy na změny elektrického pole laseru. V těchto modelech se také zabýváme případem dvou spřažených laserů.

Abstract

In this bachelor thesis we focus on mathematical models describing lasers. The theoretical part summarizes the basic concepts of the theory of dynamical systems and then describes selected examples of local bifurcations, including some bifurcations on the torus. In the main part of the thesis, we analyze three laser models. The first one describes the laser using a population model and deals with the change of the photon population over time. In this model we prove the existence of a laser threshold. The other two models describe the laser from a physical point of view and focus on the changes in the electric field of the laser. In these models we also consider the case of two coupled lasers.

ZADÁNÍ
BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2021/2022

Ústav:	Ústav matematiky a statistiky
Studentka:	Nikol Lorková
Program:	Matematika
Specializace:	Modelování a výpočty

Ředitel ústavu PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce:	Modely laseru
Název práce anglicky:	Laser models
Jazyk závěrečné práce:	čeština

Oficiální zadání:

Cílem práce bude nalezení modelů laseru jako diferenciálních rovnic nebo jejich systémů, analýza vhodných modelů, případně studium dalších jevů v souvislosti s nelineární optikou.

Literatura:

STROGATZ, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Cambridge, Mass.: Westview Press, 1994. xi, 498. ISBN 0738204536.

Vedoucí práce:	RNDr. Lenka Příbylová, Ph.D.
Datum zadání práce:	21. 5. 2021
V Brně dne:	6. 5. 2022

Zadání bylo schváleno prostřednictvím IS MU.

Nikol Lorková, 18. 10. 2021

RNDr. Lenka Příbylová, Ph.D., 4. 11. 2021

RNDr. Jan Vondra, Ph.D., 4. 11. 2021

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především RNDr. Lence Příbylové, Ph.D. za odborné vedení a cenné rady, který jsem dostávala při psaní této bakalářské práce, a také za trpělivost při její kontrole a opravování chyb. Dále bych chtěla poděkovat své rodině, přátelům a spolužákům za podporu, kterou mi v průběhu psaní poskytovali.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 10. května 2022

.....
Nikol Lorková

Obsah

Přehled použitého značení	xv
Úvod	1
Kapitola 1. Základní matematická teorie	3
1.1 Pojem model a modelování	3
1.2 Dynamické systémy	4
1.2.1 Důležité pojmy	5
1.3 Stabilita dynamických systémů	5
1.3.1 Topologická klasifikace stacionárních bodů v rovině	7
1.4 Teorie bifurkací	9
1.4.1 Jednparametrické bifurkace spojité dynamické systémů	10
1.4.2 Dvuparametrické bifurkace spojité dynamické systémů	13
1.4.3 Bifurkace na invariantním toru	14
Kapitola 2. Fyzikální popis laseru	17
2.1 Popis laseru	17
2.2 Vlastnosti laserového světla	18
2.3 Princip laseru	18
2.3.1 Stimulovaná emise	18
2.3.2 Spontánní emise	18
2.3.3 Popis funkce laseru	19
2.3.4 Možnosti modelování laseru	19
2.4 Stručná historie a příklady využití laseru	19
Kapitola 3. Populační model laseru	21
Kapitola 4. Řídící a odezvoivý laser	25
4.1 Řídící laser	25
4.2 Řídící a odezvoivý laser	26
4.2.1 Nezávislé lasery	28
4.2.2 Závislé lasery bez rozladění	29
4.2.3 Závislé lasery s rozladěním bez buzení odezvoivého laseru	30
4.2.4 Závislé lasery s rozladěním s buzeným odezvoivým laserem	31

Kapitola 5. Závisle spřažené lasery	33
5.1 Nezávislé lasery	34
5.2 Závislé lasery	35
Závěr	41
Seznam použité literatury	43

Přehled použitého značení

Pro snazší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

\mathbb{R}	množina všech reálných čísel
\mathbb{N}	množina všech přirozených čísel
\mathbb{Z}	množina všech celých čísel
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$	derivace funkce x podle času t
$f_{x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$	parciální derivace funkce f vzhledem k proměnné x_n
$J(x) = Df(x)$	Jacobiho matice funkce f v bodě x
$\det J$	determinant Jacobiho matice J
$\text{tr} J$	stopa Jacobiho matice J
\mathbb{S}^1	jednotková kružnice
\mathbb{T}^2	2-torus

Úvod

V této bakalářské práci se zaměříme na matematické modely popisující funkci laseru. Hlavním cílem je nalezení modelů laseru jako diferenciálních rovnic nebo jejich systémů a následná analýza těchto modelů.

Z nalezených modelů byly pro následnou analýzu vybrány tři. První popisuje laser pomocí populačního modelu a zabývá se změnou populace fotonů v čase. Další dva modely popisují laser z fyzikálního hlediska a zaměřují se tedy na změny elektrického pole laseru. V těchto dvou modelech se zabýváme také případem dvou spřažených laserů.

Text práce je členěn do pěti kapitol. V první kapitole je shrnuta základní matematická teorie potřebná pro zbytek bakalářské práce. Jsou zde popsány hlavní pojmy, definice a věty z teorie dynamických systémů, jsou uvedeny vybrané příklady bifurkací, které se vyskytují v dalších kapitolách, a nakonec je popsána bifurkace na invariantním toru.

Druhá kapitola stručně shrnuje základní informace o laserech. Je zde zaveden pojem laser, jeho popis, princip fungování a na závěr stručná historie jeho vývoje a příklady využití.

Další tři kapitoly představují samotný popis a analýzu vybraných modelů. Třetí kapitola se zabývá analýzou modelu popisujícího laser jakožto populaci fotonů. Je zde dokázána existence prahové hodnoty pro funkci laseru, která se pojí s transkritickou bifurkací.

Čtvrtá kapitola pojednává o modelu laseru, který popisuje změnu elektrického pole a zisku laseru v čase. Nejdříve je popsán vývoj chování pro jeden laser a následně je zde popsána situace, kdy jsou spřaženy dva lasery tak, že chování prvního laseru ovlivňuje chování druhého (ale první není ovlivněn druhým). Takto spřažené lasery se nazývají řídicí a odezvový laser. Chování takto spřažených laserů je dále podrobněji analyzováno v závislosti na výskytu vazby a rozladění laserů. Je zde také ukázán výskyt Hopfovy bifurkace a následně popsána změna chování laseru při přechodu přes ni.

Poslední, pátá kapitola se zabývá rovněž fyzikálním modelem dvou spřažených laserů, které jsou ale v tomto případě navzájem závisle spojeny. Systém popisující tento případ je dále rozdělen na rychlý a pomalý subsystém a tyto subsystémy jsou dále analyzovány.

Většina v práci použitých obrázků je vytvořena pomocí softwaru Maple nebo prostřednictvím kontinuačního balíku MATCONT [2] implementovaného v programovém prostředí MATLAB, kde jsou pořízeny i některé numerické výpočty. Použité obrázky jsou následně upraveny v grafickém softwaru Inkscape, kde jsou vytvořena také použitá schémata.

Kapitola 1

Základní matematická teorie

V této kapitole si objasníme matematickou teorii potřebnou k analýze modelů laseru. Seznámíme se s pojmem model a modelování a uvedeme nejdůležitější definice a věty z oblasti autonomních dynamických systémů. V druhé části kapitoly si zadefinujeme pojem bifurkace a uvedeme její vybrané příklady, které využijeme v dalších částech práce.

Pro sepsání této kapitoly byl využit především zdroj [9], dalšími zdroji byly [7], [6], [15], [11] a [10].

1.1 Pojem model a modelování

Modelem nazýváme zjednodušené zobrazení zkoumané skutečnosti (například ekonomického jevu, technického procesu nebo medicínského objektu) realizované k určitému cíli. Zkoumanou skutečnost nazýváme *originálem* (též *prototypem* či *předmětem modelování*).

Matematické modely (tedy modely vytvořené pomocí matematických výrazových prostředků) můžeme rozdělit na *stochastické*, které obsahují jako své prvky náhodné veličiny, a *deterministické*. Z jiného hlediska lze matematické modely dělit na *statické*, které jsou nezávislé na čase, a *dynamické*, do nichž je čas včleněn.

Deterministické dynamické matematické modely lze dále rozlišovat na spojité (pracující se spojitými veličinami) a diskrétní (pracující s diskrétními veličinami).

Někdy je také užitečné rozdělovat matematické modely na *demonstrativní* a *explikativní*. Demonstrativní modely obsahují parametry, které nemají interpretovatelný význam, zatímco explikativní modely jsou založeny na jasných (pozorovatelných a kvantifikovatelných) pojmech.

Modelování je účelové zobrazování vyšetřovaných vlastností originálu pomocí vhodně zvolených vlastností modelu. Jedná se tedy o reprodukci vybraných vlastností studovaného objektu na modelu, tj. analogickém objektu simulujícím chování a vlastnosti původního studovaného objektu. Modelování je dnes velmi rozšířenou pracovní metodou nacházející uplatnění v různých oblastech.

Proces matematického modelování lze rozdělit na čtyři kroky:

1. sestavení modelu (zápis vlastností a zkoumaných zákonitostí objektu pomocí matematických termínů)
2. matematická analýza modelu a získání teoretických důsledků

3. zkoumání, zda hypotetický model je v souladu s praktickými poznatky (zda výsledky pokusů a pozorování souhlasí s teoretickými důsledky modelu), a případné přijetí modelu
4. následná analýza modelu v souvislosti s nahromaděním nových poznatků o zkoumaném objektu a případné vylepšení modelu.

1.2 Dynamické systémy

Pojem *dynamický systém* je matematickou formulací všeobecného vědeckého přístupu k deterministickým procesům. Všechny možné stavy systému jsou charakterizovány prvky nějaké množiny X , kterou nazýváme *stavový* nebo též *fázový prostor*.

Vývojem dynamického systému se rozumí změna stavu systému v čase $t \in T$, kde T je množina čísel. Mají-li systémy spojitý (reálný) čas $T = \mathbb{R}$, nazýváme je *spojitými dynamickými systémy*. Oproti tomu mají-li diskrétní (celočíslný) čas $T = \mathbb{Z}$, nazýváme je *diskrétními dynamickými systémy*.

Hlavní složkou dynamického systému je zákon evoluce, určující stav $\mathbf{x}_t \in X$ systému v čase t za předpokladu, že známe počáteční stav systému \mathbf{x}_0 .

Nejobecnějším způsobem specifikace vývoje je předpokládat, že pro dané $t \in T$ je ve stavovém prostoru X definováno zobrazení φ^t předpisem

$$\varphi^t : X \rightarrow X,$$

které zobrazuje počáteční stav $\mathbf{x}_0 \in X$ na nějaký stav $\mathbf{x}_t \in X$ v čase t , tj.:

$$\mathbf{x}_t = \varphi^t \mathbf{x}_0.$$

Zobrazení φ^t se nazývá *evoluční operátor* dynamického systému.

Definice 1.2.1. *Dynamickým systémem* rozumíme trojici $\{T, X, \varphi^t\}$, kde T označuje čas, X je stavový prostor a $\varphi^t : X \rightarrow X$ je parametrický systém evolučních operátorů s parametrem $t \in T$.

Splňuje-li evoluční operátor dynamického systému podmínku

$$\varphi^0 = \text{id},$$

kde id je identita na X , tj. $\forall \mathbf{x} \in X : \text{id} \mathbf{x} = \mathbf{x}$, tedy systém nemění svůj stav spontánně, nazveme takovýto systém *determinickým dynamickým systémem*.

Splňuje-li evoluční operátor navíc také podmínku

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s,$$

tj. $\forall \mathbf{x} \in X$ a $\forall t, s \in T : \varphi^{t+s} \mathbf{x} = \varphi^t(\varphi^s \mathbf{x})$, pokud jsou definovány obě strany rovnice, řekneme, že zákony evoluce se v čase nemění a determinický dynamický systém splňující tuto podmínku nazveme *autonomní*.

1.2.1 Důležité pojmy

Definice 1.2.2. Trajektorie (též orbita) s počátečním bodem \mathbf{x}_0 je uspořádaná podmnožina stavového prostoru X ,

$$Or(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{x} = \varphi^t \mathbf{x}_0, \forall t \in T, \text{ pro která je } \varphi^t \mathbf{x}_0 \text{ definováno}\}.$$

Trajektorie spojitého systému tvoří orientované křivky ve stavovém prostoru X , zatímco pro diskrétní systémy to jsou posloupnosti bodů v X .

Věta 1.2.1. Autonomní dynamický systém může mít trajektorie trojího typu:

- (i) singulární body (odpovídají konstantním řešením),
- (ii) uzavřené trajektorie, tedy cykly (odpovídají nekonstantním periodickým řešením)
- (iii) trajektorie, které samy sebe neprotínají.

Důkaz. viz [6] str. 97 □

Definice 1.2.3. Rozdělení stavového prostoru X na jednotlivé trajektorie nazýváme *fázový portrét* dynamického systému.

Poznámka. Nulklinami budeme nazývat křivky, jejichž rovnice získáme položením pravých stran rovnic uvažovaného systému rovno nule. Nulkliny rozdělují fázový prostor na oblasti, v nichž má trajektorie kvalitativně odlišný směr.

Definice 1.2.4. Bod $\mathbf{x}^* \in X$ se nazývá *ekvilibrium* nebo též *rovnovážný, stacionární* či *pevný bod*, jestliže $\forall t \in T$ platí $\varphi^t \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$.

Definice 1.2.5. *Cyklem* nazýváme periodickou orbitu L_0 , která není rovnováhou, takovou, že $\forall \mathbf{x}_0 \in L_0$ a $\forall t \in T$ splňuje $\varphi^{t+T_0} \mathbf{x}_0 = \varphi^t \mathbf{x}_0$, kde $T_0 > 0$.

Nejmenší T_0 s touto vlastností nazýváme *periodou* cyklu L_0 .

Definice 1.2.6. Cyklus spojitého dynamického systému, v jehož okolí se nenachází žádné jiné cykly, se nazývá *limitní cyklus*.

Definice 1.2.7. *Invariantní množinou* dynamického systému $\{T, X, \varphi^t\}$ definujeme podmnožinu $S \subset X$ takovou, že $\forall \mathbf{x}_0 \in S$ a $\forall t \in T$ platí $\varphi^t \mathbf{x}_0 \in S$.

1.3 Stabilita dynamických systémů

Definice 1.3.1. Invariantní množina S se nazývá *stabilní*, jestliže

- (i) pro každé libovolně malé okolí invariantní množiny $U \supset S$, existuje okolí $V \supset S$ takové, že $\forall \mathbf{x} \in V$ a $\forall t > 0$ platí $\varphi^t \mathbf{x} \in U$ (tento typ stability nazýváme *Ljapunovskou stabilitou*),
- (ii) existuje okolí $U_0 \supset S$ takové, že $\forall \mathbf{x} \in U_0$ a $t \rightarrow \infty$ platí $\varphi^t \mathbf{x} \rightarrow S$ (Tento typ stability nazýváme *asymptotickou stabilitou*).

Spojité dynamické systémy mají často podobu systému diferenciálních rovnic.

Definice 1.3.2. Autonomním systémem diferenciálních rovnic rozumíme systém

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

kde $\mathbf{x} \in X = \mathbb{R}^n$ a vektorová funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je dostatečně hladká. Symbolem $\dot{\mathbf{x}}$ rozumíme derivaci \mathbf{x} podle času $t \in T = \mathbb{R}$.

Definice 1.3.3. Spojitá reálná funkce V se nazývá *Ljapunovova funkce* systému (1.1), když existuje okolí počátku G prostoru \mathbb{R}^n takové, že

- (i) V je pozitivně definitní v G ,
- (ii) je-li $\mathbf{x} = \varphi(t)$ řešení systému (1.1) s počáteční hodnotou $\varphi(t_1) \in G$, pak $V(\varphi(t))$ je nerostoucí pro všechna $t \geq t_1$ pro než $\varphi(t) \in G$.

Definice 1.3.4. Reálná funkce V se nazývá *pozitivně definitní* v okolí počátku G prostoru \mathbb{R}^n právě tehdy, když $V(0) = 0$ a $V(\mathbf{x}) > 0$ pro všechna $\mathbf{x} \in G \setminus \{0\}$. Naopak reálná funkce V se nazývá *negativně definitní* v okolí počátku G právě tehdy, když $V(0) = 0$ a $V(\mathbf{x}) < 0$ pro všechna $\mathbf{x} \in G \setminus \{0\}$.

Věta 1.3.1. Existuje-li Ljapunovova funkce systému (1.1), pak je nulové řešení systému (1.1) stabilní.

Důkaz. viz [6] str. 142 □

Věta 1.3.2. Existuje-li v okolí počátku G prostoru \mathbb{R}^n pozitivně definitní funkce $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu taková, že její derivace vzhledem k rovnici (1.1) je negativně definitní, pak nulové řešení této rovnice je asymptoticky stabilní.

Důkaz. viz [6] str. 143 □

Věta 1.3.3 (Ljapunovova). Uvažujme dynamický systém definovaný vztahem

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

kde f je hladká funkce a předpokládejme, že má rovnovážný bod \mathbf{x}^* (tj. $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$). Označme

$$J^* = Df(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobiho matici systému v rovnovážném bodě. Potom \mathbf{x}^* je stabilní, jestliže všechna vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ matice J^* splňují $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Důkaz. viz [9] str. 22 □

Definice 1.3.5. Dynamický systém $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ se nazývá *topologicky ekvivalentní* dynamickému systému $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$, jestliže existuje homeomorfismus $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zobrazující trajektorie prvního systému na trajektorie druhého systému při zachování směru času.

Poznámka. Homeomorfismus je invertibilní zobrazení takové, že i jeho inverze je spojitá.

Definice 1.3.6. Dynamický systém $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ se nazývá *lokálně topologicky ekvivalentní* v blízkosti rovnovážného bodu \mathbf{x}^* dynamickému systému $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ v blízkosti rovnovážného bodu \mathbf{y}^* , jestliže existuje homeomorfismus $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pro který platí:

- (i) je definován v malém okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu \mathbf{x}^* ,
- (ii) splňuje $\mathbf{y}^* = h(\mathbf{x}^*)$,
- (iii) zobrazuje trajektorie prvního dynamického systému v okolí U bodu \mathbf{x}^* na trajektorie druhého systému v okolí V bodu \mathbf{y}^* při zachování směru času.

Uvažujme spojitý dynamický systém (1.1). Nechť $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ je stacionární bod systému a nechť J^* označuje Jacobiho matici systému v bodě \mathbf{x}^* . Nechť n_- , n_0 a n_+ jsou počty vlastních čísel matice J^* se zápornou, nulovou a kladnou reálnou částí.

Definice 1.3.7. Stacionární bod se nazývá *hyperbolický*, jestliže $n_0 = 0$, tj. jestliže se na imaginární ose nenacházejí žádná jeho vlastní čísla.

Věta 1.3.4 (Grobmanova-Hartmanova, věta o linearizaci). Systém $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ je v okolí svého hyperbolického singulárního bodu \mathbf{x}^* lokálně topologicky ekvivalentní se svou linearizací $\dot{\mathbf{x}} = Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}$.

Důkaz. viz [10] str. 121 □

1.3.1 Topologická klasifikace stacionárních bodů v rovině

Uvažujme dvourozměrný systém

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad (1.2)$$

kde $f = (f_1, f_2)$ je hladká funkce. Předpokládejme, že \mathbf{x}^* je rovnovážným bodem, tedy $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, a nechť

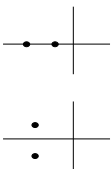
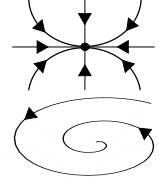

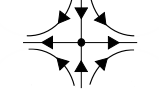
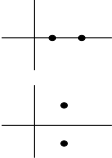
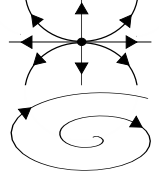
$$J^*(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}$$

je Jacobiho matice v tomto bodě. Potom má matice J^* dvě vlastní čísla λ_1, λ_2 , která tvoří kořeny charakteristického polynomu

$$\det(J^* - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr} J^* \lambda + \det J^*,$$

kde $\operatorname{tr} J^* = \lambda_1 + \lambda_2$ značí stopu a $\det J^* = \lambda_1 \lambda_2$ determinant matice J^* v bodě \mathbf{x}^* .

Na základě znamének těchto vlastních čísel rozlišujeme na rovině tři topologické třídy hyperbolických rovnováh: stabilní uzly a ohniska, sedla a nestabilní uzly či ohniska. Tato klasifikace je shrnuta na obrázku 1.1.

(n_+, n_-)	Vlastní čísla	Fázový portrét	Stabilita
$(0, 2)$		 uzel ohnisko	stabilní
$(1, 1)$		 sedlo	nestabilní
$(2, 0)$		 uzel ohnisko	nestabilní

Obrázek 1.1: Topologická klasifikace hyperbolické rovnováhy v rovině

Singulární bod \mathbf{x}^* se nazývá:

1. *střed*, jestliže existuje ryzí okolí U bodu \mathbf{x}^* takové, že každým bodem $a \in U$ prochází jediná trajektorie, která je uzavřená a obsahuje ve svém vnitřku bod \mathbf{x}^* .
2. *ohnisko*, jestliže existuje ryzí okolí U bodu \mathbf{x}^* takové, že bod $\mathbf{x}(t)$ trajektorie \mathbf{x} vycházející z libovolného bodu $a \in U$ má tu vlastnost, že konverguje pro $t \rightarrow \infty$ nebo $t \rightarrow -\infty$ k \mathbf{x}^* , a to tak, že velikost orientovaného úhlu vektoru $\mathbf{x}^* \mathbf{x}(t)$ od nějakého pevného vektoru $\mathbf{x}^* \mathbf{x}_1$ má nevlastní limitu.
3. *uzel*, jestliže existuje ryzí okolí U bodu \mathbf{x}^* takové, že pro bod $\mathbf{x}(t)$ trajektorie \mathbf{x} vycházející z libovolného bodu $a \in U$ platí $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ nebo $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$, přičemž velikost orientovaného úhlu vektoru $\mathbf{x}^* \mathbf{x}(t)$ od nějakého pevného vektoru $\mathbf{x}^* \mathbf{x}_1$ má konečnou limitu.
4. *sedlo*, jestliže existuje jen konečný počet trajektorií $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ takových, že $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ nebo $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$.

O stabilitě rovnovážných bodů v rovině nám hovoří také následující věta:

Věta 1.3.5. Postačujícími podmínkami asymptotické stability stacionárního bodu \mathbf{x}^* spojitého systému (1.2) v rovině jsou podmínky $\det J^* > 0$ a $\text{tr} J^* < 0$.

Důkaz. Plyne z věty 1.3.3. □

Věta 1.3.6 (Dulacovo kritérium). Je-li f spojitá funkce ($f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$), přičemž $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ a existuje-li spojitá funkce q ($g \in C^1(D, \mathbb{R})$) taková, že výraz

$$\frac{\partial(q(x_1, x_2)f_1(x_1, x_2))}{\partial x_1} + \frac{\partial(q(x_1, x_2)f_2(x_1, x_2))}{\partial x_2}$$

je v nějaké jednoduše souvislé oblasti $B \subseteq D$ stále větší nebo roven nule nebo stále menší nebo roven nule, přičemž není identicky roven nule v žádné otevřené podmnožině množiny B , pak v B neexistuje uzavřená trajektorie rovnice (1.2).

Důkaz. viz [7] str. 9 □

Důsledek 1.3.7 (Bendixsonovo kritérium). Je-li f spojitá funkce ($f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$), $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ a výraz

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

je v nějaké jednoduše souvislé oblasti $B \subseteq D$ stále větší nebo roven nule nebo stále menší nebo roven nule, přičemž není identicky roven nule v žádné otevřené podmnožině množiny B , pak v B neexistuje uzavřená trajektorie rovnice (1.2).

1.4 Teorie bifurkací

Uvažujme dynamický systém závislý na parametrech. V případě spojitého času tuto vlastnost zapíšeme prostřednictvím soustavy diferenciálních rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \alpha), \quad (1.3)$$

kde $\mathbf{x} \in X = \mathbb{R}^n$ je vektor proměnných, $\alpha \in \mathbb{R}^k$ je vektor parametrů a vektorová funkce $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ je dostatečně hladká.

Poznámka. Měníme-li hodnoty parametrů systému, bude se měnit i jeho fázový portrét.

Definice 1.4.1. Vznik topologicky neekvivalentního fázového portréту při změně parametrů se nazývá *bifurkace*.

Bifurkace je tedy kvalitativní změnou chování systému, ke které dochází, když jeho parametry procházejí kritickou hodnotou.

Definice 1.4.2. *Lokální bifurkací* systému (1.3) v okolí rovnovážného bodu \mathbf{x}^* s kritickou hodnotou parametru $\alpha = \alpha_{krit}$ rozumíme vznik lokálně topologicky neekvivalentních fázových portrétu v okolí rovnovážného bodu \mathbf{x}^* při přechodu přes bifurkační parametr α_{krit} .

Definice 1.4.3. *Bifurkačním diagramem* dynamického systému rozumíme rozdělení jeho prostoru parametrů na oblasti s topologicky ekvivalentními fázovými portréty.

Definice 1.4.4. Polynomiální systém

$$\dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{y}, \beta, \sigma), \quad (1.4)$$

kde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^k$ je vektor parametrů a $\sigma \in \mathbb{R}^l$ je vektor koeficientů, přičemž $n, k, l \in \mathbb{N}$, nazýváme *topologickou normální formou bifurkace*, pokud každý generický systém (1.3), se stacionárním bodem $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ splňující stejné bifurkační podmínky pro $\alpha_{krit} = \mathbf{0}$ je v blízkosti počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému (1.4) pro nějaké hodnoty koeficientů σ .

Poznámka. Pojmeme *generičnosti* budeme rozumět skutečnost, že systém splňuje konečný počet podmínek generičnosti. Tyto podmínky budou mít podobu nerovností tvaru

$$N_i[f] \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

kde N_i představuje určitou (algebraickou) funkci parciálních derivací $f(\mathbf{x}, \alpha)$ vzhledem k proměnné \mathbf{x} a parametru α vyhodnocených v bodě $(\mathbf{x}, \alpha) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Je užitečné rozlišit ty podmínky generičnosti, které jsou určeny systémem při kritických hodnotách parametru $\alpha = \mathbf{0}$. Tyto podmínky lze vyjádřit parciálními derivacemi $f(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ podle x vyhodnocenými v $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a nazývají se *podmínky nedegenerovanosti*.

Všechny ostatní podmínky, ve kterých jsou zahrnuty derivace $f(\mathbf{x}, \alpha)$ vzhledem k parametru α , se nazývají *podmínky transversality*.

1.4.1 Jednparametrické bifurkace spojitých dynamických systémů

Uvažujme systém (1.3), kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Nechť \mathbf{x}^* značí hyperbolický stacionární bod systému pro hodnotu parametru α . Při malé změně parametru se rovnováha pohybuje, ale nemění svůj hyperbolický tvar. Existují tedy jen dva způsoby, jak lze podmínku hyperbolicity porušit. Buď jednoduché reálné vlastní číslo dosáhne nulové hodnoty ($\lambda_1 = 0$), nebo reálná část dvojice jednoduchých komplexně sdružených vlastních čísel dosáhne nulové hodnoty ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega_{krit}$, $\omega_{krit} > 0$) pro nějakou hodnotu parametru.

Definice 1.4.5. Bifurkace spojená s výskytem $\lambda_1 = 0$ se nazývá *fold bifurkace* nebo též *bifurkace sedlového uzlu*.

Definice 1.4.6. Bifurkace odpovídající výskytu dvojice vlastních čísel $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_{krit}$, $\omega_{krit} > 0$, se nazývá *Hopfova* nebo též *Andronovova-Hopfova bifurkace* či *bifurkace vzniku limitního cyklu*.

Poznámka. Všimněme si, že fold bifurkace může nastat, pokud má systém dimenzi $n \geq 1$, zatímco pro Hopfovou bifurkaci potřebujeme dimenzi $n \geq 2$.

Hopfova bifurkace

Uvažujme systém dvou diferenciálních rovnic závislých na jednom parametru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{aligned} \tag{1.5}$$

kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. Stacionárním bodem systému je počátek a Jacobiho matice v něm vyčíslená má tvar

$$J^*(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla jsou tedy tvaru $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$.

Zaveďme komplexní proměnnou $z = x_1 + ix_2$. Potom tato proměnná splňuje diferenciální rovnici

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2),$$

a můžeme tedy systém (1.5) vyjádřit v komplexním tvaru

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2.$$

Využitím exponenciálního tvaru komplexního čísla $z = \rho e^{i\varphi}$ získáme

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\varphi} + \rho e^{i\varphi}i\dot{\varphi},$$

díky čemuž můžeme systém (1.5) převést do polárního tvaru

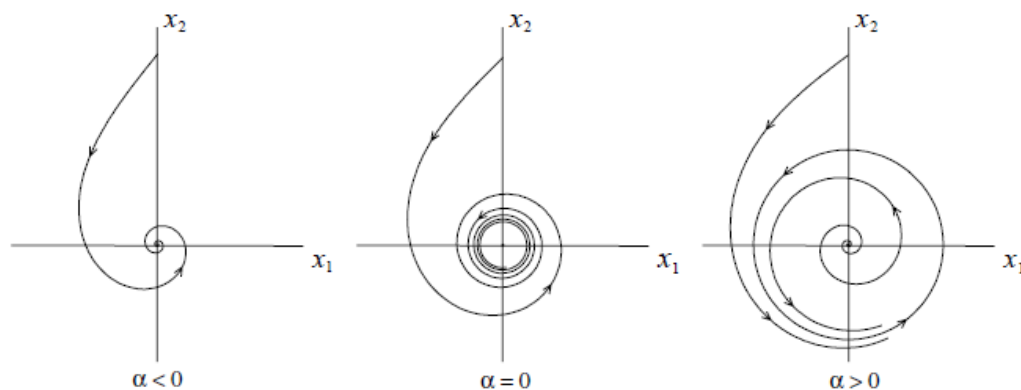
$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\alpha - \rho^2) \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Bifurkaci systému (1.5) při přechodu přes kritickou hodnotu parametru $\alpha_{krit} = 0$ je jednodušší zkoumat prostřednictvím jeho polárního tvaru (1.6), jelikož jeho rovnice lze oddělit.

První rovnice má stacionární řešení $\rho = 0$ pro všechny hodnoty parametru α . Pro $\alpha < 0$ je tento bod stabilní, pro parametr $\alpha = 0$ je stabilní, ale nelineárně, a pro $\alpha > 0$ se změnil na nestabilní. Pro kladný parametr existuje ovšem i druhé řešení $\rho(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ (záporné řešení neuvažujeme), které je stabilní.

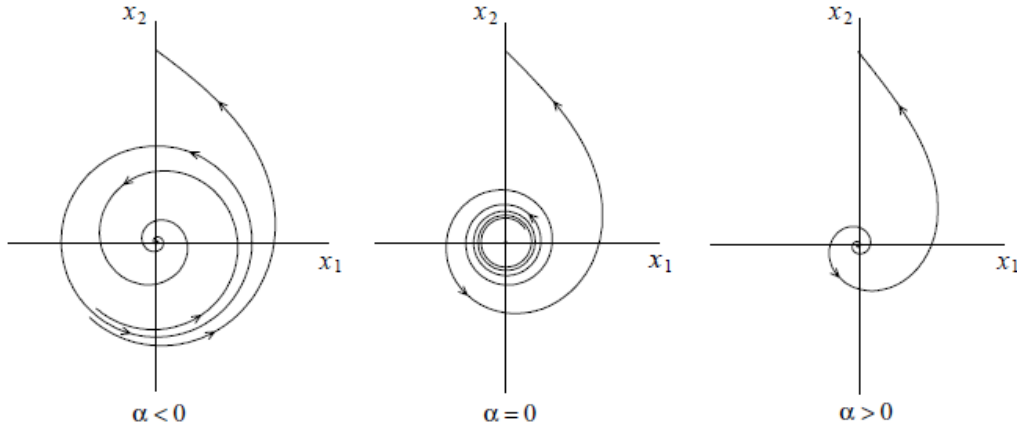
Druhá rovnice popisuje rotaci s konstantní rychlostí.

Kombinací obou rovnic (1.6) získáme bifurkační diagram původního dvourozměrného systému (1.5), který je znázorněn na obrázku 1.2. Systém má v počátku vždy rovnovážný bod, který je pro $\alpha < 0$ stabilním ohniskem a pro $\alpha > 0$ nestabilním ohniskem. Kritická hodnota parametru $\alpha = 0$ je bifurkační hodnotou Hopfovy bifurkace, při jejímž přechodu se mění kvalitativní vlastnost singulárního bodu. Tento rovnovážný bod je pro $\alpha > 0$ obklopen stabilním limitním cyklem, tedy kružnicí s poloměrem $\rho(\alpha) = \sqrt{\alpha}$. Všechny trajektorie začínající uvnitř nebo vně cyklu (kromě počátku) směřují pro $t \rightarrow \infty$ k tomuto limitnímu cyklu. Tento jev nazýváme *superkritická Hopfova bifurkace*.



Obrázek 1.2: Superkritická Hopfova bifurkace (převzato z [9, str. 87])

V případě opačného znaménka u nelineárních členů systému (1.5) lze postupovat obdobně. Získáme tedy pro $\alpha < 0$ stabilní počátek obklopený nestabilním limitním cyklem, který při přechodu přes $\alpha = 0$ zaniká. Pro $\alpha > 0$ je rovnovážný bod nestabilní (obrázek 1.3). Tento jev se nazývá *subkritická Hopfova bifurkace*.



Obrázek 1.3: Subkritická Hopfova bifurkace (převzato z [9, str. 88])

Věta 1.4.1 (Topologická normální forma Hopfovy bifurkace). Předpokládejme, že dvou-dimenzionální jednoparametrický systém

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \alpha), \quad (1.7)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f = (f_1, f_2)$ je hladká funkce, má pro α z okolí nuly rovnovážný bod $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ a Jacobiho matice $J(\alpha) = Df(\mathbf{x}, \alpha)$ má vlastní hodnoty $\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, kde $\mu(\alpha_{krit}) = 0$ a $\omega(\alpha_{krit}) = \omega_{krit} > 0$. Předpokládejme, že jsou splněny následující podmínky:

- (i) $l_1(\alpha_{krit}) \neq 0$ podmínka nedegenerovanosti,
- (ii) $\mu_\alpha(\alpha_{krit}) \neq 0$ podmínka transverzality.

Pak je systém (1.7) v okolí rovnovážného bodu lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě Hopfovy bifurkace

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \pm \varepsilon y_1 - y_2 \pm y_1(y_1^2 + y_2^2) \\ \dot{y}_2 &= y_1 \pm \varepsilon y_2 \pm y_2(y_1^2 + y_2^2). \end{aligned}$$

Důkaz. viz [9] str. 91-101 □

Poznámka. Číslo $l_1(\alpha_{krit})$ se nazývá *první Ljapunovův koeficient*. Jeho odvození není jednoduché, a proto zde není uvedeno. Nachází se například v [9, str. 91-99].

Poznámka. Znaménko $l_1(\alpha_{krit})$ určuje znaménko u nelineárních členů v normálním tvaru. V případě, že $l_1(\alpha_{krit}) < 0$, jedná se o superkritickou Hopfovu bifurkaci se stabilním limitním cyklem. V opačném případě, je-li $l_1(\alpha_{krit}) > 0$, jde o subkritickou Hopfovu bifurkaci s nestabilním limitním cyklem. Pokud je $l_1(\alpha_{krit}) = 0$ vzniká tzv. Bautinova bifurkace.

Transkritická bifurkace

Věta 1.4.2 (Topologická normální forma transkritické bifurkace). Předpokládejme, že jednodimenzionální jednoparametrický systém (rovnice)

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

kde f je hladká funkce, která má pro $\alpha = \alpha_{krit}$ nehyperbolický singulární bod $x = x^*$ ($\lambda = f_x(x^*, \alpha_{krit}) = 0$), která leží na průsečíku dvou větví rovnováh, tj. platí také $f_\alpha(x^*, \alpha_{krit}) = 0$. Předpokládejme, že jsou navíc splněny následující podmínky:

- (i) $f_{xx}(x^*, \alpha_{krit}) \neq 0$ podmínka nedegenerovanosti,
- (ii) $f_{x\alpha}(x^*, \alpha_{krit}) \neq 0$ podmínka transversality.

Potom je (1.8) v okolí rovnovážného bodu x^* lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě transkritické bifurkace

$$\dot{y} = \pm \varepsilon y \pm y^2.$$

Poznámka. Znaménko u y^2 odpovídá znaménku levé strany podmínky nedegenerovanosti. Znaménko u ε odpovídá znaménku levé strany podmínky transversality.

1.4.2 Dvouparametrické bifurkace spojitých dynamických systémů

Cusp bifurkace

Věta 1.4.3 (Topologická normální forma cusp bifurkace). Předpokládejme, že jednodimenzionální dvouparametrický systém (rovnice)

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad (1.9)$$

kde f je hladká funkce, která má pro $\alpha = \alpha_{krit}$ singulární bod $x = x^*$ a platí

$$\lambda = f_x(x^*, \alpha_{krit}) = 0, \quad f_{xx}(x^*, \alpha_{krit}) = 0.$$

Předpokládejme, že jsou navíc splněny následující podmínky:

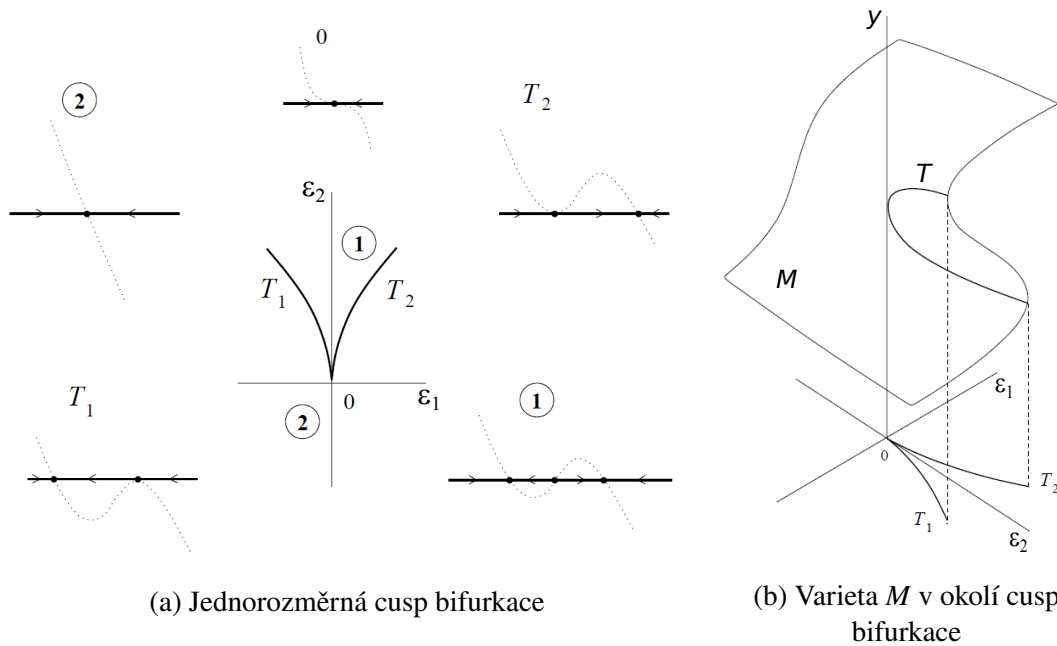
- (i) $f_{xxx}(x^*, \alpha_{krit}) \neq 0$ podmínka nedegenerovanosti,
- (ii) $f_{\alpha_1} f_{x\alpha_2} - f_{\alpha_2} f_{x\alpha_1}(x^*, \alpha_{krit}) \neq 0$ podmínka transversality.

Potom je nelineární systém (1.9) v okolí rovnovážného bodu x^* lokálně topologicky ekvivalentní systému v normální formě cusp bifurkace (bifurkace bodu vratu)

$$\dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3. \quad (1.10)$$

Důkaz. viz [9] str. 301-307

□



Obrázek 1.4: Cusp bifurkace (převzato z [9, str. 304,305] s úpravami)

Na varietě $M : \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y \pm y^3 = 0$ tedy může existovat jeden až tři rovnovážné body. Přitom nulová první derivace, tedy podmínka pro fold bifurkaci, je splněna na křivce splňující navíc $\varepsilon_2 \pm 3y^2 = 0$. Vyloučením y z těchto dvou rovnic dostaneme křivku $T : 4\varepsilon_2^3 - 27\varepsilon_1^2 = 0$ (obrázky 1.4). Tato křivka T má dvě větve T_1 a T_2 , které se střetávají v bodě vratu $(0,0)$. Tento klín rozděluje rovinu parametrů do dvou oblastí označených 1 a 2. V oblasti 1 existují tři rovnovážné body (1.10), dva stabilní a jeden nestabilní. Oproti tomu v oblasti 2 existuje pouze jeden rovnovážný bod, který je stabilní. T_1 a T_2 tedy odpovídají jednoparametrické bifurkaci typu fold.

Poznámka. Cusp bifurkace implikuje přítomnost jevu zvaného *hystereze*. Hystereze je jev, kdy dynamický systém vykazuje jakousi paměť. V deterministickém systému bez hystereze je možné předpovědět výstup pouze v závislosti na čase, v systému s hysterezí to nelze, kromě času musíme znát i „cestu“ vstupu, tedy trajektorii, kterou vstup prošel, než dosáhl určité hodnoty. Hystereze vykazuje typicky zpoždění při návratu do původního stavu.

1.4.3 Bifurkace na invariantním toru

Spojité dynamické systémy s fázovým prostorem dimenze $n > 2$ mohou obsahovat tzv. invariantní torus. My se zaměříme pouze na dvourozměrný torus \mathbb{T}^2 , který definujeme jako kartézský součin dvou kružnic $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

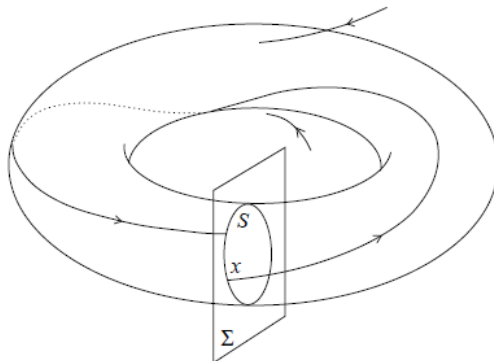
Uvažujme systém

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

kde f je dostatečně hladká funkce.

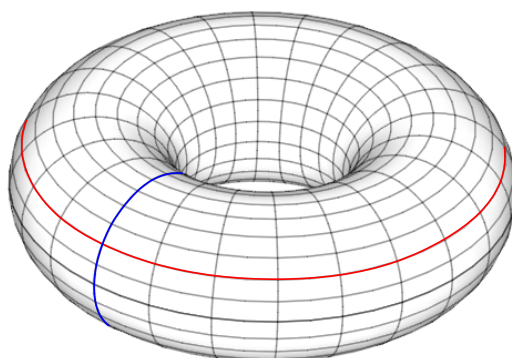
Nechť \mathbb{T}^2 je hladký invariantní 2-torus systému (1.11) pro $\alpha = 0$. Pro jednoduchost můžeme uvažovat trojrozměrný systém. Zaveďme řez Σ kodimenze 1 toru \mathbb{T}^2 (obrázek 1.5).

Průnikem $\mathbb{T}^2 \cap \Sigma$ je uzavřená křivka S , která je topologicky ekvivalentní jednotkové kružnici \mathbb{S}^1 . Uvažujme pouze případ, kdy se libovolná trajektorie začínající v bodě $\mathbf{x} \in S$ vrátí zpět na S . Potom můžeme definovat Poincarého zobrazení $P : S \rightarrow S$.



Obrázek 1.5: Poincarého řez na toru \mathbb{T}^2 (převzato z [9, str. 267])

Problémem je klasifikovat možné struktury trajektorií $P_\alpha : S \rightarrow S$ a analyzovat jejich změny v závislosti na změně parametru. Zavedeme tedy kanonické souřadnice na \mathbb{T}^2 . Parametrizujme tedy povrch toru pomocí dvou úhlových souřadnic $\psi, \varphi \pmod{2\pi}$, kde ψ představuje tzv. rovnoběžníkovou souřadnici, zatímco φ poledníkovou souřadnici na \mathbb{T}^2 (obrázek 1.6).



Obrázek 1.6: Rovnoběžníková (červeně) a poledníková (modře) souřadnice na toru \mathbb{T}^2

Využitím těchto souřadnic můžeme zobrazit torus na čtverec,

$$U = \{(\psi, \varphi) : 0 \leq \psi, \varphi \leq 2\pi\},$$

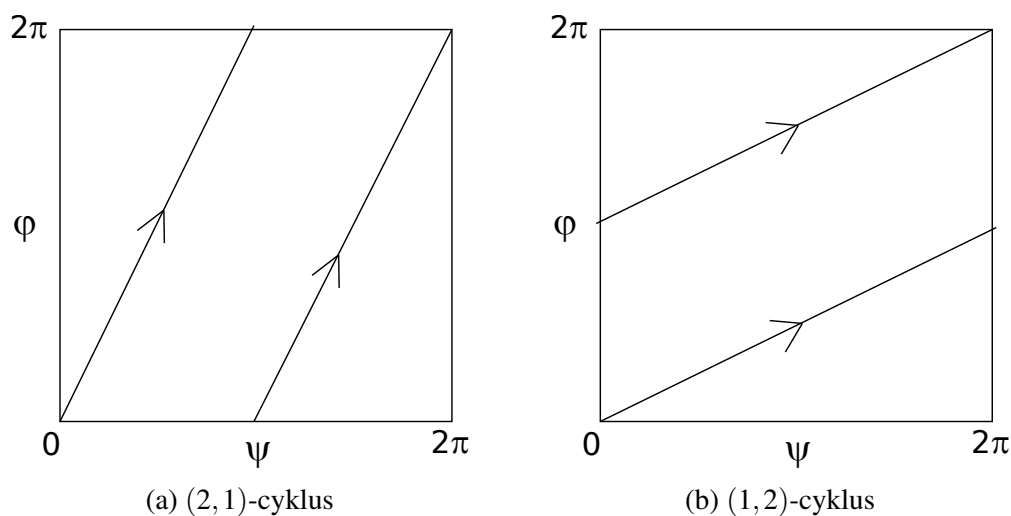
jehož protější strany jsou vzájemně identické.

Předpokládejme, že průnik $S = \mathbb{T}^2 \cap \Sigma$ je dán úhlem $\psi = 0$. Uvažujme trajektorii γ na \mathbb{T}^2 začínající v určitém bodě $(0, \varphi_0)$ na S . Vzhledem k výše uvedeným předpokladům se trajektorie γ vrátí na S v nějakém bodě $(2\pi, P(\varphi_0)) = (0, P(\varphi_0))$, kde $P : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ je hladká funkce.

Pevný bod φ_0 zobrazení $P(\varphi_0) = \varphi_0$ odpovídá cyklu na \mathbb{T}^2 , který před svým uzavřením udělá jeden oběh ve směru ψ a p oběhů ve směru φ (obrázek 1.7a). Cyklus periody q ,

$$\{\varphi_0, P(\varphi_0), P^2(\varphi_0), \dots, P^q(\varphi_0) = \varphi_0\},$$

odpovídá cyklu na \mathbb{T}^2 , který před svým uzavřením udělá q oběhů ve směru ψ (obrázek 1.7b). Takový cyklus nazýváme (p, q) -cyklem.



Obrázek 1.7: Příklady (p, q) -cyklů na toru \mathbb{T}^2

Lemma 1.4.4. Číslo rotace zobrazení $P : S \rightarrow S$ je racionální, $\rho = \frac{p}{q}$ právě tehdy, když P má (p, q) -periodickou trajektorii.

Důkaz. viz [9] str. 270 □

Věta 1.4.5. Hladký dynamický systém $P : S \rightarrow S$ je strukturálně stabilní právě tehdy, když je jeho číslo rotace racionální a všechny periodické trajektorie jsou hyperbolické.

Důkaz. viz [9] str. 271 □

Poznámka. Bifurkace z kvaziperiodické trajektorie do periodické trajektorie se nazývá *fázový závěs* neboli *phase locking*. V případě periodicky buzených systémů také jako tzv. *frequency locking*. Více v knize [9, str. 271-275].

Kapitola 2

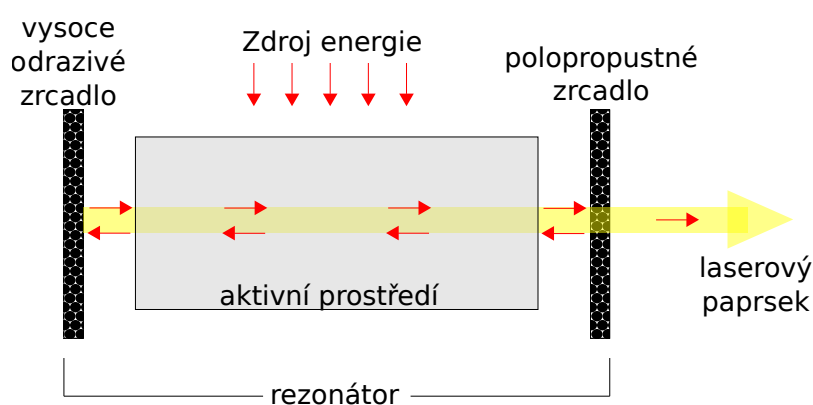
Fyzikální popis laseru

V této kapitole se zaměříme na vysvětlení pojmu laser a popíšeme, jak vypadá, seznámíme se s principem jeho fungování, uvedeme si základní vlastnosti laserového paprsku, shrneme historii vývoje a uvedeme několik příkladů využití laserů. Jako zdroje pro sepsání této části sloužily knihy [13], [12], [4], [5].

2.1 Popis laseru

Pojem laser je zkratkou vytvořenou z prvních písmen názvu Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, česky zesílení světla stimulovanou emisí záření. Jedná se tedy o optický zdroj elektromagnetického záření (světla).

Ve své nejjednodušší podobě se laser skládá ze zdroje energie, aktivního prostředí neboli zesilujícího média (zde dochází k stimulované emisi) a z rezonátoru, který je tvořen dvěma zrcadly, z nichž jedno je zcela odrazivé a druhé částečně propustné. Schéma takového laseru je znázorněno na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Schéma laseru

Aktivní prostředí laseru tvoří látka obsahující oddělené kvantové energetické hladiny elektronů. Podle typu látky, která tvoří aktivního prostředí, rozdělujeme lasery na plynové, pevnolátkové, kapalinové (organická barviva), polovodičové (diodové) atd.

2.2 Vlastnosti laserového světla

Laserové záření se od obyčejného světla značně liší. Tyto rozdíly jsou způsobeny právě stimulovanou emisí záření, která vytváří pořád stejné fotony. Laserové světlo je tedy

1. monochromatické (jednobarevné), tj. fotony kmitají pouze na jediné frekvenci,
2. koherentní, tj. generované fotony mají vzájemnou souvislost fáze a amplitudy vlnění vycházejících buď ze dvou různých míst na povrchu zářícího tělesa (koherence prostorová) nebo vlnění vycházejícího z jednoho místa, avšak s určitým časovým odstupem (koherence časová),
3. nízko rozbíhavé, tj. laserový svazek je úzký (má malý rozptyl) i na velké vzdálenosti.

Na základě těchto vlastností laseru (vysoká koherence a malý rozptyl) mohou být některé typy laseru velmi nebezpečné pro lidské oko. Neboť paprsek může být soustředěn pouze do extrémně malého bodu na sítnici, což vede k bodovému přehřátí sítnice, které způsobuje trvalé poškození zraku.

2.3 Princip laseru

Laser využívá proces stimulované emise a optickou zpětnou vazbu (zajištěnou zrcadly), což vede ke zvyšování nebo zesilování světelných signálů poté, co byly tyto signály generovány jinými prostředky.

Jelikož tato kombinace procesů způsobuje vysoký vzrůst stimulovaně emitovaných fotonů, fotony vyzářené procesem spontánní emise způsobují jen zbytkový šum.

2.3.1 Stimulovaná emise

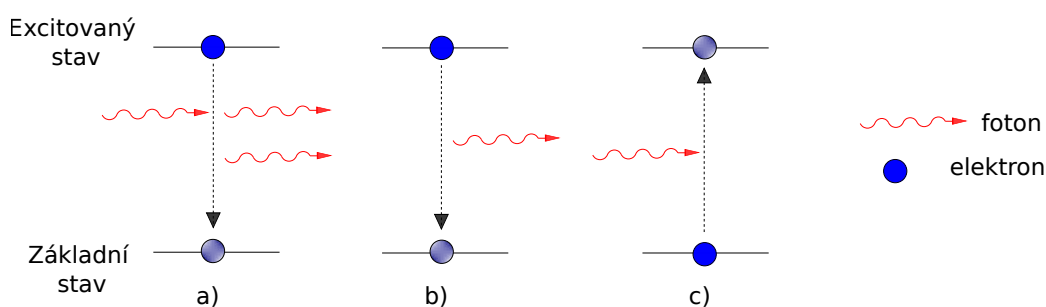
Stimulovaná (indukovaná) emise je proces, při kterém může přicházející foton stimulovat atom k emisi dalšího fotonu. Při tomto ději poklesne excitovaný elektron na nižší energetickou hladinu s uvolněním nadbytečné energie v podobě nového fotonu, který má stejné charakteristiky (frekvenci, polarizaci a směr šíření) s fotonem, který tento proces způsobil (Obrázek 2.2a).

Opačným jevem je atomová absorpce. Při tomto procesu interakce fotonu s elektronem způsobí absorpci fotonu elektronem a následně jeho přechod z nižší energetické hladiny na vyšší (Obrázek 2.2c).

2.3.2 Spontánní emise

Spontánní emise je proces, při kterém excitovaný elektron přechází do nižšího energetického stavu s uvolněním určitého množství energie ve formě fotonu (Obrázek 2.2b). Vyzářený foton má energii, která se rovná rozdílu energetických hladin, a jeho směr, fáze a polarizace jsou náhodné. K tomuto procesu dochází, jelikož elektron je v excitovaném stavu nestabilní a snaží se zaujmout stav s co nejnižší energií.

Na rozdíl od stimulované emise přechází elektron z excitovaného do základního stavu samovolně, tedy bez působení vnějšího elektromagnetického pole.



Obrázek 2.2: a) Stimulovaná emise, b) Spontánní emise, c) Atomová absorpce

2.3.3 Popis funkce laseru

Zdrojem energie je do aktivního média dodávána („pumpována“) energie. Ta energeticky vybudí elektrony aktivního prostředí ze základní energetické hladiny do vyšší energetické hladiny a dojde tak k tzv. excitaci. Takto je do vyšších energetických stavů vybudena většina elektronů aktivního prostředí a vzniká tak tzv. inverzní populace.

Při zpětném přestupu elektronu na nižší energetickou hladinu dojde k vyzáření kvanta energie ve formě fotonů. Tyto fotony následně interagují s dalšími elektrony inverzní populace, čímž spouštějí stimulovanou emisi fotonů i u nich.

Díky umístění aktivní části laseru do rezonátoru, dochází k odrazu paprsku fotonů a jeho opětovnému průchodu prostředím. To dále podporuje stimulovanou emisi, a tím dochází k exponenciálnímu zesilování toku fotonů. Výsledný světelný svazek pak opouští rezonátor průchodem skrze výstupní polopropustné zrcadlo.

2.3.4 Možnosti modelování laseru

Vývoj chování laseru můžeme zkoumat dvěma způsoby. Buďto se můžeme zaměřit na množství fotonů v laseru a analyzovat vývoj této populace v čase (populační model), nebo se můžeme laserem zabývat z fyzikálního hlediska a zkoumat tak v čase změny jeho elektrického pole. Na obě tyto možnosti se podíváme v dalších kapitolách textu.

2.4 Stručná historie a příklady využití laseru

V padesátých letech minulého století byl položen základ nového oboru, kvantové elektronice, a začala tak být na principu stimulované emise záření realizována zařízení generující a zesilující elektromagnetické záření.

V roce 1953 tak byl Charlesem Townesem sestaven předchůdce laseru nazvaný maser (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation = zesílení mikrovln stimulovanou emisí záření), který se používal pro komunikaci.

První laser byl vyroben Theodorem Maimanem v USA až v roce 1960 i navzdory tomu, že Albert Einstein fyzikálně popsal princip laseru již v roce 1917. Jako aktivní prostředí použil rubínový krystal ve tvaru tyčinky a zdrojem energie byly plynové výbojky. Bylo pozorováno, že po zapálení výbojky vychází z konce tyče intenzivní červený paprsek.

První plynový laser vyvinuli v roce 1961 A. Javan, W. Bennett a D. Harriott, přičemž použili směs plynů helia a neonu.

Dalšími významnými objevy byly například vyvinutí polovodičového laseru R. Hallem z roku 1962 nebo infračerveného laseru na bázi oxidu uhličitého C. K. N. Patelem z roku 1963. Ten je dnes jedním z nejúčinnějších a nejvýkonnějších laserů.

Od úplně prvního laseru se vývoj posunul mnohem dál a byla vytvořena řada vylepšených a specializovaných typů laserů optimalizovaných pro různé cíle jako např. lasery s maximálním průměrným výstupním výkonem, maximální energetickou účinností nebo minimálními náklady. Tento výzkum pokračuje dodnes.

Velký zájem o vývoj laseru je zapříčiněn převážně jejich širokým využitím v různých oblastech, jako je průmysl (řezání, svařování, ...), medicína (stomatologie, chirurgie, gynekologie), vojenství (označování cílu, navádění raket, ...), elektronika (tiskárny, ...), atd.

Kapitola 3

Populační model laseru

V této části se zaměříme na populační model laseru založený na základní fyzice a ukážeme si na něm existenci prahové hodnoty pro působení laseru a s ní spojený vznik bifurkace. Zdrojem tohoto modelu je [14].

Tento velmi jednoduchý model popisuje rychlost změny velikosti populace fotonů v laserovém poli v čase danou rozdílem zisku a ztráty laseru. Tuto změnu popisuje rovnice

$$\frac{dn(t)}{dt} = Gn(t)N(t) - vn(t),$$

kde první člen určuje proces stimulované emise, při kterém fotony stimulují excitované atomy k přechodu do základních stavů a vyzáření dalších fotonů. Tento proces závisí na počtu fotonů $n(t)$ v laserovém poli a na počtu $N(t)$ excitovaných atomů. Parametrem $G > 0$ je označen koeficient zisku (zesílení) laseru, tedy míra schopnosti laserového média zvyšovat optický výkon.

Druhý člen, člen ztráty, je dán únikem fotonů skrz konce laseru, který závisí na rychlosti fotonů ($v > 0$). Tato rychlost je rovna rychlosti světla, která se mění v závislosti na prostředí, ve kterém se fotony šíří.

Dále díky stimulované emisi můžeme zapsat vztah mezi počtem excitovaných atomů a počtem fotonů v laseru rovnicí

$$N(t) = N_0 - \alpha n(t),$$

kde N_0 je počet excitovaných atomů při nepůsobení laseru a $\alpha > 0$ je rychlost, kterou excitované atomy klesají zpět do základních stavů. Průměrná hodnota této rychlosti je dána a lze ji vypočítat např. pro atom vodíku na základě Bohrova modelu [1, str. 139-154]. Vzorec pro výpočet rychlosti elektronu na n -té hladině se ale omezuje pouze pro atom vodíku a ionty s jedním elektronem, a proto jej nelze použít obecně. Nicméně na modelu a existenci prahové hodnoty se principiálně nic nezmění, pokud je taková průměrná hodnota dána jakkoli.

Jednoduchou úpravou tedy dostaneme rovnici

$$\frac{dn(t)}{dt} = (GN_0 - v)n(t) - (\alpha G)n(t)^2. \quad (3.1)$$

Pokud pravou stranu rovnice (3.1) položíme rovnu nule, získáme její stacionární body $S_1^* = 0$ a $S_2^* = \frac{GN_0 - v}{G\alpha}$.

Dále po zderivování pravé strany rovnice (3.1) dostaneme

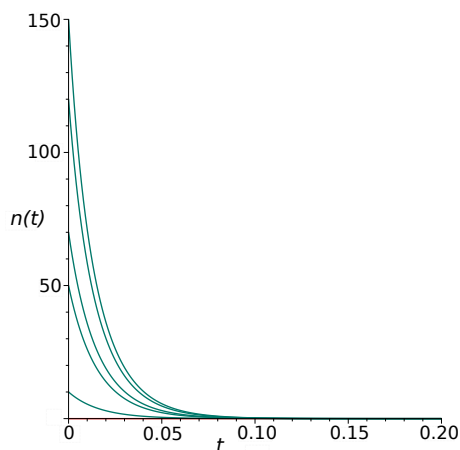
$$f'(n) = GN_0 - \nu - 2(\alpha G)n$$

a po dosazení stacionárních bodů získáme

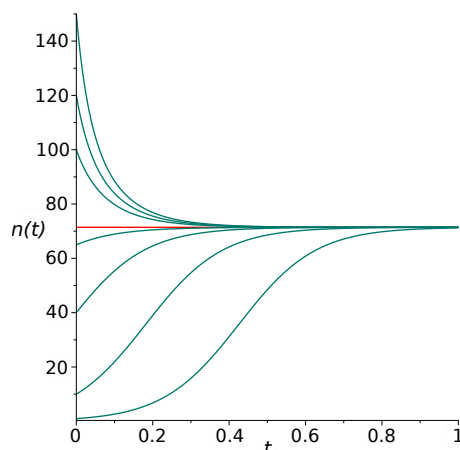
$$f'(0) = GN_0 - \nu, \quad f'\left(\frac{GN_0 - \nu}{G\alpha}\right) = \nu - GN_0,$$

díky čemuž můžeme rozhodnout o stabilitě rovnovážných bodů. Pro náš model je zajímavé zkoumat chování těchto bodů pouze v prvním kvadrantu, jelikož počet fotonů v laseru a přírůstek času jsou nezáporné veličiny.

Pokud je $N_0 < \frac{\nu}{G}$, zůstane v prvním kvadrantu pouze jeden stacionární bod $S_1^* = 0$. Jelikož hodnota $f'(0)$ je záporná, tak $S_1^* = 0$ je stabilní a všechna řešení 3.1 směřují k tomuto bodu, což můžeme vidět na obrázku 3.1.



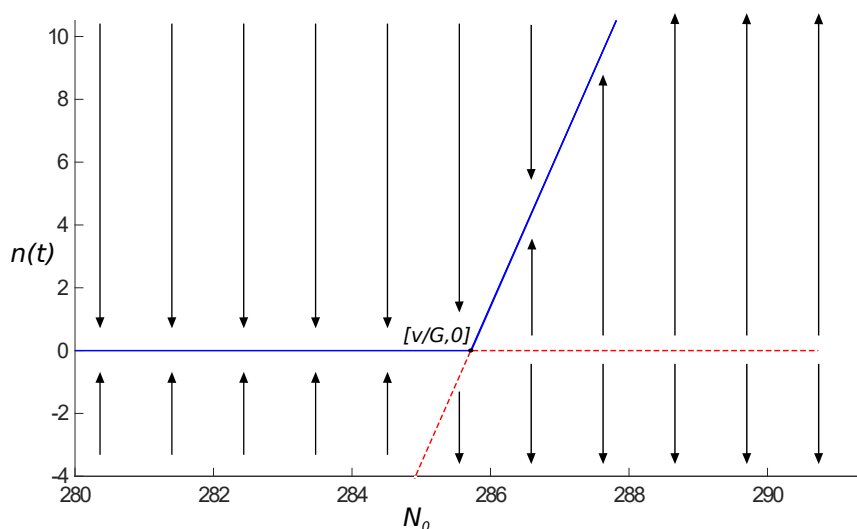
Obrázek 3.1: Konvergence řešení rovnice (3.1) ke stabilnímu stacionárnímu bodu S_1^* pro parametry $\nu = 200$, $G = 0,7$, $\alpha = 0,2$ a $N_0 = 200$



Obrázek 3.2: Konvergence řešení rovnice (3.1) ke stacionárnímu bodu S_2^* (červeně) pro parametry $\nu = 200$, $G = 0,7$, $\alpha = 0,2$ a $N_0 = 300$

Pro hodnotu parametru $N_0 > \frac{\nu}{G}$ existují v prvním kvadrantu oba stacionární body. Po určení znamének derivací v obou bodech zjistíme, že $S_1^* = 0$ ztratil stabilitu a bod $S_2^* = \frac{GN_0 - \nu}{G\alpha}$ se stal stabilním bodem a všechna řešení k němu budou směřovat. Tuto skutečnost znázorňuje obrázek 3.2.

Z této analýzy dostáváme, že $N_0 = \frac{\nu}{G}$ je prahovou hodnotou, pod kterou populace fotonů vyhyne a laser tedy nebude funkční. Oproti tomu, pokud se dostaneme nad tuto hodnotu, populace nevyhyne a bude tak v laseru docházet k spontánní emisi záření. To jinými slovy znamená, že v této hodnotě parametru N_0 dochází k transkritické bifurkaci, která je ilustrována na obrázku 3.3.



Obrázek 3.3: Bifurkační diagram pro rovnici (3.1) s hodnotami parametrů $v = 200$, $G = 0,7$, $\alpha = 0,2$. Na vertikální ose je počet fotonů v laserovém poli a na horizontální ose počet excitovaných atomů při nepůsobení laseru. Prahová hodnota je pro zvolený konkrétní případ $N_0 = \frac{v}{G} \approx 285,71$.

Nyní zbývá ověřit, zda jsou splněny všechny podmínky věty 1.4.2 a jedná-li se skutečně o transkritickou bifurkaci.

$$\begin{aligned}
 f'_n(n^*, N_0^*) = GN_0^* - v - 2G\alpha n^* &\implies f'_n(0, \frac{v}{G}) = 0 \\
 f'_{N_0}(n^*, N_0^*) = Gn^* &\implies f'_{N_0}(0, \frac{v}{G}) = 0 \\
 f''_{nn}(n^*, N_0^*) = -2G\alpha &\implies f''_{nn}(0, \frac{v}{G}) = -2G\alpha < 0 \\
 f''_{nN_0}(n^*, N_0^*) = G &\implies f''_{nN_0}(0, \frac{v}{G}) = G > 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Na základě platnosti podmínek (3.2) můžeme konstatovat, že věta 1.4.2 platí a rovnice (3.1) je tedy v okolí bodu $n^* = 0$ topologicky ekvivalentní systému v normální formě transkritické bifurkace $x' = \epsilon x - x^2$ a při navýšení N_0 přes prahovou hodnotu jde skutečně o přechod na novou stabilní větev rovnováhy $n(t) = \frac{GN_0 - v}{G\alpha}$.

Kapitola 4

Řídící a odezvoový laser

Druhý model, kterým se budeme zabývat popisuje změnu elektrického pole a zisku v čase pro laser typu Nd:YAG (pevnolátkový typ laseru, jehož aktivní prostředí tvoří krystal yttrio-hlinitého granátu s příměsí iontů neodymu, pro který se obvykle používá zkrácený zápis Nd:YAG [12, str. 541]). Soustava rovnic, která popisuje tento model, pochází z článku [16], ve kterém je popsán vztah mezi dvěma spřaženými lasery, kde vazba mezi nimi vznikla příčným překrytím jejich elektrických polí. My se nejprve zaměříme na model pro jeden (j -tý) laser a až později se budeme zabývat situací, kdy jsou lasery spřaženy.

4.1 Řídící laser

Chování j -tého laseru můžeme popsat soustavou

$$\begin{aligned}\frac{dE_j}{dT^*} &= \tau_{c,j}^{-1}[(G_j - \alpha_j)E_j + \mu KE'_j] + i\delta_j E_j + \sqrt{\varepsilon_j} \xi_j(T^*) \\ \frac{dG_j}{dT^*} &= \tau_{f,j}^{-1}(p_j - G_j - G_j |E_j|^2),\end{aligned}\tag{4.1}$$

kde proměnná E_j popisuje komplexní elektrické pole j -tého laseru, G_j zisk j -tého laseru, $\tau_{c,j}$ dobu oběhu dutiny, $\tau_{f,j}$ dobu fluorescence laserových iontů, p_j koeficient čerpání, α_j koeficient ztráty dutiny, δ_j je rozladění j -tého laseru od nějakého běžného stavu dutiny, K komplexní vazebný koeficient, kde KE'_j představuje stupeň překrytí dvou laserů a μ je koeficient narušení symetrie. $\sqrt{\varepsilon_j} \xi_j(T^*)$ je člen šumu, který představuje spontánní emisi. V této práci budeme předpokládat $\varepsilon_j = 0$, $E'_j = E_j$, $\mu = 0$ a K pouze reálné.

My se nyní podíváme na chování laseru s indexem $j = 1$, který budeme nazývat řídicím laserem. Za výše zmíněných předpokladů se nám model změní do tvaru

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dT^*} &= \tau_{c,1}^{-1}[(G_1 - \alpha_1)E_1] + i\delta_1 E_1 \\ \frac{dG_1}{dT^*} &= \tau_{f,1}^{-1}(p_1 - G_1 - G_1 |E_1|^2).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Pro další analýzy chování dvou spřažených laserů je pro nás klíčové znát dlouhodobé chování tohoto laseru. Toto chování popisuje řešení soustavy (4.2), které budeme hledat ve

tvary $E_1 = ce^{i(\phi_0 + \delta_1 T^*)}$. Zderivováním tohoto obecného tvaru řešení dostaneme rovnost

$$\frac{dE_1}{dT^*} = ce^{i(\phi_0 + \delta_1 T^*)} i\delta_1,$$

kteřou položíme rovnu první rovnici ze soustavy (4.2) s dosazeným obecným řešením E_1 .

$$ce^{i(\phi_0 + \delta_1 T^*)} i\delta_1 = \left(\frac{G_1 - \alpha_1}{\tau_{c,1}} + i\delta_1 \right) ce^{i(\phi_0 + \delta_1 T^*)} \Leftrightarrow \frac{G_1 - \alpha_1}{\tau_{c,1}} = 0$$

Z tohoto vidíme, že rovnovážný stav zisku laseru nastává v hodnotě $G_1 = \alpha_1$.

Položíme-li rovnu nule druhou rovnici soustavy (4.2) s dosazeným obecným řešením pro E_1 a provedeme-li pár úprav, získáme rovnici

$$p_1 - \alpha_1 - \alpha_1 c^2 = 0,$$

ze které můžeme hned určit tvar konstanty c , jako $c = \sqrt{\frac{p_1 - \alpha_1}{\alpha_1}}$.

Potom jestliže platí $p_1 > \alpha_1$, tedy za předpokladu, že se nacházíme nad prahovou hodnotou existence laseru, bude dlouhodobý stav elektrického pole laseru dán rovnicí $E_1 = \sqrt{\frac{p_1}{\alpha_1} - 1} e^{i(\phi_0 + \delta_1 T^*)}$, kde ϕ_0 je libovolná konstanta a zisk bude mít konstantní hodnotu $G_1 = \alpha_1$. Tyto hodnoty E_1 a G_1 budeme využívat po zbytek analýzy.

4.2 Řídící a odezvnový laser

Zajímavé je ovšem studovat chování více spřažených laserů. My se proto zaměříme na chování dvou laserů. Přidáme tedy k rovnicím pro řídicí laser (4.1) další rovnice, které budou popisovat vývoj chování druhého laseru (převzato z [16]) a získáme tvar

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dT^*} &= \tau_{c,1}^{-1} [(G_1 - \alpha_1)E_1 + \mu KE_2'] + i\delta_1 E_1 + \sqrt{\varepsilon_1} \xi_1(T^*) \\ \frac{dG_1}{dT^*} &= \tau_{f,1}^{-1} (p_1 - G_1 - G_1 |E_1|^2) \\ \frac{dE_2}{dT^*} &= \tau_{c,2}^{-1} [(G_2 - \alpha_2)E_2 + KE_1'] + i\delta_2 E_2 + \sqrt{\varepsilon_2} \xi_2(T^*) \\ \frac{dG_2}{dT^*} &= \tau_{f,2}^{-1} (p_2 - G_2 - G_2 |E_2|^2). \end{aligned}$$

Na základě předpokladů z předchozí části ($\varepsilon_j = 0$, $E_j' = E_j$, K pouze reálné a $\mu = 0$) se nám model zjednoduší do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dT^*} &= \tau_{c,1}^{-1} [(G_1 - \alpha_1)E_1] + i\delta_1 E_1 \\ \frac{dG_1}{dT^*} &= \tau_{f,1}^{-1} (p_1 - G_1 - G_1 |E_1|^2) \\ \frac{dE_2}{dT^*} &= \tau_{c,2}^{-1} [(G_2 - \alpha_2)E_2 + KE_1] + i\delta_2 E_2 \\ \frac{dG_2}{dT^*} &= \tau_{f,2}^{-1} (p_2 - G_2 - G_2 |E_2|^2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Podíváme-li se na rovnice pro první laser, vidíme, že nijak nezávisí na druhém laseru a můžeme ho tedy označit jako řídicí laser. Druhý laser nazveme odezvoový.

Pro hodnoty parametrů laseru typu Nd:YAG platí, že $\tau_{f,j}$ je řádu 10^{-4} s a $\tau_{c,j}$ je řádu 10^{-10} s. Dostáváme tedy dvě naprosto rozdílná časová měřítka. Dále p_j i α_j jsou rovněž pozitivní a jsou řádu 10^{-2} a jejich poměr $\frac{p_j}{\alpha_j}$ je typicky v $O(1)$.

Z tohoto důvodu zavedeme substituce (převzaté z [16]), díky kterým dostaneme bezrozměrné veličiny. Těmito substitucemi jsou:

$$\sigma = \frac{\tau_{c,2}}{\alpha_2 \tau_{f,2}}, \quad B = \frac{p_2}{\alpha_2}, \quad t = \frac{\alpha_2 T^*}{\tau_{c,2}}, \quad F_2 = \frac{G_2}{\alpha_2},$$

kde σ je parametr tuhosti (10^{-4}), B je síla čerpání odezvového laseru, t reprezentuje čas a F_2 zisk odezvového laseru.

Dále definujeme $X_2 \geq 0$ amplitudu komplexního elektrického pole E_2 jako $E_2 = X_2 e^{i\Phi_2}$ a fázový rozdíl $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$, kde $\Phi_1 = \Phi_0 + \delta_1 T^*$ je fáze řídicího laseru. Díky výše zavedené substituci pro čas bude pro dostatečně velké t platit $\Phi \sim \Phi_2 - \Phi_0 - \frac{\delta_1 \tau_{c,2}}{\alpha_2} t$.

Aplikováním těchto substitucí na rovnice pro odezvoový laser ze soustavy (4.3) a předpokladem $X_2 > 0$ získáme soustavu

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} + X_2 i \frac{d\Phi_2}{dt} &= (F_2 - 1)X_2 + \frac{K}{\alpha_2} \sqrt{\left(\frac{p_1}{\alpha_1} - 1\right)} e^{i(\phi_0 + \delta_1 \frac{\tau_{c,2}}{\alpha_2} t)} e^{-i\Phi_2} + i \delta_2 X_2 \frac{\tau_{c,2}}{\alpha_2} \\ \frac{dF_2}{dt} &= \sigma(B - F_2 - F_2 X_2^2). \end{aligned}$$

Využitím Eulerova vzorce $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ na první rovnici a rozdělením členů, podle toho, zda tvoří reálné či imaginární části, získáme soustavu tří rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} &= (F_2 - 1)X_2 + \frac{K}{\alpha_2} \sqrt{\left(\frac{p_1}{\alpha_1} - 1\right)} \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \\ \frac{d\Phi_2}{dt} &= \frac{d\Phi}{dt} + \frac{\delta_1 \tau_{c,2}}{\alpha_2} = \frac{K}{\alpha_2 X_2} \sqrt{\left(\frac{p_1}{\alpha_1} - 1\right)} \sin(\Phi_1 - \Phi_2) + \delta_2 \frac{\tau_{c,2}}{\alpha_2} \\ \frac{dF_2}{dt} &= \sigma(B - F_2 - F_2 X_2^2). \end{aligned}$$

Zavedeme-li další substituce $\Delta = \frac{(\delta_2 - \delta_1) \tau_{c,2}}{\alpha_2}$ a $k = \frac{K}{\alpha_2} \sqrt{\frac{p_1}{\alpha_1} - 1}$, kde Δ je bezrozměrná míra frekvenčního rozladění dvou laserů a k je bezrozměrná síla vazby, obdržíme soustavu ve tvaru (4.4), ze kterého budeme po zbytek kapitoly vycházet.

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} &= (F_2 - 1)X_2 + k \cos \Phi \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \Delta - \frac{k}{X_2} \sin \Phi \\ \frac{dF_2}{dt} &= \sigma(B - F_2 - F_2 X_2^2) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nyní se podíváme, jak různé hodnoty parametrů k a Δ ovlivní chování odezvového laseru.

4.2.1 Nezávislé lasery

V této části se budeme zabývat případem, kdy mezi dvěma lasery není žádná vazba. Chování odezvvého laseru tedy nebude nijak záviset na řídicím laseru.

Dosažením nulové hodnoty parametru určující sílu vazby, $k = 0$, do soustavy (4.4) získáme novou soustavu

$$\begin{aligned}\frac{dX_2}{dt} &= (F_2 - 1)X_2 \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \Delta \\ \frac{dF_2}{dt} &= \sigma(B - F_2 - F_2X_2^2).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Stacionárními body této soustavy jsou body $S_1^* = [0, B]$ a $S_2^* = [\sqrt{B-1}, 1]$.

Abychom mohli posoudit chování trajektorií v okolí těchto bodů, potřebujeme znát tvar Jacobiho matice soustavy (4.5). Po vypočtení všech parciálních derivací dostaneme matici

$$J(X_2, F_2) = \begin{pmatrix} F_2 - 1 & X_2 \\ -2\sigma F_2 X_2 & -\sigma(1 + X_2^2) \end{pmatrix}.$$

Nejprve se zaměříme na bod S_1^* . Jacobiho matice v tomto bodě má tvar

$$J(0, B) = \begin{pmatrix} B - 1 & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}.$$

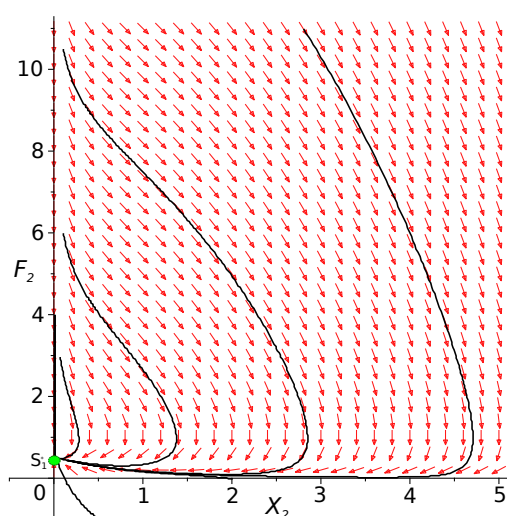
Po určení hodnoty determinantu matice $|J(0, B)| = -\sigma(B - 1)$, zjistíme, že jeho znaménko závisí na parametru B . Pokud je hodnota parametru $B < 1$, tedy $p_2 < \alpha_2$, bude mít determinant kladné znaménko. Dále stopa matice $\text{tr} J(0, B) = B - 1 - \sigma$ je pro $B < 1$ záporná a platí $\text{tr}^2 J(0, B) - 4 \det J(0, B) > 0$ a proto se bude jednat o stabilní uzel. Pokud ale parametr B překročí hodnotu jedna, determinant matice $J(0, B)$ změní znaménko na kladné a ze stabilního uzlu se stacionární bod stane sedlem. Toto chování je znázorněno na obrázcích 4.1 a 4.2.

Charakter druhého stacionárního bodu, zjistíme rovněž z Jacobiho matice

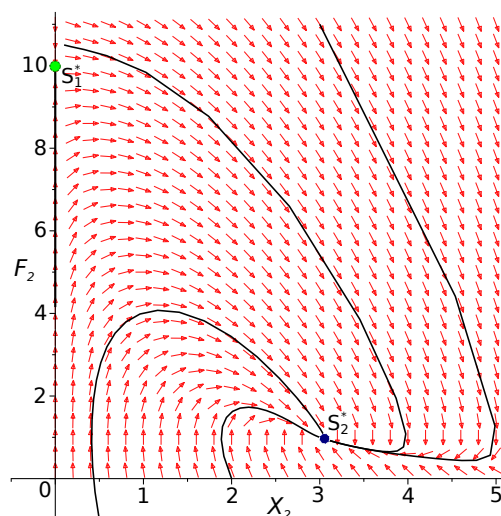
$$J(\sqrt{B-1}, 1) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{B-1} \\ -2\sigma\sqrt{B-1} & -\sigma B \end{pmatrix}.$$

Determinant této matice je roven $|J(\sqrt{B-1}, 1)| = 2\sigma(B - 1)$ a stopa matice má hodnotu $\text{tr} J(\sqrt{B-1}, 1) = -\sigma B$. Jelikož tento bod může existovat jen pro hodnotu parametru $B \geq 1$, bude determinant vždy nezáporný a stopa nekladná. Pokud ale vezmeme v úvahu pouze hodnotu parametru $B > 1$, bude znaménko determinantu kladné, stopa záporná a stacionární bod $S_2^* = [\sqrt{B-1}, 1]$ bude stabilním uzlem. Všechna řešení soustavy (4.5) tudíž budou konvergovat k tomuto bodu (viz obrázek 4.2).

Právě provedenou analýzou jsme opět dokázali existenci prahové hodnoty laseru, neboli existenci bodu, ve kterém dochází k transkritické bifurkaci (viz Kapitola 3). K tomuto zlomu dochází při hodnotě parametru $B = 1$, tedy když $p_2 = \alpha_2$.



Obrázek 4.1: Konvergence řešení soustavy (4.5) k bodu S_1^* (zeleně) pro hodnoty parametrů $\sigma = 2$, $B = 0.5$.



Obrázek 4.2: Konvergence řešení soustavy (4.5) k bodu S_2^* (modře) pro hodnoty parametrů $\sigma = 2$, $B = 10$.

4.2.2 Závislé lasery bez rozladění

V této části se budeme zabývat případem, kdy mezi dvěma lasery vznikla vazba, ale nedošlo k rozladění frekvencí ani fází těchto laserů, tedy případem $k \neq 0$, $\Delta = 0$ a $\Phi = 0$.

Dosazením těchto hodnot do soustavy (4.4) získáme

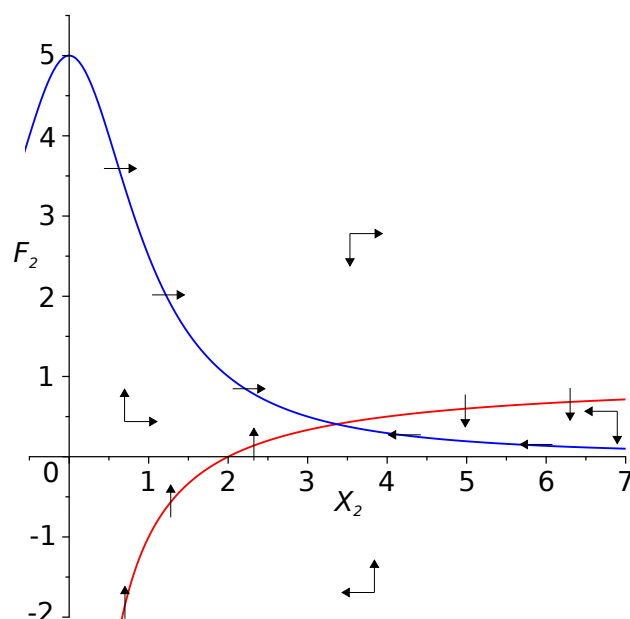
$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} &= (F_2 - 1)X_2 + k \\ \frac{dF_2}{dt} &= \sigma(B - F_2 - F_2X_2^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Stacionární řešení této soustavy nalezneme jako průsečíky nulklin. Ty mají tvar

$$\begin{aligned} (F_2 - 1)X_2 + k &= 0 \quad \rightarrow \quad F_2 = 1 - \frac{k}{X_2} \\ \sigma(B - F_2 - F_2X_2^2) &= 0 \quad \rightarrow \quad F_2 = \frac{B}{1 + X_2^2}. \end{aligned}$$

Na obrázku [4.3] můžeme vidět jejich grafické znázornění.

Jelikož X_2 -nulklina je lineární lomenná funkce se záporným znaménkem, jde o rostoucí funkci s asymptotou $F_2 = 1$, která protíná vodorovnou osu v bodě $X_2 = k$. Oproti tomu F_2 -nulklina je v prvním kvadrantu klesající funkce s maximem $F_2 = B$ a asymptotou $F_2 = 0$. Z těchto důvodů a díky známé Bolzanově větě budou mít tyto nulkliny v prvním kvadrantu jeden průsečík, který bude pro X_2 ležet v intervalu (k, ∞) a pro F_2 v intervalu $(0, \min(B, 1))$. Tento průsečík tedy bude přitahujícím rovnovážným bodem.



Obrázek 4.3: X_2 -nulklina (červeně) a F_2 -nulklina (modře) systému (4.6) pro zvolené hodnoty parametrů $k = 2$ a $B = 5$.

Nyní nám ještě zbývá zjistit, zda v okolí tohoto bodu nevznikají cykly. Tuto skutečnost ověříme pomocí Bendixsonova kritéria (1.3.7). Označíme $f = \frac{dX_2}{dt} = (F_2 - 1)X_2 + k$ a $g = \frac{dF_2}{dt} = \sigma(B - F_2 - F_2X_2^2)$, potom dostaneme výraz

$$\frac{df}{dX_2} + \frac{dg}{dF_2} = F_2 - 1 - \sigma(1 + X_2^2). \quad (4.7)$$

Jelikož pevný bod leží pro F_2 na intervalu $(0, \min(B, 1))$, je výraz (4.7) záporný, a v okolí tohoto bodu tedy neexistuje žádný cyklus systému a rovnovážný bod je stabilní. Všechna řešení systému (4.6) tedy konvergují k tomuto bodu, což znamená, že druhý laser bude v případě nulového rozladění fungovat právě tehdy, když parametr B bude nenulový.

4.2.3 Závislé lasery s rozladěním bez buzení odezvového laseru

Případ laserů s vazbou a rozladěním si dále rozebereme na základě hodnot parametru B . První se podíváme, jaké bude chování odezvového laseru za předpokladu, že mu nebude dodávána žádná energie, tedy když $B = 0$. Soustava (4.4) se po dosazení této hodnoty změní na tvar

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} &= (F_2 - 1)X_2 + k \cos \Phi \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \Delta - \frac{k}{X_2} \sin \Phi \\ \frac{dF_2}{dt} &= -\sigma F_2(1 + X_2^2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Takto upravená soustava má pouze jeden rovnovážný bod $S^* = \left[\frac{k}{\sqrt{\Delta^2+1}}, \arctg \Delta, 0 \right]$. Jeho povahu zjistíme opět pomocí Jacobiho matice, která má pro soustavu (4.8) tvar

$$J(X_2, \Phi, F_2) = \begin{pmatrix} F_2 - 1 & -k \sin \Phi & X_2 \\ \frac{k}{X_2} \sin \Phi & -\frac{k}{X_2} \cos \Phi & 0 \\ -2\sigma F_2 X_2 & 0 & -\sigma(1 + X_2^2) \end{pmatrix}.$$

Dosažením stacionárního bodu S^* získáme matici

$$J\left(\frac{k}{\sqrt{\Delta^2+1}}, \arctg \Delta, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & -k \frac{\Delta}{\sqrt{1+\Delta^2}} & \frac{k}{\sqrt{\Delta^2+1}} \\ \frac{\Delta \sqrt{\Delta^2+1}}{k} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \left(1 + \frac{k^2}{\Delta^2+1}\right) \end{pmatrix}.$$

Dále pomocí charakteristického polynomu vypočítáme vlastní čísla a z jejich podoby určíme charakter stacionárního bodu.

$$\lambda_1 = -\sigma \left(1 + \frac{k^2}{\Delta^2+1}\right), \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm \Delta i$$

Vidíme, že pro libovolné nenulové hodnoty parametrů mají vlastní čísla $\lambda_{2,3}$ nenulovou imaginární část a všechna mají reálnou část zápornou. Z tohoto důvodu je stacionární bod $S^* = \left[\frac{k}{\sqrt{\Delta^2+1}}, \arctg \Delta, 0 \right]$ stabilním ohniskem.

Odezvoový laser je tedy řídicím laserem pasivně poháněn ke stabilní periodické dynamice i navzdory skutečnosti, že sám není pumpován. Tuto dynamiku můžeme odvodit z rovnice $E_2 = X_2 e^{i\Phi_2}$, kde $\Phi_2 \sim \Phi + \Phi_0 + \frac{\delta_1 \tau_{c,2} t}{\alpha_2}$ dosažením vypočteného stacionárního bodu.

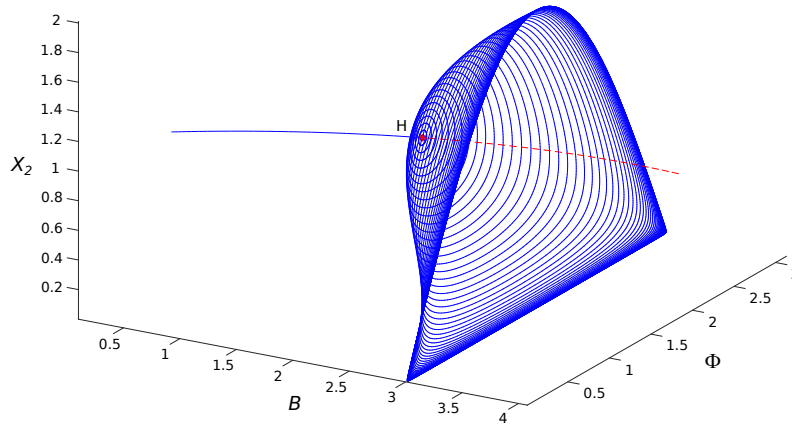
Elektrické pole odezvového laseru tedy bude dáno rovnicí $E_2 = \frac{k}{\sqrt{\Delta^2+1}} e^{i(\arctg \Delta + \Phi_0 + \frac{\delta_1 \tau_{c,2}}{\alpha_2} t)}$.

4.2.4 Závislé lasery s rozladěním s buzeným odezvoovým laserem

Dále se podíváme na situaci, kdy je i odezvoový laser buzen, tedy kdy $B > 0$. V tomto případě zůstane původní soustava (4.4) v nepozměněné podobě

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} &= (F_2 - 1)X_2 + k \cos \Phi \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \Delta - \frac{k}{X_2} \sin \Phi \\ \frac{dF_2}{dt} &= \sigma(B - F_2 - F_2 X_2^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

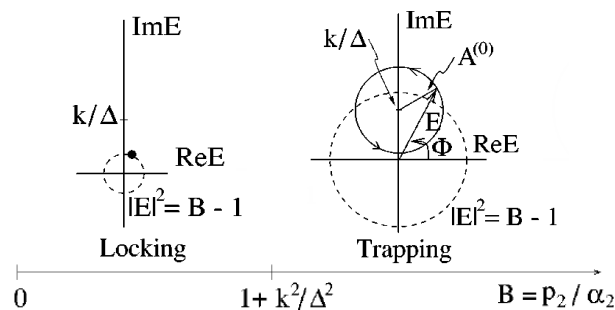
Jelikož je analýza tohoto systému komplikovanější, zaměříme se v této práci pouze na simulace pomocí kontinuačního balíku MATCONT. Kvalitativní změna chování systému je znázorněna na bifurkačním diagramu 4.4. Můžeme vidět, že při určité kritické hodnotě parametru síly pumpování ($B_{krit} \approx 1 + \frac{k^2}{\Delta^2}$ (převzato z [16])) dochází k Hopfově bifurkaci. Na základě hodnoty prvního Ljapunovova koeficientu $l_1 \approx -1,0024$, jehož výpočet je zabudován v programu, a poznámky pod větou [1.4.1] můžeme konstatovat, že se jedná o superkritickou bifurkaci.



Obrázek 4.4: Bifurkační diagram soustavy (4.9) pro zvolené hodnoty parametrů $\Delta = 2$, $k = 2$, $\sigma = 0,01$ a $B \in [0, 1; 3, 1]$. Kritická hodnota $B_{krit} = 2,0000995 \approx 2$.

Z fyzikálního hlediska nám diagram ukazuje, že chování fázového rozdílu laserů závisí na poměru množství dodávané energie odezvovému laseru a koeficientu ztráty laserové dutiny ($B = \frac{p_2}{\alpha_2}$). Jestliže se hodnota parametru B nachází pod kritickou hodnotou, ustálí se fázový rozdíl laserů na konstantní hodnotě a dojde tak k synchronizaci fází. Oproti tomu, překoná-li parametr B kritickou hodnotu, fázový rozdíl laserů Φ začne oscilovat. To znamená, že oba lasery sice budou mít stejnou průměrnou hodnotu frekvence (*frequency-locking*), ale jejich fáze se budou periodicky měnit (tedy nebude docházet k fázovému závěsu (*phase-locking*)). Pro tuto situaci se v angličtině používá pojem *phase-trapped* (tzn. odezvoový laser je fázově vázán k řídicímu).

Více o tomto chování je společně s výpočty uvedeno v článku [16], ze kterého je přebrán i obrázek 4.5. Zde je ilustrována změna chování fázového rozdílu a komplexního elektrického pole E (původní proměnná) při překročení kritické hodnoty.



Obrázek 4.5: Závislost chování fázového rozdílu na hodnotě parametru B . $E = X_2 e^{i\Phi}$ je komplexní elektrické pole. (převzato z [16] s úpravami)

Kapitola 5

Závisle spřažené lasery

Poslední model, kterým se budeme zabývat popisuje opět změnu elektrického pole a zisku v čase. Oproti předcházejícímu v tomto modelu již nebudeme moct označit jeden laser jako řídicí a druhý odezvoový, jelikož budou vzájemně propojeny vazbou. Dále namísto jejich fázového rozdílu budeme zkoumat jednotlivé fáze laserů.

Soustavu rovnic popisující tento model jsme získali z článku [8], ve kterém je soustava uvedena obecně pro N laserů, které jsou umístěny rovnoběžně vedle sebe a každý je dynamicky spojen se svými sousedy určitým překrytím v příčném směru elektrického pole.

$$\begin{aligned}\frac{dE_j(t)}{dt} &= (G_j(t) - \alpha + i\delta_j)E_j(t) + k(E_{j+1}(t) + E_{j-1}(t)) + E_e(t) \\ \frac{dG_j(t)}{dt} &= \frac{\tau_c}{\tau_f} [p - (1 + |E_j(t)|^2)G_j(t)],\end{aligned}$$

kde $j = 1, \dots, N$ a $E_0(t) = E_{N+1}(t) = 0$. Proměnná $E_j(t)$ popisuje bezrozměrné komplexní elektrické pole j -tého laseru, $G_j(t)$ zisk j -tého laseru, τ_c dobu oběhu dutiny, τ_f dobu fluorescence, α bezrozměnou ztrátu dutiny, p rychlost pumpování, k spřažení (vazbu) mezi sousedními lasery, $E_e(t)$ pomalu měnící se amplitudu vnějšího pole, které pohání jednotlivé lasery, a δ_j je velikost rozladění j -tého laseru.

My se opět omezíme pouze na případ dvou laserů, které jsou vystaveny konstantnímu elektrickému poli.

Využitím substitucí $E_e(t) = \sqrt{I_e}f(t)$, kde $f(t) \equiv 1$ (tzn. máme konstantní elektrické pole), a $E_j(t) = \sqrt{I_j(t)}e^{i\Phi_j(t)}$, kde $I_j(t)$ je intenzita j -tého laseru a $\Phi_j(t)$ je fáze j -tého laseru, získáme soustavu

$$\begin{aligned}\frac{d(\frac{1}{2}I_1 + i\Phi_1)}{dt} &= (G_1 - \alpha + i\delta_1)I_1 + k\sqrt{I_1I_2}e^{i(\Phi_2 - \Phi_1)} + \sqrt{I_1I_e}e^{-i\Phi_1} \\ \frac{d(\frac{1}{2}I_2 + i\Phi_2)}{dt} &= (G_2 - \alpha + i\delta_2)I_2 + k\sqrt{I_2I_1}e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)} + \sqrt{I_2I_e}e^{-i\Phi_2} \\ \frac{dG_1}{dt} &= \frac{\tau_c}{\tau_f} [p - G_1 - G_1I_1] \\ \frac{dG_2}{dt} &= \frac{\tau_c}{\tau_f} [p - G_2 - G_2I_2].\end{aligned}$$

Využitím Eulerova vzorce $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ a rozdělením členů soustavy, podle toho, zda tvoří reálné či imaginární části, získáme soustavu šesti rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{dI_1}{dt} &= 2(G_1 - \alpha)I_1 + 2k\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Phi_2 - \Phi_1) + 2\sqrt{I_1 I_e} \cos \Phi_1 \\
\frac{dI_2}{dt} &= 2(G_2 - \alpha)I_2 + 2k\sqrt{I_2 I_1} \cos(\Phi_1 - \Phi_2) + 2\sqrt{I_2 I_e} \cos \Phi_2 \\
\frac{d\Phi_1}{dt} &= \delta_1 + k\sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \sin(\Phi_2 - \Phi_1) - \sqrt{\frac{I_e}{I_1}} \sin \Phi_1 \\
\frac{d\Phi_2}{dt} &= \delta_2 + k\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \sin(\Phi_1 - \Phi_2) - \sqrt{\frac{I_e}{I_2}} \sin \Phi_2 \\
\frac{dG_1}{dt} &= \frac{\tau_c}{\tau_f} [p - G_1 - G_1 I_1] \\
\frac{dG_2}{dt} &= \frac{\tau_c}{\tau_f} [p - G_2 - G_2 I_2].
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Na následujících stranách se podíváme na vývoj chování laserů na základě parametru spřažení (k). Nejprve prozkoumáme jejich chování za podmínky, že mezi nimi nevzniká vazba, a následně na spřažené lasery, tedy na lasery s vazbou.

5.1 Nezávislé lasery

V této části se budeme zabývat případem nezávislých laserů, tedy skutečností, kdy je parametr spřažení nulový ($k = 0$).

Budeme dále předpokládat, že také amplituda vnějšího pole je nulová ($I_e(t) = 0$) a zavedeme substituci $\omega_0 = \frac{\tau_c}{\tau_f}$. Těmito kroky se nám soustava (5.1) značně zjednoduší, rovnice pro jednotlivé lasery se budou lišit pouze indexy a my se tak můžeme zaměřit pouze na jeden laser popsaný dvěma rovnicemi

$$\begin{aligned}
\frac{dI_1}{dt} &= 2(G_1 - \alpha)I_1 \\
\frac{dG_1}{dt} &= \omega_0(p - G_1 - G_1 I_1).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Můžeme si všimnout, že se tato soustava podobá soustavě (4.5) pro nezávislé lasery z předchozí kapitoly. Drobné rozdíly vznikly jinou substitucí dob fluorescence a oběhu dutiny (místo $\omega_0 = \frac{\tau_c}{\tau_f}$ bylo použito $\sigma = \frac{\tau_c}{\alpha\tau_f}$) a dále vyjádřením elektrického pole pomocí intenzity namísto amplitudy. Z tohoto pozorování tedy vyplývá, že bychom měli dospět k obdobným výsledkům jako dříve.

Tato soustava (5.2) má dva stacionární body $S_1^* = [\frac{p}{\alpha} - 1, \alpha]$ a $S_2^* = [0, p]$. Abychom mohli prozkoumat chování trajektorií v jejich okolí, potřebujeme znát Jacobiho matici. Ta má pro řešenou soustavu tvar

$$J(I_1, G_1) = \begin{pmatrix} 2G_1 - 2\alpha & 2I_1 \\ -G_1\omega_0 & -\omega_0(1 + I_1) \end{pmatrix}.$$

V prvním stacionárním bodě $S_1^* = [\frac{p}{\alpha} - 1, \alpha]$ se změří na matici

$$J(\frac{p}{\alpha} - 1, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 2(\frac{p}{\alpha} - 1) \\ -\alpha\omega_0 & -\omega_0\frac{p}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Vypočtením determinantu $\det J(S_1^*) = 2\alpha\omega_0(\frac{p}{\alpha} - 1)$ zjistíme (stejně jako u modelu (4.5)), že charakter rovnovážného bodu závisí na parametru pumpování p . Je-li $p > \alpha$, bude znaménko determinantu Jacobiho matice ve stacionárním bodě S_1^* kladné a dále znaménko stopy $\text{tr} J(S_1^*) = -\omega_0\frac{p}{\alpha}$ záporné a stacionární bod bude stabilním uzlem. Oproti tomu, pokud bude $p < \alpha$, změří se znaménko determinantu na záporné a stacionární bod bude sedlem.

Dále se podíváme na Jacobiho matici v rovnovážném bodě S_2^* . Ta bude mít tvar

$$J(0, p) = \begin{pmatrix} 2p - 2\alpha & 0 \\ -p\omega_0 & -\omega_0 \end{pmatrix}.$$

Stejnými úvahami jako u bodu S_1^* dospějeme k závěru, že charakter tohoto bodu závisí na parametru p . Pokud bude $p > \alpha$ bude determinant záporný a rovnovážný bod bude sedlem. Naopak, bude-li $p < \alpha$, determinant změří znaménko na kladné a po spočítání stopy zjistíme, že se v tomto případě bude jednat o stabilní uzel.

Na základě této analýzy jsme opět dospěli ke stejným závěrům, jako v předcházejících modelech. Hodnota parametru $p = \alpha$ je tedy kritickou hodnotou, při které dochází k transkritické bifurkaci a je proto prahovou hodnotou pro funkci laseru.

5.2 Závislé lasery

V této části se zaměříme na komplikovanější, ale zajímavější situaci, kde budeme zkoumat model s nenulovým parametrem spřažení, tedy model popisující závislé lasery.

Aby byla následující práce s modelem snazší, pokusíme se soustavu (5.1) co nejvíce zjednodušit. Zavedeme tedy substituce (převzaté z článku [8])

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{\tau_c}{\tau_f}, & \delta_j &= \varepsilon\Omega\Delta_j, & I_j &= I(x_j + 1), & x_j &> -1, \\ \sqrt{I_e/I} &= \varepsilon\Omega c, & t' &= \Omega t, & k &= -\varepsilon\Omega d, & d &> 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dále vytvoříme lineární transformaci $G_j = Ay_j + B$, kde koeficienty A a B zvolíme tak, abychom posunuli rovnovážný bod soustavy do počátku, absolutní členy vynulovali a ostatní členy co nejvíce zjednodušili.

Dosazením do soustavy (5.1) obdržíme rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt'} &= 2(Ay_1 + B - \alpha)(x_1 + 1) + 2\varepsilon[-d\sqrt{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \\
&\quad + c\sqrt{x_1 + 1} \cos \Phi_1] \\
\frac{dx_2}{dt'} &= 2(Ay_2 + B - \alpha)(x_2 + 1) + 2\varepsilon[-d\sqrt{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \cos(\Phi_1 - \Phi_2) \\
&\quad + c\sqrt{x_2 + 1} \cos \Phi_2] \\
\frac{d\Phi_1}{dt'} &= \varepsilon \left[\Delta_1 - d\sqrt{\frac{x_2 + 1}{x_1 + 1}} \sin(\Phi_2 - \Phi_1) - c\frac{1}{\sqrt{x_1 + 1}} \sin \Phi_1 \right] \\
\frac{d\Phi_2}{dt'} &= \varepsilon \left[\Delta_2 - d\sqrt{\frac{x_1 + 1}{x_2 + 1}} \sin(\Phi_1 - \Phi_2) - c\frac{1}{\sqrt{x_2 + 1}} \sin \Phi_2 \right]. \\
\frac{dy_1}{dt'} &= -\frac{\omega_0 B}{A\Omega} x_1 - \frac{\omega_0 + I\omega_0}{\Omega} y_1 - \frac{I\omega_0}{\Omega} x_1 y_1 + \frac{\omega_0(p - B - BI)}{A\Omega} \\
\frac{dy_2}{dt'} &= -\frac{\omega_0 B}{A\Omega} x_2 - \frac{\omega_0 + I\omega_0}{\Omega} y_2 - \frac{I\omega_0}{\Omega} x_2 y_2 + \frac{\omega_0(p - B - BI)}{A\Omega}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Jelikož chceme absolutní členy rovny nule, dostaneme z prvních dvou rovnic hodnotu koeficientu $B = \alpha$. Dále ze stejného důvodu dostaneme z posledních dvou rovnic nový parametr $I = \frac{p-B}{B} = \frac{p-\alpha}{\alpha}$. Koeficient A dopočítáme pomocí již vypočtených parametrů a koeficientů ze soustavy (4) z článku [8]. Dostaneme tedy tři jednoduché rovnice

$$\begin{aligned}
-\frac{\omega_0(p - \alpha)}{A\Omega} &= -\omega \\
-\frac{\omega_0(1 + p - \alpha)}{\alpha\Omega} &= \frac{I + 1}{I} = \frac{p}{p - \alpha} \\
-\frac{(p - \alpha)\omega_0}{\alpha\Omega} &= -1,
\end{aligned}$$

ze kterých jednoduchou úpravou obdržíme $A = \frac{\omega}{\alpha}$ a $\Omega = \frac{\omega_0(p - \alpha)}{\alpha}$. Dosazením všech těchto vypočtených parametrů, do soustavy (5.4) získáme jednodušší soustavu (5.5), se kterou budeme dále pracovat:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt'} &= 2\omega y_1(x_1 + 1) + 2\varepsilon[-d\sqrt{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \cos(\Phi_2 - \Phi_1) + c\sqrt{x_1 + 1} \cos \Phi_1] \\
\frac{dx_2}{dt'} &= 2\omega y_2(x_2 + 1) + 2\varepsilon[-d\sqrt{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \cos(\Phi_1 - \Phi_2) + c\sqrt{x_2 + 1} \cos \Phi_2] \\
\frac{dy_1}{dt'} &= -\omega x_1 - y_1 \left(\frac{I + 1}{I} + x_1 \right) \\
\frac{dy_2}{dt'} &= -\omega x_2 - y_2 \left(\frac{I + 1}{I} + x_2 \right) \\
\frac{d\Phi_1}{dt'} &= \varepsilon \left[\Delta_1 - d\sqrt{\frac{x_2 + 1}{x_1 + 1}} \sin(\Phi_2 - \Phi_1) - c\frac{1}{\sqrt{x_1 + 1}} \sin \Phi_1 \right] \\
\frac{d\Phi_2}{dt'} &= \varepsilon \left[\Delta_2 - d\sqrt{\frac{x_1 + 1}{x_2 + 1}} \sin(\Phi_1 - \Phi_2) - c\frac{1}{\sqrt{x_2 + 1}} \sin \Phi_2 \right].
\end{aligned} \tag{5.5}$$

O parametru ε víme, že je velmi malý, jelikož platí $\varepsilon \ll \min(1, \omega)$, a z tohoto důvodu se na model (5.5) můžeme dívat jako na soustavu obsahující rychlý a pomalý subsystem, kde proměnné Φ_1 a Φ_2 jsou pomalé proměnné a zbylé proměnné x_1, x_2, y_1, y_2 jsou rychle se měnící proměnné.

Tuto skutečnost využijeme a nejprve se podíváme na chování rychlého subsystemu. Položením $\varepsilon = 0$ obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt'} &= 2\omega y(x+1) \\ \frac{dy}{dt'} &= -\omega x - y \left(\frac{p}{p-\alpha} + x \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Stacionárními body této soustavy jsou body $S_1^* = [0, 0]$ a $S_2^* = [-1, \frac{p-\alpha}{\alpha}\omega]$. V substituci (5.3) jsme ale předpokládali $x_j > -1$, a proto nám zbyde pouze stacionární bod $S_1^* = [0, 0]$.

Na základě Jacobiho matice v tomto bodě

$$\begin{aligned} J(x, y) &= \begin{pmatrix} 2\omega y & 2\omega(x+1) \\ -\omega - y & -\frac{p}{p-\alpha} - x \end{pmatrix}, \\ J(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 2\omega \\ -\omega & -\frac{p}{p-\alpha} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

můžeme zjistit, jaké bude chování trajektorií v jeho okolí. Vypočtením determinantu $\det J(0, 0) = 2\omega^2$ a stopy matice $\text{tr} J(0, 0) = -\frac{p}{p-\alpha}$, zjistíme, že pokud uvažujeme pouze $p > \alpha$ ($p = \alpha$ je prahová hodnota fungování laseru), bude se jednat o lokálně stabilní rovnovážný bod. Jelikož platí $\text{tr}^2 J(0, 0) - 4 \det J(0, 0) > 0$ bude tento bod uzlem.

Dále můžeme pomocí existence Ljapunovovy funkce (jejíž tvar byl přebrán z článku [8]) ověřit jeho globální stabilitu.

$$L(x, y) = y^2 + x - \ln(x+1). \quad (5.7)$$

Je potřeba ověřit zda platí podmínky

$$\begin{aligned} L(x, y) &> 0, \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ L(0, 0) &= 0 \\ \frac{dL}{dt'} &< 0. \end{aligned}$$

První podmínku ověříme pomocí Hessovy matice, tedy matice druhých parciálních derivací funkce. Aby měla funkce v bodě $[0, 0]$ globální minimum, musí být Hessova matice

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x+1)^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

pozitivně definitní ve všech bodech, což je splněno, a proto je funkce $L(x, y)$ ryze konvexní. Splnění druhé podmínky je zřejmé a zývá tedy ověřit platnost poslední podmínky:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt'} &= 2y\dot{y} + \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\dot{x} \\ &= 2y[-\omega x - y\left(\frac{p}{p-\alpha} + x\right)] + 2\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\omega y(x+1) \\ &= -2y^2\left(\frac{p}{p-\alpha} + x\right) < 0, \quad y \neq 0, \quad x > -1 \end{aligned}$$

Jelikož jsme ověřili platnost všech tří podmínek pro existenci Ljapunovovy funkce (5.7) (z definice 1.3.3), můžeme konstatovat, že stacionární bod $S_1^* = [0, 0]$ je globálně stabilní a všechna řešení tohoto subsystemu k němu budou konvergovat.

Vývoj systému (5.5) tedy bude ovlivňovat pomalý subsystem s proměnnými Φ_1 a Φ_2 . Na jeho chování se nyní zaměříme.

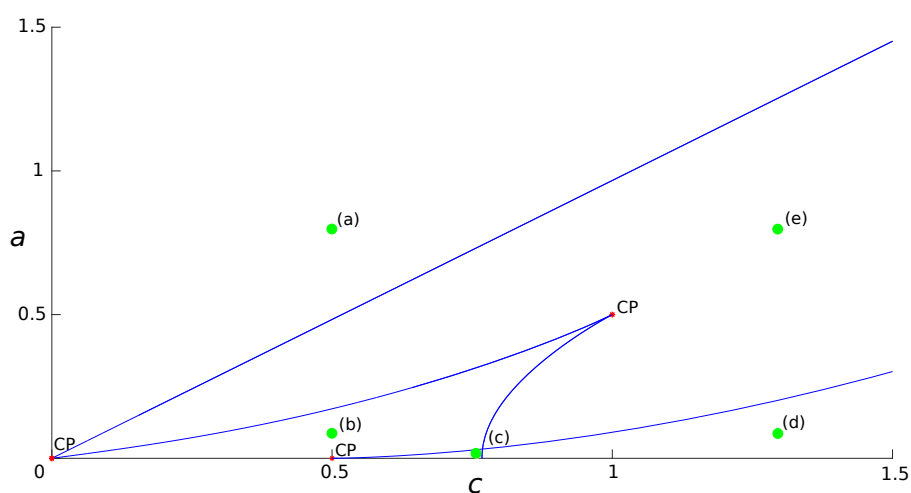
Dosadíme-li do soustavy (5.5) rovnovážný bod rychlého subsystemu a zavedeme-li nový („pomalý“) čas $\tau = \varepsilon t'$, obdržíme soustavu popisující chování pomalého subsystemu

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{d\tau} &= a + b - c \sin \Phi_1 + d \sin(\Phi_1 - \Phi_2) \\ \frac{d\Phi_2}{d\tau} &= a - b - c \sin \Phi_2 + d \sin(\Phi_2 - \Phi_1), \end{aligned} \quad (5.8)$$

kde $a = \frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2)$ je asymetrie mezi dvěma lasery, $b = \frac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)$ je šířka rozptylu rozladění, c je úměrné amplitudě injekčního pole a d je úměrné síle spřažení.

Jelikož je analýza tohoto subsystemu značně komplikovanější, znázorníme kvalitativní změny jeho dynamiky pouze pomocí numerické kontinuity pro pevně zvolené parametry $b = 0,5$ a $d = 1$ vytvořené za pomoci kontinuálního balíku MATCONT. Podíváme-li se na bifurkační diagram 5.1, vidíme, že při změnách parametru určujícího asymetrii mezi lasery a a parametru odpovídajícího amplitudě injekčního pole c došlo hned k několika cusp bifurkacím a s nimi spojeným kvalitativním změnám subsystemu (5.8), což způsobilo rozdělení diagramu na pět částí, kde hranice mezi oblastmi tvoří bifurkační křivky spojené s fold bifurkací.

My se nyní podíváme, jak přechod mezi těmito oblastmi ovlivní fázové portréty a chování subsystemu na vybraných konkrétních příkladech (na obrázku 5.1 označeny zelenými body). Podrobnější analýza subsystemu je uvedena ve zdroji [8].



Obrázek 5.1: Bifurkační diagram subsystemu (5.8) pro zvolené hodnoty parametrů $a \in [0; 1,5]$, $b = 0,5$, $c \in [0; 1,5]$ a $d = 1$.

Jelikož subsystém (5.8) popisuje fáze, můžeme jeho dynamiku studovat na toru \mathbb{T}^2 , na němž zavedeme kanonické souřadnice $\psi(\text{mod } 2\pi)$, $\varphi(\text{mod } 2\pi)$ (viz podkapitola 1.4.3).

Využitím těchto souřadnic můžeme zobrazit torus na čtverec, na kterém si vykreslíme a popíšeme fázové portréty v označených bodech z obrázku 5.1 pro hodnoty paramateru $b = 0,5$ a $d = 1$:

- (a) $a = 0,8, c = 0,5$ (obrázek 5.2a)

Na fázovém portrétu můžeme vidět, že všechny trajektorie subsystému (5.8) konvergují k uzavřené trajektorii, která před svým uzavřením udělá jeden oběh ve směru poledníkové i rovnoběžníkové souřadnice (na obrázku světle modře). Tuto trajektorii nazýváme $(1,1)$ -cyklem, což z fyzikálního hlediska odpovídá vzájemnému fázovému závěsu (*mutually phase-locked*), tedy případu, kdy obě fáze rotují, ale jejich rozdíl vykazuje spíše oscilační charakter.

- (b) $a = 0,1, c = 0,5$ (obrázek 5.2b)

Zmenšíme-li parametr a tak, abychom na diagramu 5.1 přešli z bodu (a) přes bifurkační křivku (přes fold bifurkaci), dojde ke vzniku stabilního uzlu (na obrázku světle modře). Tato změna způsobila konvergenci všech trajektorií k tomuto bodu. Nevzniká zde tedy žádný cyklus, což můžeme zapsat také jako $(0,0)$ -cyklus. Tato skutečnost odpovídá plnému fázovému závěsu (*fully phase-locked*) tedy případu, kdy se obě fáze ustálí na konkrétní hodnotě.

- (c) $a = 0,01, c = 0,75$ (obrázek 5.2c)

Oproti fázovému portrétu 5.2b zde přibyl druhý stabilní uzel, ke kterému budou trajektorie konvergovat. Fáze jednotlivých laserů se tedy mohou ustálit na dvou různých hodnotách, což z hlediska fázového závěsu stále odpovídá případu zvaného *fully phase-locked*.

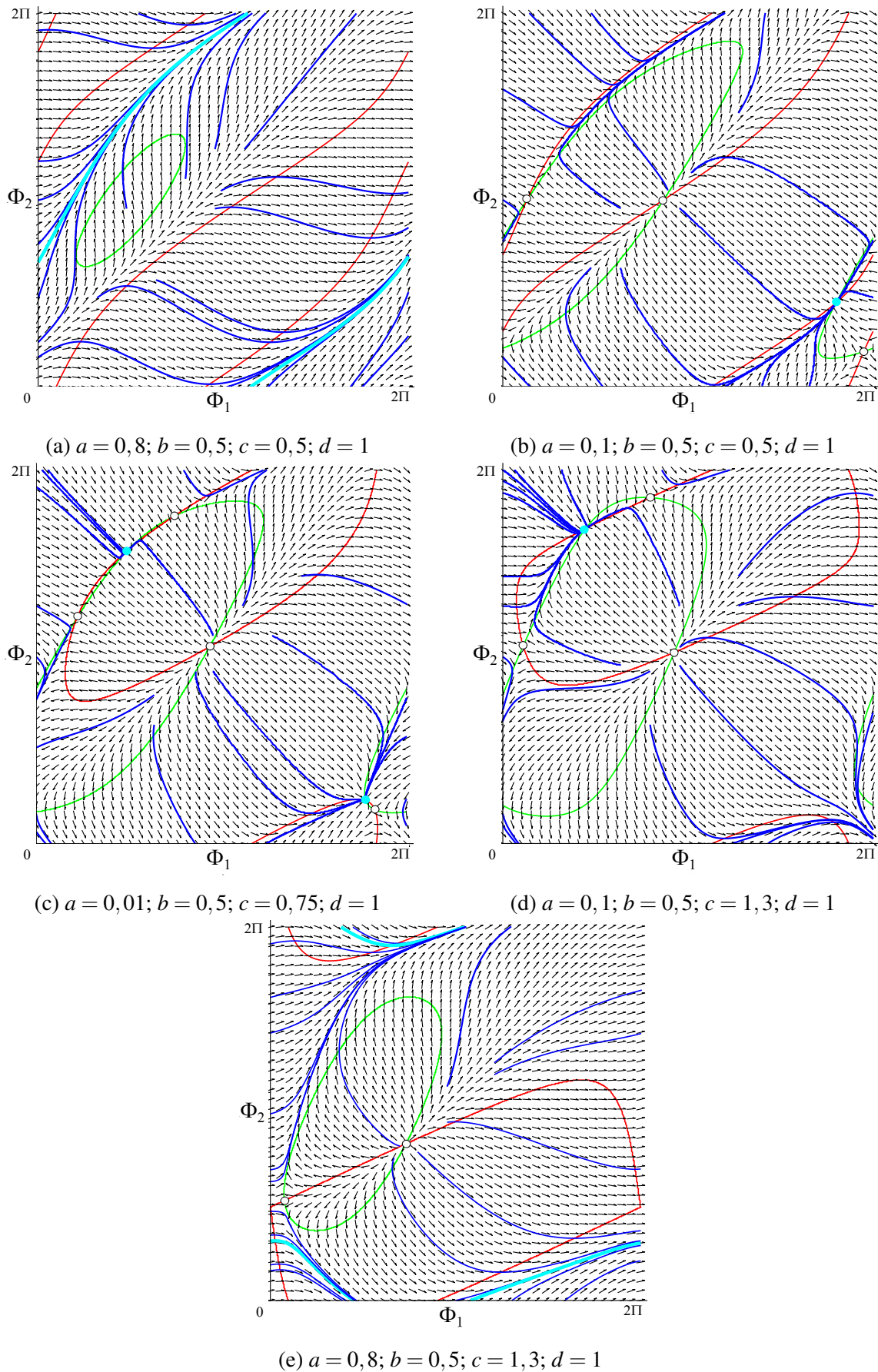
- (d) $a = 0,1, c = 1,3$ (obrázek 5.2d)

Přechodem do další části diagramu 5.1 „první“ stabilní stacionární bod zanikne, a fáze jednotlivých laserů budou konvergovat k zbylému stabilnímu uzlu. V této oblasti tak stále dochází k plnému fázovému závěsu.

- (e) $a = 0,8, c = 1,3$ (obrázek 5.2e)

Jak můžeme vidět na fázovém portrétu, zde již zanikly oba stabilní rovnovážné body a všechny trajektorie opět začaly konvergovat k jedné periodické trajektorii (na obrázku světle modře), která (narozdíl od 5.2a) před svým uzavřením udělá jeden oběh ve směru rovnoběžníkové a žádný ve směru poledníkové souřadnice. Tuto trajektorii nazveme $(1,0)$ -cyklem. Z fyzikálního hlediska se tento případ nazývá částečný fázový závěs (*partially phase-locked*), což odpovídá rotaci pouze jedné fáze.

Závěrem je důležité zdůraznit, že právě popsané fázové portréty popisují pouze dynamiku fází (pomalý subsystém) a jedná se o zjednodušený popis dynamiky celého systému, tedy o zachycení hlavních rysů celého modelu. Fázový model (5.8) je tedy dobrou aproximací plného modelu (5.5). To platí zejména tehdy, když rozdíl rozladění laserů je menší než síla vazby, tedy platí-li $|\frac{\delta_1 - \delta_2}{2k}| < 1$ (převzato z [8]).



Obrázek 5.2: Fázové portréty subsystému (5.8) pro zvolené hodnoty parametrů.
 Φ_1 – nulklina zeleně, Φ_2 – nulklina červeně.

Závěr

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo nalezení modelů laseru jako diferenciálních rovnic nebo jejich systémů a následná analýza těchto modelů. Z nalezených modelů, byly pro následnou analýzu vybrány tři, kde první popisoval laser pomocí populačního modelu a zabýval se změnou populace fotonů v čase a další dva modely popsaly laser z fyzikálního hlediska a zaměřily se tedy na změny elektrického pole laseru. V těchto dvou modelech jsme se také zabývali případem dvou spřažených laserů.

Před samotnou analýzou modelů jsme v práci popsali základní teorii potřebnou pro zbytek práce a dále jsme stručně shrnuli základní poznatky o laserech.

Při analýze prvního modelu jsme se zaměřili na studium existence stabilního řešení v závislosti na změně počtu excitovaných elektronů při nepůsobení laseru. Dokázali jsme, že při nízkém počtu těchto excitovaných elektronů, dochází k zániku populace fotonů, a tedy k nefunkčnosti laseru. Oproti tomu při dostatečně velkém počtu těchto elektronů populace fotonů nevyhyne a v laseru tak bude docházet k spontánní emisi záření. Touto analýzou jsme tedy prokázali existenci prahové hodnoty laseru a ukázali jsme, že se tato hodnota pojí se vznikem transkritické bifurkace.

Při studiu druhého modelu jsme nejprve odvodili dlouhodobé chování jednoho laseru, který jsme při následné analýze dvou spřažených laserů nazvali řídicím laserem, jelikož vývoj jeho chování nijak nezávisel na chování druhého laseru, který jsme nazvali odezvoým. Analyzovali jsme chování takto spřažených laserů pro různé hodnoty vazby a frekvenčního rozladění. Pro nezávislé lasery nebo závislé lasery bez rozladění jsme ukázali, že pokud jsme se nacházeli nad kritickou hodnotou parametru síly čerpání odezvového laseru, existovalo vždy kladné stabilní řešení, díky kterému mohl laser fungovat. V případě závislých laserů s rozladěním jsme zjistili, že i navzdory nedodávání energie druhému laseru bude řídicím laserem poháněn ke stabilní periodické dynamice, kterou jsme následně odvodili. Pro nejsložitější situaci, kdy byly lasery spřaženy, frekvenčně rozladěny a druhý laser byl také buzen, jsme pomocí kontinuačního balíku MATCONT ukázali, že při přechodu přes určitou kritickou hodnotu parametru dochází k superkritické Hopfově bifurkaci, která působí vznik oscilací fázového rozdílu laserů.

V posledním modelu jsme se zabývali vzájemně spřaženými lasery. V tomto případě jsme mohli systém popisující tento model rozdělit na rychlý a pomalý subsystem a následně provést analýzu každého z nich. Prokázali jsme, že vývoj chování laseru je závislý na dynamice pomalého subsystemu, pro který jsme ukázali vznik tří cusp bifurkací, které působily změny dynamiky. Tyto změny byly následně znázorněny ve fázovém prostoru a popsány na konkrétních příkladech parametrů.

Seznam použité literatury

- [1] BEISER, Arthur. *Úvod do moderní fyziky*. 1. vyd. Praha: Academia, 1975.
- [2] DHOOGHE, Annick; GOVAERTS, Willy a KUZNETSOV, Yuri. A. *MatCont: A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs*. ACM Transactions on Mathematical Software 29 (2), 2003, str. 141–164.
- [3] DOŠLÁ, Zuzana a KUBEN, Jaromír. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2003. ISBN 80-210-3121-2.
- [4] ENGST, Pavel a HORÁK, Milan. *Aplikace laserů*. 1. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1989.
- [5] HAKEN, Hermann. *Laser theory*. 1st. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1984. ISBN 3-540-12188-9.
- [6] KALAS, Josef a RÁB, Miloš. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Vyd. 1. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2589-1.
- [7] KALAS, Josef a POSPÍŠIL, Zdeněk. *Spojité modely v biologii*. Vyd. 1. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2626-X.
- [8] Khibnik, Alexander I., et al. *Phase model analysis of two lasers with injected field*, Physica D: Nonlinear Phenomena, 1998, 111.1-4: 295-310.
- [9] KUZNETSOV, Yuri A. *Elements of applied bifurcation theory*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1998. ISBN 0-387-98382-1.
- [10] PERKO, Lawrence. *Differential equations and dynamical systems*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2000. ISBN 0-387-95116-4.
- [11] PŘIBYLOVÁ, Lenka. *Nelineární dynamika a její aplikace* [online]. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2012 [cit. 2022-04-29]. Elportál. Dostupné z: <http://is.muni.cz/elportal/?id=986888>. ISBN 978-80-210-5969-6. ISSN 1802-128X.
- [12] SALEH, Bahaa E. A. *Základy fotoniky 3*. 1. vyd. Praha: MATFYZPRESS, 1995. ISBN 80-85863-05-7.
- [13] SILFVAST, William Thomas. *Laser fundamentals*. 2nd ed. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0-521-83345-0.

- [14] STROGATZ, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Cambridge (Massachusetts): Westview Press, 1994. ISBN 07-382-0453-6.
- [15] VERHULST, Ferdinand. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1990. ISBN 3-540-50628-4.
- [16] YEUNG, MK Stephen a STROGATZ, Steven H. *Nonlinear dynamics of a solid-state laser with injection*, Physical Review E, 1998, 58.4: 4421.

