Masarykova Univerzita
Přírodovědecká fakulta

Globální analýza

Bakalářská práce

Vlastimil Severa

Brno, 20. května 2008

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářské práci jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny uvedeny v seznamu literatury na konci práce.
Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně, dne 20. května 2008

Poděkování

Tímto bych chtěl velice poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce, panu RNDr. Janu Slovákovi DrSc., za pomoc při jejím vytváření. Děkuji mu za jeho cenné rady a připomínky i za čas, který věnoval našim konzultacím.

Obsah

Úvod

Ve své bakalářské práci rozšiřuji učební text k předmětu Globální analýza, jež je nabízen studentům oboru Obecná matematika na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. Uvádím zde názorné příklady a snažím se některé pojmy vysvětlit trochu „uchopitelněji“. Tím bych chtěl usnadnit pochopení látky posluchačům tohoto předmětu. Zároveň však doufám, že text by mohl být také nápomocen těm, kteří se chtějí dozvědět, co to jsou variety, jak se konstruují a některé jejich příklady. Základem mi byly skripta pana Koláře *Úvod do globální analýzy.* V textu se snažím však látku vysvětlit tak, jak jsem to činil sám pro sebe, když jsem se z této knihy učil. Konkretizuji zde obecné pojmy a i některé důkazy se snažím trochu osvětlit. Ať už jejich konstrukcí, kdy jsem jisté pasáže probral podrobněji, než je uvedeno v původním textu, anebo jejich následným předvedením na příkladě.
V první kapitole se zabývám topologií, čímž se snažím položit základ pro pozdější budování variet. Jedná se většinou o elementární věci, ale některým studentům by tyto znalosti mohly chybět. Výsledkem jsou pak pojmy, jež jsou zásadní v tom, že se jimi definuje topologická varieta.
V druhé kapitole přicházejí na řadu diferencovatelná zobrazení a jejich vlastnosti. Ta jsou velmi důležitá, jak pro definování diferencovatelné variety, tak i pro přechod mezi nimi. V této části je asi nejdůležitější právě ukázání pojmů na konkrétních příkladech.
A v poslední kapitole konečně zavádím pojem variety. Nejprve topologické a po uvedení dalších potřebných pojmů i diferencovatelné. Celou práci pak zakončuji některými konkrétními příklady těchto struktur.

1 Základní topologické pojmy

V této kapitole si ukážeme některé úvodní pojmy z topologie množin. Položíme si tak základ pro budování dalších struktur. Nejprve si definujeme topologický prostor a poté i některé jeho další vlastnosti.

Definice 1.1: Topologií τ nazveme množinový systém na neprázdné množině X, pokud splňuje tyto podmínky:

1. Množiny X a $\varnothing$ náleží do systému τ.
2. Pokud množiny $A_\alpha \in \tau$, kde $\alpha \in I$ a I je libovolná konečná množina indexů, pak také
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau.$$
3. Pokud množiny $A_\alpha \in \tau$, kde $\alpha \in I$ a I je libovolná množina indexů, pak také
$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau.$$

Prvky systému τ se nazývají otevřené množiny. Dvojici (X, τ) pak nazýváme topologickým prostorem, který ale dále budeme značit pouze X.
Oddělitelným (nebo též Hausdorffovým, či separovaným) topologickým prostorem X se nazývá prostor, v němž pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existují okolí $U_1, U_2 \subset X$ taková, že platí $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Jinými slovy mezi každými dvěma body v oddělitelném prostoru najdeme nějaké prvky prostoru X.

Příklad 1: Jedním ze základních topologických prostorů je množina $\mathbb{R}$ společně se systémem všech otevřených intervalů. Zřejmě je splněna první podmínka pro topologický prostor. Známo je také to, že průnikem konečného počtu otevřených intervalů je opět otevřený interval, nebo prázdná množina. Stejně tak do topologie náleží i sjednocení libovolného počtu otevřených intervalů.
Tento prostor je také oddělitelný. Platí, že pro každá dvě realná čísla a, b existuje číslo c takové, že $a < c < b$. Další aplikací tohoto pravidla dostaneme řadu $a < x < c < y < b$. Nyní můžeme považovat interval (a, c) za okolí bodu x a (c, b) okolí bodu y. Zřejmě tedy platí $(a, c) \cap (c, b) = \varnothing$.

Poznámka 1.2: V otevřené množině A pro každý bod $x \in A$ existuje okolí $U \subset A$.

Dále budeme definovat množiny uzavřené a prostředky, které využijeme pro převádění uzavřených množin na otevřené a naopak. Toho se využívá v některých důkazech, kde například jistá vlastnost platí pro množiny otevřené, ale my máme množinu uzavřenou.

Definice 1.3: Uzavřenou nazveme množinu A, jejíž doplněk $X \setminus A$ v prostoru

X je otevřená množina.

Příklad 2: Navážeme-li na *Příklad 1*, pak doplňkem uzavřeného intervalu $[a, b]$ je množina $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, jež je otevřená v $\mathbb{R}$. Takže terminologie intervalů a množin je zcela odpovídající.

Definice 1.4: Nechť $A \subset X$ je libovolná podmnožina.

- Vnitřkem množiny A nazveme množinu všech bodů $x \in X$ pro něž existuje okolí $U \in X$ bodu x takové, že $U \subset A$, a značíme jej $int(A)$.
- Hranicí množiny A nazveme množinu všech bodů $x \in X$ pro jejichž každé okolí $U \in X$ bodu x platí $U \cap A \neq \varnothing$ a $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ a značíme ji $h(A)$.
- Uzávěrem množiny A nazveme množinu $\overline{A} = A \cup h(A)$.

Uveďme, že vnitřek množiny je otevřená množina, kdežto hranice a uzávěr jsou množinami uzavřenými.

Příklad 3: Navažme opět na předcházající příklady a ukažme si tyto pojmy na intervalu (a, b).

- $int((a, b)) = (a, b)$, protože interval (a, b) je otevřená množina v $\mathbb{R}$ a tedy pro něj platí pravidlo z *Poznámky 1.2*.
- $h((a, b)) = \{a, b\} = [a, a] \cup [b, b]$, tedy hranici intervalu tvoří jeho krajní body. Každé okolí bodu a má neprázdný průnik s doplňkem intervalu, neboť on sám je je jeho prvkem. Stejně tak je neprázdný i průnik okolí s intervalem (a, b), protože pro libovolně malé ϵ je $a + \epsilon \in (a, b)$. Podobně se toto ukáže i pro bod b.
- $\overline{(a, b)} = [a, b]$, neboť $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$.
- $int([a, b]) = (a, b)$, neboť hranice množiny nemůže náležet do jejího vnitřku.

Pojem báze využijeme, když budeme chtít aplikovat nějakou vlastnost na celý prostor. Využijeme toho, že všechny jeho prvky můžeme vyjádřit pomocí jeho jistých speciálních prvků. Jejich množina se právě nazývá báze. Využijeme ji ale až později.

Definice 1.5: Bází prostoru X nazveme systém otevřených množin z X takových, že libovolná množina $B \subset X$ je sjednocením některých množin daného systému.
Tedy zřejmě X musí být také sjednocením některých, ale zároveň tedy i všech, těchto množin.

Nyní si přes pojem pokrytí množiny zevedeme pojmy kompaktnosti a parakompaktnosti. Parakompaktnost je jeden z důležitých pojmů při definici topologické variety.

Definice 1.6: Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$ je neprázdná množina.

Pokrytím množiny A nazveme systém množin $\{B_i\}$, kde $i \in I$ a I je libovolná množina indexů, pokud platí

$$A \subset \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Pokrytí nazveme otevřené, jsou-li množiny B_i otevřené pro všechna $i \in I$.
Pokrytí nazveme konečné, je-li indexová množina I konečná.
Podpokrytím pokrytí $\{B_i\}$ nazveme takový podsystém množin $\{B_i\}$, který je opět pokrytím množiny A.

Definice 1.7: Kompaktní množinou A nazveme množinu, pro jejíž každé otevřené pokrytí existuje konečné podpokrytí množiny A.
Topologický prostor X nazveme kompaktní, pokud je X kompaktní jako množina.

Příklad 4: Prostor $\mathbb{R}$ není kompaktní. Mějme dán systém intervalů $\{(-a,a); a \in \mathbb{N}\}$, který zřejmě pokrývá celé $\mathbb{R}$. Pokud bychom chtěli vybrat vhodné podpokrytí, mohli bychom pro každé $a \in \mathbb{N}$ odebrat všechny intervaly $(-1,1), \dots, (-a+1, a-1)$. Zbylé množiny v systému ponechme, abychom dosáhli pokrytí celého $\mathbb{R}$. Jenže takto vzniklý systém $\{(-a,a), (-a-1, a+1), \dots\}$ je stále nekonečný.
Pak tedy není kompatní ani žádný prostor $\mathbb{R}^n$, jelikož je to součin nekompaktních prostorů.
Stejně tak není kompaktní množinou libovolný otevřený interval (a,b), a to z podobného důvodu, jako celé $\mathbb{R}$. Stačí uvažovat pokrytí $\{(a+n, b-n); n \in \mathbb{N}, |b-a| > 2n\}$.

Věta 1.8: Nechť X je topologický prostor a $A, B \in X$ libovolné podmnožiny.

1. Jsou-li A, B kompaktní, pak i $A \cup B$ je kompaktní.
2. Je-li A kompaktní a $B \subset A$ otevřená, pak $A \setminus B$ je kompaktní.
3. Je-li $A \subset B$ a uzávěr $\overline{B}$ je kompaktní, pak $\overline{A}$ je také kompaktní.

Důkaz: Nechť $i \in I$, kde I je libovolná množina indexů.

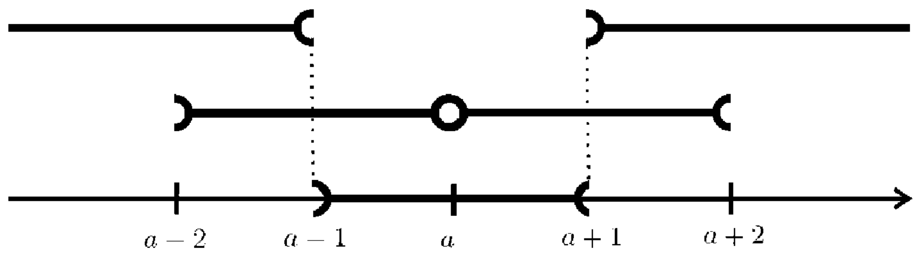
1. Nechť $\{U_i\}$ je otevřené pokrytí $A \cup B$. Je tedy také otevřeným pokrytím A. Poněvadž A je kompaktní, lze z $\{U_i\}$ vybrat konečné podpokrytí $\{V_i\}$ množiny A. Stejně lze vybrat konečné podpokrytí $\{W_i\}$ množiny B. Pak systém $\{V_i\} \cup \{W_i\}$ je taktéž konečný. Neboť $A \subset \{V_i\}$ a $B \subset \{W_i\}$, je také $(A \cup B) \subset (\{V_i\} \cup \{W_i\})$. Tedy $\{V_i\} \cup \{W_i\}$ a je konečným pokrytím množiny $A \cup B$. Tedy $A \cup B$ je kompaktní.

2. Nechť $\{U_i\}$ je otevřené pokrytí A. Protože je B otevřená množina, pak taktéž $B \cup \{U_i\}$ je otevřené pokrytí A. Protože je A kompaktní, můžeme z něj vybrat konečné podpokrytí $B \cup \{V_i\}$. Potom $\{V_i\}$ je konečný systém a protože $A \subset (B \cup \{V_i\})$, pak $(A \setminus B) \subset \{V_i\}$. Tedy $\{V_i\}$ je konečné pokrytí $A \setminus B$ a $A \setminus B$ je kompaktní.

3. Pokud platí $A \subset B$, potom $\overline{A} \subset \overline{B}$. Dále platí, že $\overline{B} \setminus \overline{A}$ je otevřená množina. Pak tvrzení plyne z druhé části.

Definice 1.9: Lokálně konečným nazveme systém množin $\{U_i\}$, $i \in I$, v topologickém prostoru X, pokud každý bod $x \in X$ má okolí U takové, že $U \cap U_i \neq \varnothing$ jen pro konečný počet indexů i.

Příklad 5: Uvažujme na $\mathbb{R}$ systém intervalů $\{(a-1, a+1); a \in \mathbb{Z}\}$. Každý bod $x \in \mathbb{R}$ náleží alespoň do jednoho z nich a zároveň nejvýše do dvou. Tedy tento systém je lokálně konečný.



Definice 1.10: Zjemněním pokrytí $\{U_i\}$, $i \in I$ nazveme pokrytí $\{V_k\}$, $k \in K$, kde K je další množina indexů, pokud pro každý index $k \in K$ existuje index $i \in I$ tak, že $V_k \subset U_i$.

Definice 1.11: Parakompaktním nazveme topologický prostor X, pokud je oddělitelný a libovolné jeho otevřené pokrytí má lokálně konečné zjemnění.

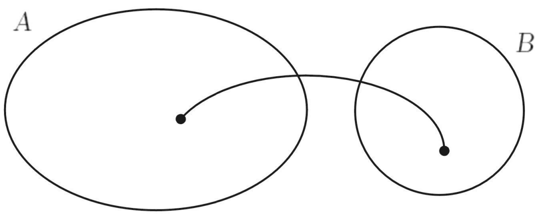
Rozdíl mezi kompaktností a parakompaktností spočívá v tom, že zatímco v prvním případě použijeme k pokrytí celé množiny jen konečný počet množin, v druhém případě jich můžeme použít libovolný počet. Pouze musí platit, že libovolný bod je obsahován jen konečným počtem z nich.

Příklad 6: Prostor $\mathbb{R}$ je parakompaktní. Že je oddělitelný, jsme si ukázali v *Příkladu 1*. Dále platí, že pro každé dva body $x, y \in \mathbb{R}$ existují jejich okolí s neprázdným průnikem. Mějme tedy libovolné otevřené pokrytí $\mathbb{R}$. Použijeme-li této poučky na větší množinu bodů, dostaneme jistý systém intervalů. Ten, pokud jsme vhodně zvolili body a jejich okolí, pak je lokálně konečným zjemněním původního pokrytí.

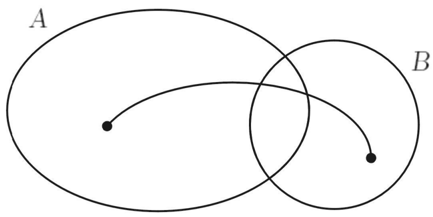
Pojem souvislého prostoru je dalším důležitým pojmem pro definici topologické variety.

Definice 1.12: Souvislým nazveme topologický prostor X, pokud neexistují otevřené množiny $A, B \subset X$ takové, že $X = A \cup B$ a zároveň $A \cap B = \varnothing$.

Pokud bychom měli souvislý prostor vysvětlit hodně obrazně, mohli bychom říci, že z každého jeho bodu se dostaneme do libovolného jiného, aniž bychom po cestě opustili daný prostor. Malou pomůckou i příkladem může být následující obrázek.



nesouvislý prostor



souvislý prostor

Příklad 7: Prostor $\mathbb{R}$ je zřejmě souvislý. Dokažme to sporem. Nechť $\mathbb{R} = A \cup B$ a $A \cap B = \emptyset$, kde $A, B \neq \mathbb{R}$ jsou otevřené množiny. Dále nechť $x \in h(A)$, tedy platí $x \notin A$ a tudíž musí $x \in B$. Ale podle *Poznámky 1.2* platí pro nějaké jeho okolí $U \subset B$. V $\mathbb{R}$ platí $U \cap A \neq \emptyset$ a dostáváme tedy spor s tím, že $A \cap B = \emptyset$.
Pokud bychom však neuvažovali topologii na celém $\mathbb{R}$, ale pouze na množině $X = (a, b) \cup (c, d)$, pak prostor X je nesouvislý.

Abychom mohli pracovat s různými prostory a mohli mezi nimi i přecházet, musíme si definovat pojem spojitého zobrazení a z něj vycházejícího pojmu homeomorfismu.

Definice 1.13: Zobrazení $f : X \to Y$, kde X a Y jsou topologické prostory, nazveme spojité v bodě $x \in X$, pokud ke každému okolí V bodu $f(x) \in Y$ existuje okolí U bodu x takové, že $f(U) \subset V$.
Zobrazení f nazveme spojité, je-li spojité v každém bodě $x \in X$.
Homeomorfismem nazveme bijektivní zobrazení f, jsou-li f i f^{-1} spojitá.
Homeomorními nazveme topologické prostory X, Y, existuje-li mezi nimi homeomorfismus.

Poznámka 1.14: Ekvivalentní definice spojitého zobrazení zní: Zobrazení $f : X \to Y$ nazveme spojité, pokud vzor $f^{-1}(V) \subset X$ každé otevřené množiny $V \subset Y$ je otevřená množina.

Příklad 8: Ukážeme si jeden jednoduchý příklad nespojité funkce, na kterém bude vidět, k čemu nesmí dojít u funkcí spojitých.
Mějme tedy danou funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Tato funkce je nespojitá v bodě $x = 0$.
Vezměme okolí $V = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ bodu $f(0) = 0$ a libovolně malé okolí $U = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pro každé n platí, že $\frac{1}{n+1} \in U$. Ale zároveň platí $\frac{1}{n+1} > 0$ a tedy $f(\frac{1}{n+1}) = 1$. Jenže $1 \notin V$, tedy není splněna podmínka spojitosti v bodě.
Tedy je vidět, že u spojitých funkcí nesmí existovat žádný „schod“.

Věta 1.15: Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení topologických prostorů.

1. Nechť $g : Y \to Z$ je další spojité zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f : X \to Z$ je také spojité.

2. Nechť $U \subset X$ je kompaktní množina. Pak také množina $f(U) \subset Y$ je kompaktní.

Důkaz: V obou částech důkazu využíváme definice spojitosti z *Poznámky 1.14*.

1. Nechť $W \subset Z$ je libovolná otevřená množina. Ze spojitosti zobrazení g je její vzor $g^{-1}(W) \subset Y$ také otevřená množina. Podobně je $f^{-1}(g^{-1}(W)) \subset X$ také otevřená. Tedy W i $(g \circ f)^{-1}(W)$ jsou otevřené množiny a tedy zobrazení $g \circ f : X \to Z$ je spojité.

2. Nechť $\{V_i\}$, kde $V_i \subset Y$, je otevřené pokrytí množiny $f(U)$. Díky spojitosti f je $\{f^{-1}(V_i)\}$ otevřené pokrytí množiny U. Množina U je ovšem kompaktní a tedy lze vybrat konečné podpokrytí $\{W_i\}$, kde $W_i \subset X$. Pak $\{f(W_i)\}$ je konečné podpokrytí množiny $f(U)$ a tedy $f(U)$ je kompaktní.

Tím jsme si připravili již dostačující podmínky k zavedení topologické variety a dalších pojmů s ní souvisejících.

2 Diferencovatelná zobrazení

Definice 2.1: Nechť jsou dány množiny $U \subset \mathbb{R}^m$ a $V \subset \mathbb{R}^n$.

- Funkci $f : U \to \mathbb{R}$ nazveme třídy C^k, pokud existují všechny její derivace až do k včetně, $k = 0, 1, \ldots, \infty$. Hladkou nazveme funkci třídy C^∞.
- Zobrazení $f : U \to V$ nazveme diferencovatelné třídy C^k, pokud každá jeho složka je funkcí třídy C^k. Hladkým nazveme zobrazení třídy C^∞.

Definice 2.2: Difeomorfismem třídy C^k nazveme bijektivní zobrazení $f : M \to N$ takové, že f i f^{-1} jsou třídy C^k.

Příklad 9: Hladkými jsou například funkce polynomické, sinus a kosinus.
Funkce $\sqrt[3]{x}$ je hladká na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, ale třeba na intervalu $(-1, 1)$ je pouze třídy C^0, neboť neexistuje její první derivace v bodě 0.

Dále si definujeme tzv. rozklad jednotky, jež později hraje základní úlohu v globalizování některých vlastností na celé variety.

Definice 2.3: Nosičem funkce $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme uzávěr množiny $\{x \in U; f(x) \neq 0\}$. Značíme jej $suppf$.

Definice 2.4: Rozkladem jednotky nazveme spočetný systém $\{f_i\}$ hladkých funkcí $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in I$, jež splňují následující tři podmínky:

- Systém množin $\{suppf_i\}$ je lokálně konečným pokrytím variety U.
- Pro všechna $x \in X$ a všechna $i \in I$ platí $f_i(x) \geq 0$.
- Pro každé $x \in U$ platí
$$\sum_{i \in I} f_i(x) = 1.$$

Nyní bez důkazu uvedeme jednu klasickou větu z matematické analýzy.
V dalším textu budeme chápat zobrazení $f : U \to V$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$, dáno složkami $y^1 = (f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^k = f^k(x^1, \ldots, x^n))$.

Věta 2.5 (o implicitním zobrazení): Nechť $G^j(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, kde $j = 1, \ldots, n$, jsou reálné funkce třídy C^k, $k \geq 1$, definované na nějakém okolí W bodu $(a^1, \ldots, a^m, b^1, \ldots, b^n) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Dále nechť platí následující dvě podmínky:

- $G^j(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) = 0$ pro $j = 1, \ldots, n$
- $det(\frac{\partial G^j(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)}{\partial y^i}) \neq 0$.

Pak existují okolí U bodu $(a^1, \ldots, a^m) \in \mathbb{R}^m$ a V bodu $(b^1, \ldots, b^n) \in \mathbb{R}^n$ taková, že $U \times V \subset W$ a pro každý bod $(x^1, \ldots, x^m) \in U$ existuje právě jeden bod $(y^1, \ldots, y^n) \in V$ takový, že $G^j(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0$ pro $j = 1, \ldots, n$.

Jsou-li tedy splněny podmínky věty, můžeme funkci $y = f(x)$ lokálně vyjádřit jako $G(x, f(x)) = 0$. Podobně jako v následujícím příkladě.

Příklad 10: Mějme reálnou funkci $G^1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Tato funkce je definovaná na libovolném okolí bodu $(1, 1, 2)$, tedy i na celém $\mathbb{R}^3$. Nyní ověříme, zda platí příslušné podmínky:

- $G^1(1, 1, 2) = 1 + 1 - 2 = 0$
- $det(\frac{\partial G^1(1,1,2)}{\partial z}) = det(-1) = -1 \neq 0$

Podmínky jsou tedy splněny. Nyní můžeme vzít okolí bodu $(1, 1)$ celé $\mathbb{R}^2$ a bodu (2) celé $\mathbb{R}$. Určitě platí $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$. Pro každý bod (x, y) zřejmě existuje právě jeden bod (z) takový, že $G^1(x, y, z) = 0$. Stačí za z dosadit $x^2 + y^2$.
Tímto jsme tedy definovali funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanou předpisem $f(x, y) = x^2 + y^2$, jejímž grafem je rotační paraboloid s osou z.

Můžeme také říct, že funkce f je řešením rovnice $G = 0$. Což přenesením do vyšších dimenzí znamená, že funkce f^p jsou řešením soustavy rovnic $G^p = 0$.

Nyní si ukážeme, že Jacobián difeomorfismu musí být nenulový. K tomu, abychom tuto větu mohli dokázat, si ale musíme uvést dvě lemma.

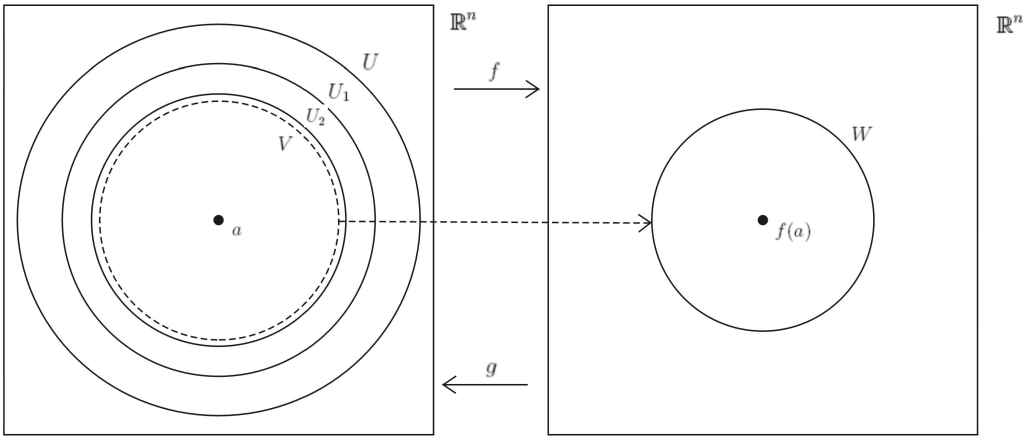
Lemma 2.6: Nechť $f : U \to V$, kde $U, V \subset \mathbb{R}^n$, je difeomorfismus, pak jeho Jacobián je nenulový pro všechna $a \in U$.

Důkaz: Zobrazení f je homeomorfismus s Jacobiho maticí A, existuje k němu tedy inverzní zobrazení $f^{-1} : V \to U$ s Jacobiho maticí B. Tedy složením těchto zobrazení dostáváme $f^{-1} \circ f = id_U$. Zobrazení $f^{-1} \circ f$ má Jacobiho matici $A \cdot B$. Jak je z algebry známo, Jacobiho maticí identity je jednotková matice E. Dále víme, že platí $det(A \cdot B) = detA \cdot detB = detE = 1$. Odtud plyne, že $detA \neq 0$.

Lemma 2.7: Nechť $f : U \to \mathbb{R}^n$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$, je zobrazení třídy C^k a má v každém bodě nenulový Jacobián, pak $f(U)$ je otevřená množina.

Důkaz: Definujme na $U \times \mathbb{R}^n$ funkce $G^i(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) = y^i - f^i(x^1, \ldots, x^n)$, kde $i = 1, \ldots, n$. Protože $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ je nenulová matice a platí $\frac{\partial G^i}{\partial x^j} = -\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$, je $det(\frac{\partial G^i}{\partial x^j})$ také nenulový v každém bodě.
Tedy podle *Věty 2.5* pro každé $a \in U$ existují na jistém okolí V_a bodu $f(a)$ funkce $x^i = g^i_a(y)$, které jsou řešením rovnic $G^i = 0$. Ty můžeme považovat za složky zobrazení $g_a : V_a \to U$. Vzhledem k tomu, jak jsme definovali funkce G^i, platí $y = f(g_a(y))$. Pokud tento vztah použijeme pro všechna $y \in V_a$, dostaneme $V_a = f(g_a(V_a))$. Z toho plyne $V_a \subset f(U)$.
Celkově tedy pro každý bod $a \in U$ existuje k jeho obrazu $f(a)$ okolí $V_a \subset f(U)$ a podle *Poznámky 1.2* je $f(U)$ otevřená množina.

Věta 2.8: Nechť $f : U \to \mathbb{R}^n$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy C^k. Dále nechť pro nějaké $a \in U$ je $det\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x^j}\right) \neq 0$. Pak existují okolí $V \subset U$ bodu a a okolí W bodu $f(a)$ taková, že $f : V \to W$ je difeomorfismus.



Důkaz: Funkce $det\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x^j}\right)$ je spojitá. Existuje tedy nějaké okolí $U_1 \subset U$ bodu a, ve kterém je tato funkce nenulová. Podle *Věty 2.5* existují okolí $U_2 \subset U_1$ bodu a a W bodu $f(a)$ a zobrazení $g : W \to U_2$ taková, že g je jediným řešením rovnic $y^i - f^i(x^1, \ldots, x^n) = 0$ na $U_2 \times W$. Pro všechna $y \in W$ platí $y = f(g(y))$ a podobně jako v důkazu *Lemma 2.6* dostaneme $det\left(\frac{\partial g_i(a)}{\partial y^j}\right) \neq 0$.
Označme nyní $V := g(W)$. Podle *Lemma 2.7* je V otevřená podmnožina U_2. Protože všechna $x \in V$ jsou tvaru $x = g(y)$, kde $y \in W$, dostáváme $f(x) = f(g(y)) = y \in V$. Odtud tedy $f(V) \subset W$.
Uvažujme nyní obě zobrazení f, g zúžené na množiny $f : V \to W$ a $g : W \to V$. Ukážeme že g je inverzní zobrazení k f. Jak již bylo uvedeno, pro všechna $y \in W$ platí $y = f(g(y))$ a tedy $f \circ g = id_W$.
Každé $x \in V$ má svůj obraz $y = f(x)$, jež jsou společně zřejmě řešením soustavy rovnic $y^i - f^i(x^1, \ldots, x^n) = 0$. Tím je také $g(f(x))$, neboť $f(g(f(x))) = (f \circ g)(f(x)) = f(x)$. Odtud a z jednoznačnosti řešení soustavy $y^i - f^i(x^1, \ldots, x^n) = 0$ plyne $x = g(f(x))$. Tedy $g \circ f = id_V$.
Odtud plyne, že g je inverzní zobrazení k f a tedy f je difeomorfismus mezi V a W.

Nyní si ukážeme dvě základní diferencovatelná zobrazení, imersi a submersi.
$Rk_a f$ značí hodnost matice $\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x^j}\right)$.

Definice 2.9: Imersí nazveme zobrazení $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, jestliže $Rk_a f = n$ pro všechna $a \in U$.
Aby definice měla smysl, musí platit $n \leq k$.

Věta 2.10: Nechť $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je imerse. Pak pro každé $a \in U$ existuje okolí $V \subset U$, pro $f(a)$ okolí W a křivočará soustava souřadnic $\overline{y}^p$ na W taková, že zobrazení $f|V$ má tvar

$$\overline{y}^1 = x^1, \dots, \overline{y}^n = x^n, \overline{y}^{n+1} = 0, \dots, \overline{y}^k = 0.$$

Důkaz: Zobrazení f má v libovolném bodě $a \in U$ hodnost n, tudíž v jeho Jacobiho matici existuje determinant stupně n různý od nuly v bodě a. Přečíslením souřadnic y^p můžeme snadno dosáhnout toho, že nenulový bude $det(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}), i, j = 1, \dots, n$. Nyní v prostoru $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n}$ uvažujme bod $(a, 0)$, kde $0 \in \mathbb{R}^{k-n}$. Uvažujme dále zobrazení $g : U \times \mathbb{R}^{k-n} \to \mathbb{R}^k$ určené rovnicemi

$$y^i = f^i(\overline{y}^1, \dots, \overline{y}^n), \text{ kde } i = 1, \dots, n,$$
$$y^{n+s} = \overline{y}^{n+s} + f^{n+s}(\overline{y}^1, \dots, \overline{y}^n), \text{ kde } s = 1, \dots, k-n.$$

Pak platí $g(a, 0) = f(a)$ a Jacobiho matice zobrazení g má tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} & 0 \\ \frac{\partial f^{n+s}}{\partial x^j} & E \end{pmatrix},$$

kde 0 je nulová matice $n \times (k-n)$ a E je jednotková matice $(k-n) \times (k-n)$. Z lineární algebry víme, že determinant této matice je roven determinantu $det(\frac{\partial f^i}{\partial x^j})$ a je tudíž nenulový.
Proto podle *Věty 2.8* existují okolí Z bodu $(a, 0)$ a W bodu $g(a, 0)$ taková, že $g : Z \to W$ je difeomorfismus. Inverzní zobrazení $g^{-1} : W \to Z$ určuje křivočarou soustavu souřadnic na W.
Pokud zúžíme zobrazení f na dostatečně malé okolí V bodu a, pak z jednoznačnosti rovnic

$$y^i = f^i(\overline{y}^1, \dots, \overline{y}^n), \text{ kde } i = 1, \dots, n,$$

plyne, že f má rovnice $\overline{y}^i = x^i$. Pokud dále dosadíme $y^{n+s} = f^{n+s}(x)$ a $\overline{y}^i = x^i$ do rovnic

$$y^{n+s} = \overline{y}^{n+s} + f^{n+s}(\overline{y}^1, \dots, \overline{y}^n), \text{ kde } s = 1, \dots, k-n,$$

dostaneme $f^{n+s}(x) = \overline{y}^{n+s} + f^{n+s}(x)$. Z toho plyne $\overline{y}^{n+s} = 0$. Tím je věta dokázána.

Provedený důkaz si projdeme názorněji krok po kroku v následujícím příkladu.

Příklad 11: Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je určena takto: $U = \{x^1 \in (-1, 1); x^2 \in \mathbb{R}\}$. Dále mějme zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^3$ zadané rovnicemi

$$f^1 : y^1 = x^2,$$
$$f^2 : y^2 = x^1,$$
$$f^3 : y^3 = x^1 + x^2.$$

Toto zobrazení má v bodě $a = (0, 1) \in U$, stejně jako v celém U, hodnost 2. Nyní tedy platí

$$det\left(\frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}\right) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(a)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(a)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f^2(a)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(a)}{\partial x^2} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Nyní v prostoru $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ uvážíme bod $(a, 0) = (0, 1, 0)$ a zobrazení $g : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadané rovnicemi

$$g^1 : y^1 = \overline{y}^2,$$
$$g^2 : y^2 = \overline{y}^1,$$
$$g^3 : y^3 = \overline{y}^3 + \overline{y}^1 + \overline{y}^2.$$

Platí $g(a, 0) = g(0, 1, 0) = (1, 0, 1) = f(0, 1) = f(a)$ a Jacobiho matice zobrazení g má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial \overline{y}^1} & \frac{\partial y^1}{\partial \overline{y}^2} & \frac{\partial y^1}{\partial \overline{y}^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial \overline{y}^1} & \frac{\partial y^2}{\partial \overline{y}^2} & \frac{\partial y^2}{\partial \overline{y}^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial \overline{y}^1} & \frac{\partial y^3}{\partial \overline{y}^2} & \frac{\partial y^3}{\partial \overline{y}^3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Determinant této matice je v bodě $(a, 0)$ opět roven $-1 \neq 0$. Existují příslušná okolí, na nichž je g difeomorfismus. Inverzní zobrazení g^{-1} má tedy celkově rovnice

$$(g^{-1})^1 : \overline{y}^1 = y^2 = x^1,$$
$$(g^{-1})^2 : \overline{y}^2 = y^1 = x^2,$$
$$(g^{-1})^3 : \overline{y}^3 = -y^1 - y^2 + y^3 = -x^2 - x^1 + x^1 + x^2 = 0.$$

Toto zobrazení takto určuje křivočarou soustavu souřadnic, která splňuje požadavky věty.

Definice 2.11: Submersí nazveme zobrazení $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, jestliže $Rk_a f = k$ pro všechna $a \in U$.
Aby definice měla smysl, musí platit $n \geq k$.

Věta 2.12: Nechť $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je submerse. Pak pro každé $a \in U$ existuje okolí $V \subset U$ a křivočará soustava souřadnic $\overline{x}^i$ na V taková, že zobrazení $f|V$ má tvar

$$y^1 = \overline{x}^1, \ldots, y^k = \overline{x}^k.$$

Důkaz: Tento důkaz se vede obdobně, jako v předchozím případě. Zobrazení f má v libovolném bodě $a \in U$ hodnost k, tudíž v jeho Jacobiho matici existuje determinant stupně k různý od nuly v bodě a. Přečíslením souřadnic x^i můžeme snadno dosáhnout toho, že nenulový bude $det(\frac{\partial f^p}{\partial x^q}), p, q = 1, \ldots, k$.
Uvažujme dále zobrazení $g : U \to \mathbb{R}^n$ určené rovnicemi

$$\overline{x}^p = f^p(x^1, \ldots, x^n), \text{ kde } p = 1, \ldots, k,$$
$$\overline{x}^{k+s} = x^{k+s}, \text{ kde } s = 1, \ldots, n - k.$$

Jacobiho matice zobrazení g má tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^p}{\partial x^q} & \frac{\partial f^p}{\partial x^{k+s}} \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

kde 0 je nulová matice $(n - k) \times k$ a E je jednotková matice $(n - k) \times (n - k)$. Z lineární algebry víme, že determinant této matice je roven determinantu $det(\frac{\partial f^p}{\partial x^q})$ a

je tudíž nenulový.
Tedy existují okolí bodu a a $g(a)$ na nichž je g difeomorfismus, který můžeme považovat za křivočarou soustavu souřadnic. V těchto souřadnicích má pak zobrazení f rovnice $y^1 = \overline{x}^1, \dots, y^k = \overline{x}^k$.

Důkaz si, podobně jako v předchozím případě, ukážeme na konkrétním příkladě.

Příklad 12: Nechť $U \subset \mathbb{R}^3$ je určena takto: $U = \{x^1 \in (-1,1); x^2 \in (-1,1); x^3 \in \mathbb{R}\}$. Dále mějme zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^2$ zadané rovnicemi

$$\begin{aligned} f^1 &: y^1 = x^1 + (x^3)^2, \\ f^2 &: y^2 = 3x^2 - x^3. \end{aligned}$$

Toto zobrazení má v bodě $a = (0,0,1) \in U$, stejně jako v celém U, hodnost 2. Nyní tedy platí

$$det\left(\frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}\right) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(a)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(a)}{\partial x^2} \\ \\ \frac{\partial f^2(a)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(a)}{\partial x^2} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0.$$

Nyní uvážíme zobrazení $g : U \times \mathbb{R}^3$ zadané rovnicemi

$$\begin{aligned} g^1 &: \overline{x}^1 = x^1 + (x^3)^2, \\ g^2 &: \overline{x}^2 = 3x^2 - x^3, \\ g^3 &: \overline{x}^3 = x^3. \end{aligned}$$

Jacobiho matice zobrazení g má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^3} \\ \\ \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^3} \\ \\ \frac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \overline{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x^3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Determinant této matice je v bodě a opět roven $3 \neq 0$. Existují tedy příslušná okolí, na nichž je g difeomorsismus, který určuje křivočarou soustavu souřadnic, která má celkově rovnice

$$\begin{aligned} f^1 &: y^1 = x^1 + (x^3)^2 = \overline{x}^1, \\ f^2 &: y^2 = 3x^2 - x^3 = \overline{x}^2. \end{aligned}$$

Tedy přesně tak, jak má podle věty platit.

3 Variety

3.1 Zavedení pojmu

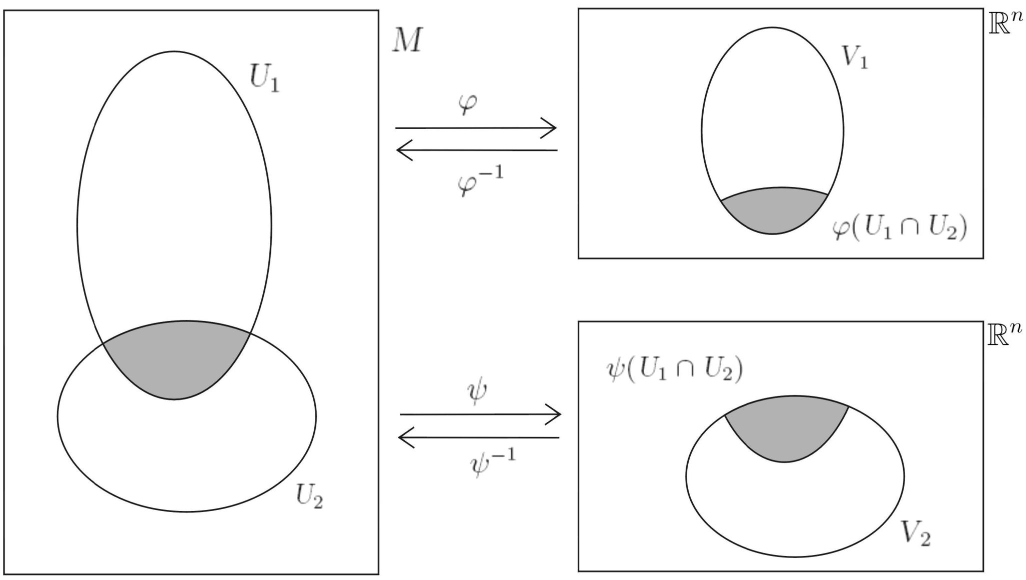
Definice 3.1: Topologickou m-rozměrnou varietou nazveme souvislý parakompaktní topologický prostor M se spočetnou bází, v němž pro každý bod $x \in M$ existuje okolí U takové, že zobrazení $\varphi : U \to V$, kde φ je homeomorfismus a $V \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina.

Příklad 13: Příkladem m-rozměrné topologické variety je zřejmě prostor $\mathbb{R}^m$. Tento prostor má zřejmě spočetnou bázi. Z *Příkladu 7* víme, že množina $\mathbb{R}$ je souvislá, to ale platí i pro vyšší dimenze. Podobně z *Příkladu 6* dostaneme parakompaktnost $\mathbb{R}^m$. Oním homeomorfismem pak je například identické zobrazení.
Libovolná souvislá otevřená podmnožina $\mathbb{R}^m$ je topologickou varietou, která je nejvýše m-rozměrná.
Dále pak n-rozměrná sféra $\mathbb{S}^n$ je n-rozměrnou topologickou varietou. Zde se musíme oprostit od ,,přirozeného" pohledu na tyto objekty. Dvourozměrná sféra se totiž nejsnáze vyobrazí jako povrch koule. Z toho lze usoudit, že se jedná o třírozměrný objekt. Pokud bychom ji však ,,rozvinuli", dostali bychom pouze část dvourozměrné plochy. Musíme se tedy oprostit od okolního prostoru a brát je tedy jako samostatné objekty.

V dalším textu budeme automaticky uvažovat pouze topologické variety, nebude-li řečeno jinak.

Definice 3.2: Lokální mapou na M nazveme homeomorfismus $\varphi : U \to V$, kde $U \subset M$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny.

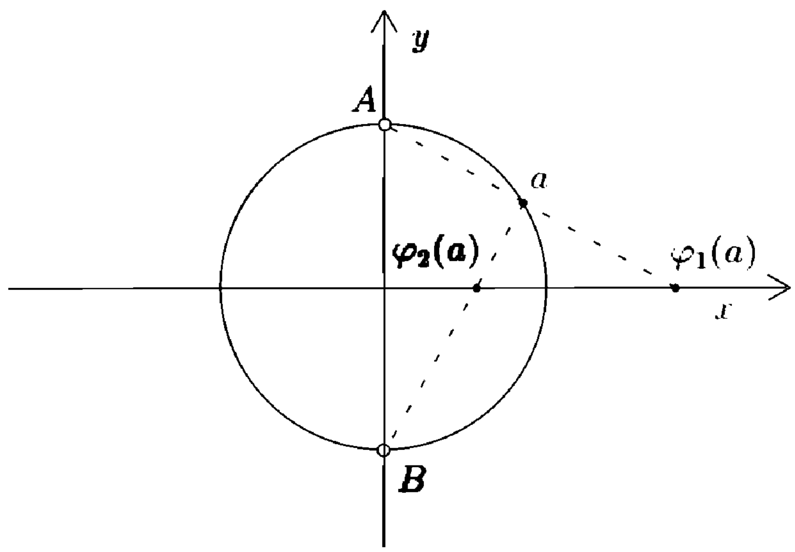
Definice 3.3: Nechť $\varphi : U_1 \to V_1$ a $\psi : U_2 \to V_2$, kde $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ jsou dvě lokální mapy na M. Nazveme je C^k-relované, jestliže obě zobrazení $(\varphi \circ \psi^{-1} \mid \psi(U_1 \cap U_2)) : V_2 \to V_1$ a $(\psi \circ \varphi^{-1} \mid \varphi(U_1 \cap U_2)) : V_1 \to V_2$ jsou třídy C^k.



Definice 3.4: Atlasem $\mathcal{A}$ třídy C^k na M nazveme množinu C^k-relovaných map $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $\alpha \in I$, takových, že množiny U_α pokrývají celé M.

Pojem mapy a atlasu si můžeme zcela poprávu ztotožnit se stejnými výrazy v zeměpise. Tam na dvourozměrné mapy zobrazujeme (i když pouze zkresleně) například zemský povrch, který tak vlastně můžeme považovat za varietu. Soubor takových map pak zveme atlasem. Musíme však mít na paměti, že mapou zde nemyslíme výsledný obraz, ale zobrazení, které tento obraz vytvoří.
V atlase světa jsou mapy, které zobrazují celý povrch Země. Jedno místo se přitom může vyskytovat na více z nich, protože se mapy překrývají. Což ani u našeho atlasu není zakázáno.

Příklad 14: Mějme jednotkovou kružnici, jež je jednorozměrnou varietou (jednorozměrná sféra $\mathbb{S}^1$). Pro větší názornost si ji představme v prostoru $\mathbb{R}^2$.
Označme A, B průsečíky kružnice s osou y. Na množinách $U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{A\}$ a $U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{B\}$ definujme postupně mapy $\varphi_1 : U_1 \to V_1$, $\varphi_2 : U_2 \to V_2$, jak je uvedeno na obrázku.



Pak platí $V_1 = \mathbb{R}$ a $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stejné výsledky dostaneme i pro V_2 a $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$. Dále dostáváme zobrazení

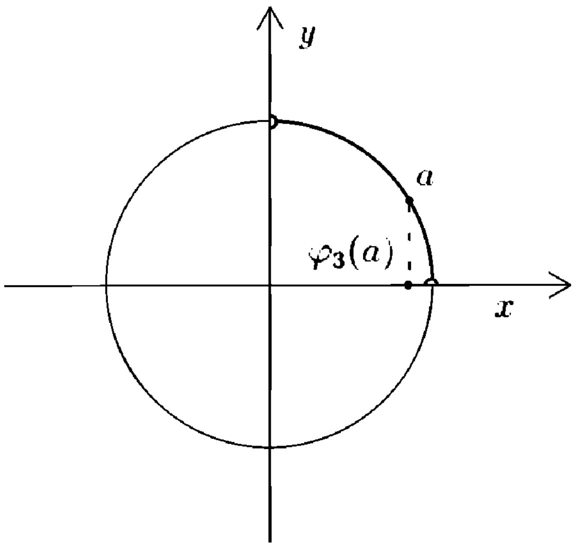
$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \mid \mathbb{R} \setminus \{0\})(x) = \frac{1}{x},$$
$$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \mid \mathbb{R} \setminus \{0\})(x) = \frac{1}{x}.$$

Tato zobrazení jsou hladká. Tedy φ_1, φ_2 jsou C^∞-relované mapy a spolu tvoří atlas $\mathcal{A}$ třídy C^∞.

V následující definici k sobě přiřadíme všechny mapy, které k sobě, obrazně řečeno, patří a všechny je sloučíme do jednoho atlasu.

Definice 3.5: Mapu μ nazveme slučitelnou s atlasem $\mathcal{A}$ třídy C^k, jestliže pro každou mapu $\varphi_i \in \mathcal{A}$ platí, že μ a φ_i jsou C^k-relované.
Úplným nazveme atlas $\mathcal{A}$, pokud obsahuje všechny mapy s ním slučitelné.

Příklad 15: Navažme na předchozí příklad a uvažujme další mapu $\varphi_3 : U_3 \to V_3$ na množině $U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1; x > 0, y > 0\}$, jak je ukázáno na obrázku.



Pak platí $V_3 = (0, 1)$ a celkově dostáváme

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, & \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, & \varphi_3(U_1 \cap U_3) = (0, 1), \\ \varphi_1(U_1 \cap U_3) = (1, \infty), & \varphi_2(U_2 \cap U_3) = (0, 1), & \varphi_3(U_2 \cap U_3) = (0, 1). \end{array}$$

Dále lze vypočíst na těchto příslušných podmnožinách $\mathbb{R}$ zobrazení

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x) = \tfrac{1}{x}, \quad (\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1})(x) = \tfrac{2x}{x^2+1}, \quad (\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1})(x) = \tfrac{2x}{x^2+1},$$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(x) = \tfrac{1}{x}, \quad (\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1})(x) = \tfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad (\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1})(x) = \tfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Tato zobrazení jsou na příslušných intervalech hladká a tedy mapa φ_3 je slučitelná s atlasem $\mathcal{A}$.

Zřejmě platí, že úplný atlas vznikne tím, pokud k libovolnému atlasu přidáme všechny mapy s ním slučitelné.

Definice 3.6: Lokálními souřadnicemi (nebo jen souřadnicemi) na m-rozměrné varietě M nazveme zobrazení $x^i = v^i \circ \varphi : U \subset M \to \mathbb{R}$, kde $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ je mapa na M a $v^i : V \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, jsou standardní souřadnice prostoru $\mathbb{R}^m$. (Lokální) souřadnicouvou soustavou nazveme systém funkcí $(x^1, \ldots, x^m)$.

Z definice je vidět, že příslušné souřadnice jsou určené mapou φ. Pro různé mapy, tedy budeme dostávat různé souřadnice.

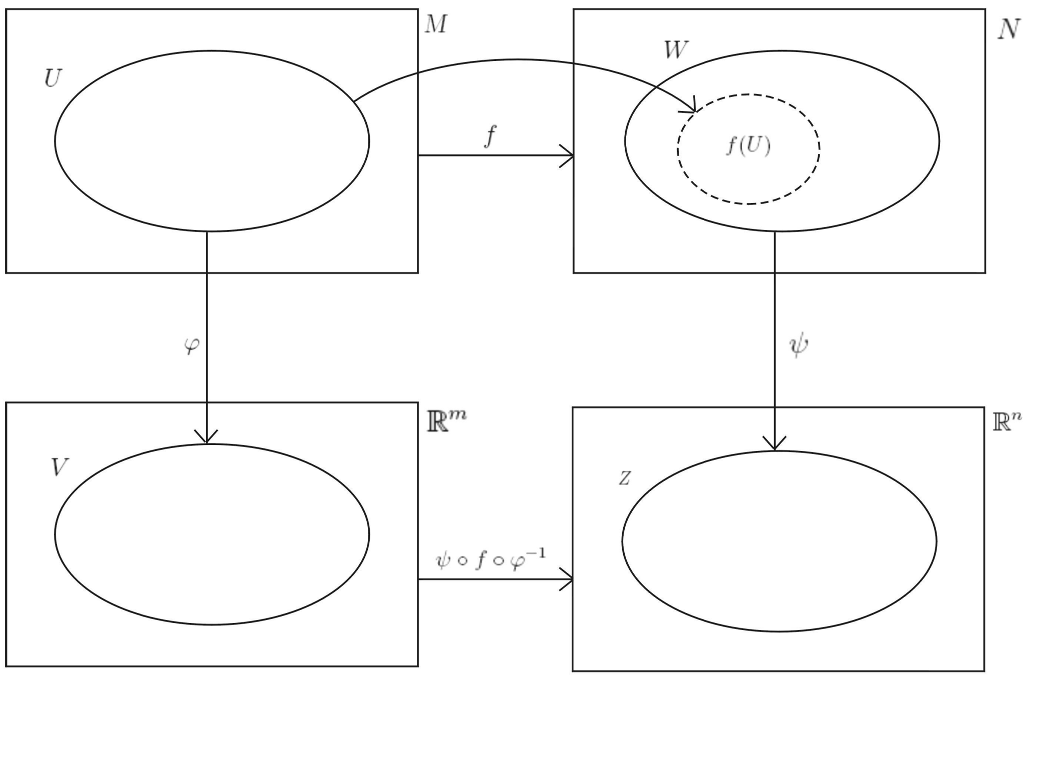
Definice 3.7: Nechť M, N jsou variety, $\varphi : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^m$ a $\psi : W \subset N \to Z \subset \mathbb{R}^n$ příslušné mapy, a $f : M \to N$ spojité zobrazení mezi varietami. Souřadnicovým vyjádřením zobrazení f vzhledem k dvojici map φ a ψ nazveme zobrazení $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Nyní využijeme právě zavedených pojmů k definici diferencovatelné variety. Předešlé pojmy jsme nutně potřebovali k vytvoření hladké struktury na varietě.

Definice 3.8: Diferencovatelnou varietou třídy C^k (nebo též C^k-varietou) nazveme topologickou varietu M společně s úplným atlasem $\mathcal{A}$ třídy C^k.
Hladkou nazveme diferencovatelnou varietu třídy C^∞.

Diferencovatelnou varietu bychom mohli zapisovat také jako dvojici $(M, \mathcal{A})$, ale nám bude stačit označení prostým M. To, jestli se jedná o varietu, nebo množinu, bude zřejmé z textu. Nadále také budeme uvažovat pouze hladké variety.

Definice 3.9: Nechť máme dány variety M s atlasem $\mathcal{A}$ a N s atlasem $\mathcal{B}$. Třídy C^k nazveme spojité zobrazení $f : M \to N$, kde pro libovolné dvě mapy $\varphi : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^m$ a $\psi : W \subset N \to Z \subset \mathbb{R}^n$ slučitelné s atlasy $\mathcal{A}$, respektive $\mathcal{B}$, které splňují podmínku $f(U) \subset W$, platí, že $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to Z$ je zobrazení třídy C^k.
Pokud je $k = \infty$ mluvíme o hladkém zobrazení.



Zřejmě složením dvou zobrazení třídy C^k dostaneme opět zobrazení třídy C^k.

Difeomorfismus $f : U \to V$, kde $U, V \subset \mathbb{R}^n$ můžeme též nazírat jako křivočarou soustavu souřadnic na U. Pro každé $x \in U$ tak můžeme n-tici čísel $(f^1(a), \ldots, f^n(a))$ chápat jako jisté souřadnice bodu a.

Definice 3.10: Nechť M je m-rozměrná varieta. N-rozměrnou podvarietou ($n \leq m$) nazveme množinu $N \subset M$, jestliže pro každý bod $x \in N$ existuje okolí U a difeomorfismus $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$, který zobrazí $U \cap N$ na množinu $W \subset V$ určenou rovnicemi $x^{n+1} = 0, \ldots, x^m = 0$.

Tato definice říká, že například křivka (jednorozměrná podvarieta) na nějaké dvourozměrné varietě se zobrazí na přímku v $\mathbb{R}^2$.

Nyní si ukážeme, že součin dvou variet je opět varieta. Předtím si ovšem řekneme, jak vytvořit příslušný atlas.
Mějme tedy m-rozměrnou varietu M s atlasem $\mathcal{A}$ a n-rozměrnou varietu N s atlasem $\mathcal{B}$. Potom platí, že množina

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{\varphi \times \psi; \varphi \in \mathcal{A}, \psi \in \mathcal{B}\}$$

je atlasem na (n+k)-rozměrné topologické varietě $M \times N$.

Definice 3.11: Nechť M je varieta s atlasem $\mathcal{A}$ a N varieta s atlasem $\mathcal{B}$. Součinem variet M a N nazveme varietu, jež je na topologickém součinu množin $M \times N$ určena atlasem $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

3.2 Příklady diferencovatelných variet

Příklad 16: Nejtriviálnější diferencovatelnou varietou je kartézský prostor $\mathbb{R}^n$. Na něm existuje atlas $\mathcal{A}$, jehož jediným zobrazením je $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tato varieta je zřejmě hladká.
Zároveň toto platí o otevřených podmnožinách $\mathbb{R}^n$.

Příklad 17: Mějme variety $\mathbb{S}$ s atlasem $\mathcal{A}$ z *Příkladu 14* a $\mathbb{R}$ s atlasem $\mathcal{B} = \{id\}$ z předchozího příkladu. Pak tedy dostáváme varietu $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$, jež si můžeme představit jako válcovou plochu. Její atlas se kládá ze dvou map:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \left\{\varphi_1 \times id : U_1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \varphi_2 \times id : U_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\right\}.$$

Jejich obory hodnot jsou $\mathbb{R}^2$ a tedy výsledná varieta je dvourozměrná.

Příklad 18: Vezměme nyní prostor $\mathbb{R}$ s mapou $\varphi(x) = x^3$, kde $x \in \mathbb{R}$. Zobrazení φ je skutečně mapou. Jeho definičním oborem i oborem hodnot je celé $\mathbb{R}$, což je otevřená množina. Dále $\varphi(x) = x^3$ i $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ jsou spojitá zobrazení, tedy φ je homeomorfismus.
Ukažme, že tato mapa není slučitelná s atlasem $\mathcal{A}$ z *Příkladu 16* (uvažovaným na prostoru $\mathbb{R}$). Platí totiž, že zobrazení $(id \circ \varphi^{-1})(x) = x^{\frac{1}{3}}$ a potom jeho první derivace je rovna $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. Ta však není definována v bodě $x = 0$ a tedy mapy id a φ nejsou C^∞-relované.

Tedy mapa φ opravdu není slučitelná s atlasem $\mathcal{A}$, i když ona sama tvoří také atlas třídy C^∞.

Příklad 19: Mějme sféru $\mathbb{S}^2$ a definujme na ní mapy φ_1 a φ_2 podobně jako jsme to udělali pro jednotkovou kružnici v *Příkladě 14*. Tedy jako promítnutí polohy bodu na rovinu $\mathbb{R}^2$ pomocí „pólů“. Pak tyto mapy také tvoří atlas, při jehož konstrukci postupujeme analogicky jako ve zmiňovaném příkladě. Rozdíl je však v přechodových zobrazeních mezi mapami. Platí totiž

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \mid \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \mid \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Toto zobrazení se nazývají kruhová inverze.
Pokud bychom se omezili pouze na jistý „řez“ sféry, dostaneme opět situaci v *Příkladě 14*. To platí i pro kruhovou inverzi, neboť jejím zúžením na jednorozměrný prostor dostaneme inverzi klasickou $\frac{1}{x}$. Tedy stejně jako v případě kružnice.

Příklad 20: Uvažujme tedy jednotkovou kružnici $\mathbb{S}^1$ jako podmnožinu sféry $\mathbb{S}^2$. Dále na $\mathbb{S}^2$ uvažujme mapy $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ a $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ stejné jako v předchozím příkladě. Nyní pro každý bod $x \in \mathbb{S}^1$ vezměme jeho okolí U_1, nebo U_2 a příslušný homeomorfismus $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2$, nebo $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2$. Pro ně platí $\varphi_1(U_1 \cap \mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ a $\varphi_2(U_2 \cap \mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$. Ale $\mathbb{R}$ je podmnožina $\mathbb{R}^2$ určena rovnicí $y = 0$, tedy $\mathbb{S}^1$ je podvarietou $\mathbb{S}^2$.

Příklad 21: Mějme n-rozměrnou varietu $M \subset \mathbb{R}^n$ a zobrazení $f : M \to \mathbb{R}^k$, kde $k < n$. Dále uvažujme množinu

$$N = \{x \in M; f(x) = 0\}$$

a nechť Jacobiho matice zobrazení f má hodnost k ve všech bodech množiny N, tedy f je na N submerse. Víme tedy, že množina $f(N)$ je dána souřadnicemi

$$y^1 = x^1, \dots, y^k = x^k.$$

Vzhledem k tomu, že $y^i = f^i(x) = 0$, kde $i = 1, \dots, k$, je $N = \left\{(0, \dots, 0, x^{k+1}, , x^n\right\}$. Takže N je (n-k)-rozměrná podvarieta M.

Příklad 22: Projektivní prostor $P^n\mathbb{R}$ nad prostorem $\mathbb{R}^{n+1}$ je n-rozměrnou varietou, uvažujeme-li jej zároveň s atlasem $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$. Mapy φ_i a jejich definiční obory $U_i \subset P^n\mathbb{R}$ jsou definovány takto:

$$U_i = \left\{x = (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^{n+1})\right\},$$

$$\varphi_i(x) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}).$$

Projektivní prostor v jistém smyslu koresponduje se sférou, což již bylo zmiňováno při jeho zavádění v lineární algebře. Dalo by se tedy podobně uvažovat i tomto příkladě. Atlas $\mathcal{A}$ by ovšem nepokryl celou plochu sféry, což však nevadí. V projektivním prostoru totiž protilehlé body na sféře splývají.

Příklad 23: Mějme n-rozměrný vektorový prostor V^n nad tělesem reálných čísel. Dále mějme jeho libovolnou bázi $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Víme tedy, že libovolný vektor z V^n můžeme napsat ve tvaru $v = a^1 v_1 + \ldots + a^n v_n$, kde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Definujme nyní zobrazení $\varphi : V^n \to \mathbb{R}^n$ takto:

$$\varphi(v) = (a_1, \ldots, a_n).$$

Pak φ je mapa na celém V^n určená jeho bází $\{v_1, \ldots, v_n\}$. A tedy V^n je diferencovatelná varieta.
Pokud nyní budeme uvažovat jinou bázi prostoru V^n a jí určenou mapu, dostaneme dvě C^∞-relované mapy. Lineární transformace od jedné báze k druhé je totiž hladké zobrazení.
Z toho plyne, že pomocí všech možných bází prostoru V^n dostaneme úplný atlas na tomto prostoru.

4 Použitá literatura

1. Kolář, Ivan: *Úvod do globální analýzy*, Masarykova univerzita, Brno, 2003

2. Kowalski, Oldřich: *Úvod do Riemannovy geometrie*, Univerzita Karlova, Praha, 1995

3. Krupka, Demeter: *Úvod do analýzy na varietách*, Univerzita J. E. Purkyně, Brno, 1986

4. Krupka, Demeter; Krupková, Olga: *Topologie a geometrie*, Univerzita J. E. Purkyně, Brno, 1989

5. *http://wikipedia.org* - různé stránky