MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2014 JAN HRDLIČKA

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Elementární funkce komplexní proměnné

Bakalářská práce

Jan Hrdlička

Vedoucí práce: Mgr. Petr Zemánek, Ph.D. Brno 2014

Bibliografický záznam

Autor:	Jan Hrdlička Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Elementární funkce komplexní proměnné
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	Mgr. Petr Zemánek, Ph.D.
Akademický rok:	2013/2014
Počet stran:	viii + 45
Klíčová slova:	Funkce komplexní proměnné; Elementární funkce; Exponenciální funkce; Goniometrické funkce; Logaritmus

Bibliographic Entry

Author:	Jan Hrdlička Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Elementary function of complex variables
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial and Actuarial Mathematics
Supervisor:	Mgr. Petr Zemánek, Ph.D.
Academic Year:	2013/2014
Number of Pages:	viii + 45
Keywords:	Functions of complex variables; Elementary functions; The exponential function; Trigonometric functions; Logarithm

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme studiu elementárních funkcí v komplexním oboru. Postupně studujeme exponenciální funkci, goniometrické funkce, hyperbolické funkce a ukazujeme jejich základní vlastnosti a odlišnosti od reálných elementárních funkcí. Dále rozebíráme vzorce, které v reálném oboru platí pro logaritmus a obecnou mocninnou funkci, a srovnáváme je s komplexním oborem.

Abstract

In this thesis we study elementary functions in the complex domain. Sequentially we study exponential functions, trigonometric functions, hyperbolic functions, and show their properties and differences from real elementary functions. Furthermore, we discuss formulas that apply in the real domain for the logarithm of a general power functions and compare them with a complex subject.

Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Jan Hrdlička**

Studijní program - obor: **Matematika - Finanční a pojistná matematika**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Elementární funkce komplexní proměnné

Elementary Functions of Complex Variables

Oficiální zadání: Má rovnice sin(x)=2 řešení? Odpověď na tuto otázku můžeme získat s pomocí elementárních funkcí v komplexním oboru, které představují rozšíření elementárních funkcí známých ze základního kurzu matematické analýzy. Cílem této práce je podat přehled jejich základních vlastností.

Literatura: Doporučená literatura

JARNÍK, Vojtěch. Diferenciální počet (II). 3. dopl. vyd. Praha: Academia, 1976. 669 s.,

KALAS, Josef. Analýza v komplexním oboru. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2006. iv, 202 s. ISBN 80-210-4045-9.

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Zemánek, Ph.D.

Datum zadání bakalářské práce: říjen 2013

V Brně dne 31.10.2013

v.z. Pavel

prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
Ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Souhlasím se zadáním (datum, podpis): 26.3.2014

Podpis studenta

Podpis vedoucího

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat Mgr. Petru Zemánkovi, Ph.D. za jeho rady, přístup, čas a trpělivost, bez kterých by tato práce nemohla vzniknout.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 30. května 2014 . . . .

Jan Hrdlička

Obsah

Úvod

V této bakalářské práci se budeme zabývat komplexními elementárními funkcemi s důrazem na srovnání s funkcemi, které jsou známé z reálného oboru. Budeme se zde potýkat s problémy mnohoznačnosti funkcí, což v reálném oboru nebylo přípustné. V první kapitole nadefinujeme a zavedeme nezbytné množství pojmů, které nám budou sloužit k vyšetřování vlastností těchto funkcí. V dalších kapitolách postupně probereme jednotlivé funkce.

Ve druhé kapitole probereme polynomy, odmocninu a racionální lomenou funkci v komplexním oboru.

Ve třetí kapitole se budeme věnovat exponenciální funkci, která je nezbytná pro definování všech ostatních elementárních funkcí, a také poukážeme na spojitost s řešením diferenciálních rovnic vyšších řádů. V další kapitole se podíváme na goniometrické funkce a v následné páté kapitole probereme funkce hyperbolické. Poukážeme na vztahy mezi těmito dvěma typy funkcí.

V předposlední, šesté, kapitole se budeme věnovat studiu logaritmu a budeme vyšetřovat, zda-li platí vzorce, které známe z reálné analýzy. Obdobně vyšetříme vzorce v poslední kapitole věnované obecné mocninné a obecné exponenciální funkci. V posledních dvou kapitolách se nebudeme věnovat příliš vlastnostem těchto funkcí, neboť nám jde především o rozebrání problematiky mnohoznačnosti funkcí. V práci jsou vloženy na několika místech obrázky, které mají čtenáři pomoci si představit zobrazení z roviny do roviny, se kterým se v komplexních číslech setkáváme.

Prvních 5 kapitol práce vznikaly jako kombinace mnoha studijních textů, které jsou uvedeny v Seznamu literatury. Oproti tomu základním studijním textem pro kapitolu 6 a 7 byl článek [10]. Vzhledem k tomu, že tento text má sloužit jako doplňkový učební materiál pro [1], neuvádíme v první kapitole téměř žádné důkazy, neboť všechny se dají nalézt v již zmíněném [1]. Od čtenáře očekáváme znalost reálné analýzy.

Všechny obrázky byly vytvořeny za použití programu Geogebra.

Kapitola 1

Základní vlastnosti

Definice 1.1. Komplexní číslo z je uspořádaná dvojice reálných čísel x, y. Zapisujeme jej jako $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. První část, tedy x, se nazývá reálná část, y se nazývá imaginární část. Zapisujeme $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$.

Pro libovolná dvě komplexní čísla $z_1 = (x_1, y_1)$ a $z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme operaci sčítání a násobení následovně:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1).$$

Komplexní číslo $(0,0)$ značíme jako 0 a nazýváme jej nulovým prvkem, komplexní číslo $(1,0)$ značíme jako 1 a nazýváme jej jednotkovým prvkem a opačným prvkem k prvku (x,y) myslíme prvek $(-x,-y)$. Komplexní číslo $(0,1)$ značíme jako i a nazýváme jej imaginární jednotka, pro kterou platí $i^2 = (-1,0)$. Komplexní číslo $z = (x,y)$ také můžeme psát jako $z = x + iy$.

Komplexně sdruženým číslem k číslu z nazveme číslo $\overline{z}$ s vlastností $\overline{z} = x - i \cdot y$. Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\begin{aligned}\overline{(z_1 + z_2)} &= \overline{(x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2)} = \overline{[(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)]} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = \\ &= x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2},\end{aligned}$$

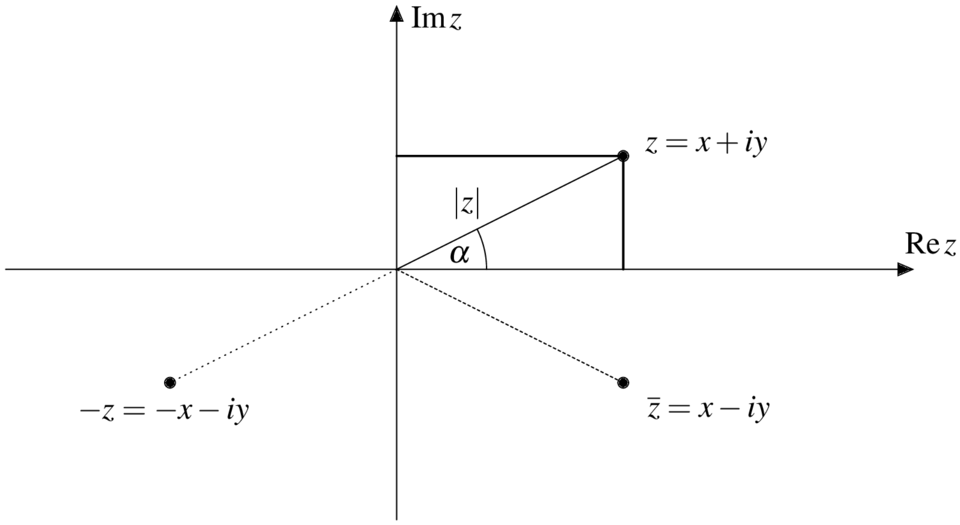
a obdobnými úpravami získáme $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Je důležité zmínit, že komplexní čísla nejsou uspořádaná a nelze je porovnávat. Jedině pokud jsou čísla z_1 a z_2 z reálného oboru, tedy $z_1,\ z_2 \in \mathbb{R}$, tak můžeme psát $z_1 < z_2$, tedy je porovnat. Pokud tedy v této práci napíšeme $z_1 < z_2$, myslíme tím výhradně reálná čísla.

Jediná situace, kdy tak lze činit, když u obou komplexních čísel z_1 a z_2 je jejich imaginární část nulová, tedy platí, že $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Pokud tedy napíšeme $z < z_1$, myslíme tím výhradně reálná čísla.

Definice 1.2. Absolutní hodnotou komplexního čísla z rozumíme

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$



Obrázek 1.1: Komplexní číslo v rovině

Věta 1.3. *Pro $z \in \mathbb{C}$ platí:*

$$|z| \geq 0, \qquad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \qquad |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \textit{pro } z_2 \neq 0.$$

Komplexnímu číslu $z = (x, y)$ odpovídá bod roviny o souřadnicích $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Pro $\mathbb{C}$ se používá název otevřená komplexní nebo také Gaussova rovina a číslo $z \in \mathbb{C}$ bod Gaussovy roviny. V tomto případě pak $|z|$ značí eukleidovskou vzdálenost bodu z od počátku. To můžeme vidět na Obrázku 1.1.

Poznámka 1.4. *Je-li z nenulové komplexní číslo, pak kombinací absolutní hodnoty komplexního čísla a čísla komplexně sdruženého můžeme vyjádřit jeho převrácenou hodnotu následovně:*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \tag{1.1}$$

Definice 1.5 (Rozšířená Gaussova rovina)**.** Komplexní rovinu $\mathbb{C}$ rozšíříme o nevlastní prvek ∞. Tuto množinu pak značíme jako $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a hovoříme o rozšířené nebo též uzavřené komplexní rovině.

Pro početní operace s ∞ v $\mathbb{S}$ definujeme následující vztahy. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$z \pm \infty = \infty \pm z = \infty, \qquad \frac{z}{\infty} = 0, \qquad \frac{\infty}{z} = \infty.$$

Pro $z \in \mathbb{R}$ platí, že $z < \infty$ a pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujeme:

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \qquad \frac{z}{0} = \infty.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme:

$$\infty^n = \infty; \qquad 0^{-n} = \infty, \qquad \infty^{-n} = 0.$$

A dále definujeme:

$$\infty^0 = 1, \qquad |\infty,| = \infty, \qquad \overline{\infty} = \infty, \qquad 0^0 = 1 = \infty^0..$$

Nedefinujeme následující výrazy:

$$\infty \pm \infty; \qquad 0 \cdot \infty; \qquad \infty \cdot 0; \qquad \frac{\infty}{\infty}; \qquad \frac{0}{0}$$

Pro budoucí úsporu je vhodné označit množinu $\mathbb{P} = \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Dalším důležitým pojmem je okolí bodu z – v následující definici uvedeme jak pojem kruhové, tak i prstencové okolí.

Definice 1.6. Pro libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$ a libovolné číslo $z_0 \in \mathbb{C}$ definujeme kruhové ε-okolí bodu z předpisem

$$U(z_0, \varepsilon) = \{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Prstencovým okolím[1] bodu z_0 potom rozumíme množinu

$$P(z_0, \varepsilon) = U(z_0, \varepsilon) \backslash \{z_0\}.$$

1.1 Argument

Definujme nyní pro $\alpha \in \mathbb{R}$ symbol $\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$. Pak můžeme vyjádřit komplexní číslo také ve tvaru

$$z = |z| \,\mathrm{e}^{i\alpha}. \tag{1.2}$$

Oprávněnost tohoto zatím pouze formálního přiřazení se ukáže v kapitole věnované exponenciální funkci. Tento tvar bude užitečný například při definování přímky v komplexním oboru.

Definice 1.7. Nechť $z \neq 0$ je komplexní číslo. Pak každé reálné číslo α vyhovující vztahům

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \qquad \cos\alpha = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \tag{1.3}$$

nazveme hodnotou argumentu komplexního čísla z.

Lze si všimnout, že každé $z \neq 0$ má nekonečně mnoho hodnot argumentu α, což plyne z periodičnosti funkcí sinus a kosinus. Proto rozlišujeme pojmy argument a hlavní argument komplexního čísla z.

Definice 1.8. Množinu $\{\alpha \mid \alpha = \alpha_0 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ nazveme argumentem čísla z a značíme jej $\arg z$. Pro číslo $z = 0$ hodnotu $\arg z$ nedefinujeme.

[1] Můžeme se setkat s pojmem redukované okolí.

Definice 1.9. Je-li $z \neq 0$, pak existuje jediné $\alpha \in \arg z$, pro něž $-\pi < \alpha \leq \pi$. Toto číslo nazýváme hlavní hodnotou argumentu čísla z a označujeme jej $\alpha = \operatorname{Arg} z$.

Důvod, proč nedefinujeme hodnotu $\arg z$ pro $z = 0$ je zřejmý. Uvažujme $z = 0$, potom nutně musí být $|z| = 0$. Tedy bychom mohli zvolit jakékoli α za argument a rovnost $z = 0$ by byla splněna.

Věta 1.10. *Každé nenulové komplexní číslo lze vyjádřit ve tvaru*

$$z = \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z = |z| \cdot \cos\alpha + i \cdot |z| \cdot \sin\alpha = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha).$$

Tento tvar nazýváme goniometrický [2] tvar komplexního čísla z.

Pro lepší představu se ještě podívejme, jak se násobí dvě komplexní čísla, respektive co se děje s úhly α_1 a α_2.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|\,(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \cdot |z_2|\,(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) = \\ &= |z_1 z_2|\,((\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2)) = \\ &= |z_1 z_2|\,(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)). \end{aligned}$$

Snadno můžeme odvodit následující vzorce pro argument komplexního čísla pro $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ a $n \in \mathbb{N}$. Ještě předtím ale poznamenejme, že výrazem $\lfloor x \rfloor$ rozumíme dolní celou část čísla, tedy celé číslo z intervalu $(x-1, x]$.[3]

Věta 1.11. *Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí:*

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi N, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi N, \tag{1.5}$$

$$\operatorname{Arg} \frac{1}{z} = \operatorname{Arg} \overline{z} = \begin{cases} \operatorname{Arg} z, & \textit{pokud } \operatorname{Im} z = 0,\ z \neq 0, \\ -\operatorname{Arg} z, & \textit{pokud } \operatorname{Im} z \neq 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z + 2\pi N_n. \tag{1.7}$$

Hodnotu N definujeme jako

$$N = \begin{cases} -1, & \textit{pokud} \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 > \pi, \\ 0, & \textit{pokud} -\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq \pi, \\ 1, & \textit{pokud} \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq -\pi. \end{cases}$$

Hodnotu N_n můžeme zadefinovat jako p-krát opakování postupu při určování hodnoty N, nebo toto číslo můžeme zavést jako

$$N_n = \left\lfloor \frac{1}{2} - \frac{n}{2\pi} \operatorname{Arg} z \right\rfloor.$$

[2] V literatuře se můžeme potkat s pojmem kanonický či polární.

[3] Tedy například $\lfloor 2,67 \rfloor = 2$.

Příkladem přidání podmínky $2\pi N$ může být součin komplexních čísel $z_1 = i$ a $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Snadno ověříme, že $\operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{Arg} z_2 = \frac{2\pi}{3}$. Pak ovšem

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \notin (-\pi, \pi],$$

což je ve sporu s definicí hlavní hodnoty argumentu komplexního čísla, a je tedy nutné tuto podmínku přidat. U vzorců pro argument musíme ovšem postupovat opatrněji. Zatímco funkce $\operatorname{Arg} z$ nabývá jediné hodnoty, a je tedy číslo, funkce $\arg z$ nabývá hodnot nekonečně mnoho, a proto je množinou. [4] Proto například rovnost $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ je spíše symbolického rázu. Je to tedy množina $\arg z_1 z_2$, která je tvořena jako součet všech hodnot $\arg z_1$ se všemi hodnotami $\arg z_2$, což je množinově zapsáno jako

$$\arg z_1 z_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 + 2k\pi \mid \alpha_1 \in \arg z_1,\ \alpha_2 \in \arg z_2,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Jedno z dalších možných nedorozumění při této notaci může nastat v situaci, kdy $z_1 = z_2$. Intuitivně bychom nejspíše psali $\arg z^2 = \arg z + \arg z = 2\arg z$, to ale není vzhledem k množinové povaze hodnot těchto funkcí možné. Vskutku, zatímco množinu všech hodnot výrazu $\arg z + \arg z$ můžeme zapsat jako $\{\alpha + \alpha + 2k\pi \mid \alpha \in \arg z,\ k \in \mathbb{Z}\}$, tedy $\{2\alpha + 2k\pi \mid \alpha \in \arg z,\ k \in \mathbb{Z}\}$, množina $2\arg z$ vypadá jako $\{2\alpha + 4k\pi \mid \alpha \in \arg z,\ k \in \mathbb{Z}\}$, což zjevně nejsou stejné množiny. Vzorce, které nyní uvedeme, tedy nesmíme brát jako klasickou rovnost, ale při operacích s nimi musíme postupovat s jistou mírou opatrnosti, která je popsána v odstavcích výše. Platí tedy:

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2, \tag{1.8}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2, \tag{1.9}$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z. \tag{1.10}$$

Ještě poznamenejme, že výrazem N' myslíme

$$\left\lfloor \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{Im} z}{2\pi} \right\rfloor \tag{1.11}$$

Pokud tedy shrneme dosavadní poznatky, můžeme říct, že součet dvou komplexních čísel je posunutí o vektor. Dále pro násobení komplexních čísel a a z platí:

- Pro $a \in \mathbb{R}$ je součin $a \cdot z$ stejnolehlostí s koeficientem a (nebo také $|a|$).
- Pro $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|a| = 1$ je součin $a \cdot z$ otoční kolem úhlu $\arg a$.
- V ostatních případech kombinujeme předchozí dva body.

[4] Podrobněji u definice mnohoznačné a jednoznačné funkce.

1.2 Přímka, kružnice, zobecněná kružnice

Přímku můžeme zavést dvěma způsoby. Prvním způsobem je zvolit dva různé libovolné body $a,\ b \in \mathbb{C}$ a přímku zadefinovat jako

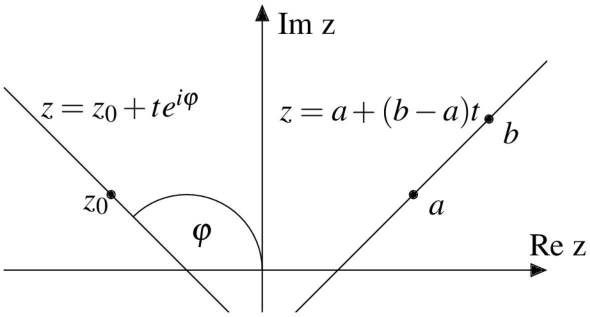
$$z = a + (b - a)\,t, \qquad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Jedná se o parametrickou rovnici a výraz $b - a$ je směrový vektor přímky. Druhým způsobem je zvolit bod z_0, kterým přímka bude procházet ve směru $e^{i\varphi}$, pak tedy píšeme

$$z = z_0 + t\,e^{i\varphi}, \qquad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Obě tyto přímky můžeme vidět na obrázku 1.2.

Úsečku mezi body a a b získáme tak, že u prvního vyjádření volíme parametr t z intervalu $[0,1]$.



Obrázek 1.2: Přímky

Kružnici o poloměru r se středem v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ lze popsat opět dvěma způsoby. První je, podobně jako u přímky, vyjádřen pomocí otáčení úhlu a bodu, tedy

$$z = z_0 + re^{i\varphi}.$$

Druhý způsob je definován pomocí absolutní hodnoty jako

$$|z - z_0| = r.$$

Tuto rovnost můžeme pomocí zavedených vztahů upravit jako

$$(z - z_0)\,\overline{(z - z_0)} = r^2,$$

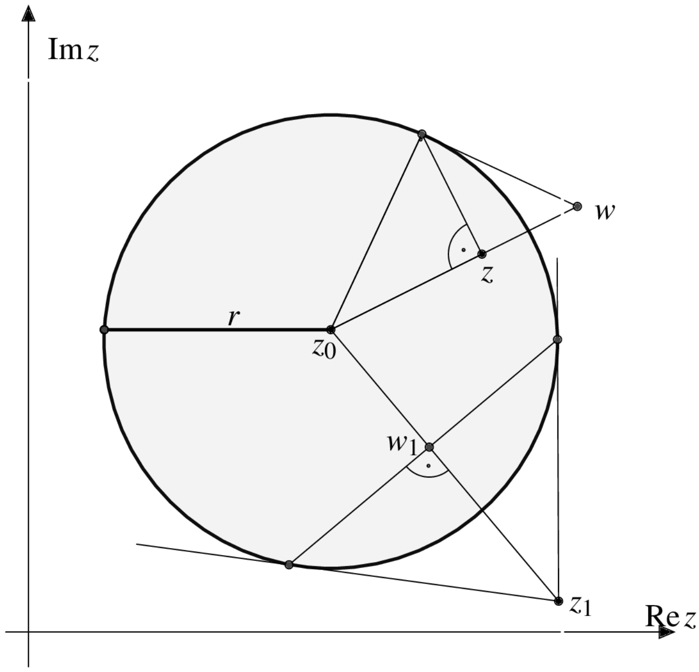
což přímo vede na rovnici

$$z\bar{z} + \bar{z}B + z\overline{B} + c = 0, \tag{1.12}$$

kde jsme z_0 nahradili B a výraz $z_0\overline{z_0} - r^2$ jsme nahradili c. Rovnice (1.12) definuje kružnici se středem $-B$ a poloměrem $r = \sqrt{|B|^2 - c}$. Zobecněnou kružnicí rozumíme pro $\alpha,\ B,\ c \in \mathbb{C}$

$$\alpha z\bar{z} + \bar{z}B + z\overline{B} + c = 0. \tag{1.13}$$

Pro $\alpha \neq 0$ a $|B|^2 - \alpha c > 0$ rovnice popisuje kružnici, zatímco pro $\alpha = 0$ a $B \neq 0$ popisuje tato rovnice přímku.



Obrázek 1.3: Kruhová inverze

Definice 1.12. Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$, a $r \in (0, +\infty)$, pak funkci f definovanou na $\mathbb{S}$ předpisem

$$f(z) = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z - z_0}}$$

nazveme kruhovou inverzí. Bod z_0 je střed a číslo r je poloměr inverze. Kružnice $\{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| = r\}$ je základní kružnice inverze.

Zřejmě platí následující vlastnosti:

1. Jedná se o zobrazení $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$
2. $f(z_0) = \infty$, $f(\infty) = z_0$.
3. Pro body ležící na základní kružnici inverze platí $f(z) = z$.
4. Body ležící uvnitř základní kružnice inverze se zobrazí do jejího vnějšku, body z vnějšku se zobrazují dovnitř.
5. Vzor a obraz leží na téže polopřímce o počátečním bodu z_0.

Kruhovou inverzi se středem v bodě z_0 a poloměrem r můžeme vidět na Obrázku 1.3.

Věta 1.13. *Kruhová inverze zobrazí každou zobecněnou kružnici na zobecněnou kružnici. Obrazem zobecněné kružnice je přímka právě tehdy, když vzor prochází středem inverze.*

1.3 Funkce, derivace

Definice 1.14. Zobrazení $f : M \to f(M)$ se nazývá funkcí komplexní proměnné. Množinu $M = D$ nazýváme definičním oborem funkce f, množinu $f(M) = H$ nazýváme oborem hodnot. Je-li $f(M) \subseteq \mathbb{C}$, pak je f konečná funkce. Navíc se rozlišující následující případy.

- je-li $M \subseteq \mathbb{S}$, pak se f nazývá komplexní funkcí komplexní proměnné,
- je-li $M \subseteq \mathbb{R}$, pak se f nazývá komplexní funkcí reálné proměnné,
- je-li $f(M) \subseteq \mathbb{R}$, pak se f nazývá reálnou funkcí komplexní proměnné.

Definice 1.15. Funkci, pro kterou platí, že pro každé $z \in D_f$ je množina $f(z)$ jednoprvková, nazýváme jako jednoznačnou. V opačném případě mluvíme o funkci mnohoznačné. Podle počtu obrazů prvku z můžeme mluvit o funkci dvojznačné, trojznačné, $\cdots$, popřípadě nekonečně značné.

Jedním z příkladů nekonečně značné funkce je $\arg z$.

Definice 1.16. Nechť $f : D \to H$ je jednoznačná funkce. Funkci f^{-1} (obecně mnohoznačnou) definovanou předpisem

$$f^{-1}(w) = \{z \mid z \in D, f(z) = w\},\ w \in H$$

nazveme inverzní funkcí k funkci f.

Přímo z definice plyne platnost identity

$$f(f^{-1}(w)) = w,\ w \in H,$$

tedy $f \circ f^{-1}$ je identické zobrazení z množiny H do H. Naopak ovšem obecně identitu získat nemusíme. Zatímco u prvního případu jsme měli vlevo funkci jednoznačnou, v tomto případě, tedy $f^{-1} \circ f$, máme obecně vlevo funkci mnohoznačnou. Tuto část budeme dále rozebírat v další části práce, zejména v kapitole věnované komplexnímu logaritmu.

V následující části rozebereme postupně limitu v komplexním oboru a následně i derivaci. Pro definici prvního z pojmů je potřeba nicméně znát pojem hromadný bod a dále budeme používat pojem oblast, proto tyto pojmy nyní připomeneme. Nechť $A \subseteq P$, $a \in P$. Potom hromadným bodem množiny A rozumíme takový bod a, pro který platí, že každé okolí tohoto bodu obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny A.

Definice 1.17. Funkce f má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ limitu $L \in \mathbb{C}$ vzhledem k množině $M \subseteq D$ právě tehdy když platí, že bod z_0 je hromadným bodem množiny M a ke každému kruhovému okolí $U(L)$ existuje prstencové okolí $P(z_0)$ takové, že

$$f(P(z_0) \cap M) \subset U(L).$$

Pak píšeme $\lim_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = L$.

Pokud je množina M ryzím neboli prstencovým okolím bodu z_0, pak můžeme limitu nadefinovat analogicky jako v reálném oboru, tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P(z_0) \ \forall z \in P(z_0) \cap M : (|f(z) - L| < \varepsilon)$$

a píšeme

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Stejně jako v reálném oboru platí pro limity v komplexním oboru několik obdobných vět.

Věta 1.18. *Každá funkce komplexní proměnné má v bodě z_0 nejvýše jednu limitu.*

Věta 1.19. *Nechť existují konečné limity $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ a $\lim_{z \to z_0} g(z) = K$. Pak platí:*

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) = L + K,$$
$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z) = L \cdot K,$$
$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} = \frac{L}{K}.$$

Definice 1.20 (Derivace funkce)**.** Nechť f komplexní funkce komplexní proměnné, která je definovaná v nějakém okolí $U(z)$ bodu $z \in \mathbb{C}$. Funkce má derivaci v bodě právě tehdy, když existuje konečná limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = L$$

nebo také

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = L$$

Číslo L nazýváme derivací funkce f v bodě z_0 a značíme $f'(z)$.

Pravidla pro derivování komplexních funkcí v komplexním oboru jsou shodná s těmi, které známe z reálného oboru. Tento fakt je dán tím, že limita a vlastnosti limity v těch dvou oborech jsou definovány analogicky.

Věta 1.21. *Nechť $f(z), g(z)$ mají derivace v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak pro každé a, $b \in \mathbb{C}$ platí:*

$$(af(z_0) + bg(z_0))' = af'(z_0) + bf'(z_0),$$
$$\big(f(z_0) \cdot g(z_0)\big)' = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),$$
$$\left(\frac{f(z_0)}{g(z_0)} \right)' = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z) \cdot g'(z_0)}{g^2(z_0)} \ \ \textit{pro } g(z_0) \neq 0.$$

Definice 1.22 (Holomorfní funkce)**.** Funkce f je diferencovatelná na množině $M \subseteq \mathbb{C}$ právě tehdy, když existuje derivace $f'(z)$ v každém bodě $z \in M$. Funkce f je holomorfní v bodě $z \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když je diferencovatelná v nějakém okolí $U(z)$ bodu z, tedy pokud existuje derivace $f'(z)$ pro každý bod $z \in U(z)$. Funkce f je holomorfní na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{C}$, právě když je diferencovatelná na množině M, tedy když je holomorfní v každém bodě $z \in M$.

Pro další větu je nutné znát pojem oblast. Proto připomeňme, že se jedná o otevřenou a souvislou podmnožinu $\mathbb{C}$.

Věta 1.23. *Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je oblast. Funkce $f : G \to \mathbb{C}$ je konstatní v G právě tehdy, když je holomorfní v G a $f'(z) = 0$ pro $z \in G$.*

U následující definice a věty, které se vztahují ke speciálním vlastnostem funkcí, se často uvádí i *Liouvilleova věta*. Pro naše účely ovšem bude stačit, když uvedeme pouze Větu 1.25, která je její silnější verzí.

Definice 1.24. Funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se nazývá celá, když je holomorfní na celém $\mathbb{C}$. Celé funkce, které nejsou polynomy, se nazývají transcendentní.

Věta 1.25 (Malá Picardova věta)**.** *Každá nekonstantní celá funkce nabývá všech hodnot $\mathbb{C}$ kromě nejvýše jednoho bodu.*

1.4 Mocninné řady

Definice 1.26. Posloupnost konečných komplexních čísel $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$, kde $z_n = x_n + i \cdot y_n$ značíme $(z_n)_{n=1}^{+\infty}$.

Definice 1.27. Posloupnost $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, pokud existuje $k \in \mathbb{R}^+$ takové, že $|z_n| \leq k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Věta 1.28. *Posloupnost $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená právě tehdy, kdy obě posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou ohraničené.*

Definice 1.29. Posloupnost komplexních čísel $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ nazveme konvergentní, pokud existuje komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $|z_n - z| < \varepsilon$ pro $n > n_0$. Pak říkáme, že $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu z a toto číslo nazveme limitou posloupnosti $(z_n)_{n=1}^{\infty}$. Pak značíme

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z.$$

Definice 1.30. Každá posloupnost, která není konvergentní, je divergentní.

Definice 1.31. Nechť $z_1, z_2, \cdots$ posloupnost konečných komplexních čísel. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

je řada komplexních čísel nebo také komplexní řada. Číslo z_n se nazývá n-tý člen řady nebo také obecný člen.

Číslo

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} z_i \qquad pro\ n = 1, 2, \cdots$$

nazveme n-tý částečný součet řady.

Řada $\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k$ je zbytek řady po n-tém členu.

Definice 1.32. Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ řada komplexních čísel, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost jejich částečných součtů. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

pak $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ konverguje a číslo s je jejím součtem.

Poznámka 1.33. *Řada je divergentní, pokud není konvergentní.*

Definice 1.34 (Absolutně konvergentní řady)**.** Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ nazveme *absolutně konvergentní* právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konverguje. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ nazveme *relativně konvergentní* právě tehdy, když je řada konvergentní, ale není absolutně konvergentní.

Věta 1.35. *Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$.*

Naopak tato implikace ovšem neplatí, neboť neplatí ani v reálném oboru.

Věta 1.36 (Přerovnávání absolutně konvergentních řad)**.** *Libovolné přerovnání členů absolutně konvergentní komplexní řady nemá vliv ani na její konvergenci, ani na její součet.*

Věta 1.37. *Nechť máme dvě absolutně konvergentní řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Pak součin těchto dvou řad, tedy*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$$

je absolutně konvergentní.

Definice 1.38. Nechť $z_0, a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$ jsou konečná komplexní čísla. Řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_1) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{1.14}$$

nazýváme mocninnou[5] řadou o středu z_0. Čísla $a_0, a_1, a_2, \cdots$ nazýváme koeficienty, číslo a_0 absolutním členem řady.

Každá mocninná řada konverguje alespoň ve středu a má zde součet a_0. Každou mocninnou řadu lze substitucí $w = z - z_0$ posunout tak, aby její střed byl v počátku. Mocninná řada má pak tvar

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots \, .$$

Věta 1.39. *(První Abelova věta) Nechť mocninná řada 1.38 konverguje v bodě $z_1 \neq z_0$. Pak konverguje absolutně v celém otevřeném kruhu $U(z_0, |z_1 - z_0|)$.*

[5] můžeme se také setkat s názvem potenční řada

Uvažujme pro jednoduchost případ, kdy $z_0 = 0$, čehož můžeme snadnou substitucí $w = z - z_0$ docílit. Uvažujme dva body z_1 a z_2, pro které platí, že $|z_1| < |z_2|$ a mocninná řada v nich konverguje. Pak podle předchozí Věty 1.39 mocninná řada konverguje ve všech bodech z, pro které platí $|z| < z_1 < z_2$. Zřejmě je tedy kruh $U_1(0, |z_1|)$ celý obsažen v kruhu $U_2(0, |z_2|)$. To vede k myšlence, že bude existovat nějaké číslo R, které bude určovat poloměr maximální kružnice, na které bude mocninná řada absolutně konvergovat. O tom pojednává následují Věta. Taktéž připomeňme, že výrazem $\overline{A}$ myslíme uzávěr množiny A.

Věta 1.40. *Pro každou mocninnou řadu (1.38) existuje právě jedno číslo $R \in (0, +\infty)$, že tato řada konverguje absolutně v $U(z_0, R)$ a diverguje v množině $\mathbb{S} \setminus \overline{U(z_0, R)}$.*

Při vyšetřování konvergence mocninných řad budeme tedy zjišťovat poloměr této kružnice. Ten můžeme zjistit pomocí několika různých kritérií. Nejdůležitějším kritériem, pomocí kterého se odvozují další, je kritérium zformulované v následující větě.

Věta 1.41 (Cauchy–Hadamardova věta)**.** *Nechť pro koeficienty mocninné řady (1.38) platí*

$$r = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Položme $R = \frac{1}{r}$. Pokud $R = 0$, pak řada diverguje v každém $z \in \mathbb{C}$ s výjimkou svého středu. Pokud $R = \infty$, konverguje řada absolutně v každém $z \in \mathbb{C}$. Pokud $0 < R < \infty$, pak řada konverguje absolutně pro každé $z \in \mathbb{C}$, které splňuje $|z - z_0| < R$.

Nyní záměrně zvolíme označení $K(z_0, R)$ místo $U(z_0, R)$, abychom formálně odlišili pojmy kruh konvergence a okolí bodů (vlastnosti těchto pojmů jsou však stejné). Číslo R, které je definované v předchozí větě, se nazývá poloměr konvergence mocninné řady (1.38) a množina $K(z_0, R)$ kruh konvergence této řady. Dále zavedeme následující označení: $K(z_0, 0) = z_0$, $K(z_0, R) = U(z_0, R)$ pro $0 < R < +\infty$, $K(z_0, \infty) = \mathbb{C}$.

Poznámka 1.42. *Pokud existuje limita $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$, pak lze poloměr konvergence určit jako $R = \frac{1}{r}$.*

Následující věta o záměně derivace a sumace se využije hlavně při odvozování derivací elementárních funkcí.

Věta 1.43. *Mocninná řada $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ je holomorfní uvnitř kruhu konvergence $|z - z_0| < R$. Dále platí, že*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n (z - z_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n.$$

Tato řada má opět poloměr konvergence R.

Kapitola 2

Polynom, n-tá odmocnina a racionální lomená funkce

Definice 2.1 (Polynom)**.** Polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ definujeme pro $z, a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ jako funkci předpisem

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0.$$

Nulovým polynomem rozumíme $f(z) \equiv 0$.

V literatuře může být stupeň polynomu definován i pro $n = 0$, nicméně vzhledem k podstatě výsledné funkce tento stupeň vynecháváme. Protože první z elementárních funkcí se zavádí pomocí mocninné řady, odvoďme vzorec pro derivaci jednotlivých částí polynomu, tedy mocniny $f(z) = z^n$.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots z_0^{n-2} z^1 + z^{n-1}) = n z_0^{n-1}.$$

Jedním ze speciálních případů polynomu je známá lineární funkce.

Definice 2.2 (Lineární funkce)**.** Nechť a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Funkci f definovanou na $\mathbb{S}$ předpisem

$$f(z) = az + b$$

nazýváme lineární funkcí nebo také lineárním zobrazením.

Je vidět, že:

1. $f(\infty) = \infty$, $f(0) = b$.
2. Lineární funkce je prostým zobrazením $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$.
3. Inverzní funkce je rovna $f^{-1} = \frac{z-b}{a}$, což je opět lineární funkce.
4. Derivace je rovna $f'(z) \equiv a$.

Lineární funkci můžeme vyjádřit složením tří jednodušších funkcí, a to $f_1(z) = \mathrm{e}^{i\varphi}$, $f_2(z) = |a|z$ a $f_3(z) = z+b$. První zmíněná funkce je otočení o úhel φ, druhá zmíněná funkce je stejnolehlost o koeficientu $|a|$ a třetí zmíněná je posunutí o vektor b. Pak tedy můžeme psát

$$f(z) = f_3(f_2(f_1(z))) = f_3(f_2(\mathrm{e}^{i\varphi}) = f_3(|a|\,\mathrm{e}^{i\varphi}) = az+b$$

Díky tomu, že všechny tři zmíněné funkce jsou prosté, je zřejmě i lineární funkce prostá, což jsme již zmiňovali ve vlastnostech. Dále je vidět, že tato funkce zobrazuje přímku na přímku a kružnici na kružnici.

Definice 2.3 (n-tá mocnina)**.** Funkce $f(z) = z^n$, kde z$\in \mathbb{C}$ a n$\in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se nazývá n-tá mocnina.

Na začátek připomene Moivreovu větu.

Věta 2.4 (Moivreova)**.** *Nechť $z \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Pak pro $z = |z| \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}$ platí:*

$$z^n = \left(|z| \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n = |z|^n \cdot \mathrm{e}^{in\varphi}\,. \tag{2.1}$$

Snadno vidíme, že pro $n = 1$ získáváme identitu a $n = 0$ získáváme konstantní funkci. Stejně jako v reálném oboru, ani tato funkce není prostá. Protože budeme později rozebírat inverzní funkci, vyšetříme, na jaké množině je funkce prostá. Uvažujme tedy případy, kdy $n > 1$. Při vyšetřování prostého zobrazení zjišťujeme, kdy $f(z_1) = f(z_2)$, což při využití Moivreovy věty vlastně znamená řešit rovnici

$$|z_1|^n \cdot \mathrm{e}^{in\varphi_1} = |z_1|^n \cdot \mathrm{e}^{in\varphi_2}\,.$$

Porovnáním reálné a komplexní části rovnice získáváme soustavu dvou rovnic

$$|z_1|^n = |z_2|^n, \qquad\qquad \mathrm{e}^{in\varphi_1} = \mathrm{e}^{in\varphi_2}\,.$$

Protože $|z_1| = r_1$, $|z_2| = r_2$ jsou kladná reálná čísla, je z první rovnice zřejmé, že $r_1 = r_2$. S využitím výrazu (1.2) snadno dojdeme i k druhé rovnosti $n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2k\pi$, což můžeme přepsat jako $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{k2\pi}{n}$. Vidíme tedy, že pokud $k = 1,\cdots,n-1$, komplexní čísla se nemohou rovnat. Můžeme tedy shrnout: Funkce n-tá mocnina je prostá na množině $M \subset \mathbb{C}$ právě tehdy, když v množině M neexistují žádné dva body $z_1 \neq z_2$ takové, že $|z_1| = |z_2|$ a současně $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{k\cdot 2\pi}{n}$, kde $\varphi_i = \arg z_i$ pro $i = 1,2$ a $k \in \mathbb{Z}$.

Definice 2.5 (n-tá odmocnina)**.** Funkcí inverzní k funkci $f(z) = z^n$ pro $z \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$ nazýváme n-tou odmocninou a definujeme ji předpisem

$$f(z) = \sqrt[n]{z} = \{w | w \in \mathbb{C}, w^n = z\}$$

.

Opět, pro $n = 1$ se jedná o identitu. V dalších případech je funkce ale mnohoznačná. V následujícím příkladě zjistíme všechny řešení dané rovnice a zjistíme, na kterých množinách je funkce prostá.

Příklad 2.6. *Řešte v* $\mathbb{C}$ *rovnici*

$$z^5 - 1 = 0.$$

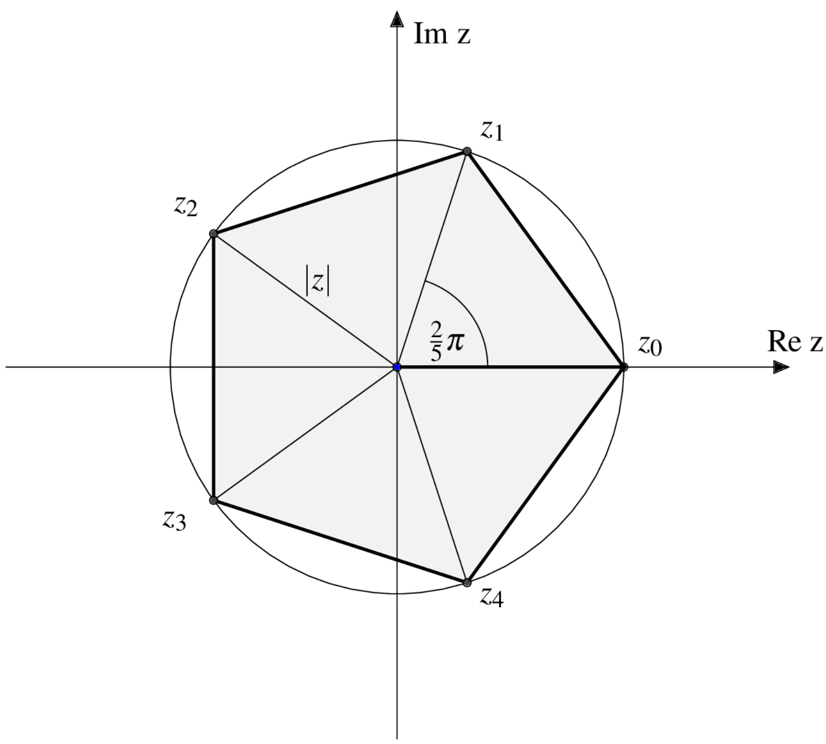
Řešení. Rovnici si nejprve přepíšeme do goniometrického tvaru, tedy

$$z^5 = 1 \cdot (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi).$$

Užitím Věty 2.4 můžeme snadno psát jako

$$z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}.$$

Nyní vidíme, že pro různá k nabývá komplexní číslo z různých hodnot, a to celkem pěti. Tyto řešení jsou $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$, $z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$, $z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$, $z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}$, $z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}$. Na obrázku můžeme vidět řešení graficky. Vidíme, že jednotlivá řešení tvoří pravidelný n-úhelník a tato řešení leží na kružnici s poloměrem $|z|$. Funkce n-tá mocnina je prostá na množinách odpovídající jednotlivým kruhovým výsečím ohraničenými body z_i.



Obrázek 2.1: Grafické řešení rovnice

Definice 2.7 (Lineární lomená funkce)**.** Nechť jsou dána čísla a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ taková, že $ad - bc \neq 0$. Pak funkci f definovanou na množině $\mathbb{S}$ s předpisem

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{pro } z \in \mathbb{C} \\ \frac{a}{c} & \text{pro } z = \infty \end{cases}$$

nazveme lineární lomenou funkcí (zobrazením), popřípadě homografií. Čísla a, b, c, d jsou koeficienty lineárního zobrazení a jsou určeny jednoznačně (s výjimkou nenulového násobku).

Z našich úvah vyloučíme dva případy. První z nich je již zmíněná podmínka $ad - bc = 0$. V případě, že by tato rovnost byla splněna, je velmi jednoduché ověřit, že je funkce konstantní. Druhý případ nastává v případě, kdy $c = 0$. V tomto případě se z této funkce stává lineární funkce, kterou jsme již rozebírali.

Lineární lomená funkce je prosté zobrazení množiny $\mathbb{S}$ na sebe a inverzní funkce je definovaná jako

$$f^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{dz-b}{-cz+a}, & pro\ z \in \mathbb{C} \\ -\frac{d}{b}, & pro\ z = \infty \end{cases}.$$

Definice 2.8. Racionální lomená funkce R je definována jako podíl dvou polynomů, tedy

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Definičním oborem je množina $\mathbb{C} \setminus \{w \mid Q(w) = 0\}$.

Definice 2.9 (Žukovského funkce)**.** Funkci definovanou předpisem

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad \text{pro } z \in \mathbb{S}$$

nazýváme Žukovského funkcí.

Zřejmě platí $f(0) = f(\infty) = \infty$. Funkce není prostá, protože zjevně platí $f(z) = f(\frac{1}{z})$. Pro nás tedy budou zajímavé pásy, ve kterých je funkce prostá. Pišme tedy $f(z_1) = f(z_2)$, což zjevně vede na

$$0 = f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right).$$

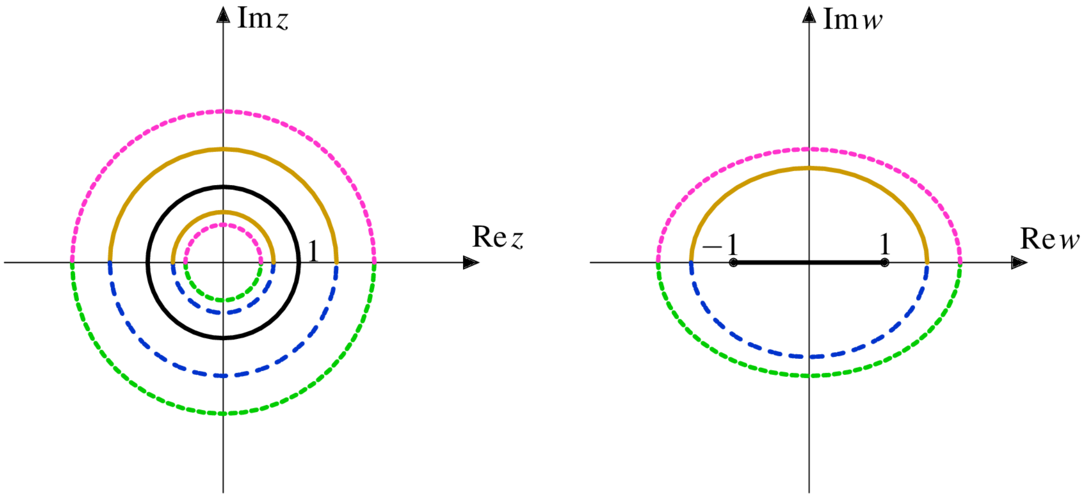
Funkce tedy nabývá stejné hodnoty, právě když $z_1 = z_2$ nebo $z_1 z_2 = 1$. Protože první podmínka je triviální, uvažujme pouze druhou podmínku, ze které plyne, že $z_1 = \frac{1}{z_2}$. Podmínka prostoty je tedy splněna například pro vnitřek nebo vnějšek kružnice $\big($neboť $|z| < 1$ a $\left|\frac{1}{z}\right| > 1\big)$ nebo třeba pro horní nebo dolní polorovinu Gaussovy roviny (což plyne z identity (1.4)). Rozeberme tedy nyní kružnici $|z| = r$, která rozděluje definiční obor a sledujme, na co se zobrazí. Pro $|z| = r > 0$ můžeme psát pomocí $z = r\,\mathrm{e}^{i\alpha}$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(r\mathrm{e}^{i\alpha} + \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha. \tag{2.2}$$

Pokud položíme $u^2 = (\operatorname{Re} f(z))^2$ a $v^2 = (\operatorname{Im} f(z))^2$, pak z 2.2 plyne

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Vidíme tedy, že se jedná o elipsu s poloosami $a = \left(r + \frac{1}{r}\right)/2$ a $b = \left(r - \frac{1}{r}\right)$, která má ohniska v bodě ± 1, což zjistíme ze vztahu $e^2 = a^2 - b^2$, kde e je vzdálenost ohniska od počátku.



Obrázek 2.2: Žukovského funkce

Kapitola 3

Exponenciální funkce

Definice 3.1. Exponenciální funkce v komplexním oboru se značí $\exp z$ a je definována předpisem

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{3.1}$$

Z uvedené definice je hned vidět, že $\exp 0 = 1$ a $(\exp z)' = \exp z$.

Věta 3.2. *Řada na pravé straně Definice 3.1 je absolutně konvergentní v celém* $\mathbb{C}$.

Důkaz. Pro dokázání této vlastnosti se nejvíce hodí použití podílového kritéria. Díky již zmíněným vlastnostem 1.41 a vztahu (1.42) můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1} = \infty = R,$$

což odpovídá celé rovině $\mathbb{C}$. □

Věta 3.3. *Pro každé* $z,\ w \in \mathbb{C}$ *platí, že* $\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$.

Důkaz. Nechť $z,\ w \in \mathbb{C}$. Pak podle Definice 3.1 máme

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \exp w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}.$$

Díky absolutní konvergenci a Větě 1.37 můžeme upravovat

$$\begin{aligned}\exp z \cdot \exp w &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot z^k \cdot w^{n-k} \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (z+w)^k = \exp(z+w).\end{aligned}$$

□

Věta 3.4. *Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí*

$$\exp z = \mathrm{e}^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y), \tag{3.2}$$

kde e^x, $\cos y$, $\sin y$ *jsou známé funkce definované v* $\mathbb{R}$.

Důkaz. Z Věty 3.3 plyne, že

$$\exp z = \exp(x + i \cdot y) = \exp x \cdot \exp iy.$$

Zbývá tedy dokázat, že $\exp iy = \cos y + i \cdot \sin y$. S využitím věty 1.36 můžeme psát:

$$\begin{aligned} \exp iy &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i \cdot y)^k}{k!} = \frac{i \cdot y}{1!} + \frac{i^2 \cdot y^2}{2!} + \frac{i^3 \cdot y^3}{3!} + \frac{i^4 \cdot y^4}{4!} + \cdots = \\ &= \frac{i \cdot y}{1!} + \frac{-i \cdot y^3}{3!} + \cdots + \frac{-1 \cdot y^2}{2!} + \frac{1 \cdot y^4}{4!} + \cdots = \\ &= i \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^k}_{\sin y} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^k}_{\cos y} = \cos y + i \cdot \sin y. \end{aligned}$$

□

Poznámka 3.5. *Ve starší literatuře se exponenciální funkce zaváděla pomocí rovnosti 3.4. V tomto případě se důkaz Věty 3.3 prováděl pomocí známých goniometrických vzorců z reálné analýzy a byl (dle názoru autora) průhlednější, proto jej uvedeme také. Pro $z = x + iy$ a $w = u + iv$ můžeme upravovat*

$$\begin{aligned} \exp(z + w) &= \exp((x + u) + i(y + v)) = \mathrm{e}^{x+u} (\cos(y + v) + i \sin(y + v)) = \\ &= \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^u (\cos y \cos v - \sin y \sin v) + i(\sin y \cos v + \cos y \sin v)) = \\ &= \mathrm{e}^x (\cos y + i \sin y)\, \mathrm{e}^u (\cos v + i \sin v) = \exp z \cdot \exp w. \end{aligned}$$

Většina autorů poté, co dokáže tyto základní vlastnosti, přechází od značení $\exp z$ ke značení e^z. Protože se ovšem chceme vyvarovat záměně těchto pojmů a chceme klást co nejvyšší důraz na jejich rozdílnost, budeme dále pokračovat v tomto značení.

Věta 3.6. *Funkce* $\exp z$ *je holomorfní v celém* $\mathbb{C}$*, je tedy celá. Oborem hodnot této funkce je* $\mathbb{P}$.

Důkaz. Protože řada konverguje absolutně v celém $\mathbb{C}$, pak má i v celém $\mathbb{C}$ derivaci, je tedy holomorfní. Díky Větě 1.25 nám stačí dokázat, že $\exp z \neq 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$, tedy že oborem hodnot funkce $\exp z$ je $\mathbb{P}$. Jednoduchými úpravami se dostaneme ke dvěma rovnicím

$$\mathrm{e}^x \cdot \cos y = 0, \qquad \mathrm{e}^x \cdot \sin y = 0.$$

Protože reálná funkce e^x je kladná pro všechny body definičního oboru, snadno dojdeme k neřešitelnému systému $\cos y = 0$, $\sin y = 0$, což není splněno pro žádné $y \in \mathbb{R}$. Tedy neexistuje žádné z, aby funkce $\exp z = 0$. □

V následující větě uvedeme další důležité vlastnosti exponenciální funkce.

Věta 3.7. *Pro $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ a $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí*

1. $\exp(z + 2\pi ik) = \exp z$,
2. $\exp z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$,
3. $\exp z = -1 \Leftrightarrow z = (2k+1) \cdot \pi i$,
4. $\exp z_1 = \exp z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i$.
5. $\exp \overline{z} = \overline{\exp z}$,
6. $(\exp z)^n = \exp nz$.
7. $\operatorname{Re}(\exp z) = \exp(\operatorname{Re} z)\cos(\operatorname{Im} z)$, $\qquad \operatorname{Im}(\exp z) = \exp(\operatorname{Re} z)\sin(\operatorname{Im} z)$,
8. $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$,
9. $\arg(\exp z) = \operatorname{Im} z$.
10. *Komplexní exponenciála je periodická funkce s periodou $2\pi i$. Množina všech period je $\{2\pi i\mathbb{Z}\}$.*

Důkaz. 1. Pro $z = x + iy \in \mathbb{C}$ platí:
$\exp(z + 2k\pi i) = \exp(x + i \cdot (y + 2k\pi)) = e^x \cdot (\cos(y + 2k\pi) + i \cdot \sin(y + 2k\pi)) = e^x(\cos y + i \cdot (\sin y) = \exp z$

2. S využitím $\exp 0 = 1$ a předchozí vlastnosti stačí upravovat

$$1 = \exp 0 = \exp(0 + 2k\pi i) = \exp 2k\pi i.$$

3. Rozepsáním rovnice a porovnáním reálné a imaginární části získáváme soustavu dvou rovnic

$$e^x \cdot \cos y = -1, \qquad e^x \cdot \sin y = 0. \tag{3.3}$$

Protože pro reálnou exponenciální funkci platí $e^x > 0$, pak řešení druhé z rovnic musí být ve tvaru $y = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Dosazením do první rovnice snadno zjistíme, že se řešení zúží na $y = (2k+1)\pi$. Protože $\cos(2k+1)\pi = 1$, pak musí být $e^x = 1$, z čehož vyplývá, že $x = 0$. Tím je tvrzení dokázáno.

4. Důkaz je analogický jako u bodu 1 z této Věty.

5. S využitím vlastností reálných funkcí $\cos x$ a $\sin x$, respektive sudosti a lichosti těchto funkcí, je zřejmé, že $\exp \overline{z} = \exp(x - iy) = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^x(\cos y - i\sin y) = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = \overline{\exp z}$.

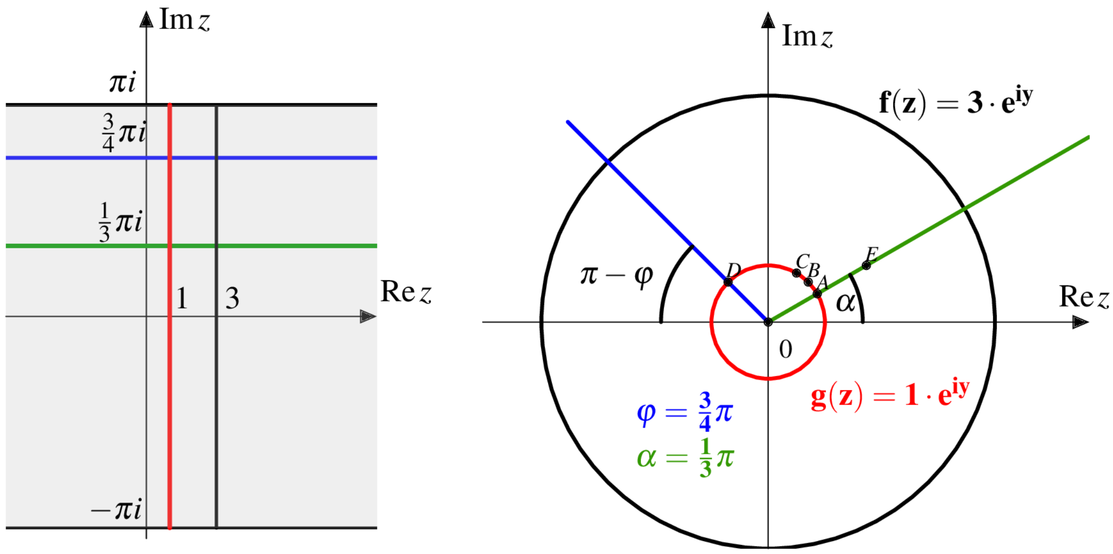
6. Několikanásobnou aplikací Věty 3.3 dostáváme, že

$$\underbrace{\exp z \cdot \exp z \cdots \exp z}_{n} = \exp 2z \cdot \underbrace{\exp z \cdots \exp z}_{n-2} = \cdots = \exp nz.$$

7. Důkaz plyne přímo z odvozeného tvaru ve Větě 3.4.
8. $|\exp z| = |e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)| = e^x \cdot \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x = \exp(\operatorname{Re} z)$.
9. Tvrzení plyne přímo z Věty 3.4.
10. Tvrzení plyne přímo z prvního bodu této Věty.

$\square$

Exponenciální funkce zobrazuje přímky $y = y_0$ (konstanta) na polopřímky $z = t\exp(iy_0)$ pro $t \in [0, \infty)$. Přímky $x = x_0$ zobrazuje na kružnice $z = \exp x_0 \exp(it)$ pro $t \in (-\infty, \infty)$. V prvním případě parametr $t = e^x$, z čehož plyne, že interval parametru t odpovídá oboru hodnot pro exponenciální funkci v reálném oboru.



Obrázek 3.1: Exponenciální funkce

Pro větší přehlednost uvedeme, co znamenají jednotlivé body na obrázku 3.1, tedy $A = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $B = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $C = \frac{\sqrt{1}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $E = \sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$, $D = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{2}{2}$.

V první případě, tedy $y = y_0$, se nám zobrazují polopřímky. To je díky vlastnosti 9 z 3.7 je zřejmé, neboť z roviny vybereme ta čísla, která mají argument této funkce stejný (neboli bereme k-násobky y), což dá dohromady polopřímku. V druhém případě vidíme (i numericky díky bodům A, B, C, D), že vybíráme všechny body z roviny, které mají absolutní hodnotu rovnu danému x_0, což v našem případě zobrazují kružnice $g(z)$ a $f(z)$.

Důsledek 3.8. *Platí, že* $\frac{1}{\exp z} = \exp(-z)$ *pro každé* $z \in \mathbb{C}$.

Důkaz. Díky vlastnostem z Věty 3.7, Věty 3.3 a Věty 3.6 můžeme snadno psát

$$1 = \exp 0 = \exp(z - z) = \exp z \cdot \exp(-z),$$

což snadno můžeme přepsat jako

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}.$$

□

Věta 3.9. *Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ oblast obsahující počátek. Je-li $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfní a $f(0) = 1$, $f'(z) = f(z)$ pro $z \in G$, pak*

$$f(z) = \exp z, \qquad \text{pro } z \in G.$$

Důkaz. Nechť $h(z) = f(z)\exp(-z)$. Pak z Věty 1.21 a rovnosti $f'(z) = f(z)$ plyne

$$h(z)' = f'(z)\exp(-z) - f(z) \cdot \exp(-z) = 0.$$

Pak tedy dle Věty 1.23 musí být $h(z) = c$ pro nějaké $c \in \mathbb{C}$. Protože platí, že $f(0) = 1$, $\exp 0 = 1$, pak i $h(0) = 1$, tedy $h(z) \equiv 1$. Potom s využitím Důsledku 3.8 obdržíme z rovnosti $1 = f(z)\exp(-z)$, že

$$f(z) = \exp z.$$

□

Jednou z oblastí, kde se využije vlastností komplexní exponenciály, je řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Připomeňme, že mluvíme o rovnicích typu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

kde $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Pak jsou řešení definována pomocí exponenciální funkce a kořenů charakteristického polynomu

$$a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Pokud je kořen charakteristického polynomu komplexní, pak by i odpovídající řešení bylo komplexní, což jistě není vhodné. Při hledání reálného fundamentálního systému se využije vlastnosti, že pokud je $y(x) = u(x) + i\,v(x)$ řešením diferenciální rovnice, pak i funkce $u(x)$ a $v(x)$ jsou řešením této diferenciální rovnice [11]. Pokud je tedy řešení rovnice ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$, kde $\lambda = a + i\,b \in \mathbb{C}$, můžeme psát

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx).$$

Snadno tedy vidíme, že $u(x) = \operatorname{Re} y(x) = e^{ax}\cos bx$, $v(x) = \operatorname{Im} y(x) = e^{ax}\sin bx$, což jsou (dokonce lineárně nezávislá) řešení diferenciální rovnice. Obecné řešení tedy potom můžeme zapsat jako

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Stejné obecné řešení můžeme získat i pro komplexně sdružený kořen λ.

Příklad 3.10. *Řešte diferenciální rovnici $y'' - 4y' + 5y = 0$.*

Řešení. Charakteristický polynom má tvar $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ a jeho řešení jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Řešení tedy jsou $y(x) = e^{(2\pm i)x}$, čímž se dostáváme k jednotlivým řešením

$$u(x) = e^{2x}\cos x, \qquad v(x) = e^{2x}\sin x.$$

Ověření, že obě tyto funkce jsou řešení je potom snadné. Počítejme

$$u'(x) = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x,$$
$$u''(x) = 3e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\sin x.$$

Po dosazení do původní rovnice dostáváme

$$\underbrace{3e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\sin x}_{u(x)''} - 4(\overbrace{2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x}^{u(x)'}) + 5(\underbrace{e^{2x}\cos b}_{u(x)}) = 0.$$

Obdobným postupem můžeme taktéž ověřit, že je i funkce $v(x)$ řešením rovnice, stejně jako zmíněné obecné řešení.

Kapitola 4

Goniometrické funkce

V této kapitole se budeme zabývat komplexními goniometrickými funkcemi. Pro odlišení od reálných goniometrických funkcí budeme používat značení $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cs} z$, $\operatorname{tng} z$ a $\operatorname{ctng} z$.

Definice 4.1. Pro $z \in \mathbb{C}$ definujeme funkce $\operatorname{sn} z$ a $\operatorname{cs} z$ pomocí mocninných řad jako

$$\operatorname{cs} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \operatorname{sn} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{4.1}$$

Vzhledem k tomu, že platí vztah z Věty 3.4 a díky tomu, že definice reálných a komplexních goniometrických funkcí a exponenciální funkce jsou podobné, není překvapením, že platí vztah

$$\exp iz = \operatorname{cs} z + i \cdot \operatorname{sn} z.$$

Vskutku, pokud budeme upravovat, získáme

$$\begin{aligned}
\operatorname{cs} z + i \cdot \operatorname{sn} z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\
&= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + i \cdot \frac{z^1}{1!} - i \cdot \frac{z^3}{3!} + i \cdot \frac{z^5}{5!} + \cdots = \\
&= 1 + i \cdot \frac{z^1}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \\
&= 1 + i \cdot \frac{z^1}{1!} + i^2 \cdot \frac{z^2}{2!} + i^3 \cdot \frac{z^3}{3!} + i^4 \cdot \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \exp iz,
\end{aligned}$$

což je náš požadovaný vztah. V některé literatuře se goniometrické funkce zavádějí pomocí exponenciální funkce rovnou, a to za pomocí Eulerových vzorců jako

$$\operatorname{cs} z = \frac{\exp iz + \exp(-iz)}{2}, \qquad \operatorname{sn} z = \frac{\exp iz - \exp(-iz)}{2i}. \tag{4.2}$$

Pak je tento vztah zřejmý, neboť

$$\operatorname{cs} z + i \cdot \operatorname{sn} z = \frac{\exp iz + \exp(-iz)}{2} + i \cdot \frac{\exp iz - \exp(-iz)}{2i} = \exp iz.$$

Stejně jako v reálném oboru platí velké množství vzorců pro goniometrické a navíc jsou tyto vzorce shodné s těmi reálnými.

Věta 4.2. *Pro $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ platí:*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cs}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{cs} z_1 \operatorname{cs} z_2 \mp \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2,\\
\operatorname{sn}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{sn} z_1 \operatorname{cs} z_2 \pm \operatorname{cs} z_1 \operatorname{sn} z_2,\\
\operatorname{cs} 2z &= \operatorname{cs}^2 z - \operatorname{sn}^2 z,\\
\operatorname{sn} 2z &= 2 \operatorname{sn} z \operatorname{cs} z,\\
1 &= \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cs}^2 z,\\
\operatorname{cs} z &= \operatorname{sn}(z + \pi/2),\\
\operatorname{sn} z &= \operatorname{cs}(z - \pi/2),\\
\operatorname{sn} z_1 + \operatorname{sn} z_2 &= 2 \operatorname{sn} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{cs} \frac{z_1 - z_2}{2},\\
\operatorname{sn} z_1 - \operatorname{sn} z_2 &= 2 \operatorname{sn} \frac{z_1 - z_2}{2} \operatorname{cs} \frac{z_1 + z_2}{2},\\
\operatorname{cs} z_1 + \operatorname{cs} z_2 &= 2 \operatorname{cs} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{cs} \frac{z_1 - z_2}{2},\\
\operatorname{cs} z_1 + \operatorname{cs} z_2 &= -2 \operatorname{sn} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{sn} \frac{z_1 - z_2}{2}.
\end{aligned}
$$

Důkaz. Nejprve proveďme důkaz prvního vzorce, ze kterého bude vyplývat většina ostatních vztahů. Pro úsporu si dovolíme v této části používat jednodušší zápis a psát místo $\exp z$ pouze e^z a zavedeme substituci $iz_1 = A$ a $iz_2 = B$. Pro přehlednost nejprve roznásobme

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cs} z_1 \operatorname{cs} z_2 &= \frac{e^A e^B + e^{-A} e^{-B}}{4} + \frac{e^{-A} e^B + e^A e^{-B}}{4},\\
\operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2 &= \frac{e^A e^B + e^{-A} e^{-B}}{4} - \frac{e^{-A} e^B + e^A e^{-B}}{4}.
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme vidět, že pokud sečteme rovnice, získáme s využitím první identity rovnost

$$
\operatorname{cs} z_1 \operatorname{cs} z_2 + \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2 = \frac{2}{4}\left(e^{A+B} + e^{-(A+B)}\right) = \operatorname{cs}(z_1 + z_2).
$$

Díky tomuto vztahu je snadné dokázat další vztahy z Věty 4.2, neboť stačí pouze vhodně dosadit za $z_1 = z_2$, nebo u dalších dvou vzorců $z_2 = \frac{\pi}{2}$.

Dokázání posledních vztahů je opět náročné na místo, proto zavedeme tuto substituci: $\operatorname{sn} \frac{z_1}{2} = S_1$, $\operatorname{sn} \frac{z_2}{2} = S_2$, $\operatorname{cs} \frac{z_1}{2} = C_1$ a $\operatorname{cs} \frac{z_2}{2} = C_2$. V prvním kroku opět využijeme již dokázaných vzorců a pak již stačí upravovat jako

$$
\begin{aligned}
2 \operatorname{sn}\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \operatorname{cs}\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right) &= 2(S_1C_2 + S_2C_1)(C_1C_2 + S_1S_2) =\\
&= 2(S_1C_2C_1S_2 + S_1S_1C_2S_2 + S_2C_1C_1C_2 + S_2C_1S_1S_2) =\\
&= 2(S_1C_1(C_2^2 + S_2^2) + S_2C_2(S_1^2 + B_1^2)) =\\
&= 2 \sin \frac{z_1}{2} \operatorname{cs} \frac{z_1}{2} + 2 \operatorname{sn} \frac{z_2}{2} \operatorname{cs} \frac{z_2}{2} = \operatorname{sn} z_1 + \operatorname{sn} z_2.
\end{aligned}
$$

□

Nyní rozebereme a srovnáme některé vlastnosti těchto funkcí.

Věta 4.3. *Nechť $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{Z}$ platí:*

1. *Funkce $\operatorname{cs} z$ je sudá, tedy platí $\operatorname{cs}(-z) = \operatorname{cs} z$. Funkce $\operatorname{sn} z$ je lichá, tedy platí $\operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z$.*

2. *Pro všechna reálná čísla $z = x \in \mathbb{R}$ jsou funkční hodnoty goniometrických funkcí 4.1 totožné s funkčními hodnotami reálných goniometrických funkcí $\cos x$ a $\sin x$.*

3. *Funkce $\operatorname{cs} z$ a $\operatorname{sn} z$ jsou holomorfním rozšířením reálných goniometrických funkcí na množině $\mathbb{C}$ a pro každé číslo $z \in \mathbb{C}$ platí*
$$(\operatorname{cs} z)' = -\operatorname{sn} z, \qquad (\operatorname{sn} z)' = \operatorname{cs} z.$$

4. *Platí*
$$\begin{aligned} \operatorname{cs} z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = \pi(2k+1)/2, \\ \operatorname{sn} z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = \pi k. \end{aligned}$$

5. *Platí*
$$\begin{aligned} \operatorname{cs} z_1 = \operatorname{cs} z_2 \quad &\Leftrightarrow \quad z_1 \pm z_2 = 2k\pi, \\ \operatorname{sn} z_1 = \operatorname{sn} z_2 \quad &\Leftrightarrow \quad z_1 + z_2 = (2k+1)\pi \quad \textit{nebo} \\ & \qquad\quad z_1 - z_2 = 2k\pi. \end{aligned}$$

6. *Funkce $\operatorname{cs} z$ a $\operatorname{sn} z$ jsou periodické funkce s periodou 2π, tedy platí*
$$\operatorname{cs}(z + 2\pi) = \operatorname{cs} z, \qquad \operatorname{sn}(z + 2\pi) = \operatorname{sn} z.$$

7. *Funkce $\operatorname{sn} z$ a $\operatorname{cs} z$ jsou celé funkce.*

Důkaz. 1. S pomocí definice goniometrických funkcí (4.1) hned můžeme vidět, že funkce $\cos z$ je sudá, neboť v exponentu je mocnina sudá. Protože v exponentu u funkce $\sin z$ je mocnina lichá, je hned vidět i lichost této funkce.

2. Tvrzení je zřejmé z porovnání vyjádření reálných a komplexních goniometrických funkcí.

3. Díky vlastnosti z Věty 1.43 jednoduše zjistíme, že
$$(\operatorname{sn} z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{cs} z.$$
Obdobně můžeme postupovat pro derivaci funkce kosinus.

4. Tvrzení dokážeme pro sinus. Protože platí, že $\exp(i\pi) = \exp(-i\pi) = -1$, můžeme snadno psát
$$\operatorname{sn} \pi = \frac{\exp(i\pi) - \exp(-i\pi)}{2i} = \frac{-1+1}{2i} = 0.$$

5. Tvrzení plyne přímo z předchozího bodu a Věty 4.2.
6. Tvrzení plyne ihned z Eulerových vzorců a z periodicity funkce $\exp z$.
7. Protože je funkce holomorfní v celém $\mathbb{C}$, pak je podle definice celá.

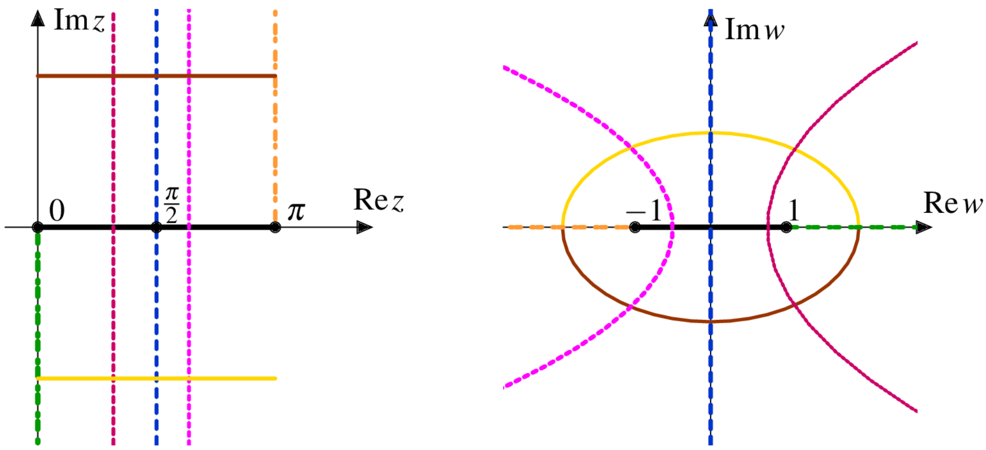
$\square$

Stejně jako v reálném oboru je funkce $\operatorname{cs} z$ periodická, proto se podívejme, kde je prostá:

$$P = \{z \mid z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0,\ (2k-1)\pi < \operatorname{Re} z < (2k+1)\pi\}\,.$$

Dále se můžeme podívat, na jakou množinu se tato funkce zobrazuje:

$$M = \mathbb{C} \setminus \{z \mid\ \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 1\}.$$



Obrázek 4.1: Komplexní kosinus

Rozeberme například, proč se na obrázku 4.1 zobrazuje žlutá úsečka na půlku elipsy. Tato úsečka obsahuje body ve tvaru $z = t + i$, kde parametr $t \in [0, \pi]$. Využijme nyní goniometrických vzorců y Věty 4.2 a Eulerových vzorců a pišme:

$$\operatorname{cs}(t+i) = \operatorname{cs} t \operatorname{cs} i - \operatorname{sn} t \operatorname{sn} i = \operatorname{cs} t \frac{\exp(-1) + \exp 1}{2} + i \operatorname{sn} t \frac{\exp(-1) - \exp 1}{2}. \tag{4.3}$$

Z tohoto výpočtu je vidět, že se tato úsečka zobrazuje na elipsu (s ohnisky v bodech ± 1). Speciálním případem je potom černá úsečka, která má zjevně $\operatorname{Im} z = 0$. Ta se zobrazuje na degenerovanou elipsu, což znázorňuje opět černá úsečka. Dalším z příkladů může být zelená polopřímka splývající s osou $\operatorname{Im} z$. Její body se dají vyjádřit jako $z = i \cdot t$, kde $t \in (-\infty, 0]$. Zvolme $t_1 = 0, t_2 = 1$. Pak s využitím stejných vzorců jako v předchozím bodě získáme, že $\operatorname{cs} 0i = 1$, $\operatorname{cs} i = \frac{\exp(-1)+\exp 1}{2}$. Obě tyto komplexní čísla mají nulovou komplexní část a proto se zobrazují na polopřímku, která splývá s osou $\operatorname{Re} w$. Obdobně můžeme postupovat u dalších polopřímek či u znázorněných parabol, nicméně u popisování těchto obrazů je vhodné využít vztahů, které se definují až u hyperbolických funkcí v následující kapitole.

Z bodu 7 z Věty 4.3 plyne, že jsou funkce neohraničené, což je jeden z největších rozdílů oproti reálným goniometrickým funkcím. Také můžeme funkci $\operatorname{cs} z$ vyjádřit jako složení tří jednodušších funkcí, které již známe.

Věta 4.4. *Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí, že*

$$\cos z = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z),$$

kde $f_1(z) = iz$, $f_2(z) = \exp z$ a $f_3(z) = (z + 1/z)/2$. První zmíněná funkce je otočení o úhel $\pi/2$, druhou funkcí je komplexní exponenciála a třetí funkcí je Žukovského funkce.

Důkaz. Složení funkce funkce $f_1(z)$ *a* $f_2(z)$ je triviální, označme ji g. Proto začneme až složením funkce f_3 *a* g.

$$(f_3 \circ g)(z) = \frac{\exp iz + \frac{1}{\exp iz}}{2} = \frac{\exp iz + \exp -iz}{2} = \mathrm{cs}\, z,$$

čímž jsme dokázali naše tvrzení. □

Obdobně lze rozložit funkce sinus.

Příklad 4.5. *Má v $\mathbb{C}$ řešení rovnice* $\mathrm{sn}\, z = 2$?

Řešení. Nejprve využijme Eulerových vzorců (4.2) a rozepišme tak sinus, rovnice tedy vypadá jako

$$\exp iz - \exp(-iz) = 4i.$$

Nyní využijeme vztahů (3.4) a za předpokladu, že komplexní číslo z je ve tvaru $z = y - ix$ (což můžeme bez problémů předpokládat), můžeme psát

$$\mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y) - \mathrm{e}^{-x}(\cos y - i \sin y) = 4i.$$

Vzhledem k tomu, že všechny funkce v rovnici jsou reálné, můžeme porovnat reálnou a imaginární složku pravé a levé strany. Pak tedy získáváme soustavu dvou rovnic

$$\cos y \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = 0, \qquad \sin y \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) = 4. \tag{4.4}$$

Nejprve začneme s rovnicí vlevo. Aby byla splněna tato rovnost, pak musí platit

$$\cos y = 0 \qquad \text{nebo} \qquad \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x}.$$

První rovnost je splněna, pokud $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Protože funkce e^x je rostoucí na celém $\mathbb{R}$, druhá rovnost je splněna pouze pro $x = 0$. Pokud bychom $x = 0$ dosadili do druhé rovnice soustavy (4.4), získáme $\sin y = 2$, což není definované pro žádné y. Dále dosadíme první řešení a získáváme

$$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = \pm 4.$$

1. Řešme první případ, kdy $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, tedy $e^x + \mathrm{e}^{-x} = 4$. Substitucí $\mathrm{e}^x = A$ převedeme rovnici na kvadratickou a snadno zjistíme, že $A_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Po dosazení zpět získáváme, že $x = \ln(2 \pm \sqrt{3})$. Řešení rovnice je pak ve tvaru $z = y - ix = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Obdobným postupem snadno zjistíme, že druhý případ, tedy $y = \frac{3\pi}{2}\pi + 2k\pi$ a jemu přidružená rovnice $e^x + e^{-x} = -4$, má řešení
$$A_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$
Protože v obou případech je A záporné, což reálná exponenciální funkce není v žádném bodě, nemá pro $y = \frac{3\pi}{2}\pi + 2k\pi$ původní rovnice řešení.

Příklad 4.5 má tedy nekonečné mnoho řešení, které odpovídají $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definice 4.6. Funkcí tangens rozumíme funkci definovanou pro $z \in \mathbb{C}$ tímto předpisem
$$\operatorname{tng} z = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cs} z} = -i \cdot \frac{\exp iz + \exp(-iz)}{\exp iz - \exp(-iz)}$$
Funkcí kotangens rozumíme funkci definovanou $z \in \mathbb{C}$ tímto předpisem
$$\operatorname{ctng} z = \frac{\operatorname{cs} z}{\operatorname{sn} z} = i \cdot \frac{\exp iz - \exp(-iz)}{\exp iz + \exp(-iz)}$$

Platí následující vlastnosti:

Věta 4.7. *Pro $z \in \mathbb{C}$ platí:*

1. *Funkce tangens a kotangens jsou liché, tedy platí*
$$\operatorname{ctng}(-z) = -\operatorname{ctng} z\,, \qquad \operatorname{tng}(-z) = -\operatorname{tng} z,$$
pro každé $z \in \mathbb{C}$.

2. *Funkce tangens a kotangens jsou periodické funkce s periodou π pro $z \in \mathbb{C}$, tedy platí*
$$\operatorname{ctng}(z+\pi) = \operatorname{ctng} z, \qquad \operatorname{tng}(z+\pi) = \operatorname{tng} z.$$

3. *Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí*
$$\operatorname{ctng} z = \frac{1}{\operatorname{tng} z}, \qquad \operatorname{tng} z = \frac{1}{\operatorname{ctng} z}$$

4. *Pro všechna reálná čísla $z = x \in \mathbb{R}$ jsou funkční hodnoty $\operatorname{ctng} z$ a $\operatorname{tng} z$ shodné s funkčními hodnotami reálných goniometrických funkcí. (nejsou stejně jako v $\mathbb{R}$ definovány po řadě pro $z = k\pi$ a $z = (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$).*

5. *Funkce $\operatorname{cotg} z$ nabývá všech hodnot kromě $\pm i$. Platí, že*
$$\operatorname{ctng} z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = (2k+1)\pi/2,\; k \in \mathbb{Z},$$
$$\operatorname{ctng} z = \infty \Leftrightarrow\; z = k\pi,\; k \in \mathbb{Z}.$$
Funkce $\operatorname{tng} z$ nabývá všech hodnot kromě $\pm i$. Platí, že
$$\operatorname{tng} z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = k\pi,\; k \in \mathbb{Z},$$
$$\operatorname{tng} z = \infty \Leftrightarrow z = (2k+1)\pi/2,\; k \in \mathbb{Z}.$$

6. *Funkce tangens je holomorfní na oblasti* $\mathbb{C}\backslash\{z|z \in \mathbb{C},\ z = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *a na této oblasti platí*
$$(\operatorname{tng} z)' = \frac{1}{\operatorname{cs}^2 z}.$$
Funkce kotangens je holomorfní na oblasti $\mathbb{C}\backslash\{z|z \in \mathbb{C},\ z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *a na této oblasti platí*
$$(\operatorname{ctng} z)' = -\frac{1}{\operatorname{sn}^2 z}.$$

Důkaz. 1. S použitím 1. bodu z Věty 4.3 je hned vidět, že
$$\operatorname{tng}(-z) = \frac{\operatorname{sn}(-z)}{\operatorname{cs}(-z)} = \frac{-\operatorname{sn} z}{\operatorname{cs} z} = -\operatorname{tng} z.$$
Důkaz pro kotangens je zcela analogický.

2. Tvrzení dokážeme pro kotangens.
$$\operatorname{cotg} z = i \cdot \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{\exp(iz) + \exp(-iz)} = i \cdot \frac{\exp iz - \frac{1}{expiz}}{expiz + \frac{1}{expiz}} = i \cdot \frac{\frac{\exp 2iz - 1}{\exp iz}}{\frac{\exp 2iz + 1}{\exp iz}} = i \cdot \frac{\exp 2iz - 1}{\exp 2iz + 1}$$
Protože platí, že exponenciální funkce je periodická a platí vlastnost 4 z Věty 3.7, pak můžeme psát
$$2iz = 2iz + 2ki\pi \iff z = z + k\pi.$$
Tím je tvrzení dokázáno.

3. Důkaz tohoto tvrzení je vidět přímo z definice těchto dvou funkcí.

4. Tvrzení plyne přímo z 3. bodu 4.3.

5. Pokud by mělo platit, že $\operatorname{cotg} z = i$, pak nutně
$$\exp(iz) - \exp(-iz) = \exp(iz) + \exp(-iz).$$
Další úpravou získáme
$$2\exp(-iz) = 0.$$
Protože ovšem platí, že $\exp z \neq 0$ *pro* $z \in \mathbb{C}$, je předchozí rovnost neřešitelná. Označme
$$\operatorname{cotg} z = w = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{\exp iz + \exp(-iz)}.$$
Pak můžeme vyjádřit
$$\exp 2iz = \frac{1 - iw}{1 + iw}.$$
Protože funkce $\exp z$ nabývá všech hodnot kromě 0, musíme vyšetřit případy, kdy je tento zlomek roven 0. To nastává pouze v případě, že $w = -i$. Postup můžeme opakovat s tím rozdílem, že si vyjádříme kotangens jako
$$\operatorname{ctng} z = w = \frac{1 - \exp(-2iz)}{1 + \exp(-2iz)}.$$

Pak stejnými úpravami dojdeme k tomu, že $w \neq i$. Tím je tvrzení dokázáno. Dále

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{cs} z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = (2k+1)\pi/2 \text{ pro } z \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{cotg} z = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sn} z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = k\pi \text{ pro } z \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

6. Tvrzení plyne přímo z Věty 1.21.

□

Podobně jako u funkcí sinus a cosinus, i pro funkce tangens a kotangens se součtové vzorce z analýzy v reálném oboru. Připomeňme jen pár těch nejdůležitějších.

Věta 4.8. *Pro z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ platí:*

$$\begin{aligned} \operatorname{ctng}(z_1 \pm z_2) &= (\operatorname{ctng} z_1 \operatorname{ctng} z_2 \mp 1)/(\operatorname{ctng} z_2 \pm \operatorname{ctng} z_1), \\ \operatorname{ctng} z_1 \pm \operatorname{ctng} z_2 &= (\operatorname{sn}(z_2 \pm \operatorname{sn} z_1))/(snz_2snz_1), \\ \operatorname{ctng}^2 z &= (1/\operatorname{sn}^2 z) - 1, \\ \operatorname{tng} z &= \operatorname{ctng}(\pi/2 - z). \end{aligned}$$

Za pomocí vlastnosti 3. z 4.7 se dají lehce dodefinovat příslušné vzorce pro tangens. Další vzorce se (například pro dvojnásobný argument) se dají odvodit vhodným dosazením za z_1 a z_2.

Důkaz. Přímým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}(z_1 \pm z_2) &= \frac{\operatorname{cs}(z_1 \pm z_2)}{\operatorname{sn}(z_1 \pm z_2)} = \frac{\operatorname{cs} z_1 \operatorname{cs} z_2 \mp \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2}{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cs} z_2 \pm \operatorname{cs} z_1 \operatorname{sn} z_2} = \frac{\frac{\operatorname{cs} z_1 \operatorname{cs} z_2 \mp \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2}{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2}}{\frac{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cs} z_2 \pm \operatorname{cs} z_1 \operatorname{sn} z_2}{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2}} = \\ &= (\operatorname{cotg} z_1 \operatorname{cotg} z_2 \mp 1)/(\operatorname{cotg} z_2 \pm \operatorname{cotg} z_1), \\ \operatorname{cotg} z_1 \pm \operatorname{cotg} z_2 &= \frac{\operatorname{cs} z_1}{\operatorname{sn} z_1} \pm \frac{\operatorname{cs} z_2}{\operatorname{sn} z_2} = \frac{\operatorname{cs} z_1 \operatorname{sn} z_2 \pm \operatorname{cs} z_1 \operatorname{sn} z_2}{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2} = \\ &= (\operatorname{sn}(z_2 \pm \operatorname{sn} z_1))/(\operatorname{sn} z_2 \operatorname{sn} z_1), \\ \operatorname{cotg}^2 z &= \frac{\operatorname{cs}^2 z}{\operatorname{sn}^2 z} = \frac{\operatorname{cs}^2 z + \operatorname{sn}^2 z}{\operatorname{sn}^2 z} - \frac{\operatorname{sn}^2 z}{\operatorname{sn}^2 z} = (1/\operatorname{sn}^2 z) - 1, \\ \operatorname{cotg}(\pi/2 - z) &= \frac{\operatorname{cotg} \pi/2 \operatorname{cotg} z + 1}{\operatorname{cotg} z - \operatorname{cotg} \pi/2} = \frac{0+1}{\operatorname{cotg} z - 0} = \frac{1}{\operatorname{cotg} z} = \operatorname{tng} z. \end{aligned}$$

□

Věta 4.9. *Funkci* $\operatorname{cotg} z$ *lze vyjádřit jako složení čtyř jednodušších funkcí, tedy*

$$\operatorname{cotg} z = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z),$$

kde $f_1 = 2iz$ *(dilatace a otočení),* $f_2 = \exp z$ *(exponenciální funkce),* $f_3 = (z+1)/(z-1)$ *(lineární lomená funkce) a* $f_4 = iz$ *(otočení).*

Důkaz. Skládáním funkcí získáváme

$$\begin{aligned} (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) &= (f_4 \circ f_3 \circ f_2)(2iz) = (f_4 \circ f_3)(\exp 2iz) = (f_4)\left(\frac{\exp 2iz - 1}{\exp 2iz + 1}\right) = \\ &= i \cdot \frac{\exp(2iz) - 1}{\exp(2iz) + 1} = \operatorname{cotg} z. \end{aligned}$$

□

Kapitola 5

Hyperbolické funkce

V této kapitole probereme postupně hyperbolické funkce. Pro odlišení od reálného oboru zvolíme označení $\operatorname{snh} z$, $\operatorname{csh} z$, $\operatorname{tngh} z$ a $\operatorname{ctgh} z$.

Definice 5.1. Funkce hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus definujeme pro každé číslo $z \in \mathbb{C}$ předpisy

$$\operatorname{snh} z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2}, \qquad \operatorname{csh} z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}. \tag{5.1}$$

Vlastnosti hyperbolických funkcí jsou velmi podobné těm, které mají goniometrické komplexní funkce, stejně tak i důkazy těchto vlastností. Proto v této kapitole již nebudeme provádět žádné důkazy těchto vztahů.

Věta 5.2. *Funkce hyperbolický sinus a hyperbolický sinus mají pro každé $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{Z}$ tyto vlastnosti:*

1. *Funkce* $\operatorname{csh} z$ *je sudá, tedy platí* $\operatorname{csh}(-z) = \quad \operatorname{csh} z$.
   Funkce $\operatorname{snh} z$ *je lichá, tedy platí* $\operatorname{snh}(-z) = -\operatorname{snh} z$.

2. *Pro všechna reálná čísla $z = x \in \mathbb{R}$ jsou funkční hodnoty hyperbolických funkcí 5.1 totožné s funkčními hodnotami reálných hyperbolických funkcí* $\cosh x$ *a* $\sinh x$.

3. *Funkce* $\operatorname{csh} z$ *a* $\operatorname{snh} z$ *jsou holomorfní na množině $\mathbb{C}$ a pro každé číslo $z \in \mathbb{C}$ platí*

$$(\operatorname{csh} z)' = \operatorname{snh} z, \qquad (\operatorname{snh} z)' = \operatorname{csh} z.$$

4. *Platí*

$$\begin{aligned} \operatorname{snh} z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = ki\pi, \\ \operatorname{csh} z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = i\pi(2k+1)/2. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{array}{rcrl} \operatorname{csh} z_1 = \operatorname{csh} z_2 & \Leftrightarrow & z_1 \pm z_2 & = \ 2ki\pi, \\ \textit{Plat}\, \operatorname{snh} z_1 = \operatorname{snh} z_2 & \Leftrightarrow & z_1 + z_2 & = (2k+1)\pi i \\ \textit{nebo} & & z_1 - z_2 & = \ 2ki\pi. \end{array}$$

Podobně jako u goniometrických funkcí se dá odvodit velké množství vzorců pro hyperbolické funkce.

Věta 5.3. *Pro každé* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *platí:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{csh}^2 z - \operatorname{snh}^2 z &= 1,\\
\operatorname{csh}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{csh} z_1 \operatorname{csh} z_2 \pm \operatorname{snh} z_1 \operatorname{snh} z_2,\\
\operatorname{snh}(z_1 \pm z_1) &= \operatorname{snh} z_1 \operatorname{csh} z_1 \pm \operatorname{csh} z_1 \operatorname{snh} z_2,\\
\operatorname{csh} 2z &= \operatorname{snh}^2 z + \operatorname{csh}^2 z,\\
\operatorname{snh} 2z &= 2 \operatorname{snh} z \operatorname{csh} z,\\
\operatorname{csh} z + \operatorname{snh} z &= \exp z,\\
\operatorname{csh} z - \operatorname{snh} z &= \exp(-z),\\
\operatorname{csh} z_1 + \operatorname{csh} z_2 &= 2 \operatorname{csh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{csh} \frac{z_1 - z_2}{2},\\
\operatorname{csh} z_1 - \operatorname{csh} z_2 &= 2 \operatorname{snh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{snh} \frac{z_1 - z_2}{2},\\
\operatorname{snh} z_1 \pm \operatorname{snh} z_2 &= 2 \operatorname{snh} \frac{z_1 \pm z_2}{2} \operatorname{csh} \frac{z_1 \mp z_2}{2}.
\end{aligned}$$

Věta 5.4. *Funkci* $\operatorname{csh} z$ *lze pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *složit z jednodušších funkcí*

$$\cosh z = (f_2 \circ f_1)(z),$$

kde $f_1(z) = \exp z,\ f_2(z) = (z + 1/z)/2.$

Nyní máme dostatek znalostí k tomu, abychom poukázali na vztahy mezi goniometrickými a hyperbolickými funkcemi. Ty mohou pomoci při řešení zobrazení funkce $\operatorname{cs} z$, viz. Obrázek 4.

Věta 5.5. *Pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{cs} z &= \operatorname{csh} iz,\\
\operatorname{sn} z &= -i \cdot \operatorname{snh} iz,\\
\operatorname{Re} \operatorname{snh} z &= \operatorname{snh}(\operatorname{Re} z) \operatorname{cs}(\operatorname{Im} z),\\
\operatorname{Re} \operatorname{csh} z &= \operatorname{csh}(\operatorname{Re} z) \operatorname{cs}(\operatorname{Im} z),\\
\operatorname{Im} \operatorname{snh} z &= \operatorname{csh}(\operatorname{Re} z) \operatorname{sn}(\operatorname{Im} z),\\
\operatorname{Im} \operatorname{csh} z &= \operatorname{snh}(\operatorname{Re} z) \operatorname{sn}(\operatorname{Im} z),\\
|\operatorname{snh} z| &= \sqrt{\left[\operatorname{snh}^2(\operatorname{Re} z) + \operatorname{sn}(\operatorname{Im} z)\right]},\\
|\operatorname{csh} z| &= \sqrt{\left[\operatorname{csh}^2(\operatorname{Re} z) - \operatorname{sn}(\operatorname{Im} z)\right]}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Definice 5.6. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme předpisy

$$\operatorname{tngh} z = \frac{\operatorname{snh} z}{\operatorname{csh} z} = \frac{\exp(2z) - 1}{\exp(2z) + 1}, \qquad \operatorname{ctgh} z = \frac{\operatorname{csh} z}{\operatorname{snh} z} = \frac{\exp(2z) + 1}{\exp(2z) - 1} \tag{5.3}$$

komplexní hyperbolický tangens a kotangens.

Stejně jako u komplexních goniometrických funkcí tangens a kotangens můžeme odvodit několik základních vlastností.

Věta 5.7. *Platí:*

1. *Funkce jsou liché, tedy*

$$\operatorname{ctgh}(-z) = -\operatorname{ctgh} z, \qquad \operatorname{tngh}(-z) = -\operatorname{tngh} z.$$

2. *Pro všechny reálná čísla $z = x \in \mathbb{R}$ jsou funkční hodnoty komplexních funkcí* $\operatorname{ctgh} z$ *a* $\operatorname{tngh} z$ *shodné s hodnotami reálných hyperbolických funkcí.*

3. *Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí*

$$\operatorname{ctgh} z = \frac{1}{\operatorname{tngh} z}, \qquad \operatorname{tngh} z = \frac{1}{\operatorname{ctgh} z}. \tag{5.4}$$

4. *Funkce* $\operatorname{ctgh} z$ *nabývá všech hodnot kromě ± 1. Pro $k \in \mathbb{Z}$ platí, že*

$$\begin{aligned} \operatorname{ctgh} z = 0 \quad &\Leftrightarrow z = i\pi(2k+1)/2, \\ \operatorname{ctgh} z = \infty \quad &\Leftrightarrow z = ik\pi. \end{aligned}$$

Funkce $\operatorname{tngh} z$ *nabývá všech hodnot kromě ± 1. Platí, že*

$$\begin{aligned} \operatorname{tngh} z = 0 \quad &\Leftrightarrow z = ik\pi, \\ \operatorname{tngh} z = \infty \quad &\Leftrightarrow z = i\pi(2k+1)/2. \end{aligned}$$

5. *Funkce hyperbolický tangens je holomorfní na oblasti $\mathbb{C} \setminus \{z | z \in \mathbb{C},\ z = i\pi(2k+1)/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$ a na této oblasti platí*

$$(\operatorname{tngh} z)' = \frac{1}{\operatorname{csh}^2 z}.$$

Funkce hyperbolický kotangens je holomorfní na oblasti $\mathbb{C} \setminus \{z | z \in \mathbb{C},\ z = ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ a na této oblasti platí

$$(\operatorname{ctgh} z)' = -\frac{1}{\operatorname{snh}^2 z}.$$

6. *Mezi hyperbolickými a goniometrickými funkcemi platí tyto vztahy.*

$$\begin{aligned} \operatorname{ctgh} z &= i \operatorname{cotg} iz, \qquad & \operatorname{tngh} z &= -i \operatorname{tng} iz, \\ \operatorname{ctgh} iz &= -i \operatorname{cotg} z, \qquad & \operatorname{tngh} iz &= i \operatorname{tng} z. \end{aligned}$$

Taktéž můžeme uvést několik vzorců pro hyperbolické funkce. Opět připomene jen pár základních, ze kterých vhodnou kombinací můžeme získat další.

Věta 5.8. *Pro z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ platí*

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctgh}(z_1 \pm z_2) &= \frac{1 \pm \operatorname{ctgh} z_1 \operatorname{ctgh} z_2}{\operatorname{ctgh} z_1 \pm \operatorname{ctgh} z_2}, \\
\operatorname{ctgh} z_1 \pm \operatorname{ctgh} z_2 &= \frac{\operatorname{snh}(z_1 \pm z_2)}{\operatorname{snh} z_1 \operatorname{snh} z_2}, \\
\operatorname{tngh} z &= \operatorname{ctgh}(z - i\pi/2).
\end{aligned}$$

Věta 5.9. *Funkci* $\operatorname{ctgh} z$ *lze složit z jednodušších funkcí*

$$\operatorname{ctgh} z = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) \qquad z \in \mathbb{C},$$

kde $f_1(z) = 2z$*, tedy dilatace,* $f_2(z) = \exp z$ *a* $f_3(z) = (z+1)/(z-1)$*, což je známá lineární lomená funkce.*

Obdobně můžeme vyjádřit také funkci $\operatorname{tngh} z$ (například využitím vztahů (5.4)).

Kapitola 6

Logaritmus

V této kapitole budeme probírat logaritmus a vzorce platné pro tuto funkci. Pro odlišení jsme zvolili značení $\mathrm{Lg}\, z$ jako hlavní hodnota logaritmu a $\lg z$, což značí mnohoznačnou větev. Označení $\ln|z|$ tedy značí známý reálný logaritmus.

Definice 6.1. Logaritmická funkce je funkcí inverzní k exponenciální funkci, tedy platí

$$\lg z = \{w | w \in \mathbb{C}, z = \exp w\}. \tag{6.1}$$

Exponenciální funkce má jako obor hodnot množinu $\mathbb{P}$, proto je tato množina definičním oborem pro logaritmickou funkci. Nyní odvodíme mnohoznačnost logaritmické funkce. Uvažujme $w = w_0 + 2k\pi i$. Pak

$$z = \exp w = \exp(w_0 + 2ki\pi) = \exp w_0 = \exp(\mathrm{Re}\, w_0 + i \,\mathrm{Im}\, w_0).$$

Pak platí, že

$$|z| = \exp(\mathrm{Re}\, w_0), \qquad \mathrm{Im}\, w_0 \in \mathrm{Arg}\, z,$$

díky čemuž můžeme psát

$$w = w_0 + 2ki\pi = (\mathrm{Re}\, w_0 + i \cdot \mathrm{Im}\, w_0) + 2ki\pi = \ln|z| + i \cdot (\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi),$$

což odpovídá

$$\lg z = \ln|z| + i \cdot \arg z. \tag{6.2}$$

Vzhledem k charakteru funkce $\arg z$ můžeme tedy tvrdit, že je logaritmus mnohoznačná funkce. Podobně jako u argumentu, i u logaritmu si zavedeme pojem hlavní hodnoty.

Definice 6.2. Pro každé $z \in \mathbb{P}$ definujeme hlavní hodnotu logaritmu čísla z předpisem

$$\mathrm{Lg}\, z = \ln|z| + i \cdot \mathrm{Arg}\, z. \tag{6.3}$$

Příklad 6.3. *Určete hodnotu logaritmu a hlavní hodnotu logaritmu čísla* $z = 2 \cdot (\sqrt{2} - i\sqrt{2})$.

Řešení. Pro hodnotu logaritmu počítejme

$$\lg\left(2\cdot(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\right)=\ln|\sqrt{16}|+i\arg\left(2\cdot(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\right)=\ln 4+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right).$$

Pro hlavní hodnotu je zřejmě

$$\operatorname{Lg}\left(2\cdot(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)=\ln|\sqrt{16}|+i\operatorname{Arg}\left(2\cdot(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\right)=\ln 4+i\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

Nyní připomeňme několik základních vzorců pro logaritmus z reálného oboru, které budeme postupně rozebírat.

$$\begin{aligned} e^{\ln x}&=x, &\qquad \ln e^x&=x,\\ \ln xy&=\ln x+\ln y, &\qquad \ln\frac{x}{y}&=\ln x-\ln y,\\ \ln x^p&=p\ln x, &\qquad \ln\frac{1}{x}&=-\ln x. \end{aligned}$$

Z Definice 1.16, která se věnovala inverzním funkcím, víme, že při skládání funkcí záleží na pořadí, tedy která funkce je vnitřní a která vnější. To můžeme demonstrovat na prvních dvou vzorcích.

$$\exp(\lg z)=\exp\left(\ln|z|\right)\exp(i\arg z)\exp 2\pi i=|z|\exp(i\operatorname{Arg} z)=z.$$

Tento vzorec je tedy shodný s vzorcem z reálného oboru. V opačném případě, tedy když bude vnější funkcí funkce mnohoznačná, tento vzorec platit nebude.

$$\lg(\exp z)=\ln|\exp z|+i\arg(\exp z)=x+i(y+2k\pi)=x+iy+2k\pi i=z+2k\pi i,$$

kde k je celé číslo. Vidíme tedy, že tento vztah by odpovídal pouze v případě, že $k=0$. Stejně jako u vyšetřování argumentu funkce i zde musíme dát pozor na interpretaci výsledků, tedy rozdíl mezi komplexním číslem a množinou. Zatímco v prvním případě získáváme číslo z, v druhém případě je výsledkem množina definovaná jako $\{z+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

U dalších vzorců můžeme postupovat obdobně, ale opět s důrazem na množinový význam těchto funkcí

$$\lg xy=\ln|xy|+i\arg xy=\ln|x|+\ln|y|+i(\arg x+\arg y)=\lg x+\lg y,$$

Zde si musíme dát pozor na znaménko $+$, která spíše než sčítání dvou hodnot logaritmu znamená sčítání každé hodnoty logaritmu (tedy argumentu) čísla x s každou hodnotou y.

$$\{w\,|\,w\in\mathbb{C},xy=\exp w\}=\{w_1+w_2\,|\,w_1,w_2\in\mathbb{C},w_1=\exp x,w_2=\exp y\}.$$

U dalšího vzorce můžeme postupovat analogicky, tedy

$$\lg\frac{x}{y}=\ln\left|\frac{x}{y}\right|+i\arg\frac{x}{y}=\ln|x|-\ln|y|+i(\arg x-\arg y)=\lg x-\lg y.$$

Jeho aplikací lehce získáme

$$\lg\frac{1}{z} = -\lg z.$$

Opět si musíme dát pozor na důsledky plynoucí z těchto vzorců, které platí pro hodnoty reálného logaritmu. Například nelze tvrdit, že platí rovnost

$$\lg z + \lg z = 2\lg z \qquad \text{nebo} \qquad \lg z - \lg z = 0,$$

neboť pro $k = k_1 - k_2$ platí:

$$\lg z - \lg z = \ln|z| + i\arg z - \ln|z| - i\arg z = i\operatorname{Arg} z + 2k_1\pi i - i\operatorname{Arg} z - 2k_2\pi i = 2k\pi i.$$

Interpretovat by se tento vzorec dal jako rozdíl všech možných hodnot argumentů komplexního logaritmu, tedy $\{2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Obdobně (například za pomocí Věty 1.11) dojdeme ke vztahu

$$\lg z + \lg z = 2\lg z + 2k\pi i.$$

Pokud toto tvrzení zobecníme, získáme

$$\ln z^p = \underbrace{\ln z + \cdots + \ln z}_{p} = p\ln z + 2k\pi i,$$

což je v rozporu se vzorcem, který známe z reálného oboru. Důležité je ovšem zmínit, že tento vzorec platí pouze pro $p \in \mathbb{Z}$.

Nyní vyšetříme, jak se chová jednoznačně určená větev komplexního logaritmu. Tentokrát již budeme operovat s čísly, proto tyto rovnosti nemají pouze symbolický charakter. První vzorec u mnohoznačné funkce se odvozoval za pomocí funkce $\operatorname{Arg} z$, můžeme tedy rovnou psát

$$\exp \operatorname{Lg} z = z.$$

Druhý vzorec u mnohoznačné logaritmické funkce neplatil, což bude obecně platit i u jednoznačného logaritmu.

$$\begin{aligned} \operatorname{Lg}\exp z &= \operatorname{Lg}\exp|z| + i\operatorname{Arg}\exp z = x + i\operatorname{Arg}\exp iy = \\ &= x + i\arg\exp iy + 2\pi i\left\lfloor \frac{1}{2} - \frac{\arg\exp iy}{2\pi}\right\rfloor = z + 2\pi i\left\lfloor \frac{1}{2} - \frac{y}{2\pi}\right\rfloor. \end{aligned}$$

U součtového (respektive podílového) vzorce budeme čelit problému, který jsme popsali ve Větě 1.11.

$$\begin{aligned} \operatorname{Lg}(z_1 z_1) &= \operatorname{Lg} z_1 + \operatorname{Lg} z_2 + 2\pi i N, \\ \operatorname{Lg}\frac{z_1}{z_1} &= \operatorname{Lg} z_1 - \operatorname{Lg} z_2 + 2\pi i N, \end{aligned}$$

a pokud první vzorec zobecníme (pro n celé), pak získáme

$$\operatorname{Lg} z^n = n\operatorname{Lg} z + 2\pi i N.$$

Následující vzorec je důsledkem podílového vzorce, nebo se dá také odvodit jako

$$\begin{aligned} \operatorname{Lg}\frac{1}{z} &= \operatorname{Lg}\frac{\bar z}{|z|^2} = \ln\left|\frac{\bar z}{|z|^2}\right| + i\operatorname{Arg}\frac{\bar z}{|z|^2} = \ln\left|\frac{1}{|z|}\right| + i\operatorname{Arg}\bar z = -\ln|z| \pm i\operatorname{Arg} z = \\ &= \begin{cases} -\operatorname{Lg} z + 2\pi i, & \text{pro } z \in \mathbb{R},\ z < 0 \\ -\operatorname{Lg} z & \text{pro ostatní } z. \end{cases} \end{aligned}$$

Kapitola 7

Obecná mocninná a exponenciální funkce

V reálném oboru jsme definovali obecnou mocninu vztahem $x^a = e^{a \ln x}$, proto se nabízí definovat tuto funkci podobně, tedy jako $z^c = \exp(c \lg z)$. Protože ovšem $\lg z$ není číslo, ale množina čísel, musíme dát pozor na zápis a interpretaci této funkce. Definujme ji proto následovně.

Definice 7.1. Obecnou mocninnou funkcí rozumíme funkci definovanou pro každé $z \in \mathbb{P}$ a $c \in \mathbb{C}$ předpisem

$$z^c = \{w \mid w \in \mathbb{C},\ w = \exp(cL),\ L \in \lg z\} \tag{7.1}$$

Pro úplný začátek uvedeme tvar funkce, na který se budeme odkazovat

$$w = z^c = \exp(c \lg z) = \exp(c \operatorname{Lg} z) \exp(c\, 2\pi i n)\,. \tag{7.2}$$

Asi nebude překvapením, že tato funkce nebude mnohoznačná pro všechny hodnoty $\mathbb{C}$. Už jen pro $c = k \in \mathbb{Z}$ by měla být jednoznačná, neboť v tomto případě dostáváme polynom, který je jednoznačný, o čemž se můžeme přesvědčit

$$z^k = \exp\big(k \lg z\big) = \exp\big(k(\operatorname{Lg} z + 2\pi i n)\big) = \exp\big(k \operatorname{Lg} z\big) \exp\big(2\pi i n k\big) = \exp\big(k \operatorname{Lg} z\big).$$

Další krok taktéž nebude překvapivý, neboť u n-té odmocniny (2.6) jsme řešili problém mnohoznačnosti. Začněme tedy počítat s racionálním číslem ve tvaru $c = \frac{1}{k}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Pokud dosadíme do tvaru (7.2), můžeme psát

$$z^{\frac{1}{k}} = \exp\left(\frac{1}{k} \operatorname{Lg} z\right) \exp\left(\frac{1}{k} 2\pi i n\right)$$

Z tohoto tvaru vidíme, že funkce je jednoznačná pouze v případě, že k dělí n. V opačném případě je funkce k-značná, protože funkce $\exp z$ je periodická a podíl $\frac{n}{k}$ nám nemůže dát více hodnot než k. Obdobně můžeme postupovat pro jakékoliv racionální číslo.

Nyní přistoupíme k rozebrání některých vzorců, proto je nejprve připomene.

$$
\begin{aligned}
x^a x^b &= x^{a+b}, & \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b},\\
\frac{1}{x^b} &= x^{-b}, & (x^a)^b &= x^{ab},\\
(xy)^a &= x^a y^b, & \left(\frac{x}{y}\right)^a &= x^a y^{-a},\\
\lg z^c &= c \lg z.
\end{aligned}
$$

Začneme nejprve s posledním vzorcem, neboť jsem už jej vyšetřovali u logaritmické funkce, ale plně jej má smysl rozebrat až s nynějšími znalostmi. Pišme tedy za pomocí již odvozených vztahů (7.2)

$$
\begin{aligned}
\lg z^c &= \lg\left[\exp(c \operatorname{Lg} z)\exp(c2\pi in)\right] = \lg\left[\exp(c \operatorname{Lg} z)\right] + \lg\left[\exp(c2\pi in)\right]\\
&= c(\operatorname{Lg} z + 2\pi in) + 2\pi ik = c\lg z + 2\pi ik = c\left(\lg z + \frac{2\pi ik}{c}\right).
\end{aligned}
$$

Vidíme tedy, že tento vzorec je shodný s tím z reálné analýzy pouze v případě, že $c = \frac{1}{n}$. V prvním ze zmíněných vzorců se opět projeví problém se sčítáním logaritmu, který jsme již odvodili.

$$
\begin{aligned}
z^a z^b &= \exp(a\lg z)\exp(b\lg z) = \exp(a\operatorname{Lg} z + b\operatorname{Lg} z)\exp(a2\pi in + b2\pi ik)\\
&= \exp\left[(a+b)\operatorname{Lg} z\right]\exp\left[2\pi i(an+bk)\right].
\end{aligned}
$$

V reálné analýze by se nabízelo hned ve druhém kroku sečíst logaritmy jako $a\lg z + b\lg z = (a+b)\lg z$, nicméně tento vzorec už byl dokázán jako neplatný v předchozí kapitole. Aby byl tento vzorec splněn, musel by být výraz $\exp 2\pi i(an+bk)$ násobkem $2\pi i$. To by ovšem platilo pouze v případě, že $\operatorname{Im} an = -\operatorname{Im} bk$.

Také je vhodné srovnat, jak vypadá tento vzorec po úpravě z druhé strany, tedy

$$
z^{a+b} = \exp\left[(a+b)\lg z\right] = \exp\left[(a+b)\operatorname{Lg} z\right]\exp\left[2\pi ik(a+b)\right].
$$

Je vidět, že tento vzorec není splněn ani v tomto případě.

Podobně můžeme postupovat u dalších vzorců. Stejnými úpravami dojdeme k

$$
\begin{aligned}
\frac{z^a}{z^b} &= \exp\left[(a-b)\operatorname{Lg} z\right]\exp\left[2\pi i(na-bk)\right],\\
z^{a-b} &= \exp\left[(a-b)\operatorname{Lg} z\right]\exp\left[2\pi ik(a-b)\right].
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Dále můžeme vyšetřit speciální případy těchto vzorců. Vhodným dosazením do (7.3) se snadno přesvědčíme, že

$$
z^{a-a} = z^0 = 1
$$

a že

$$
\frac{z^0}{z^b} = z^{0-b} = z^{-b}.
$$

Musíme si ale dát pozor na to, že neplatí rovnost $z^{a-a} = z^a z^{-a}$. V prvním případě je sice výsledek 0, nicméně v druhém se dosazením do odvozeného vzorce dostaneme k rovnosti $z^a z^{-a} = \exp 2\pi i(na - ka) = \exp(2\pi ima)$. Pro necelá čísla a tedy nebude platit $z^a z^{-a} = 1$.

Další ze vzorců pro mnohoznačnou obecnou mocninu platit opět nebude. Můžeme se lehce přesvědčit, že

$$
\begin{aligned}
(z^a)^b &= \exp(b\overbrace{\lg(\underbrace{\exp(a\lg z)}_{z^a})}^{a\lg z + 2\pi ik}) = \exp b(a\lg z + 2\pi ik) \\
&= \exp(ab\lg z)\exp(2\pi ikb) = z^{ab}\exp(2\pi ikb),
\end{aligned}
$$

tedy tento vzorec není splněn opět pro jiná než celá čísla b, nicméně a může být libovolné komplexní číslo.

Následující vzorce jsou shodné s těmi reálnými. Opět stejnými úpravami a využitím odvozených vztahů zjistíme, že

$$
\begin{aligned}
(z_1z_2)^a &= \exp a\lg(z_1z_2) = \exp a(\lg z_1 + \lg z_2) = \exp\lg z_1 \exp\lg z_2 = z_1^a z_2^a, \\
\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^a &= \exp\left(a\lg\frac{z_1}{z_2}\right) = \exp a(\lg z_1 - \lg z_2) = z_1^a z_2^{-a}.
\end{aligned}
$$

Stejně jako u logaritmické funkce, i nyní nadefinujeme hlavní hodnotu mocninné funkce.

Definice 7.2. Pro $c \in \mathbb{C}$ a $z \neq 0$ rozumíme předpisem

$$Z^c = \exp c\,\mathrm{Lg}\,z \tag{7.4}$$

hlavní hodnotu c-té mocniny čísla z.

Opět, hlavním rozdílem mezi Definicemi 7.4 a 7.1 je jejich množinová povaha. Funkce (7.4) je jednoznačná a proto její hodnoty jsou čísla, nikoli množiny. Musíme si ovšem uvědomit, že tato funkce nemusí dávat výsledky, které bychom na první pohled očekávali. Jako příklad můžeme uvést řešení rovnice $z^3 = -1$. Z již řečených poznatků přijdeme lehce na to, že rovnice má 3 řešení, a to

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Intuitivně by hlavní hodnota byla popsána jako $\sqrt[3]{-1} = -1$, tedy výsledkem známým z reálné analýzy a také shodným s jedním z kořenů předchozí rovnice. Dosadíme-li však do hlavní mocninné funkce, získáme

$$\sqrt[3]{-1} = \exp\frac{\mathrm{Lg}(-1)}{3} = \exp\frac{\pi i}{3} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

To se sice samozřejmě shoduje s jedním z řešení rovnice, nicméně náš prvotní odhad to nepotvrzuje.

Přistupme nyní opět k rozebírání vzorců a určování jejich shodností s reálnými vzorci. Ve stejném pořadí jako u mnohoznačné funkce snadno zjistíme následující:

$$\operatorname{Lg} Z^c = \operatorname{Lg}\left[\exp\left(c \operatorname{Lg} z\right)\right] = c \operatorname{Lg} z + 2\pi i n.$$

V tomto případě budeme dosazovat za n vhodné celé číslo tak, aby hodnota argumentu funkce se nacházela v intervalu $(-\pi, \pi]$, což vychází z předpokladu, že vlevo je jednoznačná větev logaritmu. Vzorec tedy opět obecně neplatí. Dále je snadné ověřit, že

$$\begin{aligned}
Z^a Z^b &= \exp\left(a \operatorname{Lg}\right) z \exp\left(b \operatorname{Lg} z\right) = \exp\left((a+b) \operatorname{Lg} z\right) = Z^{a+b},\\
\frac{Z^a}{Z^b} &= \frac{\exp\left(a \operatorname{Lg} z\right)}{\exp\left(b \operatorname{Lg} z\right)} = \exp\left((a-b) \operatorname{Lg} z\right) = Z^{a-b},\\
Z^a Z^{-a} &= \exp\left(a \operatorname{Lg} z\right) \exp\left(-a \operatorname{Lg} z\right) = 1.
\end{aligned}$$

Vhodným dosazením ověříme, že

$$Z^0 = 1.$$

Následující vzorce, i přesto, že platily u mnohoznačné funkce, neplatí. Můžeme počítat

$$(Z_1 Z_2)^a = \exp\left(a \operatorname{Lg} z_1 z_2\right) = \exp\left(a(\operatorname{Lg} z_1 + \operatorname{Lg} z_2 + 2\pi i N)\right) = Z_1^a Z_2^a \exp\left(2\pi i a N\right),$$

a obdobně pak také přijdeme na

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^a = \frac{Z_1^a}{Z_2^a} \exp\left(2\pi i a N\right),$$

kde N jsme definovali ve Větě 1.11.

V další části se budeme zabývat zobecněnou komplexní exponenciální funkcí. Tu definujeme pro nějaké $c \in \mathbb{P}$, $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{Z}$ jako

$$w = c^z = \exp(z \lg c) = \exp z(\operatorname{Lg} c + 2\pi i n).$$

Protože tato funkce je mnohoznačná, opět zavedeme jednoznačnou funkci.

Definice 7.3. Obecnou komplexní exponenciální funkcí rozumíme pro každé $z \in \mathbb{C}$ funkci danou předpisem

$$w = c^z = \exp(z \ln c) = \exp z(\operatorname{Lg} c + 2\pi i n), \tag{7.5}$$

pro $n \in \mathbb{Z}$. Pro $n = 0$ uvažujeme její jednoznačnou větev a pak má funkce tvar

$$w = c^z = \exp z \operatorname{Lg} c. \tag{7.6}$$

Nyní opět připomeneme vzorce z reálné analýzy, které budeme zkoumat.

$$\begin{aligned}
a^x &= e^{x \ln a}, & a^x a^y &= a^{x+y},\\
\frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, & \frac{1}{a^x} &= a^{-x},\\
(a^x)^y &= a^{xy}, & (ab)^x &= a^x b^x,\\
\left(\frac{a}{b}\right)^x &= a^x b^{-x}.
\end{aligned}$$

Nyní přicházíme k vzorcům, které platí pro exponenciální funkce. Vzhledem k jednoznačné povaze této funkce je snadné ověřit, že platí

$$\begin{aligned} c^{z_1}c^{z_2} &= \exp(z_1 \operatorname{Lg} c)\exp(z_2 \operatorname{Lg} c) = \exp(z_1+z_2)\operatorname{Lg} c = c^{z_1+z_2}, \\ \frac{c^{z_1}}{c^{z_2}} &= \frac{\exp(z_1 \operatorname{Lg} c)}{\exp(z_2 \operatorname{Lg} c)} = \exp(z_1-z_2)\operatorname{Lg} c = c^{z_1-z_2}, \\ c^z c^{-z} &= \exp(z \operatorname{Lg} c)\cdot\exp(-z \operatorname{Lg} c) = 1. \end{aligned}$$

Další vzorec ovšem obecně platit nebude, neboť platí

$$\begin{aligned} (c^{z_1})^{z_2} &= \exp(z_2 \operatorname{Lg}(c^{z_1})) = \exp z_2(z_1 \operatorname{Lg} c + 2\pi i N') = \exp(z_2 z_1 \operatorname{Lg} c)\exp(2\pi i z_2 N') = \\ &= c^{z_1 z_2}\exp(2\pi i z_2 N'). \end{aligned}$$

Na začátek připomeňme, že N' jsme definovali jako (1.11). Jak vidíme, tento vztah je splněn pouze v případě, že z_2 je celé číslo nebo je $N' = 0$. Další dva vzorce splněny taktéž nebudou, neboť

$$\begin{aligned} (ab)^z &= \exp(z \operatorname{Lg} ab) = \exp z(\operatorname{Lg} a + \operatorname{Lg} b + 2\pi i N) = a^z b^z \exp(2\pi i z N), \\ \left(\frac{a}{b}\right)^z &= \exp(z \operatorname{Lg} a/b) = \exp z(\operatorname{Lg} a - \operatorname{Lg} b + 2\pi i N) = \frac{a^z}{b^z}\exp(2\pi i z N). \end{aligned}$$

Opět vidíme, že je tento vztah splněn pouze v případě, že $z \in \mathbb{Z}$ nebo $N = 0$.

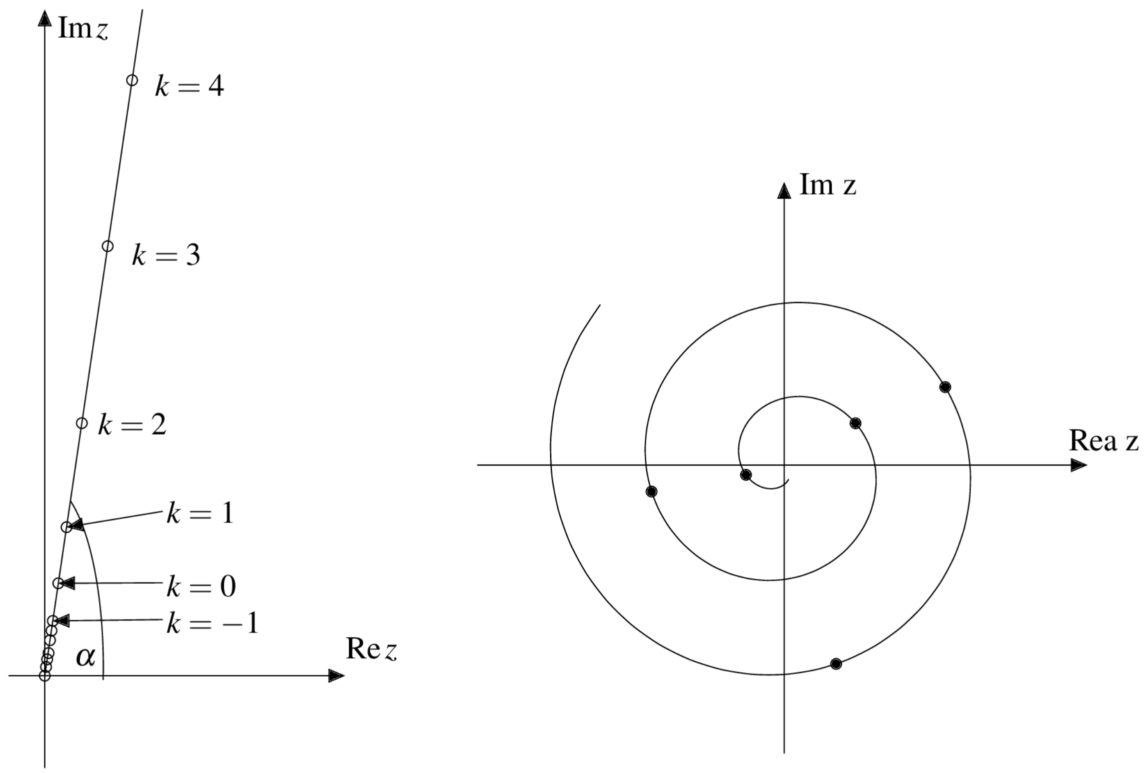
Na následujících příkladech si ukážeme, jak se mocninná funkce zobrazuje v Gaussově rovině.

Příklad 7.4. *Určete obraz* $(1+i)^{1+i}$ *a* $(1+i)^{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$.

Řešení. Díky odvozeným vztahům můžeme snadno upravovat jako:

$$\begin{aligned} (1+i)^{1+i} &= \exp((1+i)\lg(1+i)) = \exp((1+i)(\ln\sqrt{2} + i\arg(1+i))) = \\ &= \exp\left(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - 2k\pi\right)\exp i\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \\ (1+i)^{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} &= \exp\left(\sqrt{2}(1+i)\lg(1+i)\right) = \exp\left(\sqrt{2}(1+i)(\ln\sqrt{2} + i\arg(1+i))\right) = \\ &= \exp\sqrt{2}\left(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - 2k\pi\right)\exp i\sqrt{2}\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right). \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že body z prvního příkladu leží na polopřímce s počátkem v bodě 0 a úhlem $\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} = \alpha$, neboť vzhledem k periodicitě exponenciální funkce se při měnícím k bude měnit pouze reálná část, jak můžeme vidět na levém Obrázku 7.1. Druhý příklad už nemá stejnou imaginární část pro různá k, tedy se bude měnit úhel α, a zároveň se bude přibližovat k počátku. Proto se zobrazí na spirálu, jak můžeme vidět na pravém Obrázku 7.1.



Obrázek 7.1: Obecná mocninná funkce

Seznam použité literatury

[1] Kalas, Josef. Analýza v komplexním oboru. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2006, iv, 202 s. ISBN 80-210-4045-9.

[2] Černý, Ilja. Analýza v komplexním oboru 1. vyd. Praha: Academia, 1983.

[3] Šulista, Milan. Základy analýzy v komplexním oboru Praha: ČVUT, 1976.

[4] Zeman, Jiří. Úvod do komplexní analýzy. 2. upr. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1998, 162 s. ISBN 80-706-7906-9.

[5] Kopáček, Jiří. Matematická analýza pro fyziky (IV). Vyd. 1. Praha: Matfyzpress, 2001, 324 s. ISBN 80-858-6368-5.

[6] Novák, Vítězslav. Analýza v komplexním oboru 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984.

[7] Fuks, B. A., and B. V Šabat. Funkce komplexní proměnné 2. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1961.

[8] Veselý, Jiří. Komplexní analýza. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2000, 244 s. ISBN 80-246-0202-4.

[9] Bouchala, Jiří. Funkce komplexní proměnné. [online]. [cit. 2014-05-27]. Dostupné z: $http : //homel.vsb.cz/ bou10/archiv/fkp.pdf$.

[10] The complex logarithm, exponential and power functions. [online]. [cit. 2014-05-27]. Dostupné z: $http : //scipp.ucsc.edu/ haber/ph116A/clog_1 1.pdf$.

[11] Kalas, Josef a Miloš Ráb. Obyčejné diferenciální rovnice. Vyd. 3. Brno: Masarykova univerzita, 2012, 207 s. ISBN 978-802-1058-156.