

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2015

MIROSLAVA ŘEHÁČKOVÁ



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



Analýza deterministického modelu v ekonomii

Diplomová práce

Miroslava Řeháčková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.

Brno 2015

Bibliografický záznam

- Autor:** Bc. Miroslava Řeháčková
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita
Ústav matematiky a statistiky
- Název práce:** Analýza deterministického modelu v ekonomii
- Studijní program:** Matematika
- Studijní obor:** Finanční matematika
- Vedoucí práce:** doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.
- Akademický rok:** 2014/2015
- Počet stran:** xii + 63
- Klíčová slova:** dynamické systémy; diferenční rovnice; kvalitativní analýza; bifurkace; model OLG; spotřebitelé; firmy; stát

Bibliographic Entry

Author: Bc. Miroslava Řeháčková
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Analysis of a deterministic model in economics

Degree Programme: Mathematics

Field of Study: Financial Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.

Academic Year: 2014/2015

Number of Pages: xii + 63

Keywords: dynamical systems; difference equations; qualitative analysis; bifurcation; OLG model; consumers; firms; state

Abstrakt

Tato diplomová práce se věnuje matematickému modelování nelineárních dynamických systémů. Pro analýzu byl zvolen model překrývajících se generací (OLG model). Práce je rozčleněna do čtyř kapitol, které tvoří dvě základní části práce. V první teoretické části této práce jsou shrnuty potřebné pojmy teorie dynamických systémů a diferenčních rovnic. Dále je zde uvedena kvalitativní analýza systémů diferenčních rovnic závislých na parametrech. V druhé praktické části této práce je poté představen a následně analyzován matematický model ekonomického procesu.

Abstract

This thesis focuses on the mathematical modeling of nonlinear dynamic systems. The overlapping generations model (OLG) was chosen for the analysis. The work is divided into four chapters, which form two basic parts of the work. The first part of this paper summarizes the necessary concepts theory of dynamical systems and difference equations. Furthermore, there is shown a qualitative analysis of systems of difference equations depending on parameters. In the second part of this work is then presented and analyzed a mathematical model of the economic process.



Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Miroslava Řeháčková**

Studijní program: **Matematika**

Studijní obor: **Finanční matematika**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

Analyza deterministického modelu v ekonomii

Analysis of a deterministic model in economics

Oficiální zadání: V první (teoretické) části práce shrňte potřebné pojmy a metody kvalitativní analýzy nelineárních dynamických systémů závislých na parametrech. Ve druhé části pomocí studovaných metod analyzujte vybraný matematický model ekonomického procesu a dosažené výsledky interpretujte.

Doporučená literatura

KUZNECOV, Jurij Alexandrovič. Elements of applied bifurcation theory. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1998. xviii, 591. ISBN 0-387-98382-1.:

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.

Datum zadání diplomové práce: říjen 2013

V Brně dne 31. 10. 2013

prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Souhlasím se zadáním (datum, podpis):

18. 11. 2013

student(ka)

vedoucí práce

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala všem, kteří mi dopomohli k napsání této práce. Hlavně bych chtěla poděkovat svému vedoucímu práce doc. RNDr. Zdeňkovi Pospíšilovi, Dr. za odborné vedení, cenné rady a připomínky, které mi pomohly při psaní této práce. Dále bych chtěla poděkovat celé své rodině za jejich podporu, ráda bych také poděkovala svým rodičům za trpělivost a neutuchající podporu nejen při studiu ale i v celém životě.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 6. května 2015

.....
Miroslava Řeháčková

Obsah

Úvod	ix
Přehled použitého značení	xi
Kapitola 1. Dynamické systémy a diferenční rovnice	1
1.1 Dynamické systémy	1
1.2 Diferenční rovnice	3
1.2.1 Diferenční rovnice prvního řádu	4
1.2.2 Diferenční rovnice druhého řádu	6
1.2.3 Stabilita diferenčních rovnic	7
1.3 Systémy diferenčních rovnic	10
1.3.1 Jordanův kanonický tvar	11
1.3.2 Kvalitativní vlastnosti řešení	13
Kapitola 2. Nelineární dynamické systémy	17
2.1 Linearizace	17
2.2 Bifurkace	18
2.2.1 Fold bifurkace	19
2.2.2 Flip bifurkace	20
2.2.3 Neimarkova-Sackerova bifurkace	22
2.3 Víceparametrické bifurkace	26
Kapitola 3. Model překrývajících se generací	28
3.1 Historický kontext modelu	28
3.2 Základní představa o modelu OLG	29
3.2.1 Populace	29
3.2.2 Firmy	33
3.2.3 Stát	38
Kapitola 4. Model OLG a inflace	45
4.1 Dokonalá předpověď inflace	47
4.1.1 CES funkce úspor	47
4.1.2 Transformovaná CES funkce úspor	51
4.2 Očekávaná inflace	52
4.2.1 Naivní očekávání	52

4.2.2 Adaptivní očekávání	55
Závěr	59
Seznam obrázků	61
Seznam použité literatury	62

Úvod

Matematické modelování je disciplína, která se zabývá popisem reálných procesů. Je možné modelovat procesy ve fyzice, chemii, technice, biologii, ekologii nebo v ekonomii. S rozvojem výpočetní techniky nabývá matematické modelování většího významu. Postupně se matematické modely začaly využívat i ve společenských vědách jako je psychologie a sociologie. Celá tato práce je rozčleněna na dvě základní části, teoretickou (kapitoly 1 a 2) a praktickou (kapitoly 3 a 4). V této práci je patrné, že pokud se matematická teorie aplikuje na reálný ekonomický proces, vše se velice zkomplikuje a musí se počítat s mnoha předpoklady.

Model OLG (Overlapping Generations) je model, který narozdíl od jiných ekonomických modelů předpokládá konečný život jedinců v ekonomice. Dále také určuje, že v jednom časovém období, žijí jedinci z různých generací, proto se tento model nazývá model s překrývajícími se generacemi. V tomto modelu vystupují tři základní subjekty, spotřebitelé, firmy a stát. Model zkoumá jejich interakce na trhu zboží a služeb a na trhu peněz.

V první kapitole jsou představeny dynamické systémy a diferenční rovnice. První část je věnována obecně dynamickým systémům, ve druhé části se přechází k systémům diferenčních rovnic. Tyto diferenční rovnice jsou zde nejdříve zdefinovány, přičemž se postupuje od lineárních rovnic prvního řádu k rovnicím vyšších řádů. Systémy diferenčních rovnic jsou zde řešeny kvalitativní analýzou s vykreslením fázových portrétů. Základními zdroji pro tuto část jsou Elaydi [7], Kuznetsov [9], Shone [15], Tu [16] a Zhang [17].

Ve druhé kapitole jsou představeny nelineární systémy diferenčních rovnic. Nejdříve je zde zmíněna linearizace těchto nelineárních systémů a poté teorie bifurkací. Teorie bifurkací je teorie zabývající se analýzou nelineárních systémů závislých na parametrech. V této části jsou představeny jednotlivé typy bifurkací systémů závislých na jednom parametru, jedná se o fold bifurkaci, flip bifurkaci a Neimarkovu-Sackerovu bifurkaci. Základními zdroji pro tuto část jsou Kaplan, Glass [8], Kuznetsov [9], Shone [15], Tu [16] a Zhang [17].

Ve třetí kapitole je představen model OLG, model překrývajících se generací. Nejdříve je model zasazen do historického kontextu. Následně jsou zde představeny jednotlivé subjekty působící v ekonomice. Je zde také vysvětlena podstata tohoto modelu, který předpokládá, že v každém okamžiku žije více generací najednou, v tomto konkrétním případě se jedná o dvě generace mladých a starých jedinců. V této kapitole jsou také zavedeny základní ekonomické funkce (spotřeba, úspory, daně, transfery a úroková míra). Tato kapi-

tola je založena na Auerbach, Kotlikoff [1], Mankiw [12], McCandless, Wallace [13].

Ve čtvrté kapitole je poté provedena analýza modelu OLG s konkrétním tvarem užtkové funkce a z ní vyplývající funkce úspor. Uvažuje se zde s CES (Constant elasticity of substitution) funkcí úspor a s její nemonotónní transformací. Je zde také zavedena inflace v podobě hrubého faktoru meziročních změn. Pro inflaci je nezbytné uvažovat s penězi, jejichž vývoj v čase je také popsán v této kapitole. Tato kapitola je rozdělena na dvě základní části, kdy v první části se uvažuje s geniálními jedinci, kteří umí předpovídat budoucnost a ve druhé části se pak pracuje s jedinci, kteří tuto schopnost nemají, přesto se snaží nějak odhadnout budoucí vývoj. Tato kapitola je založena na Bullard [3], Bullard, Duffy [4], Diamond [5].

Pro výpočet a pro vykreslení grafů byl použit matematický software GeoGebra a Maple.

Přehled použitého značení

Pro snazší orientaci v textu si zde uvedeme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje. Toto značení je rozděleno na značení matematické a ekonomické.

Matematické značení

\mathbb{R}	množina všech reálných čísel
\mathbb{Z}	množina všech celých čísel
$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$	první diference
$\Delta^2 x(t) = \Delta x(t+1) - \Delta x(t)$	druhá diference
$\det A = A $	determinant matice A
$\text{tr} A$	stopa matice A
$\frac{d}{dt} f(t) = f'$	derivace funkce f
$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = f_{x_1}$	derivace funkce $f(x_1, x_2)$ podle první proměnné
$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) = f_{x_1 x_1}$	druhá derivace $f(x_1, x_2)$ podle první proměnné
$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) = f_{x_1 x_2}$	smíšená derivace funkce $f(x_1, x_2)$
$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$	Jacobiho matice

Ekonomické značení

t	čas, t -tá generace
$N(t)$	počet jedinců v t -té generaci
$Y(t)$	celková zásoba zboží a služeb v období t
$c_t^h(s)$	spotřeba zboží z období s jedincem h z generace t
$C(t)$	celková spotřeba v období t
$w_t^h(s)$	dostupné zdroje období s jedince h z generace t
$S(r(t))$	funkce úspor
$p(t)$	cena v období t
$p^e(t+1)$	očekávaná cena v období $t+1$

$M(t)$ zásoba peněz v ekonomice v období t
 $\pi(t) \equiv \frac{p(t)}{p(t+1)}$ faktor hrubé míry inflace mezi obdobími t a $t + 1$

Kapitola 1

Dynamické systémy a diferenční rovnice

V této kapitole si rozebereme potřebnou teorii dynamických systémů a diferenčních rovnic. Nejdříve se zde budeme zabývat dynamickými systémy, následně diferenčními rovnicemi a jejich systémy. Nakonec se budeme zabývat kvalitativní analýzou vlastností řešení systémů diferenčních rovnic, trajektoriemi těchto systémů a jejich stabilitou.

1.1 Dynamické systémy

Dynamický systém se využívá k popisu jevů vyvíjejících se v čase, může jít o jevy fyzikální, chemické, biologické nebo ekonomické. Dynamický systém je tvořen množinou svých možných stavů (stavový prostor) a zákony popisující jeho vývoj v čase.

Všechny možné stavy dynamického systému jsou určeny body množiny \mathbf{X} , která se nazývá stavový, nebo také fázový prostor. Vývoj systému znamená změnu stavu systému se změnou proměnné $t \in T$, kde T je množina čísel. V závislosti na charakteru množiny T rozlišujeme dva typy dynamických systémů. Platí-li $T = \mathbb{R}_0^+$, pak se jedná o spojitý systém, je-li $T = \mathbb{Z}_0^+$, pak jde o diskrétní dynamický systém. Další složkou systému jsou zákony určující vývoj systému vyjádřené vývojovým (evolučním) operátorem.

Definice 1.1. Evoluční operátor je zobrazení $\varphi^t : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$, které převádí počáteční stav $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{X}$ na nějaký stav $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{X}$ v čase t tak, že platí

$$\mathbf{x}(t) = \varphi^t \mathbf{x}(0).$$

Nyní s pomocí evolučního operátoru přejdeme k definici dynamického systému.

Definice 1.2. Dynamickým systémem nazýváme trojici $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$, kde T je množina čísel uzavřená vzhledem ke sčítání, představující čas, \mathbf{X} je stavový prostor a $\varphi^t : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ je systém evolučních operátorů s parametrem $t \in T$.

Poznámka. Dynamický systém $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$ nazveme deterministický dynamický systém, jestliže evoluční operátor splňuje podmínku

$$\varphi^0 = id,$$

kde id představuje identitu na \mathbf{X} , tj. $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} : id\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Deterministický systém je systém takový, který nemění náhodně své chování. Opakem deterministického systému je poté systém stochastický.

Definice 1.3. Dynamický systém $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$ nazveme autonomní dynamický systém, jestliže evoluční operátor splňuje podmínku

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s,$$

tj. $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \forall s, t \in T : \varphi^{t+s} \mathbf{x} = \varphi^t(\varphi^s \mathbf{x})$, pokud jsou obě strany rovnice definovány.

Poznámka. Spojitý autonomní dynamický systém je trojice $\{\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$, která je nejčastěji určena pomocí souboru diferenciálních rovnic:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

kde \mathbf{f} je diferencovatelné zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

V tomto případě pro počáteční podmínku $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ je množina všech řešení systému $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ dána evolučním operátorem a platí $\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{x})$.

Poznámka. Diskrétní autonomní dynamický systém je trojice $\{\mathbb{Z}_0^+, \mathbb{R}^m, \varphi^t\}$, která je nejčastěji určena pomocí souboru diferenčních rovnic:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

kde \mathbf{f} je dostatečně hladké zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Náš zvolený model je diskrétní, časové okamžiky tohoto modelu budou nabývat izolovaných hodnot z intervalu. Tento model se vyvíjí po skocích (nespojité). Z důvodu volby analyzovaného modelu se nadále budeme věnovat diskrétním dynamickým systémům.

Pro grafické znázornění vývoje dynamického systému se používají trajektorie a fázové portréty. Fázovým portrétem poté rozumíme rozmístění trajektorií ve fázovém (stavovém) prostoru \mathbf{X} .

Definice 1.4. Trajektorie začínající v bodě $\mathbf{x}(0)$ je uspořádaná podmnožina stavového prostoru \mathbf{X} ,

$$O(\mathbf{x}(0)) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : \mathbf{x} = \varphi^t \mathbf{x}(0) \text{ pro všechny } t \in T, \text{ pro které je } \varphi^t \mathbf{x}(0) \text{ definováno}\}.$$

Trajektorie diskrétního systému jsou poté množinou bodů ve stavovém prostoru \mathbf{X} . Tyto trajektorie budeme znázorňovat dvojím způsobem. Pokud se uvažuje skalární systém, pak v prvním případě se na vodorovné ose bude nacházet čas t a na svislé ose poté sledovaná veličina. Jedná se o znázornění řešení s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Druhým znázorněním je fázový portrét, ve kterém se neznázorňují všechny trajektorie, ale jen několik klíčových, je to především z důvodu náročnosti a přehlednosti daného fázového portréту. Pro dynamické systémy jsou důležité rovnovážné body a cykly.

Definice 1.5. Bod $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ nazveme rovnovážným bodem (nebo také pevným, singulárním, stacionárním bodem) systému, jestliže pro všechna $t \in T$ platí

$$\varphi^t \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*.$$

Daná definice nám říká, že operátor φ^t zobrazuje rovnovážný bod \mathbf{x}^* na ten stejný bod.

Definice 1.6. Cyklus je periodická trajektorie C , která není rovnovážným bodem a která pro každé $\mathbf{x}(0) \in C$ splňuje

$$\varphi^{t+T_0}\mathbf{x}(0) = \varphi^t\mathbf{x}(0),$$

pro nějaké $T_0 > 0$ a každé $t \in T$. Poté nejmenší T_0 nazýváme periodou cyklu C .

Pokud systém začne svůj vývoj v bodě $\mathbf{x}(0)$, pak se do tohoto bodu vrátí přesně po uplynutí T_0 časových jednotek. V diskrétním případě (konečná) množina bodů

$$\{\mathbf{x}(0), \mathbf{f}(\mathbf{x}(0)), \mathbf{f}^2(\mathbf{x}(0)), \mathbf{f}^3(\mathbf{x}(0)), \dots, \mathbf{f}^{T_0}(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}_0\}, \quad (1.1)$$

kde $\mathbf{f} = \varphi^1$ je cyklus. Přitom $\mathbf{f}(\mathbf{x}(0)), \mathbf{f}^2(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}(0))), \mathbf{f}^3(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}(0)))) \dots$ se nazývají iterace $\mathbf{x}(0)$.

Definice 1.7. Invariantní množina dynamického systému $\{T, \mathbf{X}, \varphi^t\}$ je podmnožina stavového prostoru $\mathbf{S} \subset \mathbf{X}$ taková, že pro $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{S}$ platí

$$\varphi^t\mathbf{x}(0) \in \mathbf{S} \quad \text{pro všechny } t \in T.$$

Tato definice nám říká, že pro každou invariantní množinu \mathbf{S} a pro všechny $t \in T$ platí $\varphi^t\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}$. Vidíme, že každá trajektorie $O(\mathbf{x}(0))$ je invariantní množina, nejjednoduššími příklady invariantních množin jsou rovnovážné body a cykly.

Definice 1.8. Invariantní množina \mathbf{S} se nazývá:

- (i) Ljapunovsky stabilní, jestliže pro každé dostatečně malé okolí invariantní množiny $\mathcal{O}(\mathbf{S})$ existuje okolí $\mathcal{O}^1(\mathbf{S})$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^1(\mathbf{S})$ a pro každé $t \in T$ platí $\varphi^t\mathbf{x} \in \mathcal{O}(\mathbf{S})$.
- (ii) Asymptoticky Ljapunovsky stabilní, jestliže je stabilní a existuje okolí invariantní množiny $\mathcal{O}(\mathbf{S})$ takové, že $\varphi^t\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{S}$ pro všechny $\mathbf{x} \in \mathcal{O}(\mathbf{S})$ a všechny $t \rightarrow \infty$.

U poslední definice je důležité ještě zmínit, že existují invariantní množiny, které jsou Ljapunovsky stabilní, ale nejsou asymptoticky stabilní. Na závěr této části ještě zařadíme definici o topologicky ekvivalentních dynamických systémech.

Definice 1.9. Dynamické systémy $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ a $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ nazveme topologicky ekvivalentní, jestliže existuje homeomorfismus $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zobrazující trajektorii prvního systému na trajektorii druhého systému, přičemž zachovává jejich orientaci.

1.2 Diferenční rovnice

V této části se seznámíme s diferenčními rovnicemi. Rovnice se nazývají diferenční, neboť obsahují diference funkce. V těchto rovnicích se nachází proměnná $x(t)$ a její diference $\Delta x(t)$, $\Delta^2 x(t)$, atd. Pokud je například $x(t) = f(t)$, pak první diference je

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= x(t+1) - x(t) = f(t+1) - f(t) \\ \Delta x(t+1) &= x(t+2) - x(t+1) = f(t+2) - f(t+1),\end{aligned}$$

druhá diference je poté

$$\begin{aligned}\Delta^2 x(t) &\equiv \Delta x(t+1) - \Delta x(t) = (x(t+2) - x(t+1)) - (x(t+1) - x(t)) = \\ &= x(t+2) - 2x(t+1) + x(t).\end{aligned}$$

Poznámka. V literatuře je možné najít dvojí značení, jak námi používané $x(t)$, $x(t+1)$ (Elaydi [7], Kuznetsov [9]), tak také x_t , x_{t+1} (Shone [15], Tu[16]).

Definice 1.10. Obyčejná diferenční rovnice je rovnice obsahující proměnnou $x(t)$, měřenou přesně v různých časech.

Jako příklad diferenční rovnice z předchozí definice uvedeme

$$a_{t+1}x(t+1) + a_t x(t) + a_{t-1}x(t-1) + \dots = 0 \quad (1.2)$$

kterou lze vyjádřit explicitně jako $x(t+1) = f(x(t), x(t-1), \dots)$. Řád diferenční rovnice je dán nejvyšší diferencí vyskytující se v diferenční rovnici.

Definice 1.11. Řešením diferenční rovnice se rozumí všechny hodnoty $x(t)$ neobsahující diference a vyhovující rovnici (1.2).

1.2.1 Diferenční rovnice prvního řádu

Počáteční úlohu pro lineární autonomní diferenční rovnici prvního řádu můžeme zapsat v jednom z tvarů

$$x(t+1) = ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

$$x(t+1) = ax(t) + b, \quad x(0) = x_0, \quad (1.4)$$

kde rovnice ve tvaru (1.3) se nazývá homogenní a rovnice ve tvaru (1.4) se nazývá nehomogenní. Přičemž $x(0) = x_0$ je daná hodnota v čase $t = 0$, která se nazývá počáteční podmínka.

Věta 1.2.1. Řešením homogenní diferenční rovnice (1.3) je

$$x(t) = a^t x_0.$$

Důkaz. Důkaz se provede přímým dosazením do (1.3):

$$x(1) = ax_0$$

$$x(2) = ax(1) = a^2 x_0$$

$$\vdots$$

$$x(n) = ax(n-1) = a^n x_0$$

Pro každé t tedy platí $x(t) = a^t x_0$. □

Věta 1.2.2. Řešením nehomogenní diferencní rovnice (1.4) je

$$x(t) = a^t c + \frac{b}{1-a} \quad \text{pro } a \neq 1$$

$$x(t) = x_0 + bt \quad \text{pro } a = 1,$$

kde $c \equiv x_0 - \frac{b}{1-a}$.

Důkaz. Důkaz se provede přímým dosazením do (1.4):

$$\begin{aligned} x(1) &= ax_0 + b \\ x(2) &= ax(1) + b = a^2x_0 + ab + b \\ x(3) &= ax(2) + b = a^3x_0 + (1 + a + a^2)b \\ &\vdots \\ x(n) &= ax(n-1) = a^n x_0 + (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})b \end{aligned}$$

Vidíme, že $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ je geometrická řada, jejíž součet je $\frac{1-a^n}{1-a}$. Pro každé t a $a \neq 1$ platí

$$x(t) = a^t x_0 + \frac{1-a^t}{1-a} b = a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

Pro $a = 1$ platí $x(t) = x_0 + bt$. □

Poznámka. Pro lineární rovnice a jejich dvě různá řešení $x_1(t)$ a $x_2(t)$ a dvě konstanty k_1 a k_2 platí, že také $k_1 x_1(t)$ a $k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$ jsou řešení této rovnice.

Nelineární autonomní diferencní rovnice je rovnice mající nelineární pravou stranu, její typický tvar je

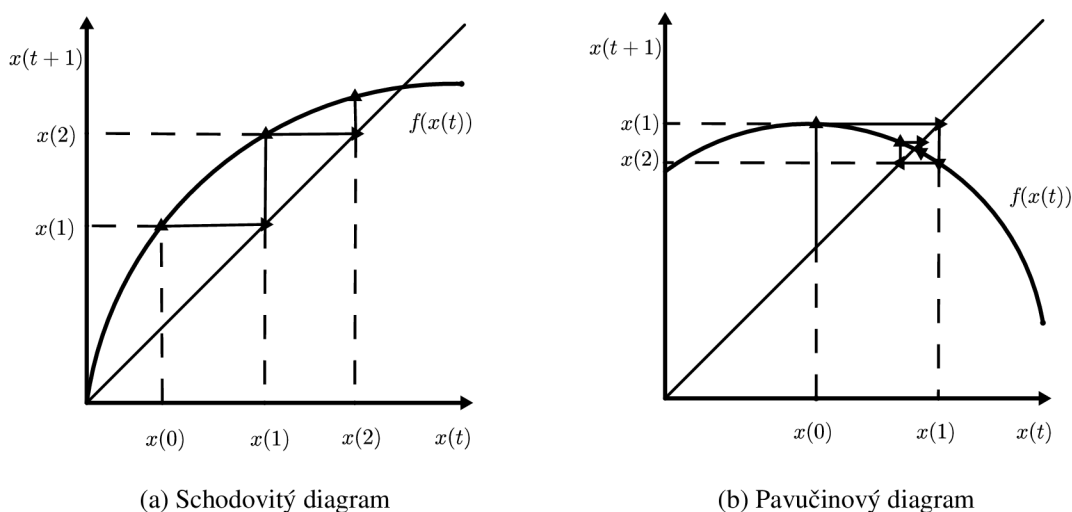
$$x(t+1) = f(x(t)), \quad \text{kde } x(0) = x_0. \quad (1.5)$$

Přesný tvar funkce f není třeba znát, postačí její charakteristiky (směrnice, konvexnost či konkávnost a chování v čase $t = 0$ a $t = \infty$). V tomto případě je možné získat kvalitativní vlastnosti řešení pomocí fázového diagramu. Tento diagram obsahuje osu prvního kvadrantu v prostoru $x(t+1)x(t)$. Hledáme pevný bod, který je dán průsečíkem $f(x(t))$ s osou prvního kvadrantu, poté se určí stabilita.

Na obrázku 1.1 můžeme vidět dva příklady fázového diagramu pro obecnou diferencní rovnici typu (1.5). Při konstrukci tohoto diagramu nejdříve zkonstruujeme osu prvního kvadrantu, poté do grafu zaneseme funkci $f(x(t))$. Na průniku funkce a osy prvního kvadrantu se nachází pevný bod. Konstrukce diagramu poté začíná u počáteční podmínky $x(0) = x_0$ a výpočtu hodnoty $x(1) = f(x(0))$. Poté do grafu vyneseme dvojici bodů $[x(0), x(1)]$, horizontálně přeneseme bod $x(1)$ na osu prvního kvadrantu, což přesune tento bod z $x(t+1)$ souřadnice na $x(t)$ souřadnici. Tento přenesený bod se poté stane novou počáteční podmínkou, pomocí které spočítáme další souřadnice $x(2) = f(x(1))$. Tento postup postupně opakujeme až obdržíme posloupnost dvojic bodů

$$[x(0), 0], [x(0), x(1)], [x(1), x(1)], [x(1), x(2)], [x(2), x(2)], [x(2), x(3)], [x(3), x(3)], \dots,$$

přičemž tato posloupnost vykazuje stejné chování jako původní rovnice (1.5). Navíc pevný bod je takový bod x , pro který platí $f(x) = x$. Na obrázku 1.1a můžeme vidět schodovité schéma pro stabilní pevný bod a na obrázku 1.1b je poté stabilní pavučinové schéma.



Obrázek 1.1: Fázový diagram

1.2.2 Diferenční rovnice druhého řádu

Lineární autonomní diferenční rovnice druhého řádu je rovnice ve tvaru

$$ax(t+1) + bx(t) + cx(t-1) = g(t). \quad (1.6)$$

kde $a \neq 0$ a $c \neq 0$ s počátečními podmínkami $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. Pro $g(t) \neq 0$ mluvíme o nehomogenní rovnici. Jestliže by platilo $g(t) = 0$ v rovnici (1.6), pak by se jednalo o homogenní diferenční rovnici tvaru

$$ax(t+1) + bx(t) + cx(t-1) = 0. \quad (1.7)$$

Definice 1.12. Partikulární řešení x_p diferenční rovnice druhého řádu (1.6) je hodnota $x(t)$, která vyhovuje $g(t)$ v rovnici (1.6).

Věta 1.2.3. Necht' λ_1 a λ_2 jsou kořeny charakteristické rovnice $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ a $x_e \equiv x_p$ je partikulární řešení. Řešení diferenční rovnice druhého řádu (1.6) nabývá jednoho z následujících tvarů

(i) $x(t) = x_e + A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t$, kde λ_1 a λ_2 jsou různé reálné kořeny,

(ii) $x(t) = x_e + (A_1 + A_2 t)\lambda^t$, kde λ a je dvojnásobný kořen charakteristického polynomu a platí $\lambda = \frac{-b}{2a}$,

(iii) $x(t) = x_e + r^t(A_1 \cos \theta t + A_2 \sin \theta t)$, kde λ_1 a λ_2 jsou komplexně sdružené kořeny.

Důkaz. Tu [16, strana 46] □

Pro určení partikulárního řešení x_p v rovnici se speciálním tvarem funkce $g(t)$ můžeme použít metodu neurčitých koeficientů, jejíž popis lze najít v odborné literatuře (Zhang [17, strana 58]). V ostatních případech lze použít metodu variace konstant (Elaydi [7, strana 89]).

1.2.3 Stabilita diferenčních rovnic

V této části si rozebereme stabilitu diferenčních rovnic, neboť se jedná o jednu z nejdůležitějších částí při analýze chování řešení diferenčních rovnic v okolí rovnovážného bodu. Nejdříve ale potřebujeme zadefinovat rovnovážný bod.

Definice 1.13. Bod x^* z definičního oboru f se nazývá rovnovážný bod (ekvilibrium), jestliže je to pevný bod, tj. platí pro něj $f(x^*) = x^*$.

Tato definice je v souladu s definicí 1.5 stacionárního bodu obecného dynamického systému. V následujících definicích budeme hovořit o stabilitě systému diferenčních rovnic, přičemž se bude jednat o stabilitu v Ljapunovském smyslu (definice 1.8).

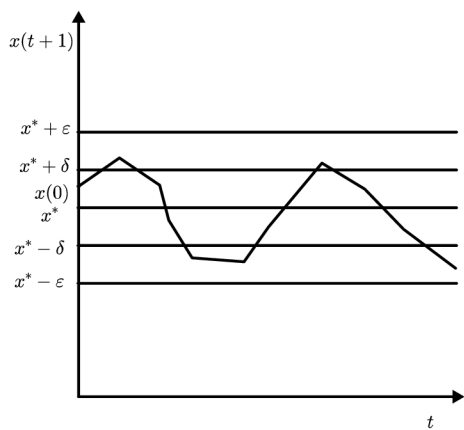
Definice 1.14. Rovnovážný bod x^* rovnice (1.5) je stabilní, jestliže pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, pro které platí $|x(0) - x^*| < \delta$, pak $\forall t > 1$ je $|x(t) - x(0)| < \varepsilon$. Jestliže rovnovážný bod x^* není stabilní, pak říkáme, že je nestabilní.

Na obrázku 1.2a můžeme vidět stabilní rovnovážný bod a na obrázku 1.2b nestabilní rovnovážný bod. Poznamenejme ještě, že nestabilní rovnovážný bod je takový, pro který existuje $x(t)$, takové $|x(t) - x^*| \geq \varepsilon$.

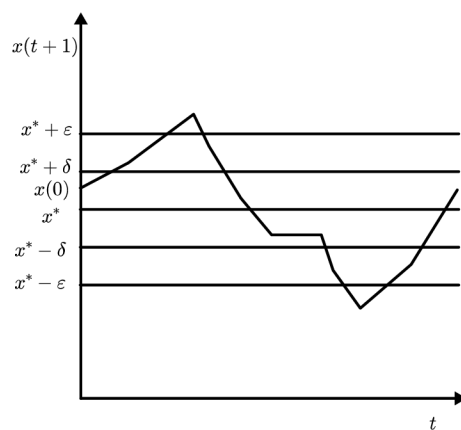
Definice 1.15. Rovnovážný bod x^* rovnice (1.5) je atraktor, jestliže existuje $\eta > 0$, pro které platí $|x(0) - x^*| < \eta$, poté je $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$. Pro $\eta = \infty$, nazýváme x^* globálním atraktorem.

Definice 1.16. Rovnovážný bod x^* rovnice (1.5) se nazývá asymptoticky stabilní, jestliže je stabilní a je atraktor. Pro $\eta = \infty$ nazýváme x^* globálně asymptoticky stabilním rovnovážným bodem.

Na obrázku 1.3a můžeme vidět asymptoticky stabilní rovnovážný bod. Na obrázku 1.3b se poté nachází globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod.

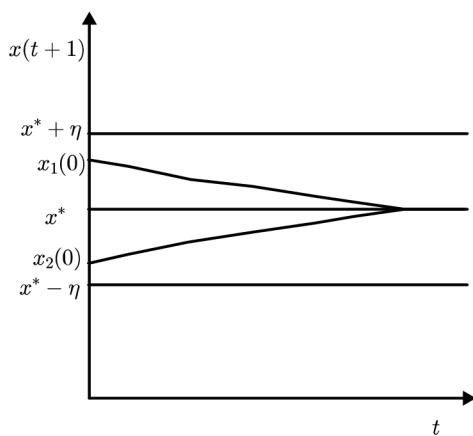


(a) Stabilní rovnovážný bod

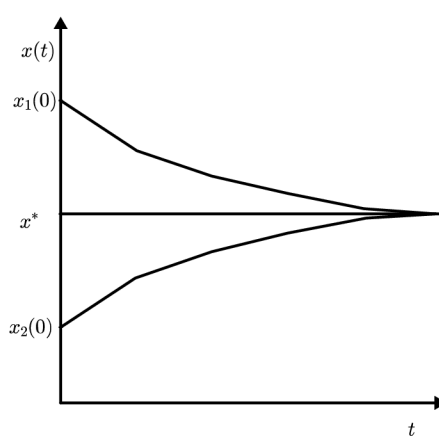


(b) Nestabilní rovnovážný bod

Obrázek 1.2: Stabilní a nestabilní rovnovážný bod



(a) Asymptoticky stabilní rovnovážný bod



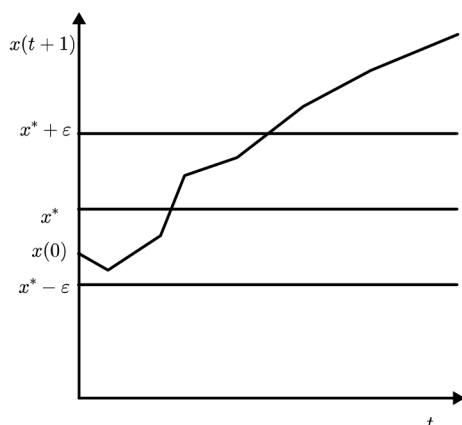
(b) Globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod

Obrázek 1.3: Asymptoticky stabilní rovnovážné body

Definice 1.17. Rovnovážný bod x^* rovnice (1.5) nazýváme repeler, jestliže

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists t_0 \geq 0)(\forall t \geq t_0)|x(t) - x^*| > \varepsilon.$$

Na obrázku 1.4 můžeme vidět rovnovážný bod typu repeler. Nyní ještě uvedeme několik praktických vět pro určování stability rovnovážných bodů diferencovatelných funkcí.



Obrázek 1.4: Repeler

Věta 1.2.4. Necht' x^* je rovnovážný bod diferenční rovnice (1.5), kde f je funkce spojitě diferencovatelná v bodě x^* . Pak platí následující tvrzení.

- (i) Jestliže je $|f'(x^*)| < 1$, pak je x^* asymptoticky stabilní rovnovážný bod.
- (ii) Jestliže je $|f'(x^*)| > 1$, pak je x^* nestabilní rovnovážný bod.

Důkaz. Zhang [17, strana 31] □

Poznámka. Rovnovážný bod x^* splňující podmínku $|f'(x^*)| \neq 1$ se nazývá hyperbolický rovnovážný bod.

Věta 1.2.5. Předpokládejme, že pro rovnovážný bod x^* rovnice (1.5) platí $f'(x^*) = 1$. Pak platí následující tvrzení.

- (i) Jestliže je $f''(x^*) \neq 0$, pak je x^* nestabilní rovnovážný bod.
- (ii) Jestliže je $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) \geq 0$, pak je x^* nestabilní rovnovážný bod.
- (iii) Jestliže je $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) \leq 0$, pak je x^* asymptoticky stabilní rovnovážný bod.

Důkaz. Elaydi [7, strana 30] □

Nyní si zde uvedeme ještě několik důležitých vět o stabilitě diferenčních rovnic druhého řádu 1.6. Nejdříve to bude věta pro homogenní rovnice a poté pro nehomogenní.

Věta 1.2.6. *Uvažujme homogenní rovnici $ax(t+1) + bx(t) + cx(t-1) = 0$, pro tuto rovnici platí následující tvrzení.*

- (i) *Všechna řešení homogenní rovnice oscilují (okolo nuly) právě tehdy, když charakteristická rovnice nemá žádné kladné reálné kořeny.*
- (ii) *Všechna řešení homogenní rovnice konvergují k nule (např. nulové řešení je asymptoticky stabilní) právě tehdy, když $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.*

Důkaz. Elaydi [7, strana 91] □

Věta 1.2.7. *Uvažujme nehomogenní rovnici $ax(t+1) + bx(t) + cx(t-1) = g(t) \equiv \text{konst.}$, kde $a \neq 0$ a $c \neq 0$, pak pro tuto rovnici platí následující tvrzení.*

- (i) *Všechna řešení nehomogenní rovnice oscilují okolo rovnovážného bodu x^* právě tehdy, když charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice nemá žádné kladné reálné kořeny.*
- (ii) *Všechna řešení homogenní rovnice konvergují k rovnovážnému bodu x^* pro $n \rightarrow \infty$ právě tehdy, když $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$, kde λ_1 a λ_2 jsou kořeny charakteristické rovnice přidružené homogenní rovnice.*

Důkaz. Elaydi [7, strana 94] □

1.3 Systémy diferenčních rovnic

V této části se zaměříme na systémy diferenčních rovnic. Nejdříve si zavedeme k – k –rozměrný systém a poté přejdeme k dvourozměrnému systému. U tohoto systému se podíváme na kvalitativní vlastnosti řešení a stabilitu.

Pro zapsání k –rozměrného systému lineárních diferenčních rovnic používáme systém následujícího tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1k}x_k(t), \\ x_2(t+1) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2k}x_k(t), \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_k(t+1) &= a_{k1}x_1(t) + a_{k2}x_2(t) + \cdots + a_{kk}x_k(t). \end{aligned}$$

Tento systém můžeme přepsat do maticového tvaru

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{1.8}$$

kde \mathbf{A} je reálná matice tvaru $k \times k$. Pro $t_0 \geq 0$ můžeme definovat počáteční podmínky $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Věta 1.3.1. *Řešení systému rovnic (1.8) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ je*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0, \tag{1.9}$$

Důkaz. Důkaz se provede přímým dosazením do (1.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= A\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(2) &= A\mathbf{x}(1) = A^2\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(n) &= A\mathbf{x}(n-1) = A^n\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Pro každé t tedy platí $\mathbf{x}(t) = A^t\mathbf{x}_0$. □

Věta 1.3.2. *Pokud je možné matici A diagonalizovat, poté řešení (1.9) můžeme vyjádřit jako*

$$\mathbf{x}(t) = A^t\mathbf{x}_0 \equiv P\Lambda^tP^{-1}\mathbf{x}_0, \quad (1.10)$$

kde matice P je matice vlastních vektorů a Λ je matice splňující $\Lambda = P^{-1}AP$.

Důkaz. Tu [16, strana 116] □

1.3.1 Jordanův kanonický tvar

V této části se budeme zabírat dvojrozměrnými diskretními dynamickými systémy. Tento systém lze popsat pomocí dvou diferencních rovnic

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f(x_1(t), x_2(t)) \\ x_2(t+1) &= g(x_1(t), x_2(t)), \end{aligned} \quad (1.11)$$

kde f a g jsou dané funkce. Tento systém je nelineární. Pokud bychom měli systém lineární můžeme použít následující zápis

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11}x_1(t) + a_{21}x_2(t) \\ x_2(t+1) &= a_{12}x_1(t) + a_{22}x_2(t), \end{aligned} \quad (1.12)$$

nebo již zmíněný maticový zápis

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t), \quad (1.13)$$

kde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Obecným řešením systému diferencních rovnic budeme rozumět množinu, které obsahuje všechna řešení systému. Partikulární řešení je pak řešení, které splňuje počáteční podmínku $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Než se dáme do práce s Jordanovým kanonickým tvarem (JKT) nejdříve připomeneme základní pojmy lineární algebry. Budeme zde pracovat s dvourozměrným systémem. V literatuře (Elaydi [7]) je možné nalézt teorii JKT i pro systém k rovnic. Toto zjednodušení je možné, neboť námi analyzovaný systém je také dvourozměrný.

Definice 1.18. Necht' A je matice tvaru 2×2 s prvky $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Definujeme stopu matice A jako součet diagonálních prvků, $trA = a_{11} + a_{22}$. Dále definujeme determinant matice A jako $detA = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Pomocí této definice poté můžeme počítat charakteristický polynom matice A jako $|A - \lambda E| = \lambda^2 - \lambda trA + detA$, kde E je jednotková matice velikosti 2×2 .

Definice 1.19. Řekneme, že dvě matice A a B jsou podobné, jestliže existuje matice P , pro níž existuje její inverzní matice P^{-1} a platí $B = P^{-1}AP$.

Z této definice vyplývá, že matice A a Λ z věty 1.3.2 jsou podobné.

Definice 1.20. Jordanův kanonický tvar matice A je matice $J = P^{-1}AP$, která je blokově diagonální a jednotlivé bloky jsou tvořeny Jordanovými buňkami J_i .

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_k \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Poznamenejme, že matice P z předešlé definice je tvořena vlastními vektory příslušnými k vlastním číslům matice A . Uvažujeme-li systém diferenčních rovnic (1.13), tak víme, že tento systém můžeme pomocí transformace $\mathbf{y} = P^{-1}$ převést do Jordanova kanonického tvaru $\mathbf{y}(t+1) = J\mathbf{y}(t)$, kde matice J má jeden z následujících tvarů:

- i) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ pro reálné různé kořeny λ_1, λ_2
- ii) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ pro dvojnásobný kořen $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$
- iii) $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pro komplexně sdružené kořeny $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

Pro kvalitativní analýzu vlastností řešení je důležité, že matice A a J mají stejná vlastní čísla a že kvalitativní vlastnosti pevných bodů systému $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$ a systému v kanonickém tvaru $\mathbf{y}(t+1) = J\mathbf{y}(t)$ jsou stejné. Řešení systému v kanonickém tvaru je poté $\mathbf{y}(t) = J^t \mathbf{y}(0)$, kde $\mathbf{y}(0)$ je počáteční podmínka. Pokud známe přesný tvar matice J v kanonickém tvaru, pak je již snadné nalézt řešení tohoto systému. V případě (i) je matice J v diagonálním tvaru, proto je

$$y_1(t) = \lambda_1^t y_1(0), \quad y_2(t) = \lambda_2^t y_2(0)$$

a řešení systému (1.13) je

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} \lambda_1^t y_1(0) \\ \lambda_2^t y_2(0) \end{pmatrix} = \lambda_1^t u_1 y_1(0) + \lambda_2^t u_2 y_2(0),$$

neboť platí $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$. V případě (ii) má matice J nad hlavní diagonálou jedničku, proto

$$y_1(t) = \lambda^t y_1(0) + t \lambda^{t-1} y_2(0), \quad y_2(t) = \lambda^t y_2(0),$$

a řešení systému (1.13) je

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} \lambda^t y_1(0) + t \lambda^{t-1} y_2(0) \\ \lambda^t y_2(0) \end{pmatrix} = \\ &= \lambda^t u_1 y_1(0) + t \lambda^{t-1} u_1 y_2(0) + \lambda^t u_2 y_2(0). \end{aligned}$$

Pro případ (iii) je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve tvaru $\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ a vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ve tvaru $\mathbf{u}_2 = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$. Pro řešení $\mathbf{x}(t)$ poté platí

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= P\mathbf{y}(t) = PJ^t \mathbf{y}(0) = (\mathbf{a} + i\mathbf{b}, \mathbf{a} - i\mathbf{b}) \begin{pmatrix} (\alpha + i\beta)^t & 0 \\ 0 & (\alpha - i\beta)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})(\alpha + i\beta)^t y_1(0) + (\mathbf{a} - i\mathbf{b})(\alpha - i\beta)^t y_2(0) = \\ &= |\lambda_1|^t (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) y_1(0) (\cos \varphi t + \sin \varphi t) + |\lambda_2|^t (\mathbf{a} - i\mathbf{b}) y_2(0) (\cos \varphi t - \sin \varphi t), \end{aligned}$$

kde $\varphi = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$.

Na konci této části ještě v poznámce uvedeme možnost převodu diferenční rovnice vyššího řádu na systém diferenčních rovnic prvního řádu.

Poznámka. Budeme uvažovat rovnici n -tého řádu ve tvaru $x(t) = a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + \dots + a_n x(t-n)$, pro kterou máme n počátečních podmínek. Tuto rovnici lze převést na systém n diferenčních rovnic pomocí následujícího předefinování proměnných

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x(t-n) \\ z_2(t) &= x(t-n+1) \\ z_3(t) &= x(t-n+2) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ z_{n-1}(t) &= x(t-1) \\ z_n(t) &= x(t). \end{aligned}$$

Tento systém se poté může psát v maticovém tvaru $\mathbf{z}(t) = A\mathbf{z}(t-1)$.

1.3.2 Kvalitativní vlastnosti řešení

Před samotnou kvalitativní analýzou vlastností řešení diferenčních rovnic je důležité provést ještě analýzu stability pevného bodu. Pro vyšetřování stability dynamických systémů je důležitá Jacobiho matice, kterou si pro dvoudimenzionální systém zadefinujeme v následující definici.

Definice 1.21. Necht' (x_1^*, x_2^*) je pevný bod zobrazení $\mathbf{F} = (f, g)$, kde f a g jsou spojitě diferencovatelné funkce v bodě (x_1^*, x_2^*) . Jacobiho matice zobrazení \mathbf{F} v bodě (x_1^*, x_2^*) je matice

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(x_1^*, x_2^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Při vyšetřování stability se poté využije Jacobiho matice $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(x_1^*, x_2^*)$ a její vlastní čísla. Na základě velikosti vlastních čísel se poté rozhodne o stabilitě, či nestabilitě rovnovážného bodu (x_1^*, x_2^*) tak, jak je uvedeno v následující větě.

Věta 1.3.3. Necht' $\mathbf{F} = (f, g)$ je spojitě diferencovatelné zobrazení na otevřené množině $M \in \mathbb{R}^2$ a necht' (x_1^*, x_2^*) je pevný bod zobrazení \mathbf{F} v množině M .

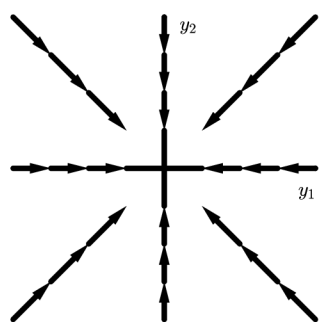
- (i) Jestliže všechna vlastní čísla Jacobiho matice $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(x_1^*, x_2^*)$ jsou v absolutní hodnotě menší než 1, tak je rovnovážný bod (x_1^*, x_2^*) asymptoticky stabilní.
- (ii) Jestliže alespoň jedno vlastní číslo Jacobiho matice $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(x_1^*, x_2^*)$ je v absolutní hodnotě větší než 1, tak je rovnovážný bod (x_1^*, x_2^*) nestabilní.

Důkaz. Tu [16, strana 123] □

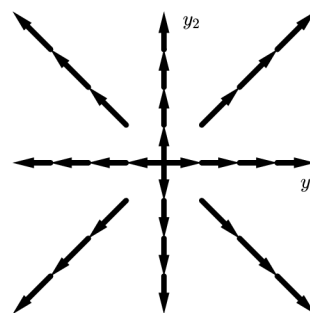
Při kvalitativní analýze vlastností řešení se snažíme graficky znázornit chování systému v okolí rovnovážného bodu. Nadále budeme pracovat se systémem (1.13) v rovině. Již dříve jsme si ukázali, že v případě lineárního systému můžeme tento systém psát v jeho kanonickém tvaru $\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{J}\mathbf{y}(t)$, proto budeme analyzovat tento kanonický tvar namísto původního systému. U konstrukce fázových portrétů vycházíme z roviny $y_1 y_2$, body v okolí rovnovážného bodu jsou diskrétní, ale dochází k jejich spojování pro názorné zobrazení.

Charakteristická rovnice matice A systému (1.13) je ve tvaru $|A - \lambda E| = \lambda^2 - b\lambda + c = 0$. Tato rovnice má kořeny $\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, kde Δ je diskriminant a platí $\Delta = b^2 - 4c$. Kvalitativní analýza vlastností hyperbolických stacionárních bodů se poté rozpadne na tři základní tvary v závislosti na znaménku Δ .

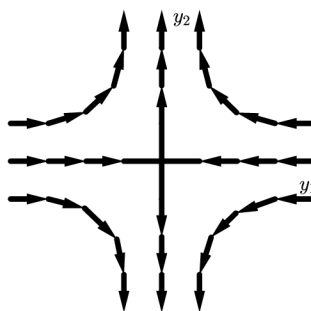
- (i) Pro $\Delta > 0$ dostaneme dva různé reálné kořeny λ_1 a λ_2 . Rovnovážný bod je poté stabilní uzel pro $|\lambda_i| < 1$ (obrázek 1.5a), nestabilní uzel pro $|\lambda_i| > 1$ (obrázek 1.5b) a sedlo pro $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ (obrázek 1.5c).
- (ii) Pro $\Delta = 0$ dostaneme jeden dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Rovnovážný bod je poté uzel (obrázek 1.6).
- (iii) Pro $\Delta > 0$ dostaneme dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$, kde $\alpha = a/2$ a $\beta = \sqrt{\Delta}/2$. Pro $|r| < 1$ se jedná o stabilní ohnisko (obrázek 1.7a) a pro $|r| > 1$ se jedná o nestabilní ohnisko (obrázek 1.7b).



(a) Stabilní uzel

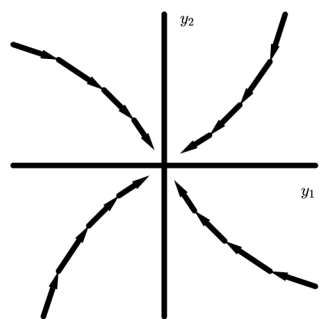


(b) Nestabilní uzel

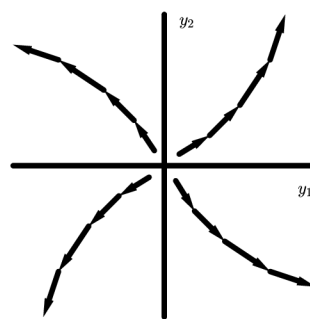


(c) Sedlo

Obrázek 1.5: Různé reálné kořeny

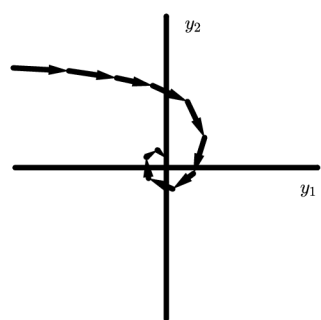


(a) Stabilní uzel

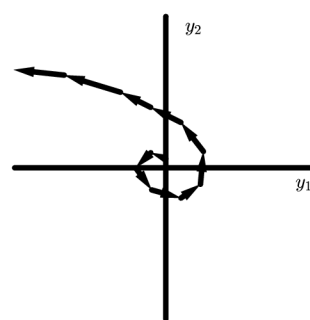


(b) Nestabilní uzel

Obrázek 1.6: Dvojnásobný reálný kořen



(a) Stabilní ohnisko



(b) Nestabilní ohnisko

Obrázek 1.7: Komplexně sdružené kořeny

Kapitola 2

Nelineární dynamické systémy

V této kapitole se budeme zabývat nelineárními dynamickými systémy. Nejdříve se podíváme na systémy, které lze linearizovat. V druhé části této kapitoly poté přejdeme k teorii bifurkací, tj. závislosti systému na parametrech, a představíme si zde základní typy bifurkací.

2.1 Linearizace

V předešlé kapitole jsme se zabývali převážně lineárními systémy, nyní přejdeme k nelineárním systémům diferencních rovnic. V případě nelineárních dynamických systémů je možné při analýze využít linearizaci, která je definovaná v následující definici. Uvažujeme zde dvoudimenzionální diskretní systém daný soustavou diferencních rovnic (1.11).

Definice 2.1. Necht' (x_1^*, x_2^*) je pevný bod zobrazení $\mathbf{F} = (f, g)$, kde f a g jsou funkce spojitě diferencovatelné v bodě (x_1^*, x_2^*) . Jacobiho matice zobrazení \mathbf{F} v bodě (x_1^*, x_2^*) je matice

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(x_1^*, x_2^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Lineární zobrazení $\mathbf{L}_{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$\mathbf{L}_{\mathbf{F}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)x_1 & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)x_2 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)x_1 & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)x_2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

se nazývá linearizace zobrazení \mathbf{F} v bodě (x_1^*, x_2^*) .

Poznamenejme, že původní systém je topologicky ekvivalentní se svou linearizací.

Definice 2.2. Jestliže žádné z vlastních čísel příslušné Jacobiho matice $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(x_1^*, x_2^*)$ nemá jednotkovou velikost, pak pevný bod (x_1^*, x_2^*) systému (1.11) nazveme hyperbolickým pevným bodem.

Dalším možným kritériem pro určení hyperbolických pevných bodů je matice linearizované soustavy. Pokud tato matice nemá žádné vlastní číslo rovné nule ani komplexní vlastní číslo s nulovou reálnou částí, pak je pevný bod hyperbolický.

2.2 Bifurkace

Teorie bifurkací se zabývá analýzou dynamických systémů závislých na parametrech. Základním problémem zde je určit, jak se systém mění se změnou parametru, či parametrů. Pro různé hodnoty parametrů přestávají být systémy topologicky ekvivalentní, viz definice 1.9. Existuje velmi mnoho typů bifurkací, jejich přehled podrobně zpracovává Kuznetsov [9]. Bifurkace se rozdělují na jednoparametrické a na víceparametrické a to podle toho kolik parametrů se mění. V této práci se budeme zabývat jednoparametrickými bifurkacemi diskretních dynamických systémů.

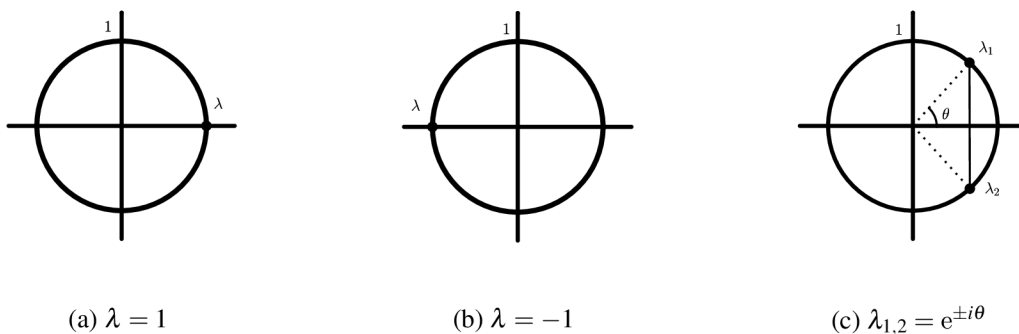
Mějme dynamický systém závislý na parametru popsany systémem diferenčních rovnic

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \alpha), \quad (2.3)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, funkce \mathbf{f} je dostatečně hladká a $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Se změnou parametru α se mění i fázový portrét rovnice (2.3). Nový fázový portrét po změně parametru α může zůstat topologicky ekvivalentní s původním, ale také nemusí.

Definice 2.3. Jev, kdy při změně parametru dochází ke změně topologické ekvivalentnosti, se nazývá bifurkace.

Uvažujme dynamický systém daný soustavou diskretních rovnic (2.3), nechť \mathbf{x}^* je hyperbolický pevný bod pro hodnotu parametru $\alpha = \alpha_0$. Existují jen tři možnosti, jak se může změnit podmínka hyperbolického pevného bodu, vlastní čísla λ_1 a λ_2 tedy mohou nabývat třech různých tvarů, $\lambda = 1$ (obrázek 2.1a), $\lambda = -1$ (obrázek 2.1b) nebo $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$, kde $\theta \in (0, \pi)$ (obrázek 2.1c).



Obrázek 2.1: Tvary vlastních čísel

Definice 2.4. V závislosti na jednotlivých tvarech vlastních čísel se definují jednotlivé typy bifurkací:

- (i) bifurkace objevující se s vlastním číslem $\lambda = 1$ se nazývá *fold bifurkace*,
- (ii) bifurkace objevující se s vlastním číslem $\lambda = -1$ se nazývá *flip bifurkace* nebo také *zdvojení periody*,

(iii) bifurkace objevující se s vlastním číslem $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$, kde $\theta \in (0, \pi)$ se nazývá *Neimarkova-Sackerova bifurkace*.

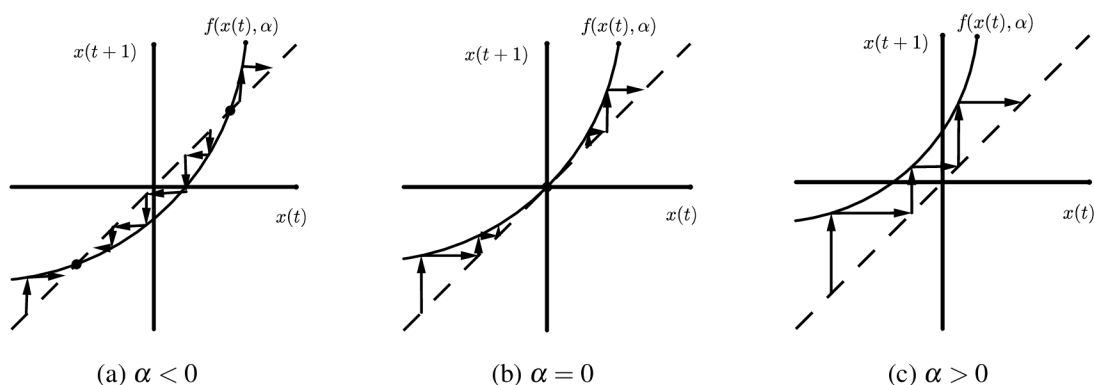
Bifurkace se popisují v literatuře (Kuznetsov [9]) v jejich normálních formách, proto i v tomto textu se budeme věnovat těmto normálním formám.

2.2.1 Fold bifurkace

V této části budeme uvažovat diskrétní dynamický systém daný diferenční rovnicí

$$x(t+1) = \alpha + x(t) + x^2(t) \equiv f(x, \alpha).$$

Systém má pro $\alpha = 0$ nehyperbolický pevný bod $x^* = 0$ s vlastním číslem $\lambda = f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$. Pro $\alpha < 0$ má systém dva pevné body, jeden stabilní a druhý nestabilní. Pro $\alpha > 0$ nemá systém žádný pevný bod. Tímto vzniká fold bifurkace. Chování tohoto systému okolo bodu $x^* = 0$ pro malé změny α jsou znázorněny na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Fold bifurkace

Tuto bifurkaci je možné znázornit ještě i jiným způsobem a to konkrétně v prostoru $(x(t), \alpha)$. Toto znázornění je na obrázku 2.3. Pro pevné hodnoty parametru α je možné z obrázku vyčíst počet pevných bodů.

Poznámka. Systém $x(t+1) = \alpha + x(t) - x^2(t)$ je možné analyzovat stejným způsobem, jaký je zmíněn výše. Pro $\alpha > 0$ budou existovat dva pevné body, výsledný graf bude podobný tomu na obrázku 2.3, jen bude otočený okolo svislé osy.

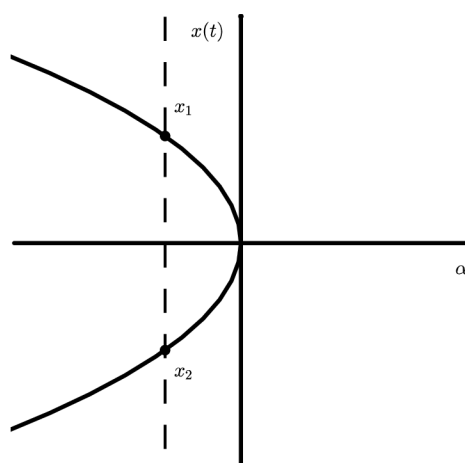
Věta 2.2.1. *Uvažujme jednodimenzionální systém*

$$x(t+1) = f(x(t), \alpha),$$

kde $x \in \mathbb{R}^1$, funkce f je dostatečně hladká a $\alpha \in \mathbb{R}^1$, který má pro $\alpha = 0$ pevný bod $x^* = 0$ a necht' platí $\lambda = f_x(0, 0) = 1$. Předpokládejme, že následující podmínky jsou splněny

(i) $f_{xx}(0, 0) \neq 0$,

(ii) $f_\alpha(0, 0) \neq 0$.



Obrázek 2.3: Fold bifurkace

Poté je možné původní systém převést do tvaru

$$\eta(t+1) = \beta + \eta(t) \pm \eta^2(t) + O(\eta^3(t)),$$

který je v blízkosti počátku lokálně topologicky ekvivalentní se systémem v normální formě

$$\eta(t+1) = \beta + \eta(t) \pm \eta^2(t).$$

Důkaz. Kuznetsov [9, strana 117]

□

2.2.2 Flip bifurkace

Uvažujme jednodimenzionální dynamický systém daný diferenční rovnicí

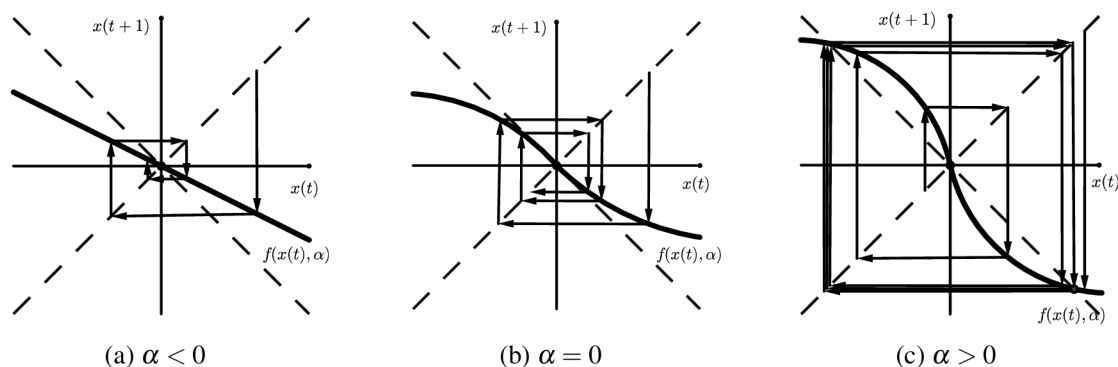
$$x(t+1) = -(1+\alpha)x(t) + x^3(t) \equiv f(x, \alpha). \quad (2.4)$$

Systém má pevný bod $x^* = 0$ pro všechna α s vlastním číslem $\lambda = -(1+\alpha)$. Tento pevný bod je lineárně stabilní pro malé $\alpha < 0$ a lineárně nestabilní pro malé $\alpha > 0$. Pro hodnotu parametru $\alpha = 0$ není pevný bod hyperbolický, jelikož je vlastní číslo $\lambda = f_x(0, 0) = -1$, ale systém je přesto nelineárně stabilní. Budeme uvažovat druhou iteraci

$$\begin{aligned} f^2(x, \alpha) &= -(1+\alpha)[-(1+\alpha)x(t) + x^3(t)] + [-(1+\alpha)x(t) + x^3(t)]^3 \\ &= (1+\alpha)^2 x(t) - [(1+\alpha)(2+2\alpha+\alpha^2)]x^3(t) + O(x^5(t)). \end{aligned}$$

Druhá iterace má triviální pevný bod $x^* = 0$ a pro $\alpha > 0$ dva netriviální pevné body. Tyto dva pevné body jsou stabilní a tvoří cyklus s periodou dva původního zobrazení $f(x, \alpha)$. Na obrázku 2.4 je možné vidět celkovou bifurkaci. S tím jak se blíží α k nule shora, cyklus periody dva „se zmenšuje“, až zmizí úplně a to je flip bifurkace.

Obdobně jako u fold bifurkace i u flip bifurkace je možné znázornění v prostoru $(x(t), \alpha)$, viz obrázek 2.5. Na tomto obrázku vodorovná osa představuje pevný bod, pro $\alpha < 0$ je stabilní a pro $\alpha > 0$ je nestabilní, přičemž „parabola“ představuje stabilní cyklus periody dva



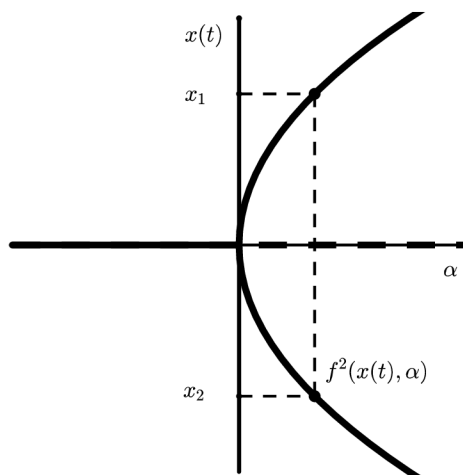
Obrázek 2.4: Flip bifurkace

existující pro $\alpha > 0$.

Systém

$$x(t+1) = -(1+\alpha)x(t) - x^3(t) \quad (2.5)$$

je možné analyzovat obdobně jako systém (2.4). Pro $\alpha \neq 0$ má pevný bod x^* stejnou stabilitu jako v případě systému (2.4). Při kritické hodnotě parametru $\alpha = 0$ je pevný bod nestabilní. Při analýze druhé iterace systému (2.5) vzniká pro $\alpha < 0$ nestabilní cyklus periody dva, který mizí pro $\alpha = 0$.



Obrázek 2.5: Flip bifurkace

Poznámka. Flip bifurkace systému (2.4) se nazývá superkritická a flip bifurkace systému (2.5) se nazývá subkritická. Typ bifurkace závisí na stabilitě pevného bodu a kritické hodnotě parametru.

Věta 2.2.2. *Uvažujme jednodimenzionální systém*

$$x(t+1) = f(x(t), \alpha),$$

kde $x \in \mathbb{R}^1$, funkce f je dostatečně hladká a $\alpha \in \mathbb{R}^1$, který má pro $\alpha = 0$ pevný bod $x^* = 0$ a necht' platí $f_x(0,0) = -1$. Předpokládejme, že následující podmínky jsou splněny

$$(i) \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(0,0) \neq 0,$$

$$(ii) f_{x\alpha} \neq 0.$$

Poté je možné původní systém převést do tvaru

$$\eta(t+1) = -(1+\beta)\eta(t) \pm \eta^3(t) + O(\eta^4(t)),$$

který je v blízkosti počátku lokálně topologicky ekvivalentní se systémem v normální formě

$$\eta(t+1) = -(1+\beta)\eta(t) \pm \eta^3(t).$$

Důkaz. Kuznetsov [9, strana 121] □

Příklad 2.1. Nejznámější dynamický systém, ve kterém dochází k flip bifurkaci, je diskrétní logistická rovnice ve tvaru

$$x(t+1) = rx(t)(1-x(t)),$$

kde $x(t)$ představuje hustotu populace v čase t a r je koeficient růstu. Je vidět, že hustota populace v příštím období závisí na koeficientu růstu a na hustotě populace v tomto období.

Flip bifurkace vzniká, pokud v kritické hodnotě parametru dojde ke změně délky periody cyklu na její dvojnásobek, při tomto překročení přestane být jediný pevný bod stabilní a vznikne stabilní cyklus délky dva. Pokud dojde k další flip bifurkaci, tak se zdvojí cyklus délky dva na cyklus délky čtyři, v tomto případě můžeme psát $f^4(x(t)) = f(f(f(f(x(t)))))$. Na obrázku 2.6a můžeme vidět cyklus délky čtyři. Na obrázku 2.6b je poté znázorněn bifurkační diagram znázorňující chování systému v závislosti na změně parametru r .

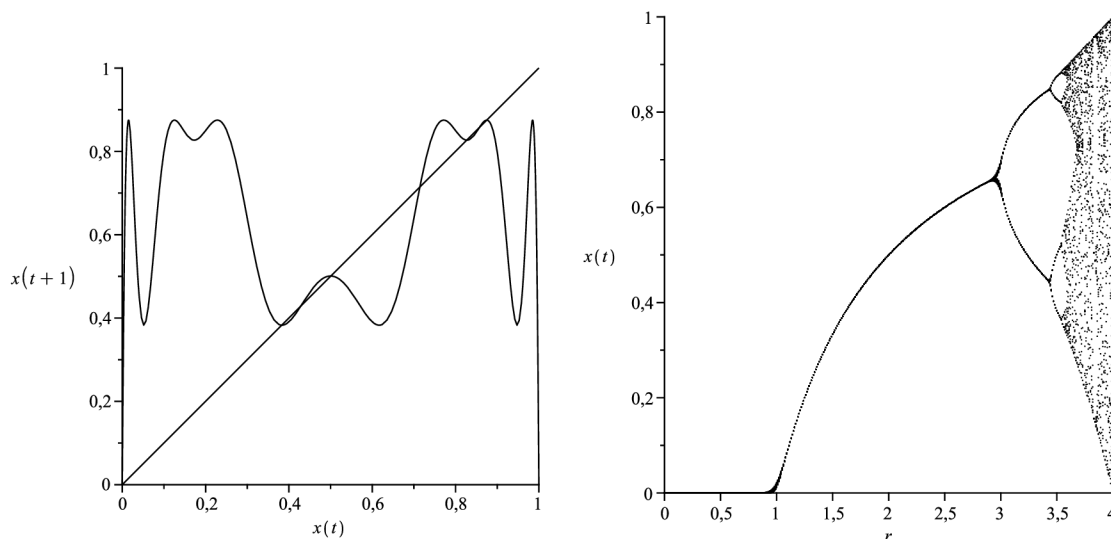
Z obrázku 2.6b je patrné, že pro $r \in [2, 8; 3]$ má systém stabilní rovnovážný bod. Kritická hodnota bifurkace nastává pro $r = 3$ a zde začíná cyklus délky dva. Dalšími bifurkacemi se exponenciálně zvyšují délky cyklů, kdy jejich délka roste k nekonečnu, tam se systém přestává chovat periodicky a začíná se chovat chaoticky. V našem případě tak nastává při hodnotě parametru $r = 3,569$.

2.2.3 Neimarkova-Sackerova bifurkace

Nyní budeme uvažovat dvoudimenzionální diskrétní dynamický systém daný soustavou diferenčních rovnic

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = (1+\alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

kde α je parametr, $\theta = \theta(\alpha)$, $a = a(\alpha)$ a $b = b(\alpha)$ jsou hladké funkce a platí $0 < \theta(0) < \pi$ a $a(0) \neq 0$. Systém má pevný bod $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ pro všechny hodnoty parametru α a Jacobiho matice je ve tvaru



(a) Cyklus délky čtyři

(b) Bifurkační diagram

Obrázek 2.6: Logistická rovnice

$$J = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Tato matice má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = (1 + \alpha)e^{\pm i\theta}$. Jak je možné vidět, tak pevný bod v počátku je nehyperbolický pro $\alpha = 0$. Při analýze bifurkací se zavádějí komplexní proměnné $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$, $|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$ a $d = a + ib$. Rovnici pro z můžeme psát ve tvaru

$$z(t+1) = e^{i\theta} z(t)(1 + \alpha + d|z(t)|^2) = \mu z(t) + cz(t)|z(t)|^2,$$

kde $\mu = \mu(\alpha) = (1 + \alpha)e^{i\theta(\alpha)}$ a $c = c(\alpha) = e^{i\theta(\alpha)}d(\alpha)$ jsou komplexní funkce parametru α . Pomocí substituce $z = \rho e^{i\varphi}$ obdržíme $\rho = |z|$ a $\rho(t+1) = \rho(t)|1 + \alpha + d(\alpha)\rho^2(t)|$ a převedeme systém do polárních souřadnic. Jelikož platí

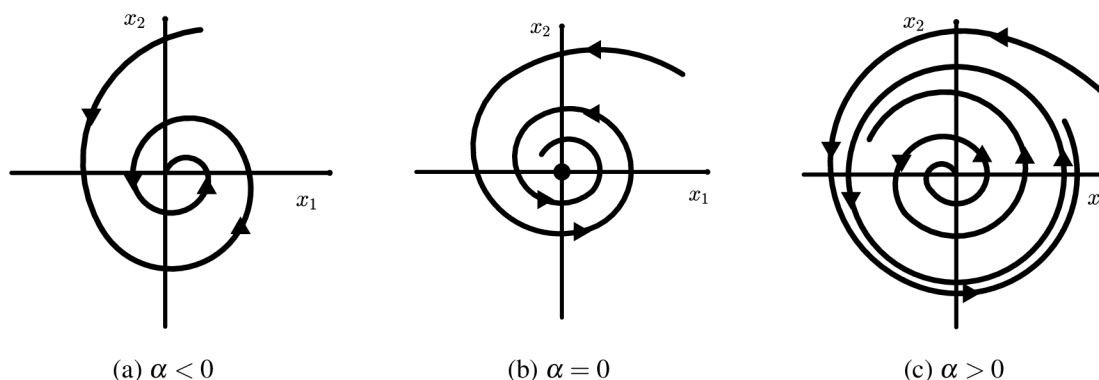
$$|1 + \alpha + d(\alpha)\rho^2| = (1 + \alpha) \left(1 + \frac{2a(\alpha)}{1 + \alpha}\rho^2 + \frac{|d(\alpha)|^2}{(1 + \alpha)^2}\rho^4 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2 + O(\rho^3),$$

pak můžeme přepsat systém (2.6) do polárních souřadnic následovně

$$\begin{aligned} \rho(t+1) &= \rho(t)(1 + \alpha + a(\alpha)\rho^2(t)) + \rho^4(t)R(\rho(t), \alpha) \\ \varphi(t+1) &= \varphi(t) + \theta(\alpha) + \rho^2(t)Q(\rho(t), \alpha), \end{aligned} \quad (2.7)$$

kde $R(\rho(t), \alpha)$ a $Q(\rho(t), \alpha)$ jsou hladké funkce. Analýzu bifurkací lze provést podobně jako v předešlých částech, neboť ρ a φ jsou nezávislé. První rovnice systému (2.7) definuje jednodimenzionální dynamický systém, který má pevný bod $\rho^* = 0$ pro všechny hodnoty

parametru α , pro $\alpha < 0$ je pevný bod lineárně stabilní a pro $\alpha > 0$ je lineárně nestabilní. Stabilita pevného bodu pro $\alpha = 0$ je závislá na znaménku u koeficientu $a(0)$, předpokládejme, že $a(0) < 0$ poté je počátek pro $\alpha = 0$ nelineárně stabilní, navíc má tato rovnice pro $\alpha > 0$ další pevný bod $\rho^* = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} + O(\alpha)$. Druhá rovnice systému (2.7) popisuje otočení o úhel závislejší na ρ a α , přibližně to odpovídá $\theta(\alpha)$. Takto získáme bifurkační diagram pro původní dvoudimenzionální dynamický systém (2.6), viz obrázek 2.7.



Obrázek 2.7: Superkritická Neimarkova-Sackerova bifurkace

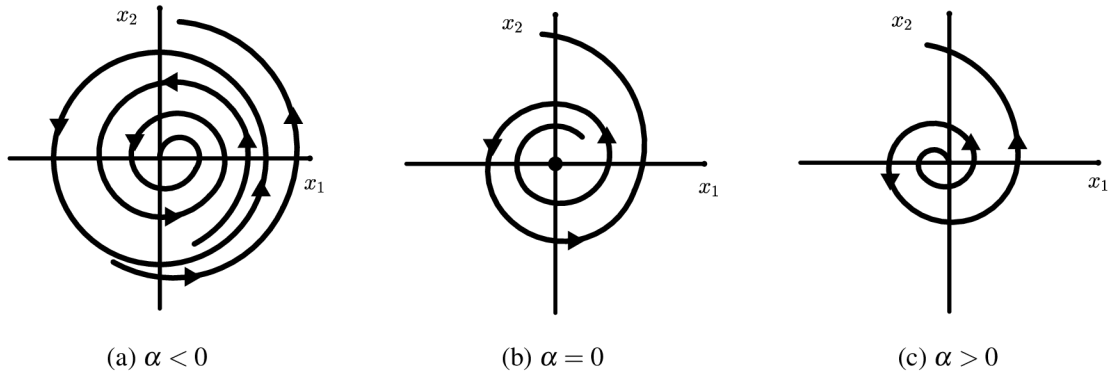
Systém má vždy pevný bod v počátku. Tento pevný bod je stabilní pro $\alpha < 0$ a nestabilní pro $\alpha > 0$, pro kritickou hodnotu parametru $\alpha = 0$ je pevný bod nelineárně stabilní. Pro $\alpha > 0$ je pevný bod obklopen uzavřenou invariantní křivkou, která je jedinečná a stabilní. Všechny trajektorie začínající vně nebo uvnitř uzavřené invariantní křivky směřují k této křivce a to je Neimarkova-Sackerova bifurkace. Obdobně jako v předešlých částech i zde je možné vyznačit bifurkaci v prostoru (x_1, x_2, α) a vznikne povrch paraboloidu.

Případ $a(\alpha) > 0$ se bude analyzovat obdobně. Pro $\alpha = 0$ vzniká Neimarkova-Sackerova bifurkace a vzniká zde uzavřená invariantní křivka, která při přechodu α ze záporných do kladných hodnot mizí, viz obrázek 2.8. I jako v předešlé části je typ bifurkace určen stabilitou pevného bodu a kritickou hodnotou bifurkačního parametru.

Obdobně jako v předešlých částech i zde budeme nyní uvažovat systém vyššího řádu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} &= (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\ &+ (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + O(\|x(t)\|^4). \end{aligned} \quad (2.8)$$

V tomto případě ale vyšší řád ovlivňuje bifurkační chování systému, nelze proto říct, že systém (2.8) je topologicky ekvivalentní se systémem (2.6). Pokud přepíšeme systém vyššího řádu do polárních souřadnic, pak ρ bude závislé na φ , zápis bude podobný tomu (2.7). Pro analýzu je důležité následující lemma.



Obrázek 2.8: Subkritická Neimarkova-Sackerova bifurkace

Lemma 2.2.3. Člen $O(\|x(t)\|^4)$ neovlivňuje bifurkaci uzavřené invariantní křivky v rovnici (2.8). To znamená, že lokálně jednoznačná invariantní křivka bifurkuje stejným směrem a se stejnou stabilitou jako v systému (2.6).

Důkaz. Kuznetsov [9, strana 143] □

Následující věta nám říká, že každý dvoudimenzionální diskretní dynamický systém s Neimarkovou-Sackerovou bifurkací lze převést do tvaru (2.8).

Věta 2.2.4. Uvažujme dvoudimenzionální diskretní systém závislý na jednom parametru

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \alpha),$$

mající pro $\alpha = 0$ pevný bod $\mathbf{x}^* = 0$ s komplexními vlastními čísly $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, pak existuje okolí \mathbf{x}^* , na kterém jedinečná uzavřená invariantní křivka bifurkuje od \mathbf{x}^* s tím, jak α opouští nulu.

Důkaz. Kuznetsov [9, strana 135] □

Příklad 2.2. Obdobně jako v příkladu 2.1 budeme uvažovat logistickou rovnici ale tentokrát zpožděnou

$$x(t+1) = rx(t)(1 - x(t-1)).$$

Tato rovnice popisuje jednoduchý populační dynamický model, kde $x(t)$ představuje hustotu populace v čase t a r je koeficient růstu. Růst populace není určen jen současným stavem populace ale také minulým. Pomocí substituce $y(t) = x(t-1)$ převedeme systém na soustavu dvou diferenčních rovnic

$$\begin{aligned} x(t+1) &= rx(t)(1 - y(t)) \\ y(t+1) &= x(t). \end{aligned}$$

Tento systém má triviální pevný bod $(x^*, y^*) = (0, 0)$ pro všechny hodnoty parametru r . Pro $r > 1$ navíc existuje netriviální kladný pevný bod $(x^*(r), y^*(r)) = (1 - \frac{1}{r}, 1 - \frac{1}{r})$. Jacobiho matice tohoto systému je

$$J = \begin{pmatrix} r(1-y(t)) & -rx(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

v netriviálním pevném bodě $(x^*(r), y^*(r))$ je Jacobiho matice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1-r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

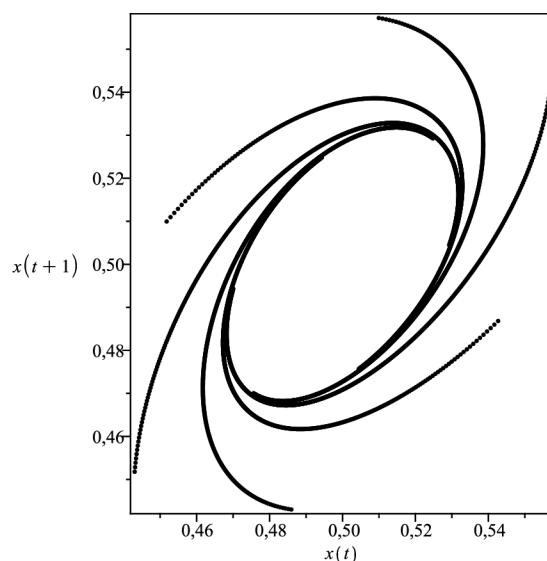
Vlastní čísla jsou poté

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5-4r}}{2},$$

pro $r > \frac{5}{4}$ jsou vlastní čísla komplexní a platí

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5-4r}}{2} \frac{1 - \sqrt{5-4r}}{2} = \frac{1}{4}(4r-4) = r-1.$$

Proto pro $r = 2$ netriviální pevný bod ztrácí stabilitu a vzniká Neimarkova-Sackerova bifurkace. Na obrázku 2.9 je poté znázorněn vznik uzavřené invariantní křivky při Neimarkově-Sackerově bifurkaci pro hodnotu parametru $r > 2$.



Obrázek 2.9: Neimarkova-Sackerova bifurkace logistické rovnice

2.3 Víceparametrické bifurkace

Bifurkace závislé na více parametrech vznikají v systémech, ve kterých se najednou mění více než jeden parametr. V tomto případě záleží, kde se nacházíme, v okolí rovnovážného hyperbolického bodu se nic moc nezmění, rovnováha zde bude nadále hyperbolická. Při sledování křivky kritického parametru bifurkace může další parametr způsobit, že další vlastní čísla dosáhnou kritické hodnoty, nebo dojde k porušení jedné z podmínek nutných pro

nastání bifurkace. Vzhledem k modelu, který bude analyzovaný se touto problematikou zde nebudeme zabývat. Je možné ji nalézt v odborné literatuře (Kuznetsov [9, strana 393-462]).

Kapitola 3

Model překrývajících se generací

V této kapitole se budeme zabývat ekonomickým modelem překrývajících se generací, pro zjednodušení budeme v celé práci pro něj používat zkratku OLG (z angl. Overlapping Generations). Jedná se o model ekonomického růstu, který vychází z předpokladu, že ekonomika jako celek je tvořena třemi subjekty, spotřebiteli, firmami a státem. Pomocí popisu jednotlivých subjektů lze popsat celou ekonomiku.

3.1 Historický kontext modelu

Moderní teorie ekonomického růstu vychází z práce britského matematika a filozofa Franka Plumptona Ramseyho. Ramsey v roce 1928 publikoval článek *A Mathematical Theory of Saving* (Ramsey [14]), ve kterém byl zveřejněn jeden z nejpokročilejších modelů té doby. Ramsey ve svém modelu předpokládal „nekonečně dlouho“ žijící populaci. V tomto směru OLG model Ramseyho model překonává.

V roce 1965 Peter Diamond publikoval článek *National Debt in a Neoclassical Growth Model* (Diamond [5]) o modelu s překrývajícími se generacemi. Diamond ve svém modelu uvažoval nově narozené a umírající generace, proto se jedinci v tomto modelu rozhodují v konečném časovém horizontu daným délkou jejich života.

Dalším milníkem byla Lucasova kritika. Robert Lucas v roce 1976 publikoval článek *Econometric Policy Evaluation: A Critique* (Lucas [11]), ve kterém se zabýval kritikou dosavadních úvah o hospodářské politice. Především tvrdil, že chování subjektů v ekonomice je ovlivněno rozhodováním vlády a tudíž nelze provádět analýzu dopadu hospodářské politiky bez zahrnutí přizpůsobení subjektů vládním rozhodnutím.

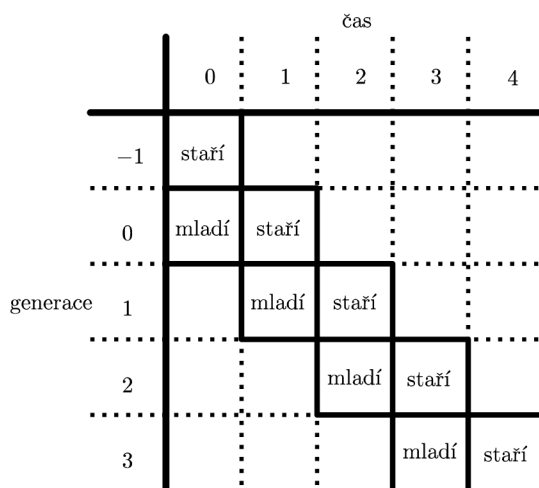
Auerbach a Kotlikoff v roce 1987 publikovali knihu *Dynamic Fiscal Policy* (Auerbach, Kotlikoff [1]), ve které byl zveřejněn nový OLG model. Tento model byl později několikrát modifikován a zahrnuje i Lucasovu kritiku.

3.2 Základní představa o modelu OLG

V této části si představíme jednotlivé subjekty, které se v ekonomice nacházejí a které ovlivňují spotřebitelská rozhodnutí. Podíváme se zde na jejich rozpočtová omezení a na vývoj v čase. Při konstrukci ekonomického modelu nejdříve popíšeme jednotlivé subjekty, a poté jejich vzájemné vztahy v ekonomice. OLG model budeme uvažovat s diskrétním časem $t \in (-\infty, \infty)$. Současnost se většinou označuje jako $t = 1$ a období od $-\infty$ do 0 je dokončená minulost. Model si představíme v nejjednodušší podobě, kdy generace žije dva časové okamžiky.

3.2.1 Populace

V každém časovém okamžiku t se narodí nová generace, která se nazývá generace t . Označíme dále $N(t)$ počet jedinců t -té generace. Pro jednoduchost budeme uvažovat, že jedinci žijí dvě období t a $t + 1$, přičemž v čase t se jedinci nazývají mladí a v čase $t + 1$ se nazývají staří. Dále víme, že žádný jedinec se nedožije okamžiku $t + 2$. Takto definovaný vývoj populace se nazývá překrývající se generace, neboť v každém časovém okamžiku t žijí právě dvě generace. Na obrázku 3.1 můžeme vidět znázornění rozpětí několika generací během časových období, je zde zobrazeno překrývání dvou generací. Například v čase 2 jsou naživu staří, narození v čase 1 a mladí, narození v čase 2. Z tohoto obrázku také můžeme určit počet žijících jedinců v časový okamžik t , v tomto okamžiku žije $N(t)$ mladých a $N(t - 1)$ starých jedinců.



Obrázek 3.1: Rozpětí několika generací

Budeme předpokládat, že existuje jediné zboží v každém období¹, jedinci populace toto zboží spotřebovávají, proto je označíme jako spotřebitele. Dále budeme potřebovat, aby

¹Můžeme předpokládat, že existuje jen jedno zboží, neboť jakoukoli spotřebu můžeme nahradit celým spotřebním košem a případně vyjádřit jeho hodnotu.

se naše zboží v čase neměnilo a bude důležité, ve kterém období toto zboží existuje. Jelikož uvažujeme nekonečně časových období potřebujeme také nekonečně kusů zboží, ve zjednodušené verzi se předpokládá nepřevoditelnost zboží mezi jednotlivými obdobími.²

Označme $Y(t)$ celkovou zásobu zboží v období t , nebudeme se zatím zajímat odkud toto zboží pochází, ale jak je využíváno. Posloupnost $\{Y(t)\}_{t=1}^{\infty}$ popisuje množství zboží v ekonomice v současném a budoucích časových obdobích. Jelikož není možné přesouvat zboží z jednoho období do druhého, pak $Y(t)$ představuje množství zboží, které je v období t spotřebováno nebo které přijde nazmar. Například zboží z období t je k dispozici pouze pro jedince žijící v období t , tudíž pro mladou generaci t nebo pro starší generaci $t - 1$.

Pro jednotlivá období je důležité určit, co a kdo spotřebuje, tomuto se také říká alokace spotřeby. Označíme $c_t^h(s)$ spotřebu zboží z období s jedincem h z generace t , přičemž h nabývá celých čísel od 1 do $N(t)$. Za předpokladu spotřebování zboží během jednoho období bude $c_t^h(s)$ různé od 0 pouze pro $s = t$ a $s = t + 1$. Výraz $c_t^h(t)$ poté představuje spotřebu jedince h z generace t , když je mladý a $c_t^h(t + 1)$ představuje spotřebu jedince h , té samé generace, když je starý. Poté c_t^h představuje uspořádanou dvojici spotřeby jedince h generace t , takže

$$c_t^h = [c_t^h(t), c_t^h(t + 1)].$$

Alokace spotřeby v čase t je dána množinou spotřeby $\{c_t^h(t)\}_{h=1}^{N(t)}$ mladých v čase t a množinou spotřeby $\{c_{t-1}^h(t)\}_{h=1}^{N(t-1)}$ starých jedinců v čase t . Uskutečnitelná alokace spotřeby je taková alokace spotřeby, které lze dosáhnout s danými zdroji. Celková spotřeba v čase t se označuje $C(t)$ a platí pro ni

$$C(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} c_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} c_{t-1}^h(t),$$

kde sčítáme spotřebu všech mladých a všech starých jedinců v čase t .

Definice 3.1. Alokace spotřeby je uskutečnitelná, jestliže pro všechna $t \geq 1$ splňuje spotřeba $C(t) \leq Y(t)$.

Tato definice v podstatě říká, že spotřeba je uskutečnitelná, pokud je celková spotřeba v daném období menší nebo rovna veškerým zdrojům dostupným v daném období.

Definice 3.2. Uskutečnitelná alokace spotřeby je efektivní, jestliže neexistuje alternativní uskutečnitelná alokace spotřeby s větší celkovou spotřebou jednoho zboží a ne menší spotřebou ostatního zboží.

V modelu OLG se uvažuje jen jedno zboží, takže „neexistuje alternativní uskutečnitelná alokace spotřeby s větší celkovou spotřebou jednoho zboží a ne menší spotřebou ostatního zboží“ znamená, že v případě jednoho zboží neexistuje alokace taková, že v jednom období by se spotřebovalo více zboží, aniž by se ho v jiném období spotřebovalo méně.

²Model lze rozšířit o technologie, které dokáží uchovat zboží a převést ho z období t do období $t + 1$.

Definice 3.3. Symetrická alokace spotřeby je taková, při které každý příslušník generace spotřebovává stejnou dvojici spotřeby $[c_t^h(t), c_t^h(t+1)] = [c_s^j(s), c_s^j(s+1)]$, pro každé h a j patřící do generace s nebo $t, s, t \geq 1$.

Nadále budeme předpokládat, že celková populace $N(t)$ a celkové zdroje $Y(t)$ porostou čistým koeficientem růstu $n \geq 1$, pro $n = 1$ se jedná o konstantní růst. Růst populace a zdrojů poté splňuje následující rovnice.

$$\begin{aligned} N(t) &= nN(t-1) \\ Y(t+1) &= nY(t) \end{aligned}$$

Víme, že pokud je alokace efektivní, pak celkové zdroje odpovídají celkové spotřebě $Y(t) = C_t(t) + C_{t-1}(t)$, kde $C_t(t)$ je spotřeba mladých jedinců a $C_{t-1}(t)$ je spotřeba starších jedinců. Protože při symetrické alokaci spotřeby všichni členové generace spotřebovávají stejné množství, můžeme efektivní alokaci spotřeby vyjádřit následující rovnicí.

$$Y(t) = N(t)c_t^h(t) + N(t-1)c_{t-1}^h(t) \quad (3.1)$$

Pokud je populace dvou generací stejná, čili $N(t) = N(t+1)$ a alokace je symetrická, čili $c_{t-1}^h(t) = c_t^h(t+1)$, pak

$$c_t^h(t) + c_t^h(t+1) = \frac{Y(t)}{N(t)}. \quad (3.2)$$

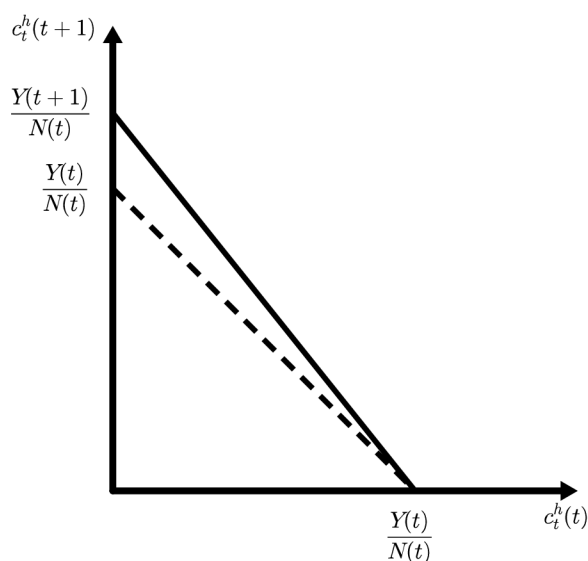
Pro populaci dvou generací s koeficientem růstu $n > 1$ je na obrázku 3.2 (plnou čarou) zobrazen spotřební koš uskutečnitelné symetrické spotřeby. Čárkovanou čarou je zde pak vyznačen spotřební koš pro populaci s konstantním růstem. Jedna možná symetrická alokace spotřeby je, když starší v každém období t spotřebovávají veškeré dostupné zboží pro dané období. Pak pro každého staršího jedince platí $c_t^h(t+1) = \frac{Y(t+1)}{N(t)} = \frac{nY(t)}{N(t)}$. Jiná možná symetrická alokace spotřeby nastane pokud mladí spotřebují veškeré dostupné zboží. Pro každého mladého poté platí $c_t^h(t) = \frac{Y(t)}{N(t)}$.

Koncept efektivní spotřeby je mnohem zajímavější v ekonomikách, kde je možné část produkce uskladnit (přesunout do dalšího období). Poté nepředpokládáme, že zboží z období t musí být spotřebováno v období t . Část tohoto zboží můžeme přesunout do období $t+1$.

Každý jedinec v ekonomice se musí rozhodnout o spotřebě v období t a $t+1$. K určení preferencí jedinců v ekonomice se používá funkce užitku, tato funkce užitku může být znázorněna indifferenčními křivkami. Indiferenční křivky mají konvexní tvar a užitek je vyšší na výše položené indifferenční křivce.

Definice 3.4. Preference jedinců v ekonomice jsou popsány užitkovou funkcí, která závisí na spotřebě jedince, když je mladý a když je starý.

Definice 3.5. Funkce užitku jedince h generace t v ekonomice je tvaru $u_t^h(c_t^h(t), c_t^h(t+1))$.



Obrázek 3.2: Spotřební koš

Nyní budeme předpokládat, že $[c_t^{h1}(t), c_t^{h1}(t+1)]$ je spotřební koš, tvořený spotřebou jedince, když je mladý a když je starý. Dále $[c_t^{h2}(t), c_t^{h2}(t+1)]$ je jiný spotřební koš. Pokud

$$u_t^{h1}(c_t^{h1}(t), c_t^{h1}(t+1)) \geq u_t^{h2}(c_t^{h2}(t), c_t^{h2}(t+1)),$$

pak říkáme, že koš 1 je preferovaný oproti koši 2. Pokud

$$u_t^{h1}(c_t^{h1}(t), c_t^{h1}(t+1)) > u_t^{h2}(c_t^{h2}(t), c_t^{h2}(t+1)),$$

poté se jedná o striktní preferenci. Pokud

$$u_t^{h1}(c_t^{h1}(t), c_t^{h1}(t+1)) = u_t^{h2}(c_t^{h2}(t), c_t^{h2}(t+1)),$$

pak pro jedince jsou koše 1 a 2 indiferentní. Na obrázku 3.3 vidíme příklad indiferenčních křivek, kde na vodorovné ose je spotřeba jedinců, když jsou mladí a na svislé ose, když jsou staří. Jedinec je indiferentní mezi body c^1 a c^2 , bod c^3 je preferovaný oproti ostatním dvěma vyznačeným bodům.

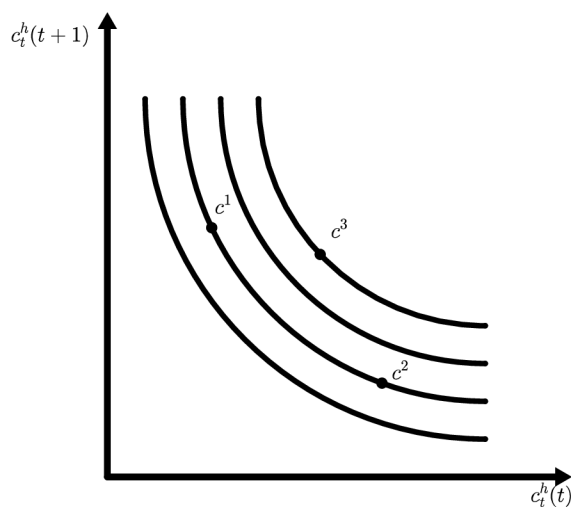
Definice 3.6. Alokace spotřeby A je Pareto superior k alokaci spotřeby B , jestliže:

- (i) nikdo striktně nepreferuje B před A
- (ii) alespoň jeden jedinec striktně preferuje A před B .

Definice 3.7. Alokace spotřeby je Pareto optimální³, jestliže je uskutečnitelná a jestliže neexistuje uskutečnitelná alokace spotřeby, která je Pareto superior.

V modelech OLG není snadné určit podmínky Pareto optimality, ale lze přidat podmínky pro Pareto optimální alokaci.

³ Pareto optimum bylo navrženo italským ekonomem Vilfredem Paretem. Jedná se o stav ekonomiky, kdy žádný jedinec, ani skupina nemůže dosáhnout lepšího postavení bez zhoršení postavení někoho jiného.



Obrázek 3.3: Indiferenční křivky

3.2.2 Firmy

V této části se budeme věnovat firmám a především soukromému vlastnictví, které s firmami úzce souvisí. Každá firma je někým vlastněna a zaměstnává lidi, kteří dostávají mzdu⁴. Jedná se o odměnu za vykonanou práci (mzda) nebo za vlastnění kapitálu (úrok, dividenda, podíl). V minulé části jsme řešili optimální alokaci spotřeby, ale neřešili jsme, kde se berou prostředky na tuto spotřebu, na to se podíváme nyní. Budeme předpokládat, že jedinci vlastní určité množství statků, či zboží a mohou s ním obchodovat, bude nás proto zajímat, s jakým množstvím a za jakou cenu se bude obchodovat.

Budeme předpokládat ekonomiky, ve kterých mají jedinci práva ke dvěma druhům statků, které existují během jejich života. Tyto statky představují jejich zdroje. Označíme zdroj jedince h generace t jako uspořádanou dvojici

$$w_t^h = [w_t^h(t), w_t^h(t+1)],$$

přičemž $w_t^h(s)$ je dostupný zdroj statku období s jedince h generace t .

Skoro v každé ekonomice je zaručeno soukromé vlastnictví, jedinci mají právo vlastnit svou práci.⁵ Toto minimální vlastnictví může být převedeno na spotřební materiál. Vlastník práce, vyprodukuje určité množství zboží, pro zjednodušení lze uvažovat, že toto zboží i vlastní. Celkové zdroje v ekonomice $Y(t)$ jsou vlastněny jedinci této ekonomiky. Platí tedy

⁴Ve státní sféře se dostává plat.

⁵Toto je zaručeno i v socialistických ekonomikách, kde kapitál je vlastněn státem. Jediný problém nastává u otroků, kteří nevlastní práci, ale ti v praxi nejsou uvažováni.

$$Y(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} w_{t-1}^h(t).$$

Celkové zdroje v období t jsou rovny součtu zdrojů vlastněných mladými a starými jedinci, kteří jsou naživu v období t . Vlastnictví je jedním z předpokladů obchodu.

V současné době v ekonomikách po celém světě jsou na finančním trhu k dispozici různé půjčky. Snad každý jedinec má v bance nějaký účet, mnoho lidí má i u banky úvěr či hypotéku. I v našem modelu jsou půjčky možné. Jedinec generace t může půjčit nějaké své statky jinému jedinci generace t v období t a obdržet je nazpět v období $t + 1$. Jelikož oba jedinci jsou v obou obdobích (půjčení a vrácení) naživu, je taková půjčka uskutečnitelná. Důvodem této půjčky je rozdílná preference nebo dostupné zdroje jedinců v generaci.

Označme $l^h(t)$ zapůjčení jedince h generace t měřeno v jednotkách zboží období t . Uvažujeme i záporné zapůjčování, pak se jedná o vypůjčování. Pokud mladý jedinec zapůjčí množství $l^h(t)$ zboží období t jinému jedinci, pak když je starý obdrží zpět množství $r(t)l^h(t)$ zboží období $t + 1$. Obdobně vypůjčovatel množství $l^h(t)$ zboží v období t vrátí ve stáří množství $r(t)l^h(t)$ zboží $t + 1$ období. Hodnota $r(t)$ se nazývá úroková míra období t .

Definice 3.8. Algebraické vyjádření podmínek půjčování a vypůjčování se nazývá rozpočtové omezení.

Pro jedince h generace t , když je mladý je rozpočtové omezení ve tvaru

$$c_t^h(t) \leq w_t^h(t) - l^h(t). \quad (3.3)$$

Rozpočtové omezení pro stejného jedince, když je starý je

$$c_t^h(t+1) \leq w_t^h(t+1) + r(t)l^h(t). \quad (3.4)$$

Pokud jedinec h , když je mladý zapůjčí určité množství statků $l^h(t)$, pak je jeho spotřeba menší než jeho příjem o tu část, kterou zapůjčil, ale ve stáří je jeho spotřeba naopak větší než jeho příjem, neboť mu je vrácena část statků, které zapůjčil a obdrží navíc úrok.

Nadále uvažujeme jedince střetávající se na konkurenčních trzích, to znamená, že pro jedince jsou ceny neovlivnitelné jejich vlastními rozhodnutími o prodeji či nákupu. Z tohoto také vyplývá, že i úroková míra je neovlivnitelná jedinci v ekonomice. Jedinec h považuje úrokovou míru $r(t)$ jako danou a rozhoduje se o zapůjčování a vypůjčování na základě této úrokové míry.

Naším dalším úkolem bude popsat rozhodnutí jedince h na konkurenčních trzích, a jak jeho rozhodnutí závisí na jeho preferencích a příjmu, když je mladý a když je starý a na úrokové míře. Zaměříme se na situaci kdy $r(t) > 0$.⁶ Nyní dáme dohromady rozpočtová

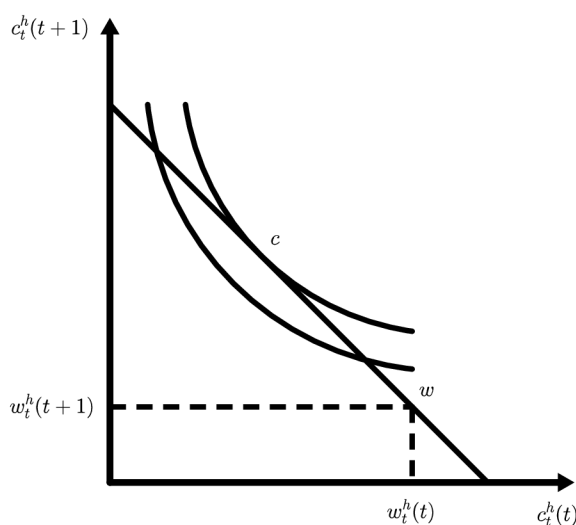
⁶Toto omezení vychází z pozorování reálných ekonomik, ve kterých nominální úrokové míry nejsou záporné ani nulové. Pro reálné úrokové míry poté toto omezení nebude platit, neboť ty jsou ovlivněny výší inflace.

omezení jedince h , když je mladý a když je starý a podíváme se na jeho možnosti spotřeby při celoživotním plánování. Vydělíme rovnici (3.4) výrazem $r(t)$ a přičteme ji k rovnici (3.3). Obdržíme

$$c_t^h(t) + \frac{c_t^h(t+1)}{r(t)} \leq w_t^h(t) + \frac{w_t^h(t+1)}{r(t)}. \quad (3.5)$$

Rovnice (3.5) nám říká, že celoživotní spotřebu můžeme vyjádřit v jednotkách zboží období t . Jelikož $r(t)$ měří velikost zboží období $t+1$, které jedinec obdrží, pokud se vzdá jedné jednotky zboží období t . Můžeme proto říct, že jedna jednotka zboží období $t+1$ má hodnotu $\frac{1}{r(t)}$ zboží období t . Jinak řečeno levá strana rovnice (3.5) nám dává současnou hodnotu celoživotní spotřeby a pravá strana téže rovnice poté udává současnou hodnotu celoživotního příjmu.

Jedinec h generace t hledá dostupný spotřební koš, aby maximalizoval svůj užitek. Vybírá takovou dvojici $[c_t^h(t), c_t^h(t+1)]$, aby maximalizoval užitkovou funkci $u_t^h(c_t^h(t), c_t^h(t+1))$ vzhledem k celoživotnímu rozpočtovému omezení daném rovnicí (3.5), při dané úrokové míře $r(t)$ a příjmu $w(t)$. Na obrázku 3.4 je znázorněno grafické řešení volby optimálního spotřebního koše pro daný rozpočet. Úsečka procházející bodem w se nazývá rozpočtová linie. Jedinec volí co nejvyšší indiferenční křivku, která je uskutečnitelná. V bodě c je dosaženo maximálního užitku.



Obrázek 3.4: Rozpočtové omezení

Tento problém volby spotřeby můžeme řešit tak, že si vyjádříme spotřebu v období $t+1$, pomocí ostatních proměnných. Obdržíme

$$c_t^h(t+1) = r(t)[w_t^h(t) - c_t^h(t)] + w_t^h(t+1). \quad (3.6)$$

Výraz (3.6) dosadíme do funkce užitku $u_t^h(c_t^h(t), c_t^h(t+1))$

$$u_t^h(c_t^h(t), r(t)[w_t^h(t) - c_t^h(t)] + w_t^h(t+1)). \quad (3.7)$$

Jedinec h si může zvolit jedině spotřebu v současnosti $c_t^h(t)$. Pokud budeme maximalizovat tuto rovnici vzhledem k $c_t^h(t)$, musíme najít takovou hodnotu $c_t^h(t)$, pro kterou bude platit

$$\frac{du_t^h}{dc_t^h(t)} = 0.$$

Budeme derivovat funkci (3.7) vzhledem k $c_t^h(t)$ a položíme rovno 0. Získáme

$$\frac{du_t^h}{dc_t^h(t)} = \frac{\partial u_t^h}{\partial c_t^h(t)} - r(t) \frac{\partial u_t^h}{\partial c_t^h(t+1)} = 0,$$

což můžeme ještě upravit do tvaru

$$r(t) = \frac{\frac{\partial u_t^h}{\partial c_t^h(t)}}{\frac{\partial u_t^h}{\partial c_t^h(t+1)}}. \quad (3.8)$$

Pravá strana rovnice (3.8) představuje mezní míru substituce mezi spotřebou v mládí a ve stáří⁷. Z výrazu (3.6) vidíme, že je možné zapsat volbu spotřeby v mládí jako funkci celkového příjmu a úrokové míry, kde tato funkce bude závislá na tvaru uživatelské funkce. Pro jedince h generace t označujeme poptávkou funkci po spotřebě v mládí jako

$$c_t^h(t) = \chi_t^h(r(t), w_t^h(t), w_t^h(t+1)).$$

Základním rozhodováním spotřebitelů je rozhodování o jejich spotřebě, představili jsme si poptávkovou funkci po spotřebě mladých jedinců, jelikož ve většině ekonomik je možné držet určitá aktiva⁸, pak je potřeba zavést i funkci úspor. Tuto funkci úspor budeme definovat jako rozdíl mezi příjmem a spotřebou mladých jedinců $w_t^h(t) - c_t^h(t)$. Funkci úspor jedince h generace t můžeme vyjádřit jako funkci reálné úrokové míry a individuálního příjmu v období, kdy je mladý a kdy je starý. Poté obdržíme

$$s_t^h(r(t), w_t^h(t), w_t^h(t+1)) = w_t^h(t) - \chi_t^h(r(t), w_t^h(t), w_t^h(t+1)).$$

Funkci úspor můžeme psát také zkráceně jako $s_t^h(t)$ v závislosti na tom, které proměnné pro nás budou podstatné.

Definice 3.9. Definujeme agregátní funkci úspor $S_t(r(t))$ závislou na reálné úrokové míře jako

$$S_t(r(t)) = \sum_{h=1}^{N(t)} s_t^h(r(t)).$$

⁷Mezní míra substituce ve spotřebě představuje poměr, ve kterém je ochotný spotřebitel snížit spotřebu v současnosti ve prospěch spotřeby v budoucím období.

⁸V našem zjednodušeném případě aktiva na trhu existují také, jedná se o půjčování a vypůjčování mezi jedinci.

Pokud dosadíme do definice agregátních úspor funkci individuálních úspor, vyjádříme celkové úspory následovně

$$S_t(r(t)) = \sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t) - \sum_{h=1}^{N(t)} \chi_t^h(r(t), w_t^h(t), w_t^h(t+1)). \quad (3.9)$$

Definice 3.10. Konkurenční rovnováha je množina cen a množství, které splňuje následující podmínky:

- (i) Množství, které je přípustné pro nějakou osobu maximalizuje její užitkovou funkci na množině veškerého množství dostupného při daných cenách a příjmu osoby.
- (ii) Množství vyčišťuje všechny trhy ve všech časech t .

V každém období všechny osoby maximalizují svůj užitek vzhledem k cenám (v našem případě vzhledem k úrokové míře) a příjmu. Toto chování může být vyjádřeno pomocí nabídkové a poptávkové křivky úspor (nebo půjček). Pokud nabídka odpovídá poptávce na všech trzích, trhy se vyčišťují. Najít rovnováhu, která odpovídá podmínkám (i) a (ii) znamená najít množinu cen a úrokových měr splňující tyto podmínky. Funkce poptávky po spotřebě mladých jedinců a funkce úspor popisují vztah mezi maximalizací užitku a cenami. Poptávková funkce po spotřebě mladých je poptávková křivka na trhu zboží. Funkce úspor je nabídková a poptávková křivka po půjčkách. Potřebujeme popsat podmínku vyčišťování trhů.

Máme pouze dva trhy v každém období, trh zboží a trh půjček. Jelikož nemáme k dispozici způsob, jak převést zboží z jednoho období do druhého, vyčišťování na trhu zboží znamená rovnost celkové spotřeby v každém období s celkovým příjmem v tomto období. Podmínku vyčišťování trhu zboží můžeme psát ve tvaru

$$\sum_{h=1}^{N(t)} c_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} c_{t-1}^h(t) = Y(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} w_{t-1}^h(t), \quad (3.10)$$

kteřá znamená, že součet spotřeby mladých a starých musí odpovídat součtu příjmu mladých a starých v každém období t . V tomto modelu předpokládáme, že neexistuje obchod mezi generacemi, je totiž nemožný. Kdybychom předpokládali, že by obchod mohl existovat, pak by mohly nastat dvě situace: (1) mladý v období t dá starému určité množství zboží s příslibem budoucího vrácení, nebo (2) starý dá mladému určité množství zboží s příslibem vrácení v dalším období. Ale následující období $t+1$ je starý už mrtvý, tudíž nemůže vrátit mladému zboží, ani obdržet vrácené zboží. Proto není možný mezi-generační obchod.

Celkovou spotřebu mladých jedinců generace t můžeme psát jako součet přes všechny jedince rovnice (3.3) a dostaneme

$$\sum_{h=1}^{N(t)} c_t^h(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t)} l_t^h(t).$$

Jelikož mezigenerační obchod není možný, pak půjčování a vypůjčování je možné jen mezi členy téže generace. Na trhu půjček jsou jen mladí a proto podmínka vyčištění trhu v období t požaduje, aby celkové půjčky a výpůjčky byly rovny 0. Proto musí platit

$$\sum_{h=1}^{N(t)} l_t^h(t) = 0.$$

Tato podmínka nám poté dává rovnost mezi celkovou spotřebou a celkovým příjmem v období t

$$\sum_{h=1}^{N(t)} c_t^h(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t).$$

V rovnováze tudíž mladí spotřebují veškerý svůj příjem. Z definice 3.10 podmínky (i) víme, že spotřeba každého jedince, když je mladý, odpovídá poptávce po spotřebě. Pokud tyto dvě myšlenky dáme dohromady, pak v rovnováze musí platit

$$\sum_{h=1}^{N(t)} \chi_t^h(r(t), w_t^h(t), w_t^h(t+1)) = \sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t) \quad \forall t \geq 1. \quad (3.11)$$

Tato podmínka rovnováhy a rovnice (3.9) dávají podmínku rovnováhy pro agregátní úspory ve tvaru

$$S_t(r(t)) = 0, \quad \forall t \geq 1.$$

Poznámka. Jestliže množství a úroková míra $r(t)$ jsou v konkurenční rovnováze, pak $r(t)$ splňuje

$$S_t(r(t)) = 0, \quad \forall t \geq 1.$$

V této poznámce je řečeno, že úroková míra je v rovnováze v ekonomice, ve které je možné si půjčovat a vypůjčovat, jen pokud jsou agregátní úspory rovny nule.

Poznámka. Jestliže $r(t)$ splňuje podmínku $S_t(r(t)) = 0, \forall t \geq 1$, pak existuje množství takové, že toto množství a úroková míra $r(t)$ jsou v rovnováze.

Tato poznámka říká, že pro jakékoli $r(t)$ splňující $S_t(r(t)) = 0, \forall t \geq 1$, jsou úroková míra a spotřeba rovnováhou.

3.2.3 Stát

V každé ekonomice se nachází stát reprezentovaný vládou, ať už se jedná o demokratické nebo nedemokratické státy. Vliv vlády najdeme vždy, liší se jen mírou vlivu, a mírou svobody občanů v jejich rozhodnutích. Základním rozdílem mezi vládou a jakýmkoli jedincem v ekonomice je, že život vlády je mnohem delší než život jakéhokoli jedince. Toto nemusí být pro vládu vždy výhodou, především v situaci, kdy vláda je příliš vázána na

konkrétního jedince (krále), či na dynastii.⁹

Přidáme vládu do našeho modelu a podíváme se na výsledky určitých vládních opatření. Vláda obvykle vybírá daně a přerozděluje je v podobě transferů, vlády si často také vypůjčují prostředky na pokrytí svých výdajů. Vláda neexistuje jen v čase 1, ale i v budoucích obdobích. Pod vládní politikou budeme rozumět rozhodnutí vlády v budoucích obdobích. Problémem vládních politik je především to, jestli budou skutečně dodržovány i v budoucnu, nebo ne a to především proto, že současná optimální politika, nemusí být optimální politikou v budoucích obdobích.

Nejjednodušším způsobem jakým můžeme do modelu přidat daně, je přidání daně z příjmu. Jedinci jsou povinni část svého příjmu odevzdat vládě, mohou odevzdávat část příjmu pokud jsou mladí, staří, nebo v obou obdobích. Pokud není stanoveno jinak, mladí vědí kolik budou odevzdávat na dani v každém období. Jedinci také mohou obdržet od vlády transfery. Transfer je negativní daň, jedinec od vlády obdrží část dodatečného příjmu. Jedinec h generace t bude čelit množině daní a transferů

$$\tau_t^h = [\tau_t^h(t), \tau_t^h(t+1)],$$

kde $\tau_t^h(t)$ je daň placená v období t a $\tau_t^h(t+1)$ je daň placená v období $t+1$, pokud jsou výrazy kladné, kdyby byly záporné jednalo by se o transfery.

Předpokládejme nadále, že vláda pracuje jenom s daněmi a transfery, to znamená, že nespotebovává žádné statky. Jelikož to, co vybere na daních, odevzdá na transferech, pak její rozpočtové omezení pro všechna období t bude ve tvaru

$$\sum_{h=1}^{N(t)} \tau_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} \tau_{t-1}^h(t) = 0,$$

což znamená, že součet daní a transferů v každém období je roven 0. Tyto daně a transfery se v modelu projevují změnou příjmu jedinců. Před daní a transfery byl příjem jedince h generace t ve tvaru

$$[w_t^h(t), w_t^h(t+1)],$$

po dani a transferech je příjem téhož jedince

$$[w_t^h(t) - \tau_t^h(t), w_t^h(t+1) - \tau_t^h(t+1)].$$

Pokud budeme hledat konkurenční rovnováhu v ekonomice, ve které působí vláda a vybírá a přerozděluje daně, budeme muset do rozpočtového omezení zahrnout tyto daně a transfery. Rozpočtové omezení pro mladé bude poté

$$c_t^h(t) \leq w_t^h(t) - \tau_t^h(t) - l^h(t),$$

⁹Vládní politika trvá tak dlouho, jak je naživu král a změní se s příchodem nového krále, z tohoto důvodu na konci období života bude mít král problém půjčit si prostředky. Dluh krále je považován za osobní dluh a nová vláda (nový král) nejsou zodpovědní za dluh mrtvého krále. Z tohoto důvodu půjčování králi je velmi riskantní.

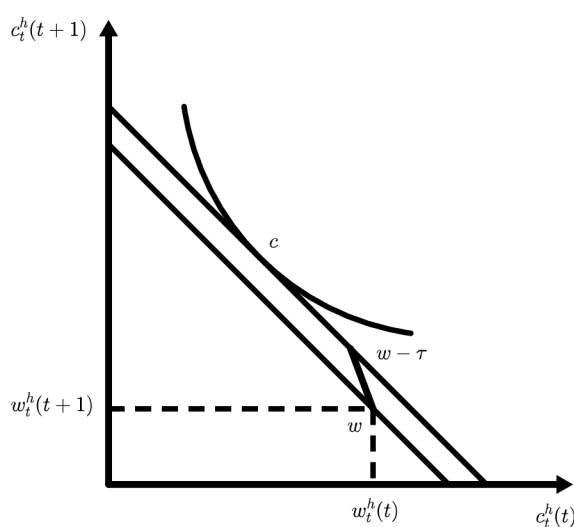
a rozpočtové omezení staršího jedince bude

$$c_t^h(t+1) \leq w_t^h(t+1) - \tau_t^h(t+1) + r(t)l^h(t).$$

Kombinací rozpočtového omezení mladých a starých jedinců dostaneme celoživotní rozpočtové omezení ve tvaru

$$c_t^h(t) + \frac{c_t^h(t+1)}{r(t)} \leq [w_t^h(t) - \tau_t^h(t)] + \frac{w_t^h(t+1) - \tau_t^h(t+1)}{r(t)}. \quad (3.12)$$

Podíváme se na grafické znázornění spotřebního omezení v případě vybírání daní. Na obrázku 3.5 můžeme vidět dostupnou spotřebu pro jedince h generace t . Bod w představuje příjem tohoto jedince, pokud by nebyly daně a transfery, úsečka jdoucí tímto bodem poté představuje jeho kombinace spotřeby v mládí a ve stáří. Bod $w - \tau$ představuje jednu z možností symetrických daní a transferů pro populaci. Symetrie je chápána ve smyslu, že každý obdrží transfer, když je starý ve stejné výši v jaké ho zaplatil jako daň, když byl mladý. Úsečka procházející tímto bodem poté představuje dostupné kombinace spotřeby v mládí a ve stáří. Bod c poté představuje preferovaný bod, neboť leží na indifferenční křivce.



Obrázek 3.5: Rozpočtové omezení

Najít funkci úspor jedince v přítomnosti daní a transferů, znamená najít nejdříve funkci poptávky po spotřebě mladých jedinců a z ní odvodit funkci úspor. Pro hledání poptávkové funkce po spotřebě budeme postupovat obdobně jako v minulé části, jen s přihlédnutím k daním a transferům. Použijeme celoživotní rozpočtové omezení a obdržíme spotřebu pro starší jedince

$$c_t^h(t+1) = r(t) \{ [w_t^h(t) - \tau_t^h(t)] - c_t^h(t) \} + [w_t^h(t+1) - \tau_t^h(t+1)].$$

Při maximalizaci užítku budeme maximalizovat užítkovou funkci

$$u_t^h(c_t^h(t), c_t^h(t+1)) = r(t)\{[w_t^h(t) - \tau_t^h(t)] - c_t^h(t)\} + [w_t^h(t+1) - \tau_t^h(t+1)],$$

vzhledem k $c_t^h(t)$. Budeme postupovat jako v předešlé části, derivaci položíme nule, a obdržíme mezní míru substituce. Poté můžeme výsledek maximalizace psát ve tvaru poptávkové funkce po spotřebě mladých

$$c_t^h(t) = \chi_t^h(r(t), [w_t^h(t) - \tau_t^h(t)], [w_t^h(t+1) - \tau_t^h(t+1)]).$$

Jako v minulé části i zde obdržíme funkci úspor. Pro jedince h generace t bude funkce úspor ve tvaru

$$s_t^h(r(t)) = [w_t^h(t) - \tau_t^h(t)] - \chi_t^h(r(t), [w_t^h(t) - \tau_t^h(t)], [w_t^h(t+1) - \tau_t^h(t+1)]).$$

Agregátní funkce úspor bude v každém období t dána součtem jednotlivých funkcí úspor všech jedinců generace t

$$S_t^h(r(t)) = \sum_{h=1}^{N(t)} s_t^h(r(t), [w_t^h(t) - \tau_t^h(t)], [w_t^h(t+1) - \tau_t^h(t+1)]),$$

kde jednotlivé funkce úspor jsou funkce úrokové míry a příjmu sníženého o daň.

Konkurenční rovnováha platí i pro ekonomiky s daněmi a transfery. Při rovnováze si jedinci vybírají takové množství, které maximalizuje jejich užitek vzhledem k jejich rozpočtovým omezením s daněmi a transfery, přičemž se všechny trhy vyčišťují. Základní úvahou nadále bude, že i státní rozpočet musí být v rovnováze. Sečtením rozpočtových omezení mladých jedinců, obdržíme agregátní spotřebu mladých v období t

$$\sum_{h=1}^{N(t)} c_t^h(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t) - \sum_{h=1}^{N(t)} \tau_t^h(t) - \sum_{h=1}^{N(t)} l_t^h(t),$$

a protože není možné mezigenerační půjčování, musí také platit

$$\sum_{h=1}^{N(t)} l_t^h(t) = 0.$$

Dosazením a úpravou agregátní funkce úspor dostaneme

$$S_t^h(r(t)) = \sum_{h=1}^{N(t)} s_t^h(r(t)) = \sum_{h=1}^{N(t)} [w_t^h(t) - \tau_t^h(t) - c_t^h(t)].$$

Tento model není příliš vzdálen od sociálního pojištění, se kterým se můžeme setkat v mnoha ekonomikách. Většina druhů sociálního pojištění je založena na myšlence, že v čase t jsou od mladé generace vybrány daně a ty jsou přerozděleny starší generaci, případně potřebným. Každá vláda se snaží nalézt optimální schéma daní a transferů, přičemž optimální znamená Pareto optimální symetrickou alokaci.

V tuto chvíli přejdeme k ekonomikám, ve kterých je možné, aby si vypůjčovaly i vlády. Vláda si může vypůjčit pouze od mladých nikoli od starších jedinců. Budeme uvažovat vládní dluhopisy na jedno období, které zajišťují jednu jednotku zboží v následujícím období. Vláda v našem modelu bude dodržovat svoje závazky a vždy splácet dluhy. Označme $B(t)$ množství dluhopisů v období t , které bude nezbytné splatit v období $t + 1$. Vláda má několik možností, jak získat prostředky na splácení dluhopisů

1. zdanění mladých jedinců v období $t + 1$ v celkové výši $B(t)$,
2. zdanění starších jedinců v období $t + 1$ v celkové výši $B(t)$,
3. vydání $B(t + 1)$ nových dluhopisů,
4. kombinace předešlých možností.

Vláda čelí rozpočtovému omezení v každém období, přičemž si vláda nic neponechává a to co obdrží, tak přerozdělí. Pak můžeme psát rozpočtové omezení vlády pro období t ve tvaru

$$\sum_{h=1}^{N(t)} \tau_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} \tau_{t-1}^h(t) + p(t)B(t) - B(t-1) = 0,$$

kde $p(t)$ je cena jednoho dluhopisu v období t . Vidíme, že toto rozpočtové omezení zahrnuje všechny možnosti, jak vláda může získat zdroje na dluhopisy vydané v období $t - 1$. Vláda má vyrovnaný rozpočet, jestliže platí

$$\sum_{h=1}^{N(t)} \tau_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} \tau_{t-1}^h(t) = 0,$$

kde vybraná daň odpovídá výši vládních výdajů. Pokud by v rovnici byla pravá strana záporná, pak bychom mluvili o deficitu, pokud by naopak byla kladná jednalo by se o vládní přebytek. Pokud má vláda deficit musí si půjčit, aby vyrovnala rozpočet. V tomto pojetí vyrovnaného rozpočtu se do vládních výdajů nezahrnuje náklad na úrok.¹⁰ Jedná se o úrokově očištěný vládní rozpočet, kde úrokový náklad na staré dluhopisy je zahrnut do ceny nových.

Předtím, než se podíváme na to, jak se vláda rozhoduje při volbě vhodného způsobu splácení dluhopisů, si ukážeme, jak tyto dluhopisy ovlivňují konkurenční rovnováhu jedinců v ekonomice. Vládní půjčování má stejné riziko, jako půjčování a vypůjčování mezi jedinci téže generace. Oba případy jsou bezpečné a jedinec, který dá k dispozici své prostředky, ví, co obdrží v budoucím období. Jelikož z pohledu rizika jsou tyto půjčky (vládní a soukromé) stejné, musejí mít i stejnou úrokovou míru $r(t)$. Rozpočtové omezení jedince h generace t je poté ve tvaru

$$c_t^h(t) = w_t^h(t) - \tau_t^h(t) - l^h(t) - p(t)b^h(t), \quad (3.13)$$

když je mladý, a

¹⁰Ve většině ekonomik, je výdaj na splácení starých dluhopisů uvažován jako výdaj vlády, a pak je vládní rozpočet vyrovnaný, pokud příjem z daní pokryje výdaje na transfery a úroky.

$$c_t^h(t+1) = w_t^h(t+1) - \tau_t^h(t+1) + r(t)L^h(t) + b^h(t), \quad (3.14)$$

pokud je starý. V tomto omezení je $p(t)$ cena jednoho vládního dluhopisu v období t a $b^h(t)$ je množství vládních dluhopisů, které koupil jedinec h . Dluhopis je koupen za cenu $p(t)$ v období t a splacen jednou jednotkou zboží období $t+1$, pak návratnost z jednoho dluhopisu je $1/p(t)$. Pomocí těchto rozpočtových omezení dostaneme celoživotní rozpočtové omezení jedince h

$$c_t^h(t) + \frac{c_t^h(t+1)}{r(t)} = w_t^h(t) - \tau_t^h(t) + \frac{w_t^h(t+1) - \tau_t^h(t+1)}{r(t)} - b^h(t) \left[p(t) - \frac{1}{r(t)} \right]. \quad (3.15)$$

Definice 3.11. Podmínka současné hodnoty říká, že rozpočtové omezení dané rovnicí (3.15) je stejné jako v případě ekonomiky s daněmi a transfery, ale bez vládních dluhopisů.

Aby byla naplněna podmínka současné hodnoty musí být výraz v hranatých závorkách v rovnici (3.15) roven 0.¹¹ Jelikož obě úrokové míry jsou stejné, pak jsou stejné i pro jedince v ekonomice. V rozpočtovém omezení mladého jedince se vyskytnou jak soukromé půjčky tak i vládní. Protože soukromé půjčky a výpůjčky musejí v součtu v každé generaci dát 0, pak sečtením rovnice (3.13) přes všechny jedince h v generaci t dostaneme

$$\sum_{h=1}^{N(t)} c_t^h(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t) - \sum_{h=1}^{N(t)} \tau_t^h(t) - p(t) \sum_{h=1}^{N(t)} b^h(t).$$

Tuto rovnici můžeme upravit pomocí součtu vládních dluhopisů do tvaru

$$p(t)B(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} [w_t^h(t) - \tau_t^h(t) + c_t^h(t)],$$

nebo pomocí úspor

$$p(t)B(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} s_t^h(r(t)), \quad (3.16)$$

¹¹Důkaz toho, že skutečně platí tato podmínka se provádí sporem, kdy uvažujeme obě nerovnosti. Pokud $r(t) > 1/p(t)$, pak návratnost z vládních dluhopisů je menší než v případě soukromých půjček. V tomto případě by každý chtěl vydávat vládní dluhopisy, pokud by to bylo umožněno, pak by každý chtěl neomezený zisk (prodáváním vládních dluhopisů a zapůjčením získaných prostředků na trhu půjček, kde je vyšší úroková míra). Ale tohle by nemohla být rovnováha, protože nikdo by nekupoval vládní dluhopisy. Předpokládali jsme, že jedinci drží nezáporné množství vládních dluhopisů, takže nejmenší množství $b^h(t)$, které jedinec může držet je 0. Případ, kdy vláda nabízí dluhopisy nikdo je nekupuje nemůže být rovnováha.

Pokud $r(t) < 1/p(t)$, pak návratnost vládních dluhopisů je větší než u soukromých půjček, každý by si chtěl půjčit co nejvíce (ideálně nekonečno) a využít to k nákupu vládních dluhopisů. Protože na trhu půjček není nikdo, kdo by chtěl své prostředky poskytnout a vláda má konečné množství dluhopisů, pak toto nemůže být rovnováha.

Poslední možnost je $r(t) = 1/p(t)$, kdy výraz v hranatých závorkách je roven 0 a návratnost, je na všech trzích stejná. Jedinci jsou indiferentní mezi vládními dluhopisy a soukromými půjčkami. Jelikož předešlé dvě možnosti nebyly možné a žádná další už není, pak toto musí být rovnováha.

kde pravá strana rovnice představuje agregátní úspory. Obdobně sečteme rozpočtové omezení dané rovnicí (3.14) starších jedinců

$$\sum_{h=1}^{N(t-1)} c_{t-1}^h(t) = \sum_{h=1}^{N(t-1)} w_{t-1}^h(t) - \sum_{h=1}^{N(t-1)} \tau_{t-1}^h(t) + B(t-1).$$

Pokud dáme dohromady rozpočtové omezení mladých a starších jedinců obdržíme

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{N(t)} c_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} c_{t-1}^h(t) &= \\ &= \sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t) - \sum_{h=1}^{N(t)} \tau_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} w_{t-1}^h(t) - \sum_{h=1}^{N(t-1)} \tau_{t-1}^h(t) - p(t)B(t) + B(t-1). \end{aligned}$$

Víme, že pro rozpočtové omezení vlády musí platit

$$\sum_{h=1}^{N(t)} \tau_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} \tau_{t-1}^h(t) + p(t)B(t) - B(t-1) = 0,$$

pokud dáme dohromady tyto předešlé rovnice dostaneme podmínku vyčišťování trhu zboží a služeb v čase t

$$\sum_{h=1}^{N(t)} c_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} c_{t-1}^h(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} w_t^h(t) + \sum_{h=1}^{N(t-1)} w_{t-1}^h(t).$$

V tuto chvíli již máme dostatečnou představu o modelu a jeho zákonitostech, a proto se můžeme přesunout ke konkrétnímu modelu, který zkoumá inflaci. Jen pro připomenutí na konci této části ještě zmíníme rovnici (3.16), ve které pravá strana představuje národní úspory a levá strana může být vyjádřena pomocí podmínky současné hodnoty. Tímto obdržíme rovnici

$$S(r(t)) = \frac{B(t)}{r(t)},$$

která znázorňuje vztah mezi agregátními úsporami a vládním dluhem.

Kapitola 4

Model OLG a inflace

V této části se budeme věnovat modelu překrývajících se generací s inflací, kde je nezbytné uvažovat s cenami. Nadále se podíváme na stabilitu tohoto modelu. Budeme potřebovat konkrétní tvary užitkové funkce, kde nejdříve použijeme CES (Constant elasticity of substitution) funkci užitku a poté nemonotonní funkci užitku.

Mladá generace období t řeší následující problém maximalizace.

$$\max_{c(t), c(t+1)} U(c(t), c(t+1))$$

vzhledem k

$$p(t)c(t) + p^e(t+1)c(t+1) \leq p(t)w(t) + p^e(t+1)w(t+1),$$

kde $U : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je monotónní, konkávní užitková funkce, $c(t)$ a $c(t+1)$ jsou spotřební funkce v prvním a druhém období života jedince, $w(t)$ a $w(t+1)$ jsou příjmy jedince v jednotlivých obdobích, $p(t)$ je cena v období t a $p^e(t+1)$ je očekávaná cena období $t+1$. V minulé kapitole jsme si dokázali, že platí vztah $r(t) = \frac{1}{p(t)}$ pokud bude za dluhopis obdržena jedna jednotka zboží. Pokud ale dovolíme z důvodu inflace, aby v různých obdobích byly různé ceny bude se muset tento vztah upravit, aby platila podmínka současné hodnoty. V čitateli již nadále nebude jednička, nýbrž očekávaná cena v následujícím období $p^e(t+1)$. Musí proto platit $r(t)p(t) = p^e(t+1)$. V minulé kapitole jsme si také definovali funkci úspor jako rozdíl mezi příjmem a spotřebou mladých jedinců, u této definice zůstaneme i při optimalizaci užitkové funkce. Obdržíme funkci úspor pro mladé jedince ve tvaru

$$S\left(\frac{p^e(t+1)}{p(t)}\right) = w(t) - c(t).$$

Dále předpokládáme, že jediným významem spoření jsou peníze $M(t)$, v našem případě navíc vyjdeme ze Samuelsonova případu, kdy úspory jsou nezáporné¹. Poptávka po penězích v období t , která je závislá na velikosti úspor a cenové hladině, bude poté ve tvaru

¹Samuelsonův případ je situace, ve které mladí jedinci spoří a ve stáří pak spotřebovávají své úspory.

$$M(t) = p(t)S\left(\frac{p^e(t+1)}{p(t)}\right). \quad (4.1)$$

Jelikož vláda má mnoho exogenních výdajů, které musí financovat, je financování nejčastěji prováděno vydáváním nových peněz nebo zvyšováním daní, druhá z možností není moc populární mezi obyvateli, proto dochází k neustálému vydávání nových peněz. Výsledkem je zákon růstu peněžní zásoby

$$M(t) = \theta M(t-1), \quad (4.2)$$

kde θ je koeficient růstu peněžních prostředků. Z rovnic (4.1) a (4.2) poté obdržíme rovnováhu na trhu peněz (4.3).

$$\begin{aligned} M(t) = p(t)S\left(\frac{p^e(t+1)}{p(t)}\right) &= \theta M(t-1) = \theta S\left(\frac{p^e(t)}{p(t-1)}\right) p(t-1) \\ S\left(\frac{p^e(t+1)}{p(t)}\right) p(t) &= \theta S\left(\frac{p^e(t)}{p(t-1)}\right) p(t-1) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Bullard a Duffy [4, strana 10] zavádějí za předpokladu $p(t) > 0$ faktor hrubé míry inflace mezi lety t a $t+1$ jako $\pi(t) \equiv \frac{p(t+1)}{p(t)}$. Při tomto označení můžeme přepsat rovnici (4.3) do tvaru

$$\pi(t-1)S(\pi^e(t)) = \theta S(\pi^e(t-1)), \quad (4.4)$$

kde $\pi^e(t)$ je hrubý faktor očekávané inflace. Vidíme, že rovnice (4.4) má dva rovnovážné body. Jedním z nich je měnový rovnovážný bod $\pi^* = \theta$, pokud takový bod existuje a druhý je „soběstačný“ rovnovážný bod $\pi^* = \pi^a$, kde π^a je takové, že platí $S(\pi^a) = 0$. Pokud navíc platí, že $w(t) > 0$ a $w(t+1) > 0$, čili, že příjmy v obou obdobích jsou kladné, pak soběstačný rovnovážný bod existuje, pokud je křivka preferencí konvexní a hladká, pak je tento rovnovážný bod navíc jednoznačně určený.

Definice 4.1. Měnový rovnovážný bod je takový rovnovážný bod, ve kterém peníze nikdy nemají hodnotu 0.

Definice 4.2. Soběstačný rovnovážný bod je takový rovnovážný bod, při kterém neexistuje obchod a peníze nemají žádnou hodnotu, to znamená, že pro ceny platí $p(t) = p^e(t+1) = \infty$ pro všechny t .

Z této definice vyplývá, že v tomto případě se peníze stávají bezcennými, neboť jen minulé ceny byly konečné.

Nadále bude potřeba, aby funkce $S(\cdot)$ splňovala následující předpoklady

$$* \quad S \text{ je dvakrát diferencovatelná a } S'(\cdot) < 0, \quad (1)$$

$$* \quad S(\theta) > 0. \quad (2)$$

Předpoklad (1) říká, že agregátní úspory jsou klesající funkcí inflace, z čehož vyplývá, že $c(t)$ a $c(t+1)$ jsou hrubé substituty. Předpoklad (2) říká, že se nacházíme v Samuelsonově případě, kde v bodě měnové rovnováhy jsou úspory kladné a lidé převádějí svůj příjem ze současnosti do budoucnosti. Předpoklady (1) a (2) dohromady dávají vztah $\pi^a > \theta$. Pro přehlednost zavedeme následující proměnou

$$a(\pi) = -\pi \frac{S'(\pi)}{S(\pi)}, \quad (4.5)$$

kde $a(\pi)$ je záporná elasticita inflace úspor, které se využívá u dynamického chování modelu překrývajících se generací. Za předpokladů (1) a (2) navíc platí $a(\theta) > 0$.

4.1 Dokonalá předpověď inflace

Pro analýzu modelu překrývajících se generací bude nezbytné specifikovat užitkovou funkci. Nejprve dle literatury Bullard [3] nebo Bouzahzah, De la Croix, Docquier [2] použijeme CES užitkovou funkci a poté její transformaci.

4.1.1 CES funkce úspor

CES užitková funkce (Constant elasticity of substitution utility function)² je funkce v obecném tvaru

$$U = \left[\sum_{i=1}^n a_i^\rho c_i^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}} \quad \text{pro } \rho \in (0, 1), \quad (4.6)$$

kde n je počet statků ke spotřebě c_i , a_i jsou parametry a ρ je elasticita substituce³. Pro $\rho \rightarrow \infty$ jsou c_i dokonalé substituty⁴ a pro $\rho \rightarrow 0$ jsou c_i dokonalé komplementy⁵. V našem případě bude mít užitková funkce tvar

$$U(c(t), c(t+1)) = (c^\rho(t) + c^\rho(t+1))^{\frac{1}{\rho}}, \quad (4.7)$$

přičemž $\rho \in (\frac{1}{2}, 1)$ a příjmy budou $w(t) = 1$ a $w(t+1) = 0$. CES funkce úspor bude poté ve tvaru

$$S(\pi) = \frac{1}{1 + \pi^{\frac{\rho}{1-\rho}}}. \quad (4.8)$$

Na následujícím obrázku 4.1 je možné vidět funkci úspor pro různé hodnoty parametru ρ na obrázku 4.1a je tato funkce znázorněna pro $\rho = 0.6$, na obrázku 4.1b pro $\rho = 0.7$,

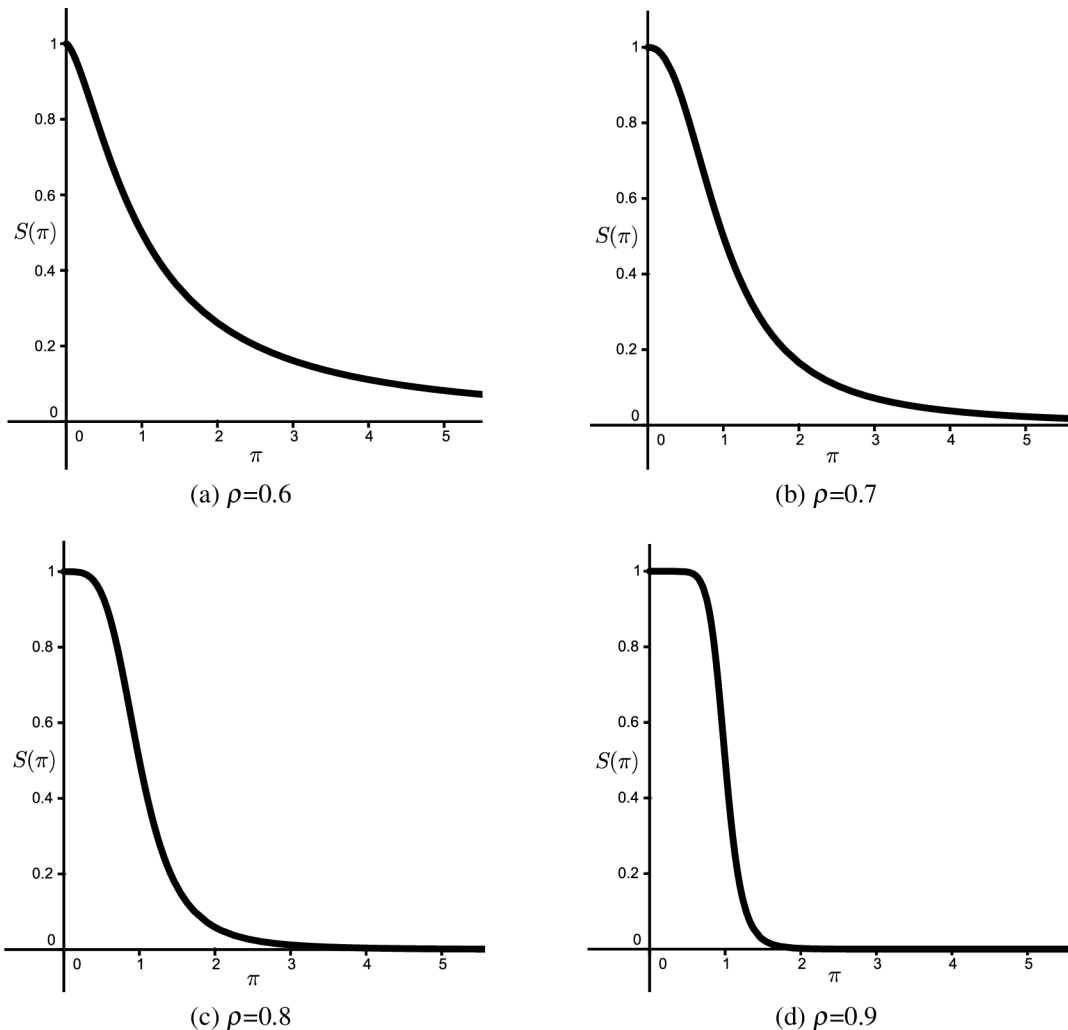
²Více o CES užitkové funkci v Dixit, Stiglitz [6]

³Elasticita je měřítko citlivosti poptávaného, nabízeného, substituovaného či komplementovaného množství zboží v závislosti na změně faktorů určujících toto množství.

⁴Dva statky jsou dokonalé substituty, pokud zvýšení ceny jednoho statku zvýší poptávku po druhém statku, přitom jejich indifferenční křivky mají podobu přímek.

⁵Dva statky jsou dokonalé komplementy, pokud zvýšení ceny jednoho statku má za následek pokles poptávky po druhém statku, přitom jejich indifferenční křivky svírají pravý úhel.

na obrázku 4.1c pro $\rho = 0.8$ a na obrázku 4.1d pro $\rho = 0.9$.



Obrázek 4.1: Funkce úspor

Poznamenejme ještě, že užitková funkce (4.7) splňuje podmínky (1) a (2). Navíc pokud je $w(t+1) = 0$, pak soběstačný rovnovážný bod neexistuje. Pro tuto funkci úspor je elasticita inflace ve tvaru

$$a(\pi) = \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{1 + \pi^{\frac{\rho}{\rho-1}}}.$$

V našem dvougeneračním OLG modelu pracujeme s představou, že mladý jedinec ví kolik bude spotřebovávat a v případě půjček ví, kolik v budoucím období obdrží zpět, tzn. náš jedinec zná budoucí cenu. Ale jak může tento jedinec předvídat cenu budoucího období? V ekonomii se nejčastěji používá racionální očekávání, my se ale zaměříme na dokonalou předpověď. Předpovídání budoucnosti se nejčastěji dělá tak, že se podíváme na vzory chování v minulosti a předpokládáme, že tyto vzory budou platit i v budoucnosti.⁶

⁶Na tomto předpokladu je také založena technická analýza využívaná ve financích k předvídaní vývoje

Definice 4.3. Racionální očekávání je předpověď budoucího vývoje, která bere v úvahu všechny relevantní informace.

Definice 4.4. Dokonalá předpověď je limitou racionálního očekávání, přičemž množina informací se postupně blíží k množině všech informací.

V našem modelu předpokládáme, že jedinec ovládá dokonalou předpověď a v období t umí předpovědět cenu dluhopisu v období $t + 1$, platí tedy $p^e(t + 1) = p(t + 1)$.⁷ Díky této dokonalé předpovědi vědí jedinci v ekonomice jaká bude cena zboží v následujícím období, tím také vědí jaká bude inflace $\pi^e(t + 1) = \pi(t + 1)$. Dosazením tohoto předpokladu do OLG modelu (4.4) obdržíme

$$\pi(t - 1)S(\pi(t)) = \theta S(\pi(t - 1)).$$

Rovnici nadále upravíme

$$S(\pi(t)) = \theta \frac{S(\pi(t - 1))}{\pi(t - 1)}. \quad (4.9)$$

System (4.9) je nelineární, ale lze ho linearizovat v okolí rovnovážného bodu π^*

$$S'(\pi^*) d\pi(t) = \theta \frac{\pi^* S'(\pi^*) - S(\pi^*)}{(\pi^*)^2} d\pi(t - 1).$$

Pro rovnovážný bod $\pi^* = \theta$ dostaneme

$$d\pi(t) = \left[1 - \frac{S(\theta)}{\theta S'(\pi^*) d\pi(t)} \right] d\pi(t - 1)$$

a po dosazení elasticity inflace úspor (4.5) obdržíme

$$d\pi(t) = \left[1 + \frac{1}{a(\theta)} \right] d\pi(t - 1).$$

Pokud je $a(\theta) > 0$ pak měnový rovnovážný bod je nestabilní, přičemž tato podmínka vyplývá z předpokladu (1) a (2).

Pro rovnovážný bod $\pi^* = \pi^a$ obdržíme

$$d\pi(t) = \frac{\theta}{\pi^a} d\pi(t - 1),$$

a pokud $\pi^a > \theta$, pak soběstačný rovnovážný bod je lokálně stabilní. Při použití konkrétní funkce úspor (4.8) se model postupně upraví

$$\frac{1}{1 + \pi^{\frac{\rho}{1-\rho}}(t)} = \theta \frac{\frac{1}{1 + \pi^{\frac{\rho}{1-\rho}}(t-1)}}{\pi(t-1)},$$

kurzů na akciových trzích.

⁷Tento předpoklad zavádíme, ne protože bychom věřili, že předpověď je dokonalá, ale z následujících dvou důvodů. První důvod je, že každý jedinec se snaží udělat vlastní předpověď co nejpřesnější, jak je to jen možné. Zadruhé upřednostňujeme modely, kde výsledky nevznikají tím, že lidé neustále dělají chyby v předpovědích.

přičemž zavedeme substituci $\frac{\rho}{1-\rho} = z$, kde $\rho \in (\frac{1}{2}, 1)$ a tudíž $z \in (1, \infty)$ a budeme dále upravovat daný systém

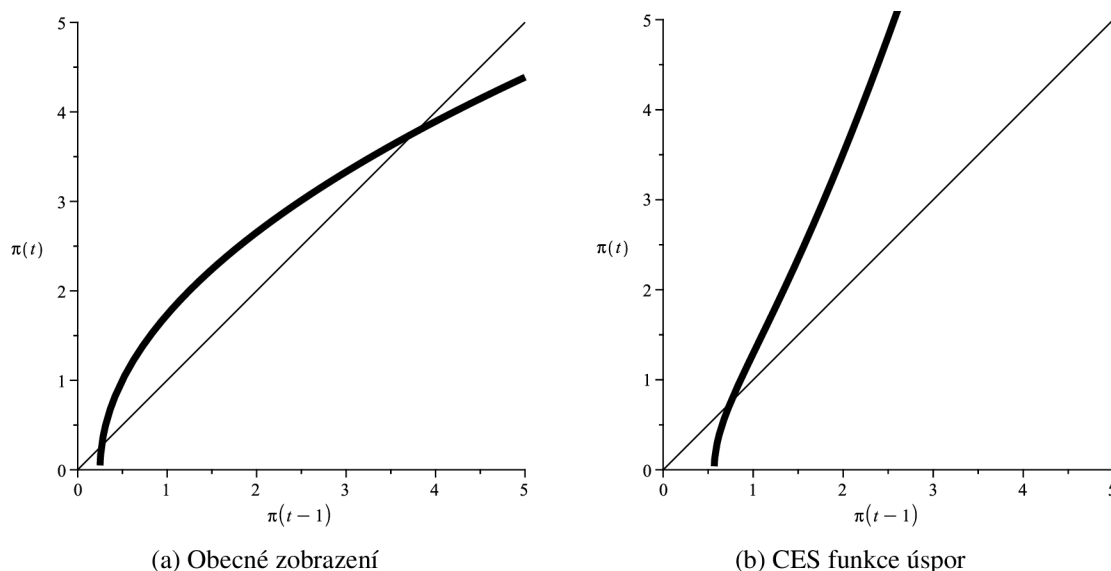
$$(1 + \pi^z(t-1))(\pi(t-1)) = \theta(1 + \pi^z(t))$$

$$\pi^z(t) = \frac{\pi^{z+1}(t-1) + \pi(t-1)}{\theta} - 1,$$

což pro $z \in (1, \infty)$ můžeme odmocnit a obdržíme rekurentní zápis modelu

$$\pi(t) = \sqrt[z]{\frac{\pi^{z+1}(t-1) + \pi(t-1)}{\theta} - 1}. \quad (4.10)$$

Na obrázku 4.2a můžeme vidět grafické řešení rovnice (4.9) znázorňující inflaci, při dokonalé předpovědi. Na tomto obrázku můžeme vidět dva rovnovážné body, ten nižší odpovídá monetárnímu rovnovážnému bodu θ a ten vyšší rovnovážnému bodu π^a .



Obrázek 4.2: Dokonalá předpověď

Všechny trajektorie začínající napravo od monetárního rovnovážného bodu konvergují k soběstačnému rovnovážnému bodu a všechny trajektorie začínající nalevo od monetárního rovnovážného bodu jsou v konečném čase nemožné, tzn. inflace stále klesá pod současnou hodnotu $\pi(t)$ a neexistuje $\pi(t+1)$ takové, které by vyčišťovalo trh peněz.

Na obrázku 4.2b je poté zobrazeno řešení pro systém (4.10) s CES funkcí úspor (4.8). Pro vykreslení řešení byly použity parametry $\rho = 0.75$ a $\theta = 0.85$. Pro tuto funkci úspor neexistuje soběstačný rovnovážný bod a proto všechny trajektorie začínající napravo od monetárního rovnovážného bodu divergují k nekonečnu.

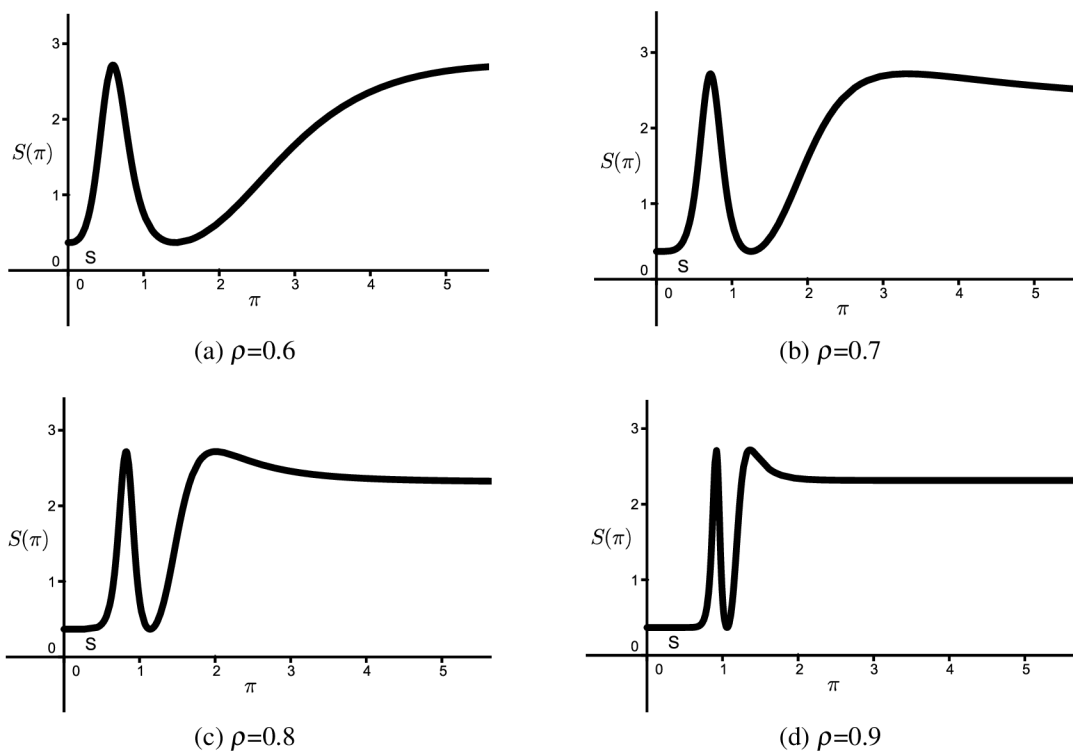
4.1.2 Transformovaná CES funkce úspor

V minulé části jsme pracovali s jednoduchou CES funkcí úspor, v této části tuto funkci pomocí exponenciální a goniometrické transformace transformuje na nemonotónní funkci a ukážeme si zde jak se chová takováto funkce. S nemonotónními funkcemi se můžeme setkat např. v Bullard [3].

Nová transformovaná funkce úspor bude poté tvaru

$$S(\pi) = \exp \left[-\cos \left(\frac{10}{1 + \pi^{1-\rho}} \right) \right].$$

Na následujícím obrázku 4.3 je možné vidět funkci úspor pro různé hodnoty parametru ρ na obrázku 4.3a je tato funkce znázorněna pro $\rho = 0.6$, na obrázku 4.3b pro $\rho = 0.7$, na obrázku 4.3c pro $\rho = 0.8$ a na obrázku 4.3d pro $\rho = 0.9$.



Obrázek 4.3: Nemonotónní funkce úspor

V tomto případě bychom při analýze postupovali obdobně jako při použití CES funkce úspor. Vzhledem k tomu, že postup je obdobný a vzhledem k tomu, že jedinci schopní dokonalé predikce nejsou příliš reální, nebude zde tento postup uveden.

4.2 Očekávaná inflace

V minulé části jsme si představili „geniální“ jedince, kteří umí předpovědět ceny v budoucím období. Nyní se zaměříme na jedince, kteří tuto schopnost nemají, ale snaží se budoucí ceny a inflaci, alespoň nějak odhadnout. Jedinci se o tuto predikci pokusí na základě znalosti minulých dat. Nejdříve si musíme ujasnit, jaké informace mají jedinci k dispozici ve chvíli, kdy se musejí rozhodnout. Jedinec narozený v období $t + 1$ zná veškeré ceny do konce období t a proto poslední inflace, kterou má k dispozici je $\pi(t - 1) = \frac{p(t)}{p(t-1)}$.

Rozhodnutí o úsporách nově narozených jedinců závisí jen na podílu cen mezi obdobími $t + 1$ a $t + 2$. Očekávaný podíl cen $\pi^e(t + 1) = \frac{p(t+2)}{p(t+1)}$ je jedním z činitelů určujících cenu $p(t + 1)$ v období $t + 1$. Nadále budeme předpokládat, že jedinec se rozhodne o svých úsporách předtím než vstoupí na trh peněz, tudíž ceny které získá na tomto trhu, už nemohou ovlivnit jeho rozhodnutí. Navíc očekávání $\pi^e(t + 1)$ a rozhodnutí o úsporách je založeno na informaci o inflaci do času $t - 1$.⁸

4.2.1 Naivní očekávání

Nejdříve budeme uvažovat naivní očekávání. Jedinec pod vlivem naivního očekávání je jedinec, který očekává, že podíl cen v následujícím období bude stejný jako podíl cen v současném období. V čase t se snaží jedinec odhadnout hodnotu inflace $\pi^e(t + 1) = \frac{p(t+2)}{p(t+1)}$, ale k dispozici má jen současné a minulé hodnoty cen, tudíž musí platit $\pi^e(t + 1) = \pi(t - 1)$, neboť očekává, že inflace se nezmění a bude stejná, jako poslední jemu známá. Tuto podmínku dosadíme do modelu OLG (4.4)

$$\pi(t - 1)S(\pi(t - 2)) = \theta S(\pi(t - 3)),$$

jelikož nás nezajímá vztah pro minulé hodnoty, ale pro budoucí, tak tuto rovnici ještě jednou upravíme

$$\pi(t + 1) = \theta \frac{S(\pi(t - 1))}{S(\pi(t))}. \quad (4.11)$$

Rovnice modelu překrývající se generací (4.11) je diferenční rovnice druhého řádu, kterou můžeme přepsat na systém dvou diferenčních rovnic prvního řádu, přičemž potřebujeme zavést novou proměnou $\gamma(t) = \pi(t - 1)$. Obdržíme systém

$$\begin{aligned} \pi(t + 1) &= \theta \frac{S(\gamma(t))}{S(\pi(t))}, \\ \gamma(t + 1) &= \pi(t). \end{aligned}$$

Linearizací tohoto systému okolo rovnovážného bodu (π^*, γ^*) získáme příslušnou Jacobiho matici

⁸Alternativně je možné, aby jedinci do předpovědi inflace $\pi^e(t + 1)$ zahrnují i znalosti o hodnotě $\pi(t)$. Toto najdeme v Lettau, Van Zandt [10], kde je ukázána komplikovanost řešení a rozdíly v chování modelu OLG.

$$J = \begin{pmatrix} -\theta \frac{S'(\gamma^*)S'(\pi^*)}{[S(\pi^*)]^2} & \theta \frac{S'(\gamma^*)}{S(\pi^*)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rovnovážný bod tohoto systému je $(\pi^*, \gamma^*) = (\theta, \theta)$, přičemž po dosažení tohoto bodu do Jacobiho matice systému obdržíme

$$J = \begin{pmatrix} -\theta \frac{S'(\theta)}{S(\theta)} & \theta \frac{S'(\theta)}{S(\theta)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Po dosažení elasticity úspor (4.5) dostaneme linearizovaný systém diferenčních rovnic s Jacobiho maticí

$$J = \begin{pmatrix} a(\theta) & -a(\theta) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla příslušná Jacobiho matici vypočítáme jako kořeny charakteristického polynomu $|J - \lambda E| = 0$, kde E je jednotková matice stejné dimenze jako matice J .

$$\begin{vmatrix} a(\theta) - \lambda & -a(\theta) \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda a(\theta) + a(\theta).$$

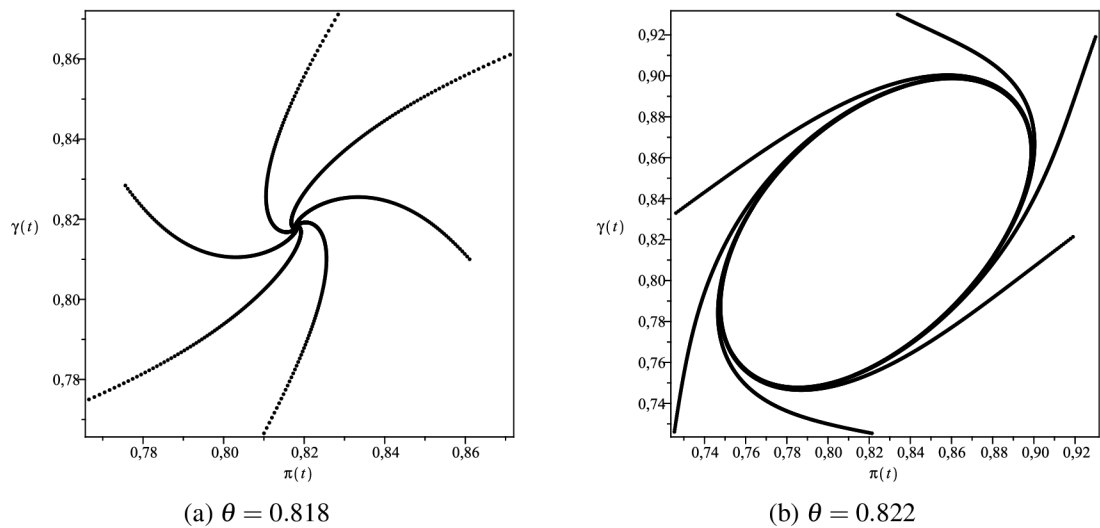
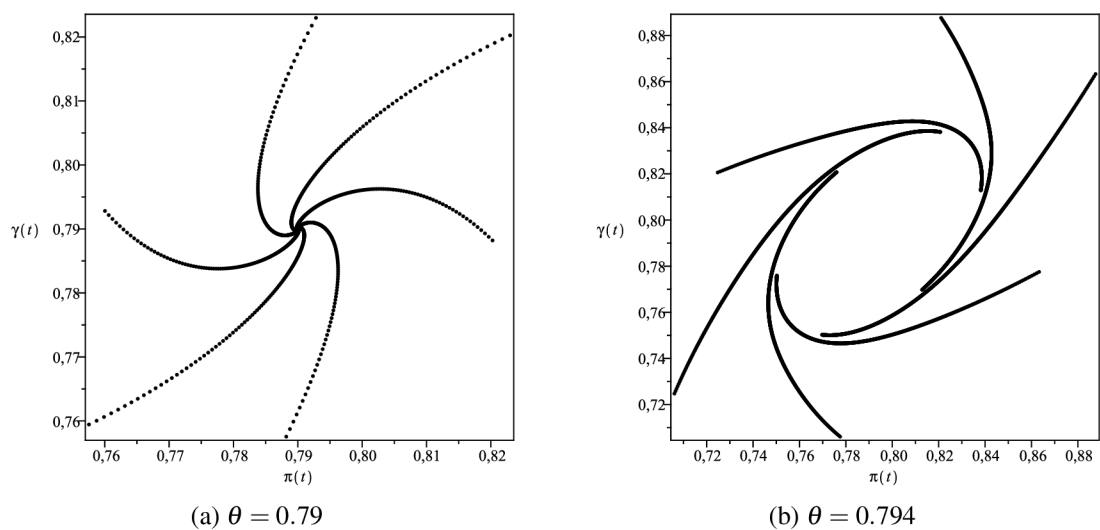
Vlastní čísla poté jsou

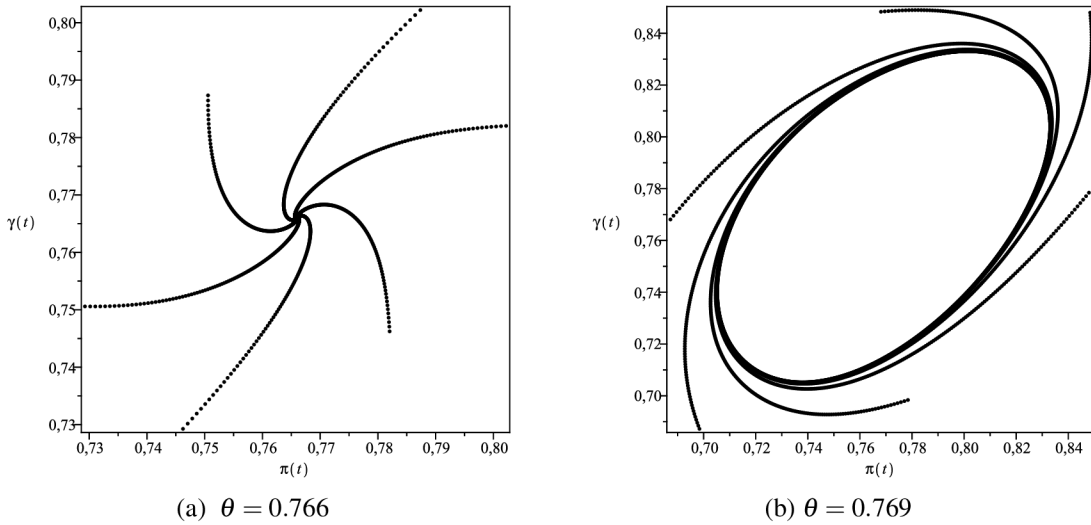
$$\lambda_{1,2} = \frac{a(\theta) \pm \sqrt{a(\theta)(a(\theta) - 4)}}{2}.$$

Vidíme, že pro $a(\theta) \in (0, 4)$ jsou vlastní čísla komplexně sdružená, přičemž protínají jednotkovou kružnici pro $\lambda_1 \lambda_2 = a(\theta) = 1$. Pro tento monetární rovnovážný bod a za splnění předpokladů (1) a (2) nastává Neimarkova-Sackerova bifurkace. Pro $a(\theta) < 1$ je monetární rovnovážný bod stabilní a pro $a(\theta) > 1$ je nestabilní. Pro $a(\theta) < 0$ jsou vlastní čísla reálná. Přičemž kladné reálné vlastní číslo je vždy menší než 1. Simulace naznačují, že pro náš OLG model s CES funkcí úspor je bifurkace superkritická, přičemž kritická hodnota parametru θ je

$$\theta^* = \left(\frac{2\rho - 1}{1 - \rho} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}, \quad \text{pro } \rho \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Na obrázcích 4.4, 4.5 a 4.6 vidíme příklady atrahující uzavřené křivky vytvořené superkritickou Neimarkovou-Sackerovou bifurkací pro model s CES funkcí úspor a různé hodnoty parametrů. Na těchto obrázcích jsou znázorněny fázové portréty pro parametr θ blízký kritické hodnotě a to jak blízký se k θ^* zleva, tak i zprava. Toto řešení je zvoleno, především proto, aby bylo názorně vidět, jak se fázové portréty mění. Pro hodnotu $\rho = 0.73$ je kritická hodnota parametru $\theta^* = 0.8211$ obrázek 4.4, pro hodnotu $\rho = 0.75$ je kritická hodnota parametru $\theta^* = 0.7937$ obrázek 4.5 a pro hodnotu $\rho = 0.78$ je kritická hodnota parametru $\theta^* = 0.7683$ obrázek 4.6.

Obrázek 4.4: Atraktor pro naivní očekávání $\rho = 0.73$ Obrázek 4.5: Atraktor pro naivní očekávání $\rho = 0.75$

Obrázek 4.6: Atraktor pro naivní očekávání $\rho = 0.78$

Při naivním očekávání jedinec věří, že budoucí inflace bude stejná jako byla v minulých obdobích. Toto není jediný možný způsob předpovědi budoucího vývoje. Je možné také využít adaptivní očekávání.

4.2.2 Adaptivní očekávání

Adaptivní očekávání, stejně jako naivní očekávání, vychází z minulých informací o inflaci, ale již nepředpokládá, že se inflace nezmění. V podstatě se jedná o predikci založenou na ponaučení se z minulosti, např. pokud minulá inflace byla vyšší než jedinec předpokládal, tak tento fakt zahrne do své budoucí predikce. Toto můžeme popsat následovně

$$\pi^e(t+1) = \alpha\pi(t-1) + (1-\alpha)\pi^e(t), \quad \text{kde } \alpha \in (0, 1]. \quad (4.12)$$

Tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\pi^e(t+1) = \pi^e(t) + \alpha(\pi(t-1) - \pi^e(t)),$$

ze kterého vidíme adaptivní chování tohoto očekávání: očekávání je upraveno, jakmile je k dispozici nová informace. Parametr α určuje důležitost, kterou jedinci přisuzují novému pozorování. Pomocí opakované substituce můžeme adaptivní očekávání zapsat jako

$$\pi^e(t+1) = \sum_{j=1}^t \alpha(1-\alpha)^{j-1} \pi(t-j) + (1-\alpha)^t \pi^e(1).$$

Proto adaptivní očekávání závisí na všech předešlých realizacích inflace, ale s klesající vahou. Z toho také vyplývá, že vliv počátečního očekávání, $\pi^e(1)$, klesá s rostoucím časem. S využitím adaptivního očekávání (4.12) upravíme model překrývajících se generací (4.4). Nejdříve si vyjádříme $\pi(t-1)$ z rovnice (4.12), kterou pak dosadíme do (4.4).

$$\pi(t-1) = \frac{\pi^e(t+1) - (1-\alpha)\pi^e(t)}{\alpha}$$

$$\frac{\pi^e(t+1) - (1-\alpha)\pi^e(t)}{\alpha} S(\pi^e(t)) = \theta S(\pi^e(t-1))$$

Tuto rovnici postupně upravíme.

$$\pi^e(t+1)S(\pi^e(t)) - (1-\alpha)\pi^e(t)S(\pi^e(t)) = \alpha\theta S(\pi^e(t-1))$$

$$\pi^e(t+1)S(\pi^e(t)) = (1-\alpha)\pi^e(t)S(\pi^e(t)) + \alpha\theta S(\pi^e(t-1))$$

$$\pi^e(t+1) = (1-\alpha)\pi^e(t) + \alpha\theta \frac{S(\pi^e(t-1))}{S(\pi^e(t))} \quad (4.13)$$

Rovnice (4.13) je diferenční rovnice druhého řádu, kterou můžeme převést na systém dvou diferenčních rovnic prvního řádu. Zavedeme novou proměnou $\gamma(t) = \pi^e(t-1)$ a obdržíme

$$\begin{aligned} \pi^e(t+1) &= (1-\alpha)\pi^e(t) + \alpha\theta \frac{S(\gamma(t))}{S(\pi^e(t))} \\ \gamma(t+1) &= \pi^e(t). \end{aligned}$$

Linearizací tohoto systému okolo rovnovážného bodu (π^{e*}, γ^*) získáme příslušnou Jacobiho matici systému

$$J = \begin{pmatrix} (1-\alpha) - \alpha\theta \frac{S(\gamma^*)S'(\pi^{e*})}{[S(\pi^{e*})]^2} & \alpha\theta \frac{S'(\gamma^*)}{S(\pi^{e*})} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Monetární rovnovážný bod tohoto systému je $(\pi^*, \gamma^*) = (\theta, \theta)$, přičemž po dosazení tohoto bodu obdržíme Jacobiho matici systému

$$J = \begin{pmatrix} (1-\alpha) - \alpha\theta \frac{S'(\theta)}{S(\theta)} & \alpha\theta \frac{S'(\theta)}{S(\theta)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení elasticity úspor (4.5) dostaneme linearizovaný systém diferenčních rovnic daný Jacobiho maticí

$$J = \begin{pmatrix} (1-\alpha) + \alpha a(\theta) & -\alpha a(\theta) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla příslušná Jacobiho matici vypočítáme jako kořeny charakteristického polynomu $|J - \lambda E| = 0$.

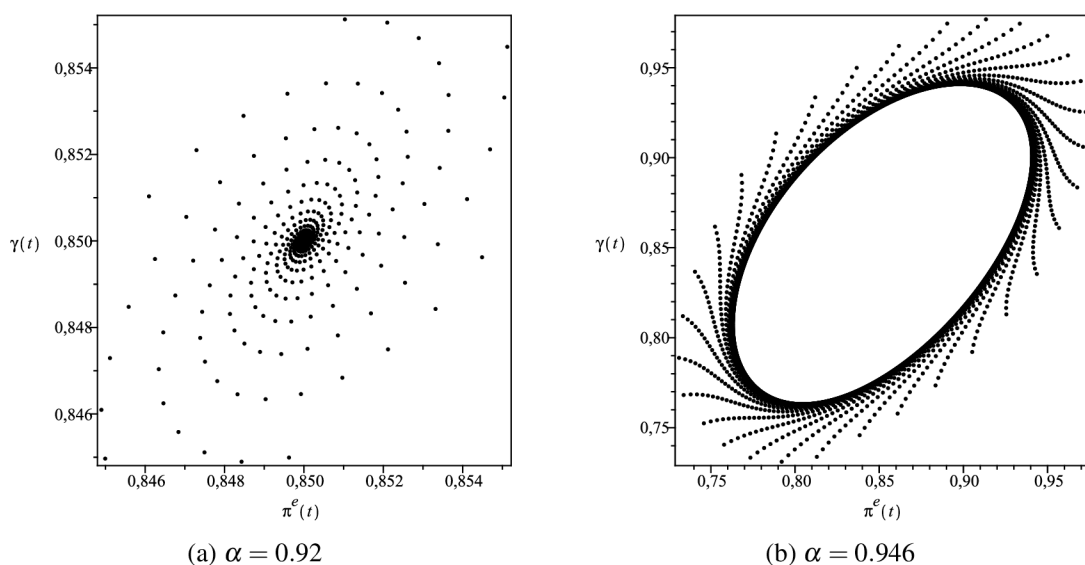
$$\begin{vmatrix} (1-\alpha) + \alpha a(\theta) - \lambda & -\alpha a(\theta) \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda[(1-\alpha) + a(\theta)] + \alpha a(\theta).$$

Vlastní čísla poté jsou

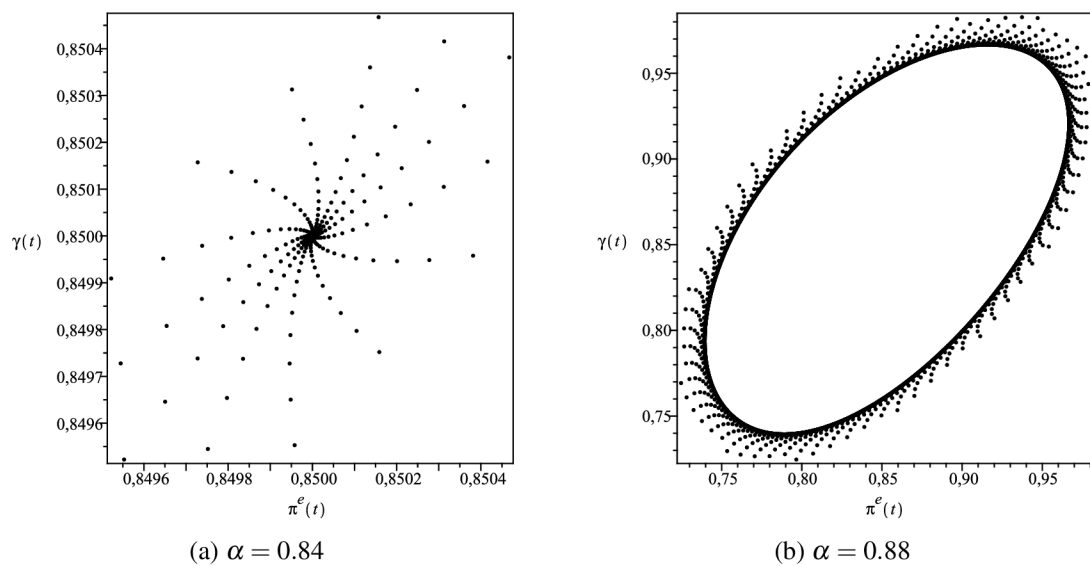
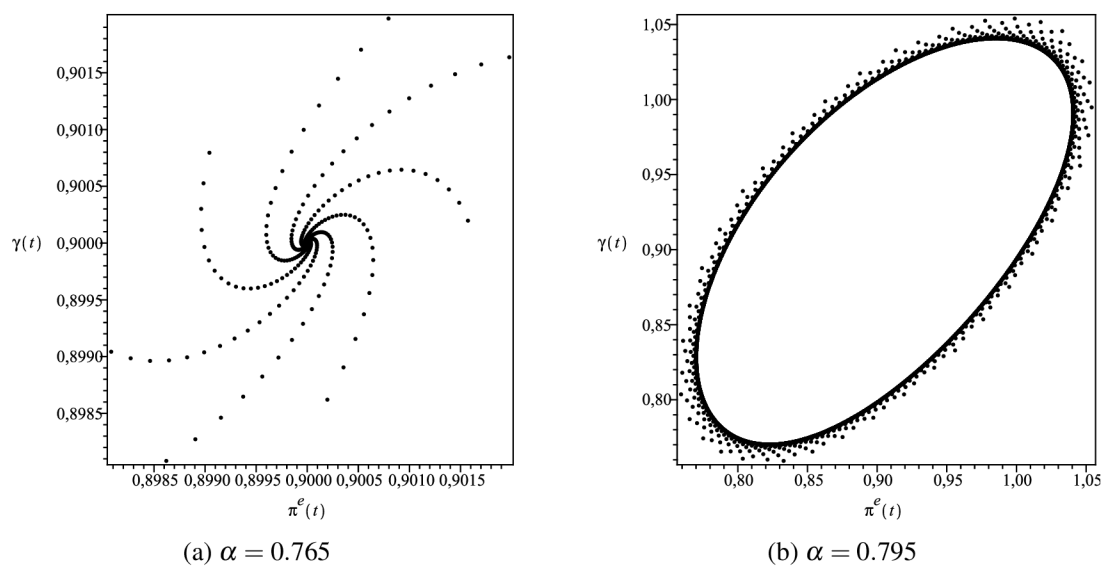
$$\lambda_{1,2} = \frac{(1-\alpha) + \alpha a(\theta) \pm \sqrt{[(1-\alpha) + \alpha a(\theta)]^2 - 4\alpha a(\theta)}}{2}.$$

Vlastní čísla $\lambda_{1,2}$ jsou komplexně sdružená pokud $[(1 - \alpha) + \alpha a(\theta)]^2 - 4\alpha a(\theta) < 0$, což nastane pro $\alpha a(\theta) \in (1 + \alpha - 2\sqrt{\alpha}, 1 + \alpha + 2\sqrt{\alpha})$. Pro $\alpha a(\theta) = 1$ je determinant Jacobiho matice roven 1, v tomto případě nastává Neimarkova-Sackerova bifurkace. V ostatních případech máme reálná vlastní čísla. Dynamika v okolí rovnovážného bodu je pak podobná té v modelu (4.11), přičemž „dlouhá paměť“ parametru α stabilizuje systém. Na obrázcích 4.7, 4.8 a 4.9 jsou znázorněny atraktory pro různé hodnoty parametrů α , θ a ρ i v tomto případě jsou zde znázorněny hodnoty α blížíící se ke kritické hodnotě parametru α^* jak zleva tak i zprava.

Na obrázku 4.7 jsou znázorněny fázové portréty pro daný systém a hodnoty parametrů $\rho = 0.73$, $\theta = 0.85$, kritická hodnota parametru $\alpha^* = 0.9424$. Na obrázku 4.8 jsou znázorněny fázové portréty pro daný systém a hodnoty parametrů $\rho = 0.75$, $\theta = 0.85$, kritická hodnota parametru $\alpha^* = 0.8749$. Na obrázku 4.9 jsou znázorněny fázové portréty pro daný systém a hodnoty parametrů $\rho = 0.75$, $\theta = 0.9$, kritická hodnota parametru $\alpha^* = 0.7895$.



Obrázek 4.7: Atraktor pro adaptivní očekávání $\rho = 0.73$, $\theta = 0.85$

Obrázek 4.8: Atraktor pro adaptivní očekávání $\rho = 0.75$, $\theta = 0.85$ Obrázek 4.9: Atraktor pro adaptivní očekávání $\rho = 0.75$, $\theta = 0.9$

Závěr

V této práci jsme se zabývali studiem nelineárních dynamických systémů s jejich aplikací v ekonomii. Pro aplikaci byl zvolen model OLG, model s překrývajícími se generacemi. První dvě kapitoly se zabývají popisem teorie, která je následně aplikovaná ve zbylé části. Práce je rozčleněna do čtyřech kapitol a celá je proložena množstvím ilustrujících a vysvětlujících obrázků.

První kapitola práce je věnována teorii diferenčních rovnic a dynamických systémů. Postupně se zde zavádí diferenční rovnice, nejdříve lineární rovnice prvního řádu a následně i rovnice druhého řádu. Poté se přechází k systémům diferenčních rovnic. Jako podstatná se zde jeví možnost převodu rovnice vyššího řádu na systém rovnic řádu prvního. U systémů diferenčních rovnic jsou zde zmíněny kvalitativní vlastnosti řešení a stabilita. Pracuje se zde s Jordanovým kanonickým tvarem a následně s Jacobiho maticí. Při kvalitativní analýze vlastností řešení se postupně seznamujeme s jednotlivými typy rovnovážných bodů (sedlo, uzel a ohnisko).

Druhá kapitola je věnována nelineárním dynamickým systémům. V této části je zmíněna linearizace nelineárních dynamických systémů a poté teorie bifurkací. Pro teorii bifurkací je nezbytné uvažovat dynamické systémy závislé na parametrech, v nejjednodušším případě na jednom parametru. Bifurkace je jev, kdy při změně parametru dochází ke kvalitativní změně systému, tj. pro hodnotu parametru v levém okolí bifurkační hodnoty není systém topologicky ekvivalentní se systémem s parametrem v pravém okolí. V této části se seznamujeme se základními typy bifurkací diskrétních dynamických systémů, jedná se o fold bifurkaci, o flip bifurkaci a o Neimarkovu-Sackerovu bifurkaci. Pro flip bifurkaci a Neimarkovu-Sackerovu bifurkaci je zde uveden názorný příklad s logistickou, potažmo se zpožděnou logistickou rovnicí.

Ve třetí kapitole dochází k představení modelu OLG. Na začátku této kapitoly je zmíněn stručný historický vývoj ekonomického modelu, následně jsou zde představeny jednotlivé subjekty, je zde také vysvětleno odkud pochází název tohoto modelu. Jde o představu, že v každém období žije více generací, v našem konkrétním příkladě se uvažuje se dvěma generacemi (mladí a staří jedinci).

Tento model se na ekonomiku dívá jako na celek, a veškeré ekonomické subjekty dělí do tří základních skupin. Jedná se o spotřebitele, firmy a stát. Každá z těchto skupin má své určité zájmy, které se snaží obhajovat. Je patrné, že nejdůležitějším subjektem v ekonomice jsou spotřebitelé (potažmo celá populace), neboť bez jejich nabídky práce by nemohly fungovat

firmy a poté ani stát. V této kapitole se také setkáváme s funkcí spotřeby, funkcí dostupných zdrojů v ekonomice, funkcí úspor a s užitkovou funkcí, v případě státu jsou zde ještě zavedeny daně a transfery. Na konci je vysvětlena problematika časové hodnoty peněz a úroková míra.

Ve čtvrté kapitole je poté řešen samotný model, je zde představena konkrétní užitková funkce a z ní vyplývající CES funkce úspor a nemonotonní funkce úspor. Vzhledem k tomu, že v této části se uvažuje s hrubým faktorem inflace je nezbytné zde zavést peníze a jejich vývoj v čase. Tato kapitola je rozdělena na dvě základní části, kdy v první části se předpokládají „geniální“ jedinci, kteří vědí, jaká bude cenová hladina v budoucím období, ve druhé části jsou poté jedinci, kteří nemají tuto schopnost předvídat budoucnost, ale snaží se ji odhadnout na základě jim dostupných informací.

V případě dokonale předpovídajících jedinců jsme zjistili, že pro tento model obecně existují dva rovnovážné body, ale pokud se použije konkrétní funkce úspor je patrné, že jeden z těchto bodů neexistuje a model je nestabilní. Jedinci, kteří se snaží odhadnout budoucí vývoj inflace k tomuto úkolu přistupují dvojím způsobem.

Jedni jsou naivní a předpokládají, že hrubý faktor inflace bude stejný jako v minulých obdobích. V tomto případě dochází k bifurkacím. Ve druhém případě jedinci předpokládají, že se bude hrubý faktor inflace měnit a snaží se tuto změnu zakomponovat do svého rozhodování. Toto přizpůsobení probíhá s využitím všech dostupných cenových hladin, přičemž, čím starší data jedinec použije, tím menší význam tato data pro něj mají. I v tomto případě dochází k bifurkacím, ale systém je díky dlouhé paměti výše zmíněného parametru stabilní. Pokud jedinec racionálně zahrne do své předpovědi všechny dostupné informace, tak je schopný zahrnout do svého rozhodování odhad budoucího vývoje inflace. Na tomto místě i tento model, jako mnoho jiných ekonomických modelů, naráží na problém při praktické aplikaci. Předpoklad racionálně jednajících subjektů může být příliš silným požadavkem, především pro domácnosti a jednotlivce, kteří se ne vždy rozhodují racionálně.

Seznam obrázků

1.1	Fázový diagram	6
1.2	Stabilní a nestabilní rovnovážný bod	8
1.3	Asymptoticky stabilní rovnovážné body	8
1.4	Repeler	9
1.5	Různé reálné kořeny	15
1.6	Dvojnásobný reálný kořen	15
1.7	Komplexně sdružené kořeny	16
2.1	Tvary vlastních čísel	18
2.2	Fold bifurkace	19
2.3	Fold bifurkace	20
2.4	Flip bifurkace	21
2.5	Flip bifurkace	21
2.6	Logistická rovnice	23
2.7	Superkritická Neimarkova-Sackerova bifurkace	24
2.8	Subkritická Neimarkova-Sackerova bifurkace	25
2.9	Neimarkova-Sackerova bifurkace logistické rovnice	26
3.1	Rozpětí několika generací	29
3.2	Spotřební koš	32
3.3	Indiferenční křivky	33
3.4	Rozpočtové omezení	35
3.5	Rozpočtové omezení	40
4.1	Funkce úspor	48
4.2	Dokonalá předpověď	50
4.3	Nemonotónní funkce úspor	51
4.4	Atraktor pro naivní očekávání $\rho = 0.73$	54
4.5	Atraktor pro naivní očekávání $\rho = 0.75$	54
4.6	Atraktor pro naivní očekávání $\rho = 0.78$	55
4.7	Atraktor pro adaptivní očekávání $\rho = 0.73, \theta = 0.85$	57
4.8	Atraktor pro adaptivní očekávání $\rho = 0.75, \theta = 0.85$	58
4.9	Atraktor pro adaptivní očekávání $\rho = 0.75, \theta = 0.9$	58

Seznam použité literatury

- [1] AUERBACH, Alan J a Laurence J KOTLIKOFF. Dynamic fiscal policy. New York: Cambridge University Press, 1987, xv, 196 p. ISBN 05-213-0041-X.
- [2] BOUZAHZAH, Mohamed, David DE LA CROIX a Frédéric DOCQUIER. Policy reforms and growth in computable OLG economies. *Journal of Economic Dynamics & Control*. 2002, č. 26, 2093–2113. Dostupné z: <<http://perso.uclouvain.be/david.delacroix/pdfpubli/jedc02.pdf>>
- [3] BULLARD, James B. Learning Equilibria. *Journal of Economic Theory*. 1994, č. 64, s. 468-485. Dostupné z: <<http://research.stlouisfed.org/wp/1991/91-004.pdf>>
- [4] BULLARD, James B. a John DUFFY. On Learning and the Stability of Cycles. *Macroeconomic Dynamic*. 1998, č. 2, s. 22-48. Dostupné z: <<http://research.stlouisfed.org/wp/1995/95-006.pdf>>
- [5] DIAMOND, Peter A. National Debt in a Neoclassical Growth Model. In: *The American Economic Review*. American Economic Assotation, 1965, s. 1126-1150. Vol. 55, No.5. Dostupné z: <<http://www.jstor.org/stable/1809231>>
- [6] DIXIT, Avinash K. a Joseph E. STIGLITZ. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. *The American Economic Review*. 1977, č. 3, s. 297-308. Dostupné z: <<http://www.jstor.org/stable/1831401>>
- [7] ELAYDI, Saber N. An introduction to difference equations. 3rd. ed. New York: Springer, 2005, 539 s. ISBN 03-872-3059-9.
- [8] KAPLAN, Daniel a Leon GLASS. Understanding nonlinear dynamics. New York: Springer-Verlag, c1995, xix, 420 p. ISBN 03-879-4440-0.
- [9] KUZNETSOV, Yuri A. 2nd ed. New York: Springer, 1998, 591 s. ISBN 03-879-8382-1.
- [10] LETTAU, Martin a Timothy VAN ZANDT. Robustness of Adaptive Expectations as an Equilibrium Selection Device. *Macroeconomic Dynamics*. 2003, č. 7, s. 89-118. Dostupné z: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.198.2303>>

- [11] LUCAS, Robert E. Econometric Policy Evaluation: A Critique. In: Carnegie-Rochester conference series on public policy. 1976, s. 19-46. Dostupné z: <http://pareto.uab.es/mcreel/reading_course_2006_2007/lucas1976.pdf>
- [12] MANKIW, N. Gregory. Zásady ekonomie. 1. vyd. Praha: Grada, 1999, 763 s. ISBN 80-716-9891-1.
- [13] MCCANDLESS, George T a Neil WALLACE. Introduction to dynamic macroeconomic theory: an overlapping generations approach. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1991. ISBN 06-744-6111-8.
- [14] RAMSEY, Frank P. A Mathematical Theory of Saving. In: The Economic Journal. Willey, 1928, s. 543-559. Vol. 38, No. 152. Dostupné z: <<http://www.jstor.org/stable/2224098>>
- [15] SHONE, Ronald. Economic dynamics: phase diagrams and their economic application. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2002, xiv, 708 p. ISBN 05-210-1703-3.
- [16] TU, Pierre N. V. Dynamical systems: an introduction with applications in economics and biology. 2nd rev. and enl. ed. New York: Springer-Verlag, c1994, xviii, 314 p. ISBN 03-875-7661-4.
- [17] ZHANG, Wei-Bin. Discrete dynamical systems, bifurcations and chaos in economics. Boston: Elsevier, c2006. ISBN 04-445-2197-6.