MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2012 VOJTĚCH RŮŽIČKA

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Spektrální a oscilační teorie diferenciálních operátorů

Diplomová práce

Vojtěch Růžička

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc.

Brno 2012

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Vojtěch Růžička Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Spektrální a oscilační teorie diferenciálních operátorů
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematické modelování a numerické metody
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc.
Akademický rok:	2011/2012
Počet stran:	viii + 51
Klíčová slova:	Lineární operátor; Hilbertův prostor; adjungovaný operátor; uzavřený operátor; spektrum; symetrický operátor; samoadjungovaný operátor; Sturmův-Liouvilleův operátor; Sturmova-Liouvilleova diferenciální rovnice; Weylova klasifikace; limit point; limit circle

Bibliographic Entry

Author: Bc. Vojtěch Růžička
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Spectral and oscillation theory of differential operators

Degree Programme: Mathematics

Field of Study: Mathematical Modelling and Numeric Methods

Supervisor: prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc.

Academic Year: 2011/2012

Number of Pages: viii + 51

Keywords: Linear operator; Hilbert space; adjoint operator; closed operator; spectrum; symmetric operator; selfadjoint operator; Sturm-Liouville operator; Sturm-Liouville differential equation; Weyl classification; limit point, limit circle

Abstrakt

Práce se věnuje vyšetřování oscilačních a spektrálních vlastností diferenciálních operátorů druhého řádu. Je složena ze dvou kapitol. V první se zavádí základy teorie lineárních operátorů v Hilbertově prostoru. Druhá kapitola je zaměřena ba Sturmovy-Liouvilleovy diferenciální operátory. Zvláštní pozornost je věnována Weylově LP/LC klasifikaci.

Abstract

The thesis is devoted to the investigation of the oscillation and spectral properties of second order differential operators. It consists of two chapters. In the first one we introduce essentials of the theory of linear operators in a Hilbert space. The second chapter is focused on Sturm-Liouville differential operators. A particular attention is devoted to the Weyl LP/LC classification.

Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Vojtěch Růžička**

Studijní program - obor: **Matematika - Matematické modelování a numerické metody**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

Spektrální a oscilační teorie diferenciálních operátorů

Spectral and oscillation theory of differential operators

Oficiální zadání: Vypracujte odborný text, ve kterém se zaměříte na vysvětlení vztahu mezi oscilačními vlastnostmi a rozložením spektra formálně samoadjungovaných diferenciálních operátorů. Hlavní část by měla být zaměřena na lineární operátory 2. řádu s případným rozšířením na operátory vyšších řádů nebo na nelineární operátory.

Literatura:

Weidmann, Joachim. Spectral theory of ordinary differential operators. Berlin : Springer-Verlag, 1987. 303 s. ISBN 3-540-17902-.

Lukeš, Jaroslav. Zápisky z funkcionální analýzy. 1. vyd. Praha : Karolinum, 2002. 354 s. ISBN 80-7184-597-3.

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc.

Datum zadání diplomové práce: listopad 2010

Datum odevzdání diplomové práce: dle harmonogramu ak. roku 2011/2012

V Brně dne 3. 11. 2010

prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Zadání diplomové práce převzal dne: 25.11.2010

Podpis studenta

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat prof. RNDr. Ondřeji Došlému, DrSc., za odborné vedení mé diplomové práce, za cenné rady a připomínky a za množství času, který mi věnoval.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 9. května 2012

. . . .

Vojtěch Růžička

Obsah

Úvod

Předložená diplomová práce je věnována studiu oscilačních a spektrálních vlastností lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu. Práce je rozdělena do dvou základních kapitol. První se věnuje základům teorie lineárních operátorů v Hilbertově prostoru. Jsou zde uvedeny pojmy jako adjungovaný operátor, symetrický a samoadjungovaný operátor, deficitní indexy a je zde popsána konstrukce samoadjungovaných rozšíření symetrických operátorů. Druhá kapitola je zaměřena na Sturmovy-Liouvilleovy diferenciální operátory druhého řádu. Nejprve jsou zavedeny pojmy jako minimální a maximální operátor generovaný Sturmovým-Liouvilleovým diferenciálním výrazem a je specifikován pojem deficitních indexů na tento speciální případ. Hlavní část kapitoly pojednává o Weylově LP/LC klasifikaci. Závěrečná část kapitoly je věnována oscilačním vlastnostem Sturmových-Liuvilleových diferenciálních rovnic.

Hlavním zdrojem byly monografie [8], [9] doplněné [2]. Předpokládá se, že čtenář je seznámen se základy lineární funkcionální analýzy.

Kapitola 1

Lineární operátory v Hilbertových prostorech

1.1 Základy teorie Hilbertových prostorů

1.1.1 Abstraktní definice Hilbertova prostoru

Nejdříve uveďme několik poznámek ke značení. Nechť $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ jsou takové, že $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Označme symbolem $\mathscr{L}^1(a,b)$ prostor lebesgueovsky měřitelných funkcí $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$, pro které

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Dále, symbolem $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ označme množinu všech takových funkcí $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$, že pro každý (kompaktní) interval $[\alpha, \beta] \subseteq (a,b)$ platí $f \in \mathscr{L}^1[\alpha, \beta]$.

Definice 1.1.1. Lineární (vektorový) prostor H nad tělesem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nazýváme *Hilberovým prostorem*, jestliže H je úplný.

Poznámka. Pokud $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) nazýváme Hilbertův prostor H reálným (resp. komplexním) Hilbertovým prostorem.

Protože pomocí skalárního součinu můžeme definovat normu a pomocí normy metriku, Hilbertův prostor je normovaným i metrickým prostorem. Proto můžeme zavést pojmy charakteristické pro tyto prostory, například pojmy: otevřená množina, uzavřená množina, uzávěr množiny, konvergentní posloupnost, cauchyovská posloupnost. Pojmy, důležité pro nastudování této práce, budou většinou uvedeny ve formální definici.

Připomeňme, že metrický prostor H je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost z H je konvergentní v H. Uzávěr množiny $M \subseteq H$ v metrickém prostoru H budeme značit $\overline{M}$. Řekneme, že množina $M \subseteq H$ je hustá v metrickém prostoru H, jestliže $\overline{M} = H$. Pokud bude zřejmé, o jaký prostor se jedná, budeme stručně říkat, že množina M je hustá.

Normu v normovaném prostoru H budeme značit symbolem $\|\cdot\|$.

Podprostorem Hilbertova prostoru H budeme rozumět jeho lineární podprostor. Podprostor U Hilbertova prostoru H je Hilbertův prostor právě tehdy, když množina U je uzavřená v prostoru H. Podprostor U Hilbertova prostoru H se nazývá uzavřený podprostor, jestliže U je uzavřená množina v H.

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ jsou opět takové, že $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Označme

$$\mathscr{L}^2(a,b) = \{f \in \mathscr{L}^1(a,b) : \int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty\}.$$

Množina $\mathscr{L}^2(a,b)$ je lineární prostor nad tělesem $\mathbb{C}$. Definujme

$$\langle f, g \rangle_{\mathscr{L}^2(a,b)} = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x$$

pro $f, g \in \mathscr{L}^2(a,b)$. Zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{L}^2(a,b)}$ je skalárním součinem na prostoru $\mathscr{L}^2(a,b)$. Prostor $\mathscr{L}^2(a,b)$ spolu se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{L}^2(a,b)}$ tvoří komplexní Hilbertův prostor, viz například [8].

Prostor $\mathscr{L}^2(a,b)$ je normovaným prostorem s normou definovanou vztahem

$$\|f\|_{\mathscr{L}^2(a,b)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathscr{L}^2(a,b)}} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

pro $f \in \mathscr{L}^2(a,b)$. Odtud $\mathscr{L}^2(a,b)$ je i metrickým prostorem s metrikou definovanou vztahem

$$\rho(f,g) = \|f - g\|_{\mathscr{L}^2(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

pro $f, g \in \mathscr{L}^2(a,b)$.

Definice 1.1.2. Nechť H je Hilbertův prostor. Řekneme, že prvky $f, g \in H$ jsou *ortogonální* nebo také *kolmé* (značíme $f \perp g$), jestliže $\langle f, g \rangle = 0$. Dále, nechť $M \subseteq H$ je libovolná množina. Označme

$$M^\perp = \{f \in H : \langle f, g \rangle = 0 \text{ pro } g \in M\}.$$

Množina $M^\perp$ se nazývá ortogonální komplement (ortogonální doplněk) množiny M.

Poznámka. V podobném duchu můžeme definovat kolmost prvku na množinu nebo kolmost množiny na množinu. Platí $H^\perp = \{0\}$ a $\{0\}^\perp = H$, tj. nulový prvek prostoru H je jediný prvek, který je ortogonální ke každému prvku prostoru H. Ortogonální komplement množiny je vždy uzavřený podprostor v H. Pro každé $M_1, M_2 \subseteq H$ inkluze $M_1 \subseteq M_2$ implikuje $M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$.

V lineárním prostoru H budeme značit lineární obal množiny $M \subseteq H$ symbolem $\mathrm{Lin}(M)$ a lineární obal prvků $f_1, \ldots, f_n \in H$ symbolem $\mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_n\}$. V Hilbertově prostoru H pak platí

$$M^\perp = \mathrm{Lin}(M)^\perp = \overline{\mathrm{Lin}(M)}^\perp$$

pro libovolnou $M \subseteq H$.

Důkaz následující věty lze nalézt [8].

Věta 1.1.3. *Nechť H je Hilbertův prostor a U je jeho uzavřený podprostor. Pak $U^{\perp\perp} = U$ a každý prvek $f \in H$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru*

$$f = f_1 + f_2, \quad \textit{pro} \quad f_1 \in U, f_2 \in U^\perp.$$

Lemma 1.1.4. *Nechť H je Hilbertův prostor. Platí následující tvrzení.*

a) *Nechť $M \subseteq H$ je libovolná. Pak platí*

$$M^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Lin}(M)}.$$

b) *Rovnost $M^{\perp} = \{0\}$ platí právě tehdy, když $\overline{\mathrm{Lin}(M)} = H$.*

Důkaz. a) Platí $M^{\perp} = \overline{\mathrm{Lin}(M)}^{\perp}$. Z Věty 1.1.3 plyne, že

$$\overline{\mathrm{Lin}(M)} = \overline{\mathrm{Lin}(M)}^{\perp\perp} = M^{\perp\perp}.$$

b) Pokud $M^{\perp} = \{0\}$, pak $M^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Lin}(M)} = \{0\}^{\perp} = H$. Naopak, nechť $\overline{\mathrm{Lin}(M)} = H$. Platí $M^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Lin}(M)}$, tj. $M^{\perp\perp} = H$. Odtud, užitím Věty 1.1.3, $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp} = H^{\perp} = \{0\}$. □

Definice 1.1.5. Nechť U, V jsou podprostory lineárního prostoru H a platí

$$U \cap V = \{0\}.$$

Součet podprostorů $U + V = \{g_1 + g_2 : g_1 \in U, g_2 \in V\}$ nazveme *direktní*, jestliže každý prvek f prostoru $U + V$ lze vyjádřit jednoznačně ve tvaru

$$f = g_1 + g_2 \quad \text{pro} \quad g_1 \in U, g_2 \in V.$$

Direktní součet budeme značit $U \dot{+} V$. Pokud navíc H je Hilbertův prostor a platí $U \perp V$, pak direktní součet budeme nazývat *ortogonální* součet a značit $U \oplus V$.

Důkaz následující věty lze nalézt [8].

Věta 1.1.6. *Nechť H je Hilbertův prostor a $U, V, W \subseteq H$ jeho podprostory. Platí následující tvrzení.*

a) *Nechť $U \perp V$, pak $U \oplus V$ je uzavřený podprostor právě tehdy, když U, V jsou uzavřené podprostory.*
b) *Nechť U, W jsou uzavřené podprostory takové, že $U \subseteq W$. Pak existuje právě jeden uzavřený podprostor V takový, že $V \subseteq W$, $U \perp V$ a*

$$W = U \oplus V.$$

V tomto případě píšeme $V = W \ominus U$.

Poznámka. Prostoru V z části b) Věty 1.1.6 se říká ortogonální komplement (ortogonální doplněk) prostoru U vzhledem k (Hilbertovu) prostoru W.

Lemma 1.1.7. *Nechť H je Hilbertův prostor a U, V jsou uzavřené podprostory prostoru H. Je-li $W = V \oplus U$, pak $U^{\perp} = W^{\perp} \oplus V$.*

Důkaz. b) Zřejmě W je uzavřený, proto platí $H = W^{\perp} \oplus W = W^{\perp} \oplus V \oplus U$, podobně $H = U^{\perp} \oplus U$. Odtud $U^{\perp} = W^{\perp} \oplus V$. □

Nyní stručně připomeneme definici rozkladového prostoru a jeho základní vlastnosti. Nechť U,V jsou podprostory lineárního prostoru H a platí $V \subseteq U$. Pro libovolné $f \in U$ množinu

$$f+V = \{f+g : g \in V\}$$

nazýváme třídou prostoru U podle podprostoru V určenou prvkem f a značíme ji $[f]$. Pro libovolné $f,g \in U$ platí $[f]=[g]$ právě tehdy, když $f \in [g]$ právě tehdy, když $f-g \in V$. Označme symbolem U/V množinu všech tříd prostoru U podle podprostoru V. U/V je rozkladem množiny U, tj. sjednocení všech tříd je prostor U a libovolné dvě různé třídy jsou disjunktní. Množina U/V je lineárním prostorem s operacemi definovanými následovně

$$[f]+[g]=[f+g] \quad \text{a} \quad c[f]=[cf]$$

pro $f,g \in U$ a $c \in \mathbb{K}$.

Definice 1.1.8. Nechť H je lineární prostor a U,V podprostory prostoru H. Řekneme, že prvky

$$f_1,\dots,f_n \in U \text{ jsou lineárně nezávislé modulo } V,$$

jestliže pro libovolné $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ platí implikace

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n \in V \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ prvků prostoru U lineárně nezávislých modulo V a libovolných $n+1$ prvků prostoru U není lineárně nezávislých modulo V, pak řekneme, že

$$U \text{ má dimenzi } n \text{ modulo } V, \text{ a píšeme } \dim_{(V)} U = n.$$

Poznámka. Zřejmě, pokud jsou prvky $f_1,\dots,f_n$ lineárně nezávislé modulo V, pak jsou i lineárně nezávislé, protože pro libovolné $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ zejména platí

$$\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0 \in V \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Zřejmě, pokud prvky $f_1,\dots,f_n \in U$ jsou lineárně nezávislé modulo V, pak platí $\dim_{(V)} U = n$ právě tehdy, když platí

$$U+V = \mathrm{Lin}\{f_1,\dots,f_n\}+V.$$

Lemma 1.1.9. *Nechť H je lineární prostor a U,V podprostory prostoru H. Pokud* $\dim_{(V)} U$ *existuje, pak platí* $\dim_{(V)} U = \dim U/V$.

Důkaz. Nechť $f_1,\dots,f_n \in U$. Ukážeme, že $f_1,\dots,f_n$ jsou lineárně nezávislé modulo V právě tehdy, když třídy $[f_1],\dots,[f_n] \in U/V$ jsou nezávislé v rozkladovém prostoru. Nechť $[f_1],\dots,[f_n] \in U/V$ jsou lineárně nezávislé, tedy pro libovolné $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ platí

$$\alpha_1[f_1]+\cdots+\alpha_n[f_n]=[0] \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Implikaci můžeme ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$[\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n]=[0] \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Rovnost $[\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n]=[0]$ nastává právě tehdy, když

$$(\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n)+V = 0+V,$$

tj. právě tehdy, když $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n \in V$. □

Poznámka. Zřejmě, pokud prvky $f_1,\dots,f_n \in U$ jsou lineárně nezávislé modulo V, ekvivalentně pokud v prostoru U/V jsou třídy určené těmito prvky lineárně nezávislé platí: $\dim U/V = n$ právě tehdy, když platí

$$U+V = \mathrm{Lin}\{f_1,\dots,f_n\} + V.$$

Lemma 1.1.10. *Nechť H je lineární prostor a U,V podprostory prostoru H a* $\dim U = n$. *Pak $U+V$ je direktní součet právě tehdy, když*

$$\dim(U+V)/V = \dim U = n.$$

Důkaz. Nechť $f_1,\dots,f_n$ je báze U a nechť $U+V$ je direktní součet, pak $U+V =$ $= \mathrm{Lin}\{f_1,\dots,f_n\} \dot{+} V$. Proto $f_1,\dots,f_n$ jsou lineárně nezávislé modulo V, tedy platí $\dim(U+V)/V = \dim U = n$.

Naopak, nechť $\dim(U+V)/V = \dim U = n$. Pak existuje báze $[f_1],\dots,[f_n]$ prostoru $(U+V)/V$, proto i $f_1,\dots,f_n$ jsou lineárně nezávislé modulo V. Odtud

$$V + \mathrm{Lin}\{f_1,\dots,f_n\} = V+U$$

je direktní součet. □

1.1.2 Základní vlastnosti operátorů

Definice 1.1.11. Nechť H_1,H_2 jsou lineární prostory nad tělesem $\mathbb{K}$ a U je lineární podprostor prostoru H_1. Lineární zobrazení $T: U \to H_2$ nazýváme *lineární operátor* (nebo jen *operátor*) z H_1 do H_2 s definičním oborem U, který značíme symbolem $\mathscr{D}(T)$. Obor hodnot operátoru T značíme symbolem $\mathscr{R}(T)$. Je-li $H = H_1 = H_2$, říkáme, že T je lineárním operátorem na H.

Poznámka. Pro $f \in \mathscr{D}(T)$ budeme často psát Tf na místo formálnějšího zápisu $T(f)$.

Symbolem I budeme značit identický operátor na H_1 ($\mathscr{D}(I) = H_1$). Platí, že obor hodnot $\mathscr{R}(T)$ je podprostor prostoru H_2. Operátor T je injektivní právě tehdy, když pro libovolné $f \in \mathscr{D}(T)$ rovnost $Tf = 0$ implikuje $f = 0$. Pokud je operátor T injektivní, řekneme, že je invertibilní; v tomto případě můžeme definovat inverzní operátor T^{-1} vztahy

$$\mathscr{D}(T^{-1}) = \mathscr{R}(T), \quad T^{-1}g = f \text{ pro } g = Tf \in \mathscr{R}(T).$$

Zřejmě T^{-1} je lineárním operátorem. Pro lineární operátory S,T zaveďme standardním způsobem operátory $S+T$ a cT pro $c \in \mathbb{K}$. Složení $S \circ T$ operátorů S,T budeme stručně značit ST.

Definice 1.1.12. Nechť H_1,H_2 jsou lineární prostory a nechť S a T jsou lineární operátory z H_1 do H_2. Operátor T se nazývá *rozšíření* operátoru S (operátor S se nazývá restrikce operátoru T) a píšeme $S \subseteq T$, jestliže

$$\mathscr{D}(S) \subseteq \mathscr{D}(S) \quad \text{a} \quad Sf = Tf \text{ pro } f \in \mathscr{D}(S).$$

Definice 1.1.13. Nechť H_1,H_2 jsou lineární prostory a nechť T je lineární operátor z H_1 do H_2. Množina $\{f \in \mathscr{D}(T) : Tf = 0\}$ se nazývá *jádro* operátoru T a značí se $\mathrm{Ker}\, T$.

Poznámka. Jádro operátoru je podprostor prostoru $\mathscr{D}(T)$.

Definice 1.1.14. Nechť H_1, H_2 jsou lineární normované prostory a nechť T je lineární operátor z H_1 do H_2. Operátor T se nazývá *spojitý v bodě* $f \in \mathscr{D}(T)$, jestliže pro každou posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{D}(T)$ platí

$$f_n \to f \Rightarrow Tf_n \to Tf.$$

Operátor T se nazývá *spojitý*, jestliže je spojitý v každém $f \in \mathscr{D}(T)$.

Dále, operátor T se nazývá *ohraničený*, jestliže existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $f \in \mathscr{D}(T)$ platí

$$\|Tf\| \leq c\,\|f\|\,. \tag{1.1}$$

Poznámka. Ve vztahu (1.1) je norma nalevo v prostoru H_2 a norma napravo v prostoru H_1. Pokud bude jasné, o jakou normu se jedná, budeme je i nadále značit stejným symbolem.

Věta 1.1.15. *Nechť H_1, H_2 jsou lineární normované prostory a nechť T je lineární operátor z H_1 do H_2. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

a) *Operátor T je spojitý.*
b) *Operátor T je spojitý v* 0.
c) *Operátor T je ohraničený.*

Důkaz. Zřejmě a) $\Rightarrow$ b). Nejdříve ukážeme, že b) $\Rightarrow$ c). Předpokládejme, že T není ohraničený, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $f_n \in \mathscr{D}(T)$ takové, že

$$\|Tf_n\| > n\,\|f_n\|\,.$$

Zejména vidíme, že $f_n \neq 0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\|f_n\| = 1/n$. Odtud $f_n \to 0$ a

$$\|Tf_n\| > n\frac{1}{n} = 1,$$

což je ve sporu se spojitostí operátoru T v bodě 0.

Nyní ukážeme, že c) $\Rightarrow$ a). Pro libovolné $f \in \mathscr{D}(T)$ platí $\|Tf\| \leq c\,\|f\|$ pro nějakou konstantu $c > 0$. Zvolme pevně prvek $f_0 \in \mathscr{D}(T)$ a posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{D}(T)$, která konverguje k tomuto prvku. Pak platí

$$\|Tf_n - Tf_0\| = \|T(f_n - f_0)\| \leq c\,\|f_n - f_0\| \to 0.$$

Odtud $Tf_n \to Tf_0$. $\square$

Definice 1.1.16. Nechť H_1, H_2 jsou lineární normované prostory a nechť T je lineární ohraničený operátor z H_1 do H_2. Definujme

$$\|T\| = \inf\{c \in \mathbb{R} : c > 0,\ \|Tf\| \leq c\,\|f\| \text{ pro } f \in \mathscr{D}(T)\}.$$

Číslo $\|T\|$ se nazývá *norma* operátoru T.

Poznámka. Norma operátoru T je normou v prostoru všech lineárních ohraničených operátorů z H_1 do H_2 definovaných na celém H_1. Zřejmě platí

$$\|Tf\| \leq \|T\| \, \|f\|$$

pro $f \in \mathscr{D}(T)$.

Důkaz následujících dvou důležitých vět lze nalézt v [8].

Věta 1.1.17. *Nechť T je lineární ohraničený operátor z H_1 do H_2, kde H_1 je lineární normovaný prostor a H_2 je Banachův prostor. Pak existuje jediné ohraničené rozšíření S operátoru T takové, že $\mathscr{D}(S) = \overline{\mathscr{D}(T)}$. Platí $\|S\| = \|T\|$.*

Věta 1.1.18 (Rieszova věta o reprezentaci)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor. Prvek $g \in H$ určuje lineární spojitý funkcionál na H předpisem $T_g(f) = \langle g, f\rangle$, kde $\mathscr{D}(T_g) = H$. Zobrazení definované předpisem $g \mapsto T_g$ bijektivně zobrazuje celý prostor H na celý prostor lineárních spojitých funkcionálů na H definovaných na celém prostoru H. Platí*

$$T_{c_1 g + c_2 h} = \overline{c_1}\, T_g + \overline{c_2}\, T_h$$

pro $g, h \in H$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

Poznámka. Lineární spojitý funkcionál T na Hilbertově prostoru H (nad $\mathbb{K}$) je lineární spojitý operátor z H do $\mathbb{K}$.

Definice 1.1.19. Nechť H_1, H_2 jsou lineární normované prostory a nechť T je lineární operátor z H_1 do H_2. Operátor T se nazývá *izometrický*, jestliže

$$\mathscr{D}(T) = H_1 \quad \text{a} \quad \|Tf\| = \|f\| \text{ pro } f \in \mathscr{D}(T).$$

Operátor T se nazývá *izomorfismus* z H_1 do H_2, jestliže je izometrický a platí

$$\mathscr{R}(T) = H_2.$$

Operátor T, který je izomorfismem z Hilbertova prostoru H_1 do Hilbertova prostoru H_2 se nazývá *unitární*.

Poznámka. Izometrický operátor T je injektivní, a tedy existuje inverzní operátor T^{-1}, který je izomorfismus z $\mathscr{R}(T)$ do $\mathscr{D}(T)$. Operátor T z Hilbertova prostoru H_1 do Hilbertova prostoru H_2 je izometrický právě tehdy, když

$$\langle Tf, Tg\rangle = \langle f, g\rangle \quad \text{pro} \quad f, g \in \mathscr{D}(T).$$

1.1.3 Adjungovaný operátor

Definice 1.1.20. Nechť H_1, H_2 jsou lineární normované prostory a nechť T je lineární operátor z H_1 do H_2. Řekneme, že operátor T je *hustě definovaný*, jestliže definiční obor $\mathscr{D}(T)$ je hustý v H_1.

Definice 1.1.21. Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory. Nechť T je lineární operátor z H_1 do H_2 a nechť S je lineární operátor z H_2 do H_1. Operátor S nazveme *formálně adjungovaným* k operátoru T, jestliže platí

$$\langle g, Tf\rangle_{H_2} = \langle Sg, f\rangle_{H_1} \quad \text{pro} \quad f \in \mathscr{D}(T),\ g \in \mathscr{D}(S).$$

Poznámka. V definici jsme pro přehlednost rozlišili značení skalárních součinů v jednotlivých prostorech, ale dále již opět budeme značit oba skalární součiny stejně, pokud bude z kontextu zřejmé, o který se právě jedná.

Operátor T z Definice 1.1.21 je zřejmě také formálně adjungovaným k operátoru S, neboť

$$\langle f, Sg\rangle = \overline{\langle Sg, f\rangle} = \overline{\langle g, Tf\rangle} = \langle Tf, g\rangle \quad \text{pro} \quad f \in \mathscr{D}(T),\ g \in \mathscr{D}(S).$$

Z tohoto důvodu budeme také říkat T a S jsou formálně adjungované navzájem. Operátor S_0, takový, že $\mathscr{D}(S_0) = \{0\}$, je formálně adjungovaný s každým operátorem z H_1 do H_2.

Pokud S je formálně adjungovaný k T, pak pro každé $g \in \mathscr{D}(S)$ je lineární funkcionál L_g definovaný vztahy

$$\mathscr{D}(L_g) = \mathscr{D}(T), \quad L_g f = \langle g, Tf\rangle$$

spojitý, neboť pro každé $f \in \mathscr{D}(L_g)$ platí

$$L_g f = \langle g, Tf\rangle = \langle Sg, f\rangle,$$

tj. L_g je zúžení na $\mathscr{D}(T)$ spojitého funkcionálu T_{Sg} určeného Sg, viz Věta 1.1.18.

Jestliže $\mathscr{D}(T)$ je hustý v H_1, pak podle Věty 1.1.17 funkcionál L_g může být rozšířen na $H_1 = \overline{\mathscr{D}(T)}$ jediným způsobem. Nechť L'_g je tímto rozšířením na H_1. Pak podle Věty 1.1.18 existuje jednoznačně určený prvek $h(g) \in H_1$ takový, že

$$L'_g(f) = \langle h(g), f\rangle \quad \text{pro} \quad f \in H_1.$$

Pak zřejmě

$$\langle g, Tf\rangle = L_g(f) = L'_g(f) = \langle h(g), f\rangle \quad \text{pro} \quad f \in \mathscr{D}(T),$$

tedy prvek $h(g)$ je jednoznačně určen prvkem g a operátorem T.

Pokud S je formálně adjungovaný k T a $g \in \mathscr{D}(S)$, pak platí $Sg = h(g)$. Proto v tomto případě je každý formálně adjungovaný operátor k T zúžení adjungovaného operátoru T^*, který je definován níže.

Definice 1.1.22. Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory a nechť T je hustě definovaný lineární operátor z H_1 do H_2. Lineární operátor z H_2 do H_1 nazýváme *adjungovaným* k operátoru T a značíme ho T^*, jestliže

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}(T^*) = \{g \in H_2 : & \text{ existuje } h(g) \in H_1 \text{ takové, že} \\
& \langle g, Tf\rangle = \langle h(g), f\rangle \text{ pro } f \in \mathscr{D}(T)\}, \\
T^*(g) = h(g) & \text{ pro } g \in \mathscr{D}(T^*).
\end{aligned}$$

Důkaz korektnosti Definice 1.1.22. Ukážeme, že h je zobrazení, jinými slovy: ke každému $g \in H_2$ existuje nanejvýš jeden prvek $h(g) \in H_1$ splňující

$$\langle g, Tf \rangle = \langle h(g), f \rangle \text{ pro } f \in \mathscr{D}(T).$$

Pokud pro $g \in H_2$ existují prvky $h_1, h_2 \in H_1$ takové, že $\langle h_1, f \rangle = \langle g, Tf \rangle = \langle h_2, f \rangle$ pro každé $f \in \mathscr{D}(T)$, pak

$$h_1 - h_2 \in \mathscr{D}(T)^\perp = \{0\}.$$

Odtud $h_1 = h_2$. Definiční obor $\mathscr{D}(T^*)$ je neprázdný, neboť určitě $\{0\} \in \mathscr{D}(T^*)$. Definiční obor $\mathscr{D}(T^*)$ je lineární podprostor prostoru H_2 a T^* je lineární zobrazení $\mathscr{D}(T^*) \to H_1$, neboť pro $g_1, g_2 \in \mathscr{D}(T^*)$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ platí

$$T^*(c_1 g_1 + c_2 g_2) = h(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 h(g_1) + c_2 h(g_2) = c_1 T^*(g_1) + c_2 T^*(g_2).$$

Uvědomme si, že pokud $g_1 \in \mathscr{D}(T^*)$ pro $h(g) \in H_1$, pak $c_1 g_1 \in \mathscr{D}(T^*)$ pro $c_1 h(g) \in H_1$, a podobně pro $g_1 + g_2 \in \mathscr{D}(T^*)$. Dále si uvědomme, že

$$\begin{aligned}\langle h(c_1 g_1 + c_2 g_2), f \rangle &= \langle c_1 g_1 + c_2 g_2, Tf \rangle = \\ &= \overline{c_1} \langle g_1, Tf \rangle + \overline{c_2} \langle g_2, Tf \rangle = \\ &= \overline{c_1} \langle h(g_1), f \rangle + \overline{c_2} \langle h(g_2), f \rangle = \\ &= \langle c_1 h(g_1) + c_2 h(g_2), f \rangle\end{aligned}$$

pro $f \in \mathscr{D}(T)$ a $\mathscr{D}(T)$ je hustý v H_1. □

Poznámka. Z již uvedených úvah vyplývá, že

$$\mathscr{D}(T^*) = \{g \in H_2 : \text{funkcionál } L_g(f) = (g, Tf), f \in \mathscr{D}(T) \text{ je spojitý na } \mathscr{D}(T)\}.$$

Operátor T^* je formálně adjungovaný k T a je rozšířením všech formálně adjungovaných operátorů k T.

Věta 1.1.23. *Nechť T a S jsou hustě definované lineární operátory z Hilbertova prostoru H_1 do Hilbertova prostoru H_2. Pak platí následující tvrzení.*

a) *Pokud T^* je hustě definovaný, pak T^{**} je rozšířením operátoru T.*
b) *Platí $\operatorname{Ker} T^* = \mathscr{R}(T)^\perp$.*
c) *Pokud $T \subseteq S$, pak $S^* \subseteq T^*$.*
d) *Platí $(cT)^* = \bar{c}\, T^*$ pro každé $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Důkaz. a) Operátory T a T^* jsou formálně adjungované navzájem. Odtud T je restrikce adjungovaného operátoru T^{**} operátoru T^*.

b) Prvek $g \in \operatorname{Ker} T^*$ právě tehdy, když $g \in \mathscr{D}(T^*)$ a $T^* g = 0$. Z hustoty definičního oboru $\mathscr{D}(T)$ je toto ekvivalentní vztahu

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^* g \rangle = 0$$

pro každé $f \in \mathscr{D}(T)$, který je ekvivalentní výroku $g \in \mathscr{R}(T)^\perp$.

c) Plyne přímo z definice adjungovaného operátoru.

d) Platí $\langle g, Tf \rangle = \langle T^* g, f \rangle$ pro $f \in \mathscr{D}(T)$ a pro $g \in \mathscr{D}(T^*)$. Proto pro operátor cT platí

$$\langle g, cTf \rangle = c \langle g, Tf \rangle = c \langle T^* g, f \rangle = \langle \bar{c}\, T^* g, f \rangle$$

pro $f \in \mathscr{D}(T)$ a pro $g \in \mathscr{D}(T^*)$. □

Definice 1.1.24. Nechť T je lineární operátor na Hilbertově prostoru H. Řekneme, že T je *hermitovský*, jestliže platí

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$$

pro každé $f,g \in \mathscr{D}(T)$. Operátor T je *symetrický*, jestliže je hustě definovaný a hermitovský.

Poznámka. Pro lineární operátor T na Hilbertově prostoru H zřejmě platí: Operátor T je symetrický právě tehdy, když je hustě definovaný a platí $T \subseteq T^*$.

Definice 1.1.25. Nechť T je lineární operátor na Hilbertově prostoru H. Řekneme, že T je *samoadjungovaný*, jestliže je hustě definovaný a platí $T = T^*$.

Definice 1.1.26. Nechť T je lineární operátor z Hilbertova prostoru H_1 do Hilbertova prostoru H_2. *Graf* operátoru T je množina definovaná vztahem

$$G(T) = \{(f, Tf) \in H_1 \times H_2 : f \in \mathscr{D}(T)\}.$$

Poznámka. Množina $H_1 \times H_2$ je Hilbertovým prostorem. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $H_1 \cup H_2 = \{0\}$ a $H_1 \perp H_2$. Pak prostor $H_1 \times H_2$ ztotožníme s prostorem $H_1 \oplus H_2$ následujícím vztahem

$$(f,g) \longmapsto f+g \quad \text{pro} \quad (f,g) \in H_1 \times H_2.$$

Úvaha je korektní, neboť libovolný prvek h prostoru $H_1 \oplus H_2$ můžeme jediným způsobem zapsat ve tvaru $h = f+g$ pro $f \in H_1$ a $g \in H_2$.

Věta 1.1.27. *Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory. Podmnožina G množiny $H_1 \times H_2$ je graf lineárního operátoru z H_1 do H_2 právě tehdy, když G je podprostor splňující následující vlastnost*

$$(0,g) \in G \Rightarrow g = 0. \tag{1.2}$$

Navíc platí, že každý podprostor grafu je graf.

Důkaz. Pokud T je lineární operátor z H_1 do H_2, pak $G(T)$ je zřejmě podprostor, neboť pro $(f_1,g_1),(f_2,g_2) \in G(T)$ a $c_1,c_2 \in \mathbb{K}$ platí

$$\begin{aligned} c_1(f_1,g_1)+c_2(f_2,g_2) &= c_1(f_1,Tf_1)+c_2(f_2,Tf_2) = \\ &= (c_1f_1+c_2f_2, T({}_1f_1+c_2f_2)) \in G(T). \end{aligned}$$

Pokud $(0,g) \in G(T)$, pak $g = T(0) = 0$.

Naopak, nechť G je nyní podprostor prostoru $H_1 \times H_2$ mající vlastnost (1.2). Zkonstruujeme operátor T, pro který platí $G(T) = G$. Označme

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in H_1 : \text{existuje } g(f) \in H_2 \text{ takové, že } (f, g(f)) \in G\}.$$

Pro každé $f \in \mathscr{D}(T)$ existuje právě jedno $g(f) \in H_2$ takové, že $(f, g(f)) \in G$, neboť kdyby $(f,g_1),(f,g_2) \in G$, pak $(0, g_1 - g_2) \in G$ (G je podprostor), tedy $g_1 - g_2 = 0$. Proto můžeme definovat zobrazení T z $\mathscr{D}(T)$ do H_2 vztahem

$$Tf = g(f) \quad \text{pro} \quad (f,g) \in G.$$

Ukážeme, že T je lineární. Pokud $f_1, f_2 \in \mathscr{D}(T)$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$, pak platí

$$(f_1, Tf_1), (f_2, Tf_2) \in G.$$

Odtud (G je podprostor) $(c_1 f_1 + c_2 f_2, c_1 T f_1 + c_2 T f_2) \in G$. Z definice T platí $T(c_1 f_1 + {} + c_2 f_2) = c_1 T f_1 + c_2 T f_2$. Z konstrukce také plyne, že $G(T) = G$. Zřejmě pak i podprostor grafu je graf. □

Pro následující práci zaveďme zobrazení

$$\begin{aligned} U &: H_1 \times H_2 \to H_2 \times H_1, \quad U(f_1, f_2) = (f_2, -f_1), \\ V &: H_1 \times H_2 \to H_2 \times H_1, \quad V(f_1, f_2) = (f_2, f_1), \end{aligned}$$

kde H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Zobrazení U a V jsou izomorfismy z $H_1 \oplus H_2$ do $H_2 \oplus H_1$, existují tedy inverzní operátory. Dále, ortogonální komplement v prostoru $H_1 \times H_2$ (resp. $H_2 \times H_1$) budeme brát ve smyslu prostoru $H_1 \oplus H_2$ (resp. $H_2 \oplus H_1$). Pokud T je injektivní operátor z H_1 do H_2, pak zřejmě platí $G\left(T^{-1}\right) = V(G(T))$.

Věta 1.1.28. *Nechť T je hustě definovaný operátor z H_1 do H_2, kde H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Platí*

$$G(T^*) = U(G(T)^{\perp}) = (UG(T))^{\perp}.$$

Důkaz. Z definice adjungovaného operátoru platí

$$\begin{aligned} G(T^*) &= \{(g,h) \in H_2 \times H_1 : \langle g, Tf \rangle = \langle h, f \rangle \text{ pro } f \in \mathscr{D}(T)\} = \\ &= \{(g,h) \in H_2 \times H_1 : \langle (g,h), (Tf, -f) \rangle_{H_2 \times H_1} = 0 \text{ pro } (f, Tf) \in G(T)\} = \\ &= (UG(T))^{\perp} = U(G(T)^{\perp}). \end{aligned}$$

□

1.2 Uzavřené operátory

Definice 1.2.1. Nechť T je lineární operátor z Hilbertova prostoru H_1 do Hilbertova prostoru H_2. Řekneme, že operátor T je *uzavřený*, jestliže jeho graf $G(T)$ je uzavřená množina v Hilbertově prostoru $H_1 \times H_2$. Dále, řekneme, že *existuje uzavřené rozšíření* operátoru T, jestliže $\overline{G(T)}$ je grafem nějakého operátoru.

Důkaz korektnosti Definice 1.2.2. Ukážeme, že existuje uzavřené rozšíření operátoru T právě tehdy, když existuje rozšíření S operátoru T takové, že S je uzavřený operátor. Pokud existuje uzavřené rozšíření operátoru T, pak podle Věty 1.1.27 existuje jednoznačně určený operátor S takový, že $G(S) = \overline{G(T)}$. Platí $T \subseteq S$. Proto S je uzavřený operátor a je rozšířením operátoru T.

Naopak, pokud S je uzavřený operátor, který je rozšířením operátoru T, pak platí $G(T) \subseteq G(S) = \overline{G(S)}$. Odtud $\overline{G(T)} \subseteq G(S)$, proto $\overline{G(T)}$ je graf nějakého operátoru, viz Věta 1.1.27. □

Definice 1.2.2. Nechť T je lineární operátor z Hilbertova prostoru H_1 do Hilbertova prostoru H_2. Řekneme, že operátor $\overline{T}$ je *uzávěr* operátoru T, jestliže existuje uzavřené rozšíření operátoru T a $\overline{G(T)}$ je graf operátoru $\overline{T}$.

Lemma 1.2.3. *Nechť T je lineární operátor z Hilbertova prostoru H_1 do Hilbertova prostoru H_2.*

a) *Operátor T je uzavřený právě tehdy, když platí: Pokud posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $\mathscr{D}(T)$ konverguje v H_1 a posloupnost $\{Tf_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v H_2, pak*

$$\lim_{n\to\infty} f_n \in \mathscr{D}(T) \quad a \quad T\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} Tf_n.$$

b) *Uzavřené rozšíření operátoru T existuje právě tehdy, když platí: Pokud pro posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $\mathscr{D}(T)$ platí, že $f_n \to 0$ a posloupnost $\{Tf_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní v H_2, pak*

$$\lim_{n\to\infty} Tf_n = 0.$$

c) *Pokud T je uzavřený, pak $\operatorname{Ker} T$ je uzavřený podprostor.*

d) *Pokud T je injektivní, pak T je uzavřený právě tehdy, když T^{-1} je uzavřený.*

Důkaz. a) Ekvivalence je pouze přeformulovaní definice na základě tvrzení: Množina $G(T)$ je uzavřená v $H_1 \times H_2$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq G(T)$ platí

$$x_n \to x_0 \in H_1 \times H_2 \Rightarrow x_0 \in G(T).$$

b) Podle Věty 1.1.27 je množina $\overline{G(T)}$ grafem nějakého operátoru z H_1 do H_1 právě tehdy, když $\overline{G(T)}$ je podprostor a platí $(0,g) \in \overline{G(T)} \Rightarrow g = 0$. Platí $(0,g) \in \overline{G(T)}$ právě tehdy, když existuje posloupnost $\{(f_n, Tf_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq G(T)$ taková, že $(f_n, Tf_n) \to (0,g)$. Odtud plyne tvrzení.

c) Plyne z tvrzení a), ve kterém se zaměříme na podprostor $\operatorname{Ker} T \subseteq \mathscr{D}(T)$.

d) Platí $G(T^{-1}) = V(G(T))$, kde V je izomorfismus. Odtud plyne tvrzení. □

Věta 1.2.4. *Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory a T je lineární hustě definovaný operátor z H_1 do H_2. Pak platí následující tvrzení.*

a) *Operátor T^* je uzavřený.*

b) *Uzavřené rozšíření operátoru T existuje právě tehdy, když T^* je hustě definovaný. Pokud T^* je hustě definovaný, platí $\overline{T} = T^{**}$.*

c) *Pokud existuje uzavřené rozšíření operátoru T, pak $\left(\overline{T}\right)^* = T^*$.*

Důkaz. a) Z Věty 1.1.28 platí $G(T^*) = (UG(T))^{\perp}$. Vzhledem k tomu, že ortogonální komplement je vždy uzavřený podprostor, je $G(T^*)$ uzavřená množina v $H_2 \times H_1$.

b) Platí

$$\begin{aligned}\overline{G(T)} = G(T)^{\perp\perp} = (U^{-1}G(T^*))^{\perp} = \\ = \{(f,g) \in H_1 \times H_2 : \langle f, T^*h\rangle - \langle g,h\rangle = 0 \text{ pro } h \in \mathscr{D}(T^*)\},\end{aligned}$$

kde rovnosti postupně plynou z Lemmatu 1.1.4, Věty 1.1.28 a z definic operátoru U a adjungovaného operátoru. Platí $(0,g) \in \overline{G(T)}$ právě tehdy, když $g \in D(T^*)^{\perp}$. Odtud, implikace

$$(0,g) \in \overline{G(T)} \Rightarrow g = 0$$

platí právě tehdy, když $\overline{\mathscr{D}(T^*)} = H_2$. Proto $\overline{G(T)}$ je grafem nějakého operátoru právě tehdy, když T^* je hustě definovaný.

Pokud $\mathscr{D}(T^*)$ je hustý, pak platí

$$G(T^{**}) = U^{-1}(G(T^*)^\perp) = U^{-1}U(G(T)^{\perp\perp}) = \overline{G(T)} = G(\overline{T}),$$

kde jsme několikrát využili Větu 1.1.28.

c) Pokud existuje uzavřené rozšíření operátoru T, pak platí

$$G(T^*) = U(G(T)^\perp) = U\left(\overline{G(T)}^\perp\right) = U\left(G\left(\overline{T}\right)\right)^\perp = G\left(\left(\overline{T}\right)^*\right).$$

Odtud $T^* = \left(\overline{T}\right)^*$. □

Věta 1.2.5. *Nechť T je symetrický operátor na Hilbertově prostoru H, pak existuje jeho uzavřené rozšíření. Navíc, uzávěr $\overline{T}$ operátoru T je také symetrický.*

Důkaz. Pro symetrický operátor platí $T \subseteq T^*$ a T^* je uzavřený. Odtud existuje uzavřené rozšíření operátoru T. Pro každé $f, g \in \mathscr{D}\left(\overline{T}\right)$ existují posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{g_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \subseteq \mathscr{D}(T)$ takové, že $f_n \to f$, $g_n \to g$, $Tf_n \to \overline{T}f$ a $Tg_n \to \overline{T}g$. Ze spojitosti skalárního součinu, a protože T je symetrický, platí

$$\langle \overline{T}f, g\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Tf_n, g_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, Tg_n\rangle = \langle f, \overline{T}g\rangle.$$

□

Věta 1.2.6 (Banachova věta; Věta o uzavřeném grafu)**.** *Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory a nechť T je lineární operátor z H_1 do H_2. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

a) *Operátor T je uzavřený a $\mathscr{D}(T)$ je uzavřený.*
b) *Operátor T je ohraničený a $\mathscr{D}(T)$ je uzavřený.*
c) *Operátor T je ohraničený a uzavřený.*

Důkaz Banachovy věty lze nalézt v [8].

1.3 Spektrum operátoru

Definice 1.3.1. Nechť T je lineární operátor na komplexním Hilbertově prostoru H. Číslo $z \in \mathbb{C}$ se nazývá *vlastní číslo* (nebo *vlastní hodnota*) operátoru T, jestliže existuje $f \in \mathscr{D}(T)$ takové, že $f \neq 0$ a

$$Tf = zf.$$

Prvek f se nazývá *vlastní vektor* (nebo *vlastní prvek*) příslušný vlastnímu číslu z.

Nechť $z \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo operátoru T, pak $\mathrm{Ker}(zI - T)$ se nazývá *vlastní podprostor* příslušný vlastnímu číslu z. Dimenze prostoru $\mathrm{Ker}(zI - T)$ se nazývá *násobnost* vlastního čísla z. Pokud dimenze prostoru $\mathrm{Ker}(zI - T)$ neexistuje, pak říkáme, že z je *nekonečné násobnosti*.

Poznámka. Zřejmě, pokud z je vlastní číslo operátoru T, pak operátor $zI - T$ není injektivní, tj. není invertibilní.

Definice 1.3.2. Nechť T je lineární operátor na komplexním Hilbertově prostoru H. Množinu

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} : \text{operátor } (zI - T)^{-1} \text{ existuje, je spojitý a } \mathscr{R}(zI - T) = H\}$$

nazýváme *resolvent* operátoru T. Prvky množiny $\rho(T)$ nazýváme *regulární hodnoty* operátoru T. Množinu

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

nazýváme *spektrum* operátoru T. Množinu vlastních hodnot značíme $\sigma_P(T)$ a nazýváme *bodové spektrum* operátoru T.

Věta 1.3.3. *Nechť T je lineární uzavřený operátor na Hilbertově prostoru H. Pak $z \in \sigma(T)$ právě tehdy, když $zI - T$ není injektivní nebo $\mathscr{R}(zI - T) \neq H$.*

Důkaz. Stačí dokázat, že pokud $zI - T$ je injektivní a platí $\mathscr{R}(zI - T) = H$, pak operátor $(zI - T)^{-1}$ je spojitý. Protože T je uzavřený, je i operátor $zI - T$ uzavřený. Operátor $zI - T$ je navíc injektivní, tedy podle části d) Věty 1.2.3 je operátor $(zI - T)^{-1}$ uzavřený. Operátor $(zI - T)^{-1}$ je uzavřený a jeho definiční obor $\mathscr{D}((zI - T)^{-1}) = H$ je také uzavřený, tedy podle Banachovy věty 1.2.6 je $(zI - T)^{-1}$ spojitý. $\square$

Poznámka. Pokud $(zI - T)^{-1}$ existuje a je spojitý, ale T není uzavřený operátor, pak také $z - T$ a $(zI - T)^{-1}$ nejsou uzavřené operátory a $\mathscr{R}(zI - T)$ není uzavřená množina. Odtud $\rho(T) = \emptyset$.

Lemma 1.3.4. *Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory a T je injektivní lineární uzavřený operátor takový, že $\mathscr{R}(T) = H_2$. Dále, nechť S je lineární operátor z H_1 do H_2 takový, že $\mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{D}(S)$, ST^{-1} je ohraničený a platí*

$$\left\|ST^{-1}\right\| < 1.$$

Pak $T + S$ je injektivní a platí $\mathscr{R}(T + S) = H_2$.

Důkaz Lemmatu 1.3.4 lze najít v [8].

Věta 1.3.5. *Nechť T je lineární uzavřený operátor na Hilbertově prostoru H. Pak množina $\rho(T)$ je otevřená, tj. množina $\sigma(T)$ je uzavřená.*

Důkaz. Nechť $z_0 \in \rho(T)$ a nechť $z \in \mathbb{C}$ je takové, že $|z - z_0| < \left\|(z_0 I - T)^{-1}\right\|$. Z definice $\rho(T)$ plyne, že norma $\left\|(z_0 I - T)^{-1}\right\|$ existuje. V Lemmatu 1.3.4 nahraďme operátor T operátorem $z_0 I - T$ z tohoto důkazu a operátor S nahraďme $(z - z_0)I$ z tohoto důkazu. Pak platí, že operátor $zI - T = z_0 I - T + (z - z_0)I$ je injektivní a $\mathscr{R}(T + S) = H$. Proto $z \in \rho(T)$. Odtud množina $\rho(T)$ je otevřená. $\square$

Věta 1.3.6. *Nechť T je lineární spojitý operátor na Hilbertově prostoru H takový, že definiční obor $\mathscr{D}(T) = H$. Pak*

$$\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}.$$

Důkaz. Nechť T splňuje předpoklady věty a nechť $z \in \mathbb{C}$ je takové, že $|z| > \|T\|$. V Lemmatu 1.3.4 nahraďme operátor T operátorem zI z tohoto důkazu a operátor S nahraďme T z tohoto důkazu. Pak operátor $zI - T$ je injektivní a platí $\mathscr{R}(T + S) = H$. Proto $z \in \rho(T)$. $\square$

1.4 Symetrické a samoadjungované operátory

1.4.1 Základní vlastnosti

Věta 1.4.1. *Nechť T je hermitovský operátor na komplexním Hilbertově prostoru H. Pak platí následující tvrzení.*

a) *Platí $\sigma_P \subseteq \mathbb{R}$.*
b) *Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům operátoru T jsou ortogonální.*
c) *Pro libovolné $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ je operátor $zI - T$ injektivní a operátor $(zI-T)^{-1}$ spojitý a platí*

$$\|zI - T\| \leq \frac{1}{\operatorname{Im} z}.$$

Důkaz. Tvrzení a) a b) jsou zřejmá a plynou přímo z definice hermitovského operátoru. Dokážeme pouze tvrzení c).

Nechť $z = x + \mathrm{i}y$ pro $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$. Pro každé $f \in \mathscr{D}(T)$ platí

$$\|(zI-T)f\|^2 = \|(xI-T)f + \mathrm{i}yf\|^2 = \|(xI-T)f\|^2 + |y|^2\|f\|^2 \geq |\operatorname{Im} z|^2\|f\|^2.$$

Poznamenejme, že v druhé rovnosti jsme využili definice hermitovského operátoru. Dále, protože $y \neq 0$, je operátor $zI - T$ injektivní. Pro $g = (zI-T)f \in \mathscr{D}((zI-T)^{-1})$ tedy platí

$$\|g\|^2 \geq |\operatorname{Im} z|^2 \left\|(zI-T)^{-1}g\right\|^2.$$

Odtud

$$\left\|(zI-T)^{-1}g\right\| \leq |\operatorname{Im} z|^{-1}\|g\|,$$

tedy operátor $(zI-T)^{-1}$ je ohraničený. Z definice normy operátoru ihned plyne, že

$$\left\|(zI-T)^{-1}\right\| \leq |\operatorname{Im} z|^{-1}.$$

□

Definice 1.4.2. Symetrický operátor T na Hilbertově prostoru H se nazývá *esenciálně samoadjungovaný*, jestliže $\overline{T}$ je samoadjungovaný.

Věta 1.4.3. *Nechť T je symetrický operátor na Hilbertově prostoru H. Operátor T je esenciálně samoadjungovaný právě tehdy, když T^* je symetrický. Pokud T^* je symetrický, pak $T^* = \overline{T}$.*

Důkaz. Nechť T je esenciálně samoadjungovaný, pak $\left(\overline{T}\right)^* = \overline{T}$. Z Věty 1.2.4 plyne, že $\overline{T} = T^{**}$ a $\left(\overline{T}\right)^* = T^*$. Proto T^* je samoadjungovaný (tedy i symetrický) a platí $\overline{T} = T^*$.

Naopak, pokud T^* je symetrický, pak podle Věty 1.2.5 $\overline{T}$ je symetrický a opět z Věty 1.2.4 plyne, že $\left(\overline{T}\right)^* = T^*$. Proto platí $\overline{T} \subseteq \left(\overline{T}\right)^* = T^* \subseteq T^{**} = \overline{T}$. Odtud $\overline{T} = \left(\overline{T}\right)^*$. □

Věta 1.4.4. *Nechť T je symetrický operátor na komplexním Hilbertově prostoru H. Operátor T je samoadjungovaný (resp. esenciálně samoadjungovaný) právě tehdy, když*

$$\mathscr{R}(\mathrm{i} - T) = H \quad a \quad \mathscr{R}(-\mathrm{i} - T) = H$$
$$(resp.\ \overline{\mathscr{R}(\mathrm{i} - T)} = H \quad a \quad \overline{\mathscr{R}(-\mathrm{i} - T)} = H).$$

Důkaz Věty 1.4.4 můžeme nalézt v [8].

1.4.2 Deficitní indexy a Cayleyova transformace

Věta 1.4.5. *Nechť T je libovolný lineární operátor na komplexním Hilbertově prostoru H. Označme symbolem $\Gamma(T)$ množinu všech $z \in \mathbb{C}$, pro které existuje konstanta $k(z) > 0$ taková, že platí*

$$\|(zI - T)f\| \geq k(z)\,\|f\| \tag{1.3}$$

pro každé $f \in \mathscr{D}(T)$. Pak platí následující tvrzení.

a) *Platí $z \in \Gamma(T)$ právě tehdy, když operátor $zI - T$ má spojitou inverzi. Pokud $z \in \Gamma(T)$ s konstantou $k(z)$, pak platí*

$$\left\|(zI - T)^{-1}\right\| \leq k(z)^{-1}.$$

b) *Pokud T je hermitovský, pak $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \Gamma(T)$.*

Důkaz. a) Nechť $z \in \Gamma(T)$. Pokud $(zI - T)f = 0$, pak z nerovnosti (1.3) plyne, že i $f = 0$, neboť $k(z) > 0$ a nerovnost (1.3) platí pro všechna $f \in \mathscr{D}(T)$. Protože operátor $zI - T$ je injektivní, existuje jeho inverze. Nerovnost (1.3) můžeme přepsat na tvar

$$\|g\|\,k(z)^{-1} \geq \left\|(zI - T)^{-1}g\right\|$$

pro $g \in \mathscr{R}(zI - T) = \mathscr{D}((zI - T)^{-1})$. Proto operátor $(zI - T)^{-1}$ je ohraničený. Operátor $(zI - T)^{-1}$ je zřejmě i lineární, a proto je spojitý. Vzhledem k definici normy platí $\left\|(zI - T)^{-1}\right\| \leq k(z)^{-1}$.

Naopak, nechť operátor $zI - T$ je injektivní, tj. ekvivalentně, existuje jeho inverze a operátor $(zI - T)^{-1}$ je spojitý, tj. i ohraničený. Platí

$$\left\|(zI - T)^{-1}f\right\| \leq \left\|(zI - T)^{-1}\right\|\,\|f\|$$

pro každé $f \in \mathscr{D}((zI - T)^{-1}) = \mathscr{R}(zI - T)$. Odtud

$$\left\|(zI - T)^{-1}(zI - T)g\right\| \leq \left\|(zI - T)^{-1}\right\|\,\|(zI - T)g\|$$

pro každé $g \in \mathscr{D}(zI - T) = \mathscr{D}(T)$, tj.

$$\|g\|\,\left\|(zI - T)^{-1}\right\|^{-1} \leq \|(zI - T)g\|$$

pro $g \in \mathscr{D}(T)$. Proto $z \in \Gamma(T)$ pro konstantu $k(z) = \left\|(zI - T)^{-1}\right\|^{-1}$.

b) Nechť T je hermitovský operátor, $z \in \mathbb{C}$ libovolné a tvaru $z = a + \mathrm{i}b$, kde $b \neq 0$. Pro $f \in \mathscr{D}(T)$ platí

$$\begin{aligned}
\|(zI - T)f\|^2 &= \|(aI + \mathrm{i}bI - T)f\|^2 = \\
&= \|(aI - T)f\|^2 + \|\mathrm{i}bf\|^2 + \\
&\quad + \langle (aI - T)f, \mathrm{i}bf\rangle + \langle \mathrm{i}bf, (aI - T)f\rangle = \\
&= \|(aI - T)f\|^2 + b^2\,\|f\|^2 \geq b^2\,\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Proto $z \in \Gamma(T)$ pro konstantu $k(z) = |b|$. □

Definice 1.4.6. Nechť T lineární operátor na komplexním Hilbertově prostoru a $z \in \mathbb{C}$. Definujme

$$\beta(T,z) = \dim \mathscr{R}(zI - T)^{\perp}.$$

Pro pevné T a pevné číslo z se číslo $\beta(T,z)$ nazývá *deficitní index* operátoru T a čísla z. Pokud prostor $\mathscr{R}(zI - T)^{\perp}$ je nekonečně dimenzionální, pokládáme $\beta(T,z) = \infty$.

Lemma 1.4.7. *Nechť T je lineární operátor na komplexním Hilbertově prostoru, pak $\beta(T,z)$ je konstantní funkce na každé souvislé podmnožině $\Gamma(T)$.*

Důkaz Lemmatu 1.4.7 se nalézá v [8].

Pro hermitovský operátor T na komplexním Hilbertově prostoru podle Věty 1.4.5 platí, že $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \Gamma(T)$. Proto podle Lemmatu 1.4.7 je $\beta(T,z)$ konstantní na množinách $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ a $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0\}$. Na základě těchto poznatků můžeme definovat deficitní indexy pro hermitovský operátor jednodušeji, a to následovně.

Definice 1.4.8. Nechť T je hermitovský operátor na komplexním Hilbertově prostoru. Zaveďme označení

$$\gamma_{+}(T) = \beta(T,i), \quad \gamma_{-}(T) = \beta(T,-i).$$

Čísla $\gamma_{+}(T), \gamma_{-}(T)$ nazýváme *deficitními indexy* (hermitovského) operátoru T a zapisujeme je ve tvaru uspořádané dvojice

$$(\gamma_{+}(T), \gamma_{-}(T)).$$

Přeformulujme Větu 1.4.4 vzhledem k označením z Definice 1.4.8.

Věta 1.4.9. *Nechť T je symetrický operátor na komplexním Hilbertově prostoru. T je esenciálně samoadjungovaný právě tehdy, když*

$$(\gamma_{+}(T), \gamma_{-}(T)) = (0,0). \tag{1.4}$$

Poznámka. Pokud je operátor T ve Větě 1.4.9 navíc uzavřený, pak rovnost (1.4) nastává právě tehdy, když T je samoadjungovaný.

Definice 1.4.10. Nechť T je symetrický operátor na komplexním Hilbertově prostoru. Operátor

$$V = (\mathrm{i}I - T)(-\mathrm{i}I - T)^{-1}$$

nazýváme *Cayleyovou transformací* operátoru T.

Poznámka. Operátory $(\mathrm{i}I - T), -\mathrm{i}I - T$ jsou lineární. Podle Věty 1.4.5 operátor $(-\mathrm{i}I - T)^{-1}$ existuje. Operátor V je složením dvou lineárních operátorů, tedy V je lineární. Operátor V je také surjektivním zobrazením z $\mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T)$ do $\mathscr{R}(\mathrm{i}I - T)$, neboť operátor $(-\mathrm{i}I - T)^{-1}$ zobrazuje surjektivně $\mathscr{D}(V) = \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T)$ do $\mathscr{D}(-\mathrm{i}I - T) = \mathscr{D}(T)$ a operátor $(\mathrm{i}I - T)$ zobrazuje surjektivně $\mathscr{D}(T)$ do $\mathscr{R}(\mathrm{i}I - T)$.

Věta 1.4.11. *Nechť T je symetrický operátor na komplexním Hilbertově prostoru H. Cayleyova transformace V operátoru T je izometrický operátor z $\mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T)$ do $\mathscr{R}(\mathrm{i}I - T)$. Množina $\mathscr{R}(I - V)$ je hustá v H a platí*

$$T = \mathrm{i}(I + V)(I - V)^{-1}. \tag{1.5}$$

Zejména, operátor T je jednoznačně určen operátorem V.

Důkaz. Pro každé $g = (-\mathrm{i}I - T)f \in \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T) = \mathscr{D}(V)$ platí

$$\begin{aligned}
\|Vg\|^2 &= \left\|(\mathrm{i}I - T)(-\mathrm{i}I - T)^{-1}g\right\|^2 = \|(\mathrm{i}I - T)f\| = \\
&= \|f\|^2 + \|Tf\|^2 - \langle \mathrm{i}f, Tf\rangle - \langle Tf, \mathrm{i}f\rangle = \\
&= \|f\|^2 + \|Tf\|^2 = \\
&= \|f\|^2 + \|Tf\|^2 - \langle -\mathrm{i}f, Tf\rangle - \langle Tf, -\mathrm{i}f\rangle = \\
&= \|(-\mathrm{i}I - T)f\|^2 = \|g\|^2.
\end{aligned}$$

Proto V je izometrický operátor z $\mathscr{D}(V)$ do $\mathscr{R}(\mathrm{i}I - T)$. Cayleyovu transformaci přepišme do tvaru

$$V = -(\mathrm{i}I - T)(\mathrm{i}I + T)^{-1},$$

pak

$$\begin{aligned}
I - V &= I + (\mathrm{i}I - T)(\mathrm{i}I + T)^{-1} = [(\mathrm{i}I + T) + (\mathrm{i}I - T)]\,(\mathrm{i}I + T)^{-1} = \\
&= 2\mathrm{i}(\mathrm{i}I + T)^{-1}, \\
I + V &= I - (\mathrm{i}I - T)(\mathrm{i}I + T)^{-1} = [(\mathrm{i}I + T) - (\mathrm{i}I - T)]\,(\mathrm{i}I + T)^{-1} = \\
&= 2T(\mathrm{i}I + T)^{-1}.
\end{aligned}$$

Z vyjádření plyne, že $\mathscr{R}(I - V) = \mathscr{D}(T)$ je hustý, neboť $\mathscr{D}(T)$ je hustý jakožto definiční obor symetrického operátoru a dále, že operátor $I - V$ je invertibilní. Platí

$$\mathrm{i}(I + V)(I - V)^{-1} = 2\mathrm{i}(2\mathrm{i})^{-1}T(\mathrm{i}I + T)^{-1}(\mathrm{i}I + T) = T.$$

□

Poznámka. Cayleyova transformace V operátoru T je izomorfismus z $\mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T)$ do prostoru $\mathscr{R}(\mathrm{i}I - T)$, neboť je izometrickým operátorem a $\mathscr{R}(V) = \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T)$.

Věta 1.4.12. *Nechť V je lineární operátor na komplexním Hilbertově prostoru H. Operátor V je Cayleyovou transformací symetrického operátoru T na H právě tehdy, když operátor V splňuje následující dvě vlastnosti.*

a) *Operátor V je izometrický operátor z $\mathscr{D}(V)$ do $\mathscr{R}(V)$.*
b) *Množina $\mathscr{R}(I - V)$ je hustá v H.*

Důkaz. Nechť V je Cayleyova transformace symetrického operátoru T. Z Věty 1.4.11 plyne, že podmínky a) a b) platí. Navíc V jednoznačně určuje operátor T vztahem (1.5). Možnost vyjádřit operátor T v tomto tvaru je tedy nutnou podmínkou pro to, aby V mohl být Cayleyovou transformací T.

Nechť operátor V splňuje podmínky a) a b). Předpokládejme, že pro $g \in \mathscr{D}(V)$ platí $(I - V)g = 0$, pak pro libovolné $f \in \mathscr{D}(V)$ obdržíme

$$\langle g, f - Vf\rangle = \langle g, f\rangle - \langle g, Vf\rangle = \langle g, f\rangle - \langle Vg, Vf\rangle = \langle g, f\rangle - \langle g, f\rangle = 0,$$

proto $g \perp \mathscr{R}(I - V)$. Podle předpokladu $\mathscr{R}(I - V)$ je hustý v H, tj. nutně $g = 0$. Dokázali jsme, že operátor $I - V$ je injektivní, tedy invertibilní. Definujme operátor T vztahem (1.5), tj. $T = \mathrm{i}(I+V)(I-V)^{-1}$. Definiční obor $\mathscr{D}(T) = \mathscr{R}(I-V)$ je hustý podle předpokladu b). Pro libovolné $f = (I-V)f_1$ a $g = (I-V)g_1$ z $\mathscr{D}(T)$ platí

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle &= \langle \mathrm{i}(I+V)(I-V)^{-1}f, g\rangle = -\mathrm{i}\langle (I+V)f_1, (I-V)g_1\rangle = \\ &= -\mathrm{i}\left[\langle f_1, g_1\rangle + \langle Vf_1, g_1\rangle - \langle f_1, Vg_1\rangle - \langle Vf_1, Vg_1\rangle\right] = \\ &= -\mathrm{i}\left[\langle Vf_1, Vg_1\rangle + \langle Vf_1, g_1\rangle - \langle f_1, Vg_1\rangle - \langle f_1, g_1\rangle\right] = \\ &= \mathrm{i}\langle (I-V)f_1, (I+V)g_1\rangle = \langle f, \mathrm{i}(I+V)(I-V)^{-1}g\rangle = \langle f, Tg\rangle.\end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že T je symetrický. Dále ukážeme, že V je Cayleyova transformace operátoru T. Platí

$$\begin{aligned}\mathrm{i}I - T &= \mathrm{i} - \mathrm{i}(I+V)(I-V)^{-1} = \mathrm{i}\left[(I-V)-(I+V)\right](I-V)^{-1} = \\ &= -2\mathrm{i}V(\mathrm{i}I-V)^{-1}, \\ -\mathrm{i}I - T &= -\mathrm{i} - \mathrm{i}(I+V)(I-V)^{-1} = -\mathrm{i}\left[(I-V)+(I+V)\right](I-V)^{-1} = \\ &= -2\mathrm{i}(\mathrm{i}I-V)^{-1},\end{aligned}$$

tedy

$$(\mathrm{i}I-T)(-\mathrm{i}I-T)^{-1} = -2\mathrm{i}(-2\mathrm{i})^{-1}V(\mathrm{i}I-V)^{-1}(\mathrm{i}I-V) = V.$$

□

Věta 1.4.13. *Nechť T je symetrický operátor na komplexním Hilbertově prostoru H a V je Cayleyova transformace operátoru T.*

a) *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
   (i) *Operátor T je uzavřený.*
   (ii) *Operátor V je uzavřený.*
   (iii) *Množina $\mathscr{D}(V) = \mathscr{R}(\mathrm{i}I+T)$ je uzavřená.*
   (iv) *Množina $\mathscr{R}(V) = \mathscr{R}(\mathrm{i}I-T)$ je uzavřená.*

b) *Operátor T je samoadjungovaný právě tehdy, když V je unitární operátor na H.*

Důkaz. a) Nejprve paralelně dokážeme, že (i) $\Leftrightarrow$ (iii) a (i) $\Leftrightarrow$ (iv). Operátor T je uzavřený právě tehdy, když $-\mathrm{i}I-T$, resp. $\mathrm{i}I-T$ je uzavřený. Podle Věty 1.4.5 $-\mathrm{i}I-T$, resp. $\mathrm{i}I-T$ je injektivní. Tedy podle části d) Lemmatu 1.2.3 je $-\mathrm{i}I-T$, resp. $\mathrm{i}I-T$ je uzavřený právě tehdy, když $(-\mathrm{i}I-T)^{-1}$, resp. $(\mathrm{i}I-T)^{-1}$ je uzavřený. Opět podle Věty 1.4.5 jsou operátory $(-\mathrm{i}I-T)^{-1}$, $(\mathrm{i}I-T)^{-1}$ ohraničené. Z Banachovy věty 1.2.6 $(-\mathrm{i}I-T)^{-1}$, resp. $(\mathrm{i}I-T)^{-1}$ je uzavřený právě tehdy, když $\mathscr{D}((-\mathrm{i}I-T)^{-1}) = \mathscr{D}(V)$, resp. $\mathscr{D}((\mathrm{i}I-T)^{-1}) = \mathscr{R}(V)$ je uzavřený.

Nyní ukážeme, že (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Operátor V je izometrický, proto je i ohraničený. Ohraničený operátor je uzavřený právě tehdy, když je uzavřený jeho definiční obor, viz opět Věta 1.2.6.

b) Z Věty 1.4.4 plyne, že T je samoadjungovaný právě tehdy, když $\mathscr{R}(\mathrm{i}I-T) = H$ a $\mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T) = H$, tj. právě tehdy, když $\mathscr{D}(V) = H$ a $\mathscr{R}(V) = H$. Odtud plyne, že operátor V je unitární na H. □

Věta 1.4.14. *Nechť T_1 a T_2 jsou symetrické operátory na komplexním Hilbertově prostoru a V_1, resp. V_2 je Cayleyova transformace operátoru T_1, resp. T_2. Pak $T_1 \subseteq T_2$ právě tehdy, když $V_1 \subseteq V_2$.*

Důkaz. Nechť $T_1 \subseteq T_2$. Cayleyovy tranformace jsou dány vztahy

$$V_1 = (\mathrm{i}I - T_1)(-\mathrm{i}I - T_1)^{-1},$$
$$V_2 = (\mathrm{i}I - T_2)(-\mathrm{i}I - T_2)^{-1}.$$

Platí

$$\mathscr{D}(V_1) = \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_1) \subseteq \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_2) = \mathscr{D}(V_2),$$

neboť $T_1 \subseteq T_2$, tj. i $\mathscr{R}(T_1) \subseteq \mathscr{R}(T_2)$. Pro libovolné $f = (-\mathrm{i}I - T_1)f_1 \in \mathscr{D}(V_1)$

$$\begin{aligned} V_1 f &= (\mathrm{i}I - T_1)(-\mathrm{i}I - T_1)^{-1} f = \\ &= (\mathrm{i}I - T_2)(-\mathrm{i}I - T_1)^{-1}(-\mathrm{i}I - T_1) f_1 = \\ &= (\mathrm{i}I - T_2)(-\mathrm{i}I - T_2)^{-1}(-\mathrm{i}I - T_2) f_1 = \\ &= (\mathrm{i}I - T_2)(-\mathrm{i}I - T_2)^{-1} f = V_2 f. \end{aligned}$$

Opačné tvrzení se dokáže analogicky využitím vztahu (1.5) pro T_1 a T_2. □

Na základě Věty 1.4.14 můžeme charakterizovat všechna symetrická rozšíření symetrického operátoru T. Nechť V je Cayleyova transformace operátoru T. Vezměme všechna rozšíření operátoru V, která splňují podmínku a) z Věty 1.4.12 (podmínku b) splňují triviálně na základě Věty 1.4.14). Operátor V' je takové rozšíření operátoru V právě tehdy, když $T' = \mathrm{i}(I + V')(I - V')^{-1}$ je symetrickým operátorem s Cayleyovou transformací V' (Věta 1.4.12) a je rozšířením operátoru T (Věta 1.4.14).

Samoadjungovaná budou právě ta symetrická rozšíření operátoru T, pro která jejich Cayleyova transformace bude unitární operátor na celém Hilbertově prostoru. Zejména, T má samoadjungované rozšíření T' právě tehdy, když V má rozšíření, které je unitárním operátorem na celém Hilbertově prostoru a Cayleovou transformací operátoru T' zadanou vztahem $V' = (\mathrm{i}I - T')(-\mathrm{i}I - T')^{-1}$.

Následující věta obsahuje konstrukci rozšíření dané Cayleyovy transformace. V této větě budeme požadovat uzavřenost symetrického operátoru T, abychom mohli využít Větu 1.4.13.

Věta 1.4.15. *Nechť T je uzavřený symetrický operátor na komplexním Hilbertově prostoru H a V je Cayleyova transformace operátoru T.*

a) *V' je Cayleyova transformace uzavřeného symetrického rozšíření T' operátoru T právě tehdy, když existuje uzavřený podprostor F_- prostoru $\mathscr{R}(\mathrm{i}I - T)^\perp$, uzavřený podprostor F_+ prostoru $\mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T)^\perp$ a izomorfismus V_F z F_+ do F_-, pro které platí*

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(V') &= \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T') = \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T) \oplus F_+, \\ V'(f+g) &= Vf + V_F g \quad \text{pro} \quad f \in \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T),\ g \in F_+, \\ \mathscr{R}(V') &= \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T') = \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T) \oplus F_-. \end{aligned}$$

Navíc F_+ a F_- mají stejnou dimenzi.

b) *Operátor V' z části a) tohoto tvrzení je unitární na H právě tehdy, když*

$$F_+ = \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T)^\perp \quad a \quad F_- = \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T)^\perp.$$

c) *Operátor T má samoadjungované rozšíření právě tehdy, když pro deficitní indexy platí $\gamma_+(T) = \gamma_-(T)$.*

Důkaz. a) Nechť V' má danou formu, pak zřejmě V' je izomorfismus z $\mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T)\oplus F_+$ do $\mathscr{R}(\mathrm{i}I-T)\oplus F_-$. Operátor V' tedy splňuje podmínku a) z Věty 1.4.12 a podmínka b) plyne z hustoty $\mathscr{R}(I-V)$, neboť pro každé rozšíření W operátoru V platí $\mathscr{R}(I-V)\subseteq\mathscr{R}(I-W)$. Proto V' je Cayleyova transformace symetrického rozšíření T' operátoru T.

Předpokládejme, že V' je Cayleyova transformace symetrického rozšíření T' operátoru T. Položme

$$\begin{aligned} F_+ &= \mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T')\ominus\mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T), \\ F_- &= \mathscr{R}(\mathrm{i}I-T')\ominus\mathscr{R}(\mathrm{i}I-T). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Z toho vyjádření plyne, že

$$\begin{aligned} F_+\oplus\mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T) &= \mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T'), \\ F_-\oplus\mathscr{R}(\mathrm{i}I-T) &= \mathscr{R}(\mathrm{i}I-T'). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Položením $V_F = V'|_{F_+}$ dostáváme tvrzení. Navíc, protože V_F je izomorfismus z F_+ do F_-, platí

$$\dim F_+ = \dim F_-.$$

b) V' je unitární na H právě tehdy, když $\mathscr{D}(V') = H$ a $\mathscr{R}(V') = H$, tj. právě tehdy, když $F_+ = \mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T)^\perp$ a $F_- = \mathscr{R}(\mathrm{i}I-T)^\perp$.

c) Z částí a) a b) tohoto důkazu Cayleyova transformace, která je rozšířením V, je unitárním operátorem na H právě tehdy, když existuje izomorfismus V_F z $\mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T)^\perp$ do $\mathscr{R}(\mathrm{i}I-T)^\perp$. Ten existuje právě tehdy, když

$$\dim\mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T)^\perp = \dim\mathscr{R}(\mathrm{i}I-T)^\perp.$$

□

Lineární operátor T na komplexním Hilbertově prostoru $\mathscr{L}^2(a,b)$ je reálný, jestliže

$$\overline{Tf} = T\overline{f}$$

pro $f\in\mathscr{D}(T)$.

Věta 1.4.16. *Nechť T je reálný symetrický operátor na komplexním Hilbertově prostoru $\mathscr{L}^2(a,b)$, pak*

$$\gamma_+(T) = \gamma_-(T).$$

Důkaz. Nechť $f\in\mathscr{R}(\mathrm{i}I-T)^\perp$, pak pro libovolné $g\in\mathscr{D}(T)$ platí

$$\langle\overline{f},(-\mathrm{i}I-T)\overline{g}\rangle = \langle\overline{f},\overline{(\mathrm{i}I-T)g}\rangle = \langle(\mathrm{i}I-T)g,f\rangle = 0.$$

Proto $\overline{f}\in\mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T)^\perp$. Podobně se dá ukázat, že pokud $f\in\mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T)^\perp$, pak $\overline{f}\in\mathscr{R}(\mathrm{i}I-T)^\perp$. Definujme nyní operátor $Kf=\overline{f}$. Z dokázaného plyne, že

$$K(\mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T)^\perp) = \mathscr{R}(\mathrm{i}I-T)^\perp.$$

Pokud $\{e_i\}_{i\in I}$ pro vhodnou indexovou množinu I je báze prostoru $\mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T)^\perp$, pak $\{Ke_i\}_{i\in I}$ je báze prostoru $\mathscr{R}(\mathrm{i}I-T)^\perp$. Odtud

$$\dim\mathscr{R}(-\mathrm{i}I-T)^\perp = \dim\mathscr{R}(\mathrm{i}I-T)^\perp.$$

□

1.4.3 Konstrukce samoadjungovaných rozšíření symetrických operátorů

V předchozí části jsme dokázali, že uzavřený symetrický operátor T má samoadjungované rozšíření právě tehdy, když jeho deficitní indexy jsou si rovny. Nyní se budeme zabývat tím, jak zkonstruovat toto samoadjungované rozšíření. Připomeňme, že pro uzavřený symetrický operátor T na komplexním Hilbertově prostoru H platí

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\mathrm{i}I - T^*) &= \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T)^{\perp}, \\ \operatorname{Ker}(-\mathrm{i}I - T^*) &= \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T)^{\perp}. \end{aligned}$$

Věta 1.4.17 (První formule von Neumanna)**.** *Nechť T je uzavřený symetrický operátor na komplexním Hilbertově prostoru. Pak pro adjungovaný operátor T^* platí*

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(T^*) &= \mathscr{D}(T) \dotplus \operatorname{Ker}(\mathrm{i}I - T^*) \dotplus \operatorname{Ker}(-\mathrm{i}I - T^*), \\ T^*(f + g_+ + g_-) &= Tf + \mathrm{i}g_+ + (-\mathrm{i})g_- \end{aligned}$$

pro $f \in \mathscr{D}(T)$, $g_+ \in \operatorname{Ker}(\mathrm{i}I - T^*)$ a $g_- \in \operatorname{Ker}(-\mathrm{i}I - T^*)$.

Důkaz První formule von Neumanna je převážně technický, proto ho nebudeme uvádět a lze ho nalézt v [8].

Věta 1.4.18 (Druhá formule von Neumanna)**.** *Nechť T je uzavřený symetrický operátor na komplexním Hilbertově prostoru.*

a) *Operátor T' je uzavřené symetrické rozšíření operátoru T právě tehdy, když existuje uzavřený podprostor F_+ prostoru $\operatorname{Ker}(\mathrm{i}I - T^*)$, uzavřený podprostor F_- prostoru $\operatorname{Ker}(-\mathrm{i}I - T^*)$ a izomorfismus $\widehat{V}$ z F_+ do F_-, pro které platí*

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(T') &= \mathscr{D}(T) \dotplus \{g + \widehat{V}g : g \in F_+\}, \\ T'(f + g + \widehat{V}g) &= Tf + \mathrm{i}g + (-\mathrm{i}\widehat{V}g) = \\ &= T^*(f + g + \widehat{V}g) \end{aligned}$$

pro $f \in \mathscr{D}(T)$ a $g \in F_+$.

b) *Operátor T' z části* a) tohoto důkazu je samoadjungovaný operátor právě tehdy, když $F_+ = \operatorname{Ker}(\mathrm{i}I - T^*)$ a $F_- = \operatorname{Ker}(-\mathrm{i}I - T^*)$.

Důkaz. a) Ukážeme, že operátor T' z části a) Věty 1.4.15 může být reprezentován vlastnostmi z tvrzení a) této věty. Tím dokážeme, že tvrzení a) této věty je pouze přeformulováním tvrzení a) Věty 1.4.15. Nechť T' je ve formě z části a) Věty 1.4.15, pak platí

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(T') &= \mathscr{R}(I - V') = (I - V')\mathscr{D}(V') = (I - V')(\mathscr{D}(V) + F_+) = \\ &= (I - V)\mathscr{D}(V) + (I - V_F)F_+ = \mathscr{D}(T) + \{g - V_F g : g \in F_+\}. \end{aligned}$$

Platí $\mathscr{D}(T') = \mathscr{D}(T) \dotplus \{g - V_F g : g \in F_+\}$, neboť

$$\{g - V_F g : g \in F_+\} = F_+ + F_- \subseteq \operatorname{Ker}(\mathrm{i}I - T^*) + \operatorname{Ker}(-\mathrm{i}I - T^*).$$

Protože T' je symetrický operátor, platí inkluze $T' \subseteq T^*$, a odtud

$$T'(f+g+(-V_F g)) = T^*(f+g+(-V_F g)) = Tf + \mathrm{i}g + (-\mathrm{i})(-V_F g)$$

pro $f \in \mathscr{D}(T)$ a $g \in F_+$. Položíme-li $\widehat{V} = -V_F$, dostaneme požadované vyjádření z části a) tohoto důkazu.

b) Vzhledem k části a) tohoto důkazu a části b) důkazu Věty 1.4.15 platí tvrzení. □

Definice 1.4.19. Nechť T a T' jsou lineární operátory na Hilbertově prostoru, pro které platí $T \subseteq T'$. Řekneme, že T' je *m-dimenzionální rozšíření* operátoru T, jestliže rozkladový prostor $\mathscr{D}(T')/\mathscr{D}(T)$ je m-dimenzionální.

Věta 1.4.20. *Nechť T je uzavřený symetrický operátor na komplexním Hilbertově prostoru a T' je symetrické rozšíření operátoru T.*

a) *Operátor T' je m-dimenzionální rozšíření právě tehdy, když F_+ (z Věty 1.4.18) je m-dimenzionální prostor.*
b) *Pokud $\gamma_+(T), \gamma_-(T) = (m,m)$, pak symetrické rozšíření T' operátoru T je samoadjungované právě tehdy, když T' je m-dimenzionální rozšíření operátoru T.*

Důkaz. a) Plyne z definice m-dimenzionálního rozšíření a Druhé formule von Neumanna.

b) Operátor T' je m-dimenzionální rozšíření právě tehdy, když $\dim F_+ = \dim F_- = m$. Protože $F_+ \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{i}I - T^*)$ a $F_- \subseteq \mathrm{Ker}(-\mathrm{i}I - T^*)$, platí $\dim F_+ = \dim F_- = m$ právě tehdy, když $F_+ = \mathrm{Ker}(\mathrm{i}I - T^*)$ a $F_- = \mathrm{Ker}(-\mathrm{i}I - T^*)$. □

Kapitola 2

Sturmovy-Liouvilleovy diferenciální operátory

2.1 Sturmova-Liouvilleova diferenciální rovnice

2.1.1 Základní pojmy

Definice 2.1.1. Uvažujme diferenciální výraz s druhého řádu definovaný vztahem

$$s(y) = -(p(x)y')' + q(x)y \tag{2.1}$$

pro $x \in (a,b)$, kde

$$-\infty \leq a < b \leq \infty.$$

Dále, nechť p, q jsou reálné funkce, $p^{-1}, q \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(a,b)$. Diferenciální výraz s se nazývá *Sturmův-Liouvilleův*.

Poznámka. Symbol p^{-1} v Definici 2.1.1 je označení pro funkci $1/p$ a i nadále budeme toto označení pro funkci p užívat.

Mějme Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz (2.1). Uvažme diferenciální rovnici

$$(s - \lambda)y = f, \tag{2.2}$$

kde $f \in \mathscr{L}^1_{\text{loc}}(a,b)$ a $\lambda \in \mathbb{C}$.

Formálně zavedeme tzv. kvazi-derivace funkce y, které jsou zobecněním klasických derivací. Označme tedy

$$\begin{aligned} y^{[0]} &= y, \\ y^{[1]} &= p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{[0]}, \\ y^{[2]} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{[1]} + qy^{[0]}. \end{aligned}$$

Pokud y není potřebně diferencovatelná, pak symboly

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{[0]}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{[1]}$$

chápeme pouze jako formální výrazy. Výraz $y^{[j]}$ nazýváme j-tou *kvazi-derivací*. Pomocí těchto vztahu transformujeme rovnici (2.2) na systém tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{[0]} &= p^{-1}y^{[1]},\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{[1]} &= (q-\lambda)y^{[0]} - f,\end{aligned} \tag{2.3}$$

který má v maticovém zápisu tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y^{[0]} \\ y^{[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p^{-1} \\ q-\lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{[0]} \\ y^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}.$$

Problém existence a jednoznačnosti řešení systému (2.3), a tedy i rovnice (2.2) řeší následující obecné tvrzení.

Věta 2.1.2 (Existence a jednoznačnost řešení)**.** *Uvažujme lineární systém diferenciálních rovnic*

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x) \tag{2.4}$$

pro $x \in (a,b)$*, kde* $A\colon (a,b) \to \mathbb{C}^{n\times n}$ *a* $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}^n$*. Označme*

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n} \quad a \quad f(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))^T.$$

Jestliže $a_{ij}, f_i \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ *pro* $i,j = 1,\dots,n$*, pak pro každé* $x_0 \in (a,b)$ *a* $y_0 \in \mathbb{C}^n$ *existuje jediné řešení počátečního problému*

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

Důkaz Věty 2.1.2 lze nalézt například v publikaci [10]

Poznámka. Řešením systému (2.4) chápeme vektorovou funkci $y\colon (a,b) \to \mathbb{C}^2$ ve tvaru $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, jestliže platí $y_1, y_2 \in \mathscr{AC}(a,b)$ a pro skoro všechna $x \in (a,b)$ platí

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x).$$

Systém (2.3) je zřejmě systémem ve tvaru (2.4), neboť platí $p^{-1}, q, f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$.

Definice 2.1.3. *Řešením* rovnice (2.2) je funkce $y\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ taková, že $y^{[0]}, y^{[1]}$ jsou absolutně spojité, tj. $y^{[0]}, y^{[1]} \in \mathscr{AC}(a,b)$ a platí

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) - \lambda y(x) = f(x)$$

pro skoro všechna $x \in (a,b)$.

Definice 2.1.4. Řešení y_1, y_2 rovnice

$$(s-\lambda)y = 0 \tag{2.5}$$

se nazývají *lineárně nezávislá* na intervalu (a,b), jestliže vektory

$$\begin{pmatrix} y_1^{[0]}(x) \\ y_1^{[1]}(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2^{[0]}(x) \\ y_2^{[1]}(x) \end{pmatrix}$$

jsou lineárně nezávislé pro každé pevné $x \in (a,b)$. Řešení y_1, y_2 rovnice (2.5) tvoří *fundamentální systém* (na intervalu (a,b)), jestliže y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (2.5) (na intervalu (a,b)).

2.1.2 Minimální a maximální operátor

Nyní zavedeme maximální operátor T_1 generovaný výrazem s a minimální operátor T_0 generovaný výrazem s. Maximální operátor

$$T_1 \colon \mathscr{D}(T_1) \to \mathscr{L}^2(a,b)$$

bude definován na největším možném definičním oboru $\mathscr{D}(T_1) \subseteq \mathscr{L}^2(a,b)$. Minimální operátor T_0 bude restrikce maximálního operátoru a ukážeme, že platí $T_0^* = T_1$. Odtud pak

$$\begin{aligned} T_0(y) &= T_1(y) \text{ pro } y \in \mathscr{D}(T_0), \\ T_0^*(y) &= T_1(y) \text{ pro } y \in \mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T_0^*), \end{aligned}$$

proto $T_0 = T_0^*$ na $\mathscr{D}(T_0)$. Tedy operátor T_0 je symetrický, pokud má definiční obor hustý v $\mathscr{L}^2(a,b)$. Pokud je T_0 symetrický, pak pro každé jeho samoadjungované rozšíření S platí

$$T_0 \subseteq S \subseteq T_1.$$

Definice 2.1.5. Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. *Maximální* operátor T_1 generovaný výrazem s je definován vztahy

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(T_1) &= \{y \in \mathscr{L}^2(a,b) : y^{[0]}, y^{[1]} \in \mathscr{AC}(a,b),\ y^{[2]} \in \mathscr{L}^2(a,b)\}, \\ T_1 y &= s(y) \text{ pro } y \in \mathscr{D}(T_1). \end{aligned}$$

Preminimální operátor T_0' generovaný výrazem s je definován vztahy

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(T_0') &= \{y \in \mathscr{D}(T_1) : y \text{ má kompaktní nosič v } (a,b)\}, \\ T_0' y &= T_1 y \text{ pro } y \in \mathscr{D}(T_0'). \end{aligned}$$

Minimální operátor T_0 generovaný výrazem s je definován vztahem

$$T_0 = \overline{T_0'}.$$

Poznámka. Absolutně spojité funkce na (a,b) mají derivaci skoro všude na tomto intervalu, tedy definiční obor $\mathscr{D}(T_1)$ je tvořen funkcemi, které se ještě dají dosadit do diferenciálního výrazu s a pro něž $s(y)$ je prvkem $\mathscr{L}^2(a,b)$.

Nejdříve dokážeme několik důležitých pomocných identit.

Lemma 2.1.6. *Nechť funkce $y, z \colon (a,b) \to \mathbb{C}$ jsou takové, že*

$$y^{[0]}, y^{[1]}, z^{[0]}, z^{[1]} \in \mathscr{AC}(a,b).$$

Pak pro skoro všechna $x \in (a,b)$ platí tzv. Lagrangeova identita

$$s\big(\overline{y(x)}\big)z(x) - \overline{y(x)}s(z(x)) = ([y,z])'(x),$$

kde

$$[y,z](x) = \overline{y^{[0]}(x)}z^{[1]}(x) - \overline{y^{[1]}(x)}z^{[0]}(x).$$

Pro $[\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$ *označme*

$$[y,z]_\alpha^\beta = [y,z](\beta) - [y,z](\alpha).$$

Pak platí tzv. Greenova formule

$$\int_\alpha^\beta (s\overline{y(x)}z(x) - \overline{y(x)}sz(x))\mathrm{d}x = [y,z]_\alpha^\beta. \tag{2.6}$$

Důkaz. Platí

$$[y,z] = \overline{y^{[0]}}z^{[1]} - \overline{y^{[1]}}z^{[0]} = \bar{y}pz' - \overline{py'}z.$$

Derivováním dostáváme

$$\begin{aligned}[y,z]' &= (\bar{y})'pz' + \bar{y}(pz')' - (\overline{py'})'z - \overline{py'}z' = \\ &= \bar{y}(pz')' - (\overline{py'})'z + q\bar{y}z - q\bar{y}z = \\ &= [-(\overline{py'})' + q\bar{y}]z + [(pz')' - qz]\bar{y} = \\ &= s\bar{y}z - \bar{y}sz,\end{aligned}$$

kde jsme využili reálnost výrazu s, tj. reálnost jeho koeficientů. Integrováním přes interval $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ dostaneme Greenovu formuli. □

Poznámka. Pro funkce $y, z \in \mathscr{D}(T_1)$ můžeme psát Greenovu formuli také ve tvaru

$$\int_\alpha^\beta T_1(\overline{y(x)})z(x)\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta \overline{y(x)}T_1(z(x))\mathrm{d}x = [y,z]_\alpha^\beta. \tag{2.7}$$

Nyní budeme chtít ukázat, že definiční obor $\mathscr{D}(T_0')$ preminimálního operátoru je hustý v $\mathscr{L}^2(a,b)$. Z hustoty $\mathscr{D}(T_0')$ pak triviálně plyne hustota $\mathscr{D}(T_1)$.

Věta 2.1.7. *Pro* $y \in \mathscr{D}(T_0')$ *a* $z \in \mathscr{D}(T_1)$ *platí*

$$\langle T_0'y, z\rangle = \langle y, T_1 z\rangle.$$

Dále T_0' *je hermitovský, tj. platí*

$$\langle T_0'y, z\rangle = \langle y, T_0' z\rangle$$

pro $y, z \in \mathscr{D}(T_0')$.

Důkaz. Protože $y \in \mathscr{D}(T_0')$, existuje interval $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ takový, že

$$\operatorname{supp}(y) \subseteq (\alpha, \beta).$$

Odtud $y^{[0]}(\alpha) = 0$, $y^{[0]}(\beta) = 0$ a $y^{[1]}(\alpha) = 0$, $y^{[1]}(\beta) = 0$. Z Greenovy formule a z $T_0' \subseteq T_1$ plyne

$$\begin{aligned}\langle T_0'y, z\rangle - \langle y, T_1 z\rangle &= \int_\alpha^\beta T_0'(\overline{y(t)})z(t)\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta \overline{y(t)}T_1(z(t))\mathrm{d}t = \\ &= \int_\alpha^\beta [T_1(\overline{y(t)})z(t) - \overline{y(t)}T_1\big(z(t)\big)]\mathrm{d}t = \\ &= [y,z]_\beta^\alpha = [\overline{y^{[0]}(x)}z^{[1]}(x) - \overline{y^{[1]}(x)}z^{[0]}(x)]_\beta^\alpha = 0.\end{aligned}$$

Zřejmě je operátor T_0' i hermitovský, neboť $T_0' \subseteq T_1$. □

Poznámka. Pokud dokážeme hustotu $\mathscr{D}(T_0')$, pak z této věty plyne, že $T_1 \subseteq (T_0')^*$ a že operátor T_0' je symetrický.

Definice 2.1.8. Řekneme, že Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz s je *regulární v bodě* a, jestliže $-\infty < a < \infty$ a $p^{-1}, q \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}[a,b)$. Analogicky pro bod b. Dále řekneme, že s je *regulární*, jestliže je regulární v a a regulární v b, a řekneme, že s je *singulární*, jestliže není regulární, tj. alespoň v jednom z bodů a, b není regulární.

Zpočátku se zaměříme na případ právě regulárních výrazů.
Důkaz následující věty lze nalézt v [9].

Věta 2.1.9. *Jestliže Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz s je regulární v bodě a a platí $y \in \mathscr{D}(T_1)$, pak $y^{[0]}, y^{[1]}$ jsou spojité v bodě a. Analogické tvrzení platí pro bod b.*

Poznámka. Nechť s je regulární. Na základě právě dokázané věty můžeme v Greenově formuli (2.6) udělat limitní přechod $\alpha \to a$, $\beta \to b$ a dostat tak následující vztah

$$\langle T_1(y), z\rangle - \langle y, T_1(z)\rangle = [y,z]_a^b$$

pro $y, z \in \mathscr{D}(T_1)$. Tento zápis je korektní, neboť

$$\overline{T_1(y)} = \overline{sy} = s\overline{y} = T_1(\overline{y}).$$

Dále, pro operátor $T_1 - \lambda I$ platí

$$\langle (T_1 - \lambda I)y, z\rangle - \langle y, (T_1 - \overline{\lambda} I)z\rangle = [y,z]_a^b - \overline{\lambda}\langle y,z\rangle + \overline{\lambda}\langle y,z\rangle = [y,z]_a^b,$$

podobně i pro interval $[\alpha, \beta] \subseteq (a,b)$ a operátor $T_1 - \lambda I$.

Nyní můžeme definovat minimální operátor pro regulární výraz.

Definice 2.1.10. Nechť s je regulární Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. *Minimální* operátor $T_{0,\mathrm{r}}$ generovaný regulárním výrazem s je definovaný vztahem

$$\mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}}) = \{y \in \mathscr{D}(T_1) : y^{[0]}(a) = y^{[0]}(b) = 0, y^{[1]}(a) = y^{[1]}(b) = 0\}.$$

Poznámka. Zřejmě platí $T_0' \subseteq T_{0,\mathrm{r}} \subseteq T_1$. Později ukážeme, že pro právě definovaný operátor $T_{0,\mathrm{r}}$ platí $T_{0,\mathrm{r}} = \overline{T_0'}$, tj. operátor $T_{0,\mathrm{r}}$ je minimální i pro obecný Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz s, viz Definice 2.1.5.

Věta 2.1.11. *Nechť s je regulární Sturm-Liouvilleův diferenciální výraz. Pak pro libovolné $f \in \mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}})$ a $g \in \mathscr{D}(T_1)$ platí*

$$\langle T_{0,\mathrm{r}} f, g\rangle = \langle f, T_1 g\rangle$$

a $T_{0,\mathrm{r}}$ je hermitovský.

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu stejného tvrzení pro operátor T_0', tj. důkazu Věty 2.1.7. □

Poznámka. Opět, pokud $\mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}})$ bude hustý, pak z této věty plyne, že $T_1 \subseteq T_{0,\mathrm{r}}^*$ a že $T_{0,\mathrm{r}}$ je symetrický operátor.

Věta 2.1.12. *Nechť s je regulární Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz a $\lambda \in \mathbb{C}$. Platí $y \in \mathscr{R}(T_{0,\mathrm{r}} - \lambda I)$ právě tehdy, když y je ortogonální ke každému řešení z rovnice $(s-\overline{\lambda})z = = 0$, tj.*

$$\mathscr{R}(T_{0,\mathrm{r}} - \lambda I) = \operatorname{Ker}(T_1 - \overline{\lambda} I)^{\perp}.$$

Dále platí

$$\mathscr{R}(T_{0,\mathrm{r}} - \lambda I)^{\perp} = \operatorname{Ker}(T_1 - \overline{\lambda} I).$$

Důkaz. Druhá rovnost plyne z první, neboť jádro $\operatorname{Ker}(T_1 - \overline{\lambda} I)$ je konečně dimenzionální (dvoudimenzionální), a proto uzavřené. Zbývá dokázat první rovnost.

Nechť y je jednoznačně určené řešení počátečního problému

$$(s-\lambda)y = f, \quad y^{[0]}(a) = 0,\ y^{[1]}(a) = 0.$$

Dále, nechť z_1, z_2 je fundamentální systém řešení rovnice $(s-\overline{\lambda})z = 0$ s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} z_1^{[0]}(b) &= -1, \quad & z_2^{[0]}(b) &= 0, \\ z_1^{[1]}(b) &= 0, \quad & z_2^{[1]}(b) &= 1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Greenova formule pro diferenciální výraz $s-\lambda$ vypadá následovně

$$\langle (s-\lambda)y, z\rangle - \langle y, (s-\overline{\lambda})z\rangle = [y,z]_a^b.$$

Pro $j = 1,2$ z této formule dostaneme

$$\begin{aligned} \langle f, z_j\rangle &= \langle (s-\lambda)y, z_j\rangle = \\ &= [y,z_j]_a^b + \langle y, (s-\overline{\lambda})z_j\rangle = \\ &= [y,z_j](b) - [y,z_j](a) = \\ &= \overline{y^{[0]}(b)} z_j^{[1]}(b) - \overline{y^{[1]}(b)} z_j^{[0]}(b) - \overline{y^{[0]}(a)} z_j^{[1]}(a) + \overline{y^{[1]}(a)} z_j^{[0]}(a). \end{aligned}$$

Po dosazení počátečních podmínek (2.8) do tohoto vztahu dostáváme

$$\langle f, z_j\rangle = \begin{cases} \overline{y^{[1]}(b)} & \text{pro } j = 1, \\ \overline{y^{[0]}(b)} & \text{pro } j = 2. \end{cases}$$

Protože funkce $y \in \mathscr{D}(T_1)$ patří do $\mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}})$ právě tehdy, když

$$y^{[0]}(b) = 0 \quad \text{a} \quad y^{[1]}(b) = 0,$$

platí $y \in \mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}})$ právě tehdy, když $f \perp z_1$ a $f \perp z_2$. Proto $f = (s-\lambda)y$ patří do $\mathscr{R}(T_{0,\mathrm{r}} - \lambda I)$ právě tehdy, když f je ortogonální ke každému řešení rovnice $(s-\overline{\lambda})z = 0$. Množina řešení rovnice $(s-\overline{\lambda})z = 0$ je právě prostor $\operatorname{Ker}(T_1 - \overline{\lambda} I)$. □

Věta 2.1.13. *Nechť s je regulární Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz a dále vezměme libovolná $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{C}$. Pak existuje (ne jednoznačně určené) $y \in \mathscr{D}(T_1)$ takové, že*

$$\begin{aligned} y^{[0]}(a) &= \alpha_0, \quad & y^{[0]}(b) &= \beta_0, \\ y^{[1]}(a) &= \alpha_1, \quad & y^{[1]}(b) &= \beta_1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Důkaz. Uvažme fundamentální systém řešení z_1, z_2 rovnice $(s - \overline{\lambda})z = 0$ s počátečními podmínkami (2.8) a nechť $\lambda = 0$. Dále, nechť $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

Ukážeme, že existuje $f \in \operatorname{Ker} T_1$ takové, že

$$\langle f, z_j \rangle = \overline{\beta_{2-j}}$$

pro $j = 1, 2$. Ekvivalentně, existuje f ve tvaru $f = a_1 z_1 + a_2 z_2$ takové, že platí

$$\langle f, z_j \rangle = \langle a_1 z_1 + a_2 z_2, z_j \rangle = \overline{a_1} \langle z_1, z_j \rangle + \overline{a_2} \langle z_2, z_j \rangle = \overline{\beta_{2-j}}$$

pro $j = 1, 2$. Matice tohoto lineárního systému je Gramova matice. Vzhledem k lineární nezávislosti funkcí z_1 a z_2 je determinant této matice různý od nuly, a odtud plyne existence.

Nechť y_1 je řešení počátečního problému

$$s y_1 = f, \quad y_1^{[0]}(a) = 0,\ y_1^{[1]}(a) = 0, \tag{2.10}$$

pak z Greenovy formule

$$\begin{aligned}
\overline{\beta_{2-j}} &= \langle f, z_j \rangle = \langle s y_1, z_j \rangle = \\
&= [y_1, z_j]_a^b + \langle y_1, s z_j \rangle = [y_1, z_j]_a^b = \\
&= [y_1, z_j](b) - [y_1, z_j](a) = \\
&= \overline{y_1^{[0]}(b)} z_j^{[1]}(b) - \overline{y_1^{[1]}(b)} z_j^{[0]}(b) - \overline{y_1^{[0]}(a)} z_j^{[1]}(a) + \overline{y_1^{[1]}(a)} z_j^{[0]}(a).
\end{aligned}$$

Po dosazení počátečních podmínek ze vztahu (2.10) dostaneme

$$\begin{aligned}
\overline{\beta_1} &= \overline{y_1^{[1]}(b)}, \text{ a odtud } \beta_1 = y_1^{[1]}(b); \\
\overline{\beta_0} &= \overline{y_1^{[0]}(b)}, \text{ a odtud } \beta_0 = y_1^{[0]}(b).
\end{aligned}$$

Tímto jsme dokázali tvrzení pro speciální případ $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Analogicky můžeme najít $y_2 \in \mathscr{D}(T_1)$ takové, že

$$y_2^{[0]}(a) = \alpha_0,\ y_2^{[1]}(a) = \alpha_1 \quad \text{a} \quad y_2^{[0]}(b) = y_2^{[1]}(b) = 0.$$

Pak $y = y_1 + y_2$ je hledaná funkce, tj. $y \in \mathscr{D}(T_1)$ a splňuje podmínky (2.9). □

Věta 2.1.14. *Nechť s je regulární Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Pak platí následující tvrzení:*

a) *Definiční obor $\mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}})$ je hustý v $\mathscr{L}^2(a,b)$ a $T_{0,\mathrm{r}}$ je symetrický operátor.*

b) *Platí $T_1 = T_{0,\mathrm{r}}^*$.*

c) *Platí $T_{0,\mathrm{r}} = T_1^*$ a $T_{0,\mathrm{r}}$ je uzavřený operátor.*

Důkaz. a) Zvolme $h \in \mathscr{L}^2(a,b)$ takové, že $\langle h, y \rangle = 0$ pro každé $y \in \mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}})$. Ukážeme, že musí platit $h = 0$. Pro libovolné řešení z rovnice $sz = h$ platí $z \in \mathscr{D}(T_1)$. Pak pro každé $y \in \mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}})$ platí

$$0 = \langle h, y \rangle = \langle sz, y \rangle = \langle T_1 z, y \rangle = \langle z, T_{0,\mathrm{r}} y \rangle,$$

kde poslední rovnost plyne z Věty 2.1.11. Potom z rovnosti $\langle z, T_{0,\mathrm{r}} y\rangle = 0$ podle Věty 2.1.12 platí, že $z \in \mathscr{R}(T_{0,\mathrm{r}})^{\perp} = \operatorname{Ker} T_1$. Tedy platí $h = sz = T_1 z = 0$, což jsme chtěli dokázat. Protože opět podle Věty 2.1.11 je $T_{0,\mathrm{r}}$ hermitovský operátor, z hustoty definičního oboru tedy platí, že $T_{0,\mathrm{r}}$ je symetrický operátor.

b) Z Věty 2.1.11 plyne $T_1 \subseteq T_{0,\mathrm{r}}^*$. Tedy zbývá dokázat, že $\mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}}^*) \subseteq \mathscr{D}(T_1)$. Nechť $f \in \mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}}^*)$ je libovolné, pak existuje h takové, že $T_{0,\mathrm{r}}^*(f) = h$. Dále, nechť y je řešení rovnice $s(y) = h$, tj. $y \in \mathscr{D}(T_1)$ a $T_1(y) = h$. Pak z definice adjungovaného operátoru pro každé $z \in \mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}})$ platí

$$\langle f, T_{0,\mathrm{r}}(z)\rangle = \langle T_{0,\mathrm{r}}^*(f), z\rangle = \langle h, z\rangle = \langle T_1(y), z\rangle = \langle y, T_{0,\mathrm{r}}(z)\rangle,$$

kde poslední rovnost plyne navíc z operátorové inkluze $T_1 \subseteq T_{0,\mathrm{r}}^*$. Dostáváme

$$\langle f - y, T_{0,\mathrm{r}}(z)\rangle = 0.$$

Odtud $f - y \in \mathscr{R}(T_{0,\mathrm{r}})^{\perp} = \operatorname{Ker} T_1 \subseteq \mathscr{D}(T_1)$ podle Věty 2.1.12. Protože $y \in \mathscr{D}(T_1)$, platí i $f \in \mathscr{D}(T_1)$.

c) Ze symetrie operátoru $T_{0,\mathrm{r}}$ dostáváme $T_{0,\mathrm{r}} \subseteq T_{0,\mathrm{r}}^{**}$, z části b) toho důkazu navíc platí $T_1^* = T_{0,\mathrm{r}}^{**}$. Výsledně tedy

$$T_{0,\mathrm{r}} \subseteq T_1^*.$$

Stačí proto dokázat opačnou inkluzi. Uzavřenost $T_{0,\mathrm{r}}$ pak plyne z dokázané rovnosti, neboť adjungovaný operátor je vždy uzavřený.

Platí $T_{0,\mathrm{r}} \subseteq T_1$, což implikuje $T_1^* \subseteq T_{0,\mathrm{r}}^*$, tedy platí $T_1^* \subseteq T_1$. Nechť

$$f \in \mathscr{D}(T_1^*) \subseteq \mathscr{D}(T_1),$$

pak $T_1^*(f) = T_1(f)$ a z definice adjungovaného operátoru dostáváme

$$\langle T_1(f), g\rangle = \langle T_1^*(f), g\rangle = \langle f, T_1(g)\rangle$$

pro každé $g \in \mathscr{D}(T_1)$. Odtud užitím Greenovy formule obdržíme

$$[f,g]_a^b = \langle T_1(f), g\rangle - \langle f, T_1(g)\rangle = 0$$

pro každé $g \in \mathscr{D}(T_1)$. Vezměme $g_1, g_2 \in \mathscr{D}(T_1)$ takové, že

$$\begin{aligned} g_1^{[0]}(a) = g_1^{[1]}(a) = 0 \quad &\text{a} \quad g_1^{[0]}(b) = -1,\ g_1^{[1]}(b) = 0,\\ g_2^{[0]}(a) = g_2^{[1]}(a) = 0 \quad &\text{a} \quad g_2^{[0]}(b) = 0,\ g_2^{[1]}(b) = 1. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned} 0 = [f,g_1]_a^b = [f,g_1](b) = \overline{f^{[0]}(b)}g_1^{[1]}(b) - \overline{f^{[1]}(b)}g_1^{[0]}(b) = \overline{f^{[1]}(b)},\\ 0 = [f,g_2]_a^b = [f,g_2](b) = \overline{f^{[0]}(b)}g_2^{[1]}(b) - \overline{f^{[1]}(b)}g_2^{[0]}(b) = \overline{f^{[0]}(b)}, \end{aligned}$$

tedy $f^{[0]}(b) = f^{[1]}(b) = 0$. Analogicky dostaneme $f^{[0]}(a) = f^{[1]}(a) = 0$. Proto $f \in \mathscr{D}(T_{0,\mathrm{r}})$.

□

Věta 2.1.15. *Nechť s je (ne nutně regulární) Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Pak $\mathscr{D}(T_0')$ je hustý v $\mathscr{L}^2(a,b)$ a $(T_0')^* \subseteq T_1$.*

Důkaz. Nejdříve zavedeme pomocné označení. Nechť $I = [\alpha, \beta] \subseteq (a,b)$ je libovolný interval. Zřejmě s zúžený na interval I je regulární. Uvažme maximální operátor $T_{I,1}$ a minimální operátor $T_{I,0}$ generované výrazem s v $\mathscr{L}^2(\alpha,\beta)$. Minimální operátor $T_{I,0}$ chápeme ve smyslu Definice 2.1.10. Platí

$$\bigcup_{I \subseteq (a,b)} \mathscr{D}(T_{I,0}) = \mathscr{D}(T_0'), \tag{2.11}$$

kde pro každý interval $I = [\alpha,\beta]$ dodefinujeme funkce z $\mathscr{L}^2(\alpha,\beta)$ jako nulové funkce pro $x \in (a,b) \setminus [\alpha,\beta]$. Z Věty 2.1.14 víme, že $\mathscr{D}(T_{I,0})$ je hustý v $\mathscr{L}^2(\alpha,\beta)$, odtud, využitím vyjádření (2.11) je $\mathscr{D}(T_0')$ hustý v $\mathscr{L}^2(a,b)$.

Pro interval $I = [\alpha,\beta]$ dále zaveďme označení $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ pro skalární součin v $\mathscr{L}^2(\alpha,\beta)$ a označení h_I pro restrikci funkce $h \in \mathscr{L}^2(a,b)$ na I, přičemž zřejmě pro $h \in \mathscr{L}^2(a,b)$ je $h_I \in \mathscr{L}^2(\alpha,\beta)$. Z Věty 2.1.14 víme, že $T_{I,0}^* = T_{I,1}$ a ve smyslu předešlé části důkazu platí inkluze

$$T_{I,0} \subseteq T_0' \subseteq T_1.$$

Nechť tedy $f \in \mathscr{D}(T_0'^*)$, pak z definice adjungovaného operátoru pro každé $g \in \mathscr{D}(T_{I,0}) \subseteq \subseteq \mathscr{D}(T_0')$ platí

$$\langle T_0'^*(f), g \rangle = \langle f, T_0'(g) \rangle = \langle f, T_{I,0}(g) \rangle.$$

Zúžením tohoto vztahu na interval I dostaneme

$$\langle (T_0'^*(f))_I, g \rangle_I = \langle f_I, T_{I,0}(g) \rangle_I.$$

Z jednoznačnosti adjungovaného operátoru ihned plyne, že

$$f_I \in \mathscr{D}(T_{I,0}^*) = \mathscr{D}(T_{I,1}) \quad \text{a} \quad T_{I,1}(f_I) = (T_0'^*(f))_I.$$

Protože interval I byl libovolný, platí $T_0'^*(f) \in \mathscr{L}^2(a,b)$. Také $f \in \mathscr{D}(T_1)$, neboť

$$(T_0'^*(f))_I = T_{I,1}(f_I) = (s(f))_I = (T_1(f))_I.$$

□

Poznámka. Poznamenejme, že i v dalším textu budeme pod symbolem $T_{[\alpha,\beta],1}$ (nebo $T_{I,1}$ pro $I = [\alpha,\beta]$) rozumět maximální operátor generovaný Sturmovým-Liouvilleovým diferenciálním výrazem s v prostoru $\mathscr{L}^2(\alpha,\beta)$, kde $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$. Hranaté závorky nám umožňují definovat i operátory $T_{[a,c],1}$ a $T_{[c,b],1}$ pro $c \in (a,b)$. Podobně $T_{[\alpha,\beta],0}$ (nebo $T_{I,0}$ pro $I = [\alpha,\beta]$) pro minimální operátor.

Věta 2.1.16. *Nechť s je regulární Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Pak*

$$T_{0,\mathrm{r}} = \overline{T_0'} = (T_0')^{**}.$$

Důkaz. Rovnost $\overline{T_0'} = (T_0')^{**}$ plyne přímo z části b) Věty 1.2.4, neboť T_0' má hustý definiční obor a existuje jeho uzavřené rozšíření. Uzavřené rozšíření operátoru T_0' existuje, protože je symetrický.

Dále z $T_0' \subseteq T_{0,\mathrm{r}}$ a z uzavřenosti $T_{0,\mathrm{r}}$ plyne, že

$$\overline{T_0'} \subseteq \overline{T_{0,\mathrm{r}}} = T_{0,\mathrm{r}}.$$

Z Věty 2.1.15 platí $(T_0')^* \subseteq T_1$ a z Věty 2.1.14 $T_1 = T_{0,\mathrm{r}}^*$, tedy $(T_0')^* \subseteq T_{0,\mathrm{r}}^*$. Z vlastností adjungovaných operátorů platí $T_{0,\mathrm{r}}^{**} \subseteq (T_0')^{**}$ a ze symetrie operátoru $T_{0,\mathrm{r}}$ platí $T_{0,\mathrm{r}} \subseteq T_{0,\mathrm{r}}^{**}$. Využitím již dokázané rovnosti obdržíme $T_{0,\mathrm{r}} \subseteq \overline{T_0'}$. □

Poznámka. Neboť jsme právě dokázali $T_{0,\mathrm{r}} = \overline{T_0'}$, tedy minimální operátor pro regulární výraz s je i minimálním operátorem pro obecný výraz s, budeme již značit minimální operátor pro regulární výraz s také T_0. Dokázanou rovnost tedy můžeme přepsat na rovnost $T_0 = \overline{T_0'}$. Jednoznačnost minimálního operátoru plyne z jednoznačnosti uzávěru.

Pro obecný případ diferenciálního výrazu s jsme zatím dokázali, že T_0' je symetrickým, neboť je hermitovký a jeho definiční obor je hustý v $\mathscr{L}^2(a,b)$. Rovnost $\overline{T_0'} = (T_0')^{**}$, která byla dokázána ve Větě 2.1.16 pro regulární výraz s, platí i pro obecný výraz s a důkaz je zcela analogický důkazu pro regulární výraz.

Věta 2.1.17. *Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Platí*

$$T_0^* = T_0'^* = T_1.$$

Důkaz. Z definice $T_0 = \overline{T_0'}$ plyne, že i $T_0^* = \overline{T_0'}^*$ a platí $\overline{T_0'}^* = T_0'^*$. Zbývá dokázat rovnost $T_0'^* = T_1$. Z Věty 2.1.7 a z hustoty definičního oboru $\mathscr{D}(T_0')$, která byla dokázaná ve Větě 2.1.15, plyne inkluze

$$T_1 \subseteq T_0'^*.$$

Opačná inkluze byla dokázána ve Větě 2.1.15. □

2.1.3 Deficitní indexy

Definice 2.1.18. Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciálním výraz a nechť T_0 je minimální operátor generovaný výrazem s. Pro operátor T_0 zavedeme označení

$$\gamma_+ = \gamma_+(T_0),$$

$$\gamma_- = \gamma_-(T_0).$$

Definice 2.1.19. Řekneme, že funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *leží zleva* (resp. *leží zprava*) v prostoru $\mathscr{L}^2(a,b)$, jestliže pro každé $c \in (a,b)$ platí $f \in \mathscr{L}^2(a,c)$ (resp. $f \in \mathscr{L}^2(c,b)$).

Definice 2.1.20. Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciálním výraz. Označme symbolem γ_a^+ (resp. γ_a^-) počet lineárně nezávislých řešení rovnice

$$(\mathrm{i} - s)y = 0 \quad (\text{resp. } (-\mathrm{i} - s)y = 0), \tag{2.12}$$

které leží zleva v $\mathscr{L}^2(a,b)$. Podobně označme symbolem γ_b^+ (resp. γ_b^-) počet lineárně nezávislých řešení rovnice $(\mathrm{i} - s)y = 0$ (resp. $(-\mathrm{i} - s)y = 0$), které leží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$.

Poznámka. Zřejmě platí

$$\gamma_a^+ = \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{i}I - T_{[a,c],1}) = \dim \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T_{[a,c],0})^{\perp} = \gamma(T_{[a,c],0}),$$

kde $T_{[a,c]}$ je maximální operátor generovaný výrazem s na $\mathscr{L}^2(a,c)$ a $T_{[a,c],0}$ minimální operátor generovaný výrazem s na $\mathscr{L}^2(a,c)$. Proto podle Lemmatu 1.4.7 první rovnice ve vztahu (2.12) Definice 2.1.20 může být nahrazena rovnicí

$$(z-s)y = 0$$

pro $\operatorname{Im}(z) > 0$. Analogicky pro zbývající tři případy.

Věta 2.1.21. *Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciálním výraz. Pro deficitní indexy minimálního operátoru T_0 generovaného výrazem s platí*

$$\gamma_+ = \gamma_a^+ + \gamma_b^+ - 2 \quad a \quad \gamma_- = \gamma_a^- + \gamma_b^- - 2,$$

neboli

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker}(\mathrm{i}I - T_1) &= \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{i}I - T_{[a,c],1}) + \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{i}I - T_{[c,b],1}) - 2,\\ \dim \operatorname{Ker}(-\mathrm{i}I - T_1) &= \dim \operatorname{Ker}(-\mathrm{i}I - T_{[a,c],1}) + \dim \operatorname{Ker}(-\mathrm{i}I - T_{[c,b],1}) - 2\end{aligned}$$

pro příslušné maximální operátory $T_{[a,c],1}$ a $T_{[c,b],1}$.

Důkaz. Nechť $c \in (a,b)$ a $T_{c,0}$ je restrikce minimálního operátoru T_0 definovaná vztahem

$$\mathscr{D}(T_{c,0}) = \{y \in \mathscr{D}(T_0) : y^{[0]}(c) = y^{[1]}(c) = 0\}.$$

Dále, nechť $\{(\alpha_0^1, \alpha_1^1), (\alpha_0^2, \alpha_1^2)\}$ je báze prostoru $\mathbb{C}^2$ a $(\alpha, \beta) \subseteq (a,b)$ je interval takový, že $a < \alpha < c < \beta < b$. Z Věty 2.1.13 plyne, že existují funkce $y_1, y_2 \in \mathscr{D}(T_0)$ takové, že

$$\begin{aligned} y_1^{[0]}(c) &= \alpha_0^1, \quad & y_2^{[0]}(c) &= \alpha_0^2,\\ y_1^{[1]}(c) &= \alpha_1^1, \quad & y_2^{[1]}(c) &= \alpha_1^2 \end{aligned}$$

a

$$y_1(x) = 0 = y_2(x) \quad \text{pro} \quad x \in (a, \alpha] \cup [\beta, b). \tag{2.13}$$

Krátce popišme konstrukci funkcí y_1, y_2. Uvažme maximální operátor $T_{[\alpha,c],1}$ (resp. $T_{[c,\beta],1}$) generovaný výrazem s na prostoru $\mathscr{L}^2(\alpha, c)$ (resp. $\mathscr{L}^2(c, \beta)$). Výraz s je na prostorech $\mathscr{L}^2(\alpha, c)$ a $\mathscr{L}^2(c, \beta)$ regulární. Každá z funkcí y_1, y_2 bude součtem funkce z $\mathscr{D}(T_{[\alpha,c],1})$ a funkce z $\mathscr{D}(T_{[c,\beta],1})$ pro vhodné volby podmínek (2.9) z Věty 2.1.13 a navíc dodefinována vztahem (2.13) na celý interval (a,b). Zřejmě pak y_1, y_2 patří do $\mathscr{D}(T_0)$.

Zřejmě

$$\mathscr{D}(T_0) = \mathscr{D}(T_{c,0}) + \operatorname{Lin}\{y_1, y_2\}.$$

Tedy, protože y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé modulo $\mathscr{D}(T_{c,0})$, platí

$$\dim \mathscr{D}(T_0)/\mathscr{D}(T_{c,0}) = \dim_{(\mathscr{D}(T_{c,0}))} \mathscr{D}(T_0) = 2,$$

jinými slovy T_0 je 2-dimenzionální rozšíření operátoru $T_{c,0}$. Ze vztahu (1.6) z důkazu Věty 1.4.14 a z Věty 1.4.20 platí

$$\dim[\mathscr{R}(\mathrm{i}I - T_0) \ominus \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T_{c,0})] = \dim[\mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_0) \ominus \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_{c,0})] = 2,$$

kde první rovnost navíc plyne z dodatečného tvrzení části a) Věty 1.4.14. Tedy platí

$$[\mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_0) \ominus \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_{c,0})] \oplus \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_{c,0}) = \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_0),$$
$$[\mathscr{R}(\mathrm{i}I - T_0) \ominus \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T_{c,0})] \oplus \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T_{c,0}) = \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T_0).$$

Podle Lemmatu 1.1.7 navíc platí

$$\mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_{c,0})^{\perp} = \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_0)^{\perp} \oplus [\mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_0) \ominus \mathscr{R}(-\mathrm{i}I - T_{c,0})],$$
$$\mathscr{R}(\mathrm{i}I - T_{c,0})^{\perp} = \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T_0)^{\perp} \oplus [\mathscr{R}(\mathrm{i}I - T_0) \ominus \mathscr{R}(\mathrm{i}I - T_{c,0})].$$

Odtud přímo dostáváme

$$\gamma_+(T_{c,0}) = \gamma_+ + 2 \quad \text{a} \quad \gamma_-(T_{c,0}) = \gamma_- + 2. \tag{2.14}$$

Pro operátor $T_{c,0}$ platí

$$\mathscr{D}(T_{c,0}) = \mathscr{D}(T_{[a,c],0}) \oplus \mathscr{D}(T_{[c,b],0}),$$

kde $T_{[a,c],0}$ (resp. $T_{[c,b],0}$) je minimální operátor generovaný výrazem s v $\mathscr{L}^2(a,c)$ (resp. v $\mathscr{L}^2(c,b)$). Proto platí

$$\gamma_+(T_{c,0}) = \gamma_a^+ + \gamma_b^+ \quad \text{a} \quad \gamma_-(T_{c,0}) = \gamma_a^- + \gamma_b^-.$$

Dosazením do vztahu (2.14) obdržíme

$$\gamma_a^+ + \gamma_b^+ = \gamma_+ + 2 \quad \text{a} \quad \gamma_a^- + \gamma_b^- = \gamma_- + 2,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 2.1.22. *Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Platí*

$$\gamma_a^+ + \gamma_b^+ \geq 2, \quad \gamma_a^- + \gamma_b^- \geq 2,$$
$$\gamma_a^+ + \gamma_a^- \geq 2, \quad \gamma_b^+ + \gamma_b^- \geq 2.$$

Důkaz. První dvě nerovnosti plynou z Věty 2.1.21, protože deficitní indexy γ_+ γ_- jsou nezáporné.

Nechť $a < c < b$ a nechť $T_{[a,c],1}$ (resp. $T_{[a,c],0}$) je maximální (resp. minimální) operátor generovaný výrazem s v $\mathscr{L}^2(a,c)$. Protože s je regulární v c, můžeme, podobnou cestou jako v předchozím důkazu, ukázat, že

$$\dim \mathscr{D}(T_{[a,c],1})/\mathscr{D}(T_{[a,c],0}) \geq 2.$$

Neboť $\gamma_+(T_{[a,c],0}) = \gamma_a^+$ a $\gamma_-(T_{[a,c],0}) = \gamma_a^-$, za využití Lemmatu 1.1.10 z První von Neumannovy formule 1.4.17 plyne

$$\gamma_a^+ + \gamma_a^- = \gamma_+(T_{[a,c],0}) + \gamma_-(T_{[a,c],0}) = \dim \mathscr{D}(T_{[a,c],1})/\mathscr{D}(T_{[a,c],0}) \geq 2.$$

Nerovnost $\gamma_b^+ + \gamma_b^- \geq 2$ se ukáže podobně. □

Věta 2.1.23. *Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Nechť $T_{[a,c],0}$ (resp. $T_{[c,b],0}$) je minimální operátor generovaný výrazem s v prostoru $\mathscr{L}^2(a,c)$ (resp. v $\mathscr{L}^2(c,b)$), pak platí*

$$\gamma_a^+ = \gamma_a^- \geq 1 \quad a \quad \gamma_b^+ = \gamma_b^- \geq 1.$$

Důkaz. Neboť výraz s je lineární s reálnými koeficienty, operátory $T_{[a,c],0}$ a $T_{[c,b],0}$ jsou reálné. Pak podle Věty 1.4.16 platí

$$\gamma_a^+ = \gamma_+(T_{[a,c],0}) = \gamma_-(T_{[a,c],0}) = \gamma_a^- \quad \text{a} \quad \gamma_b^+ = \gamma_+(T_{[c,b],0}) = \gamma_-(T_{[c,b],0}) = \gamma_b^-.$$

Z Věty 2.1.22 dostáváme tvrzení. □

2.2 Weylova klasifikace

Definice 2.2.1. Pro funkce $y_1, y_2 \in \mathscr{D}(T_1)$ definujme *Wronskián* těchto funkcí vztahem

$$W(y_1,y_2;x) = W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1^{[0]}(x) & y_2^{[0]}(x) \\ y_1^{[1]}(x) & y_2^{[1]}(x) \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Pro $y_1, y_2 \in \mathscr{D}(T_1)$ platí

$$W(y_1,y_2,x) = y_1(x)p(x)y_2'(x) - p(x)y_1'(x)y_2(x) = [\overline{y_1}, y_2](x).$$

Věta 2.2.2. *Platí následující tvrzení.*

a) *Řešení y_1, y_2 rovnice $(s-\lambda)y = 0$ tvoří fundamentální systém právě tehdy, když*

$$W(y_1,y_2;x) = W(x) \neq 0$$

pro nějaké (a tedy pro každé) $x \in (a,b)$.

b) *Wronskián dvou řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$ je nezávislý na x.*

Důkaz. a) Stačí dokázat, že $W(x) \neq 0$ pro každé $x \in (a,b)$ právě tehdy, když $W(x_0) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in (a,b)$. Použijeme Jacobiho-Liouvilleovu formuli (viz [4]) tvaru

$$W(x) = W(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} \mathrm{Tr}(A(x))\mathrm{d}x\right\}$$

pro $x_0 \in (a,b)$, kde

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & p^{-1}(x) \\ q(x)-\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Z rovnosti přímo plyne požadovaná ekvivalence.

b) Nechť y_1, y_2 je libovolná dvojice řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$.

$$\begin{aligned} W'(x) = {} & [y_1(x)p(x)y_2'(x) - p(x)y_1'(x)y_2(x)]' = \\ = {} & (p(x)y_2'(x))'y_1(x) + p(x)y_2'(x)y_1'(x) - \\ & - (p(x)y_1'(x))'y_2(x) - p(x)y_1'(x)y_2'(x) = \\ = {} & (q(x)-\lambda)[y_1(x)y_2(x) - y_2(x)y_1(x)] = 0 \end{aligned}$$

Determinant je tedy konstantní funkcí, tj. je nezávislý na proměnné x. □

Věta 2.2.3. *Nechť y_1, y_2 je fundamentální systém řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$ a f je z $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$. Pak všechna řešení y rovnice $(s-\lambda)y = f$ jsou tvaru*

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

kde

$$\begin{aligned} c_1(x) &= a_1 + \int_c^x W(y_1,y_2,s)^{-1} y_2(x) f(x)\,\mathrm{d}s, \\ c_2(x) &= a_2 - \int_c^x W(y_1,y_2,s)^{-1} y_1(x) f(x)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

pro $c \in (a,b)$ a $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Funkce $c_1(x), c_2(x)$ můžeme ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} c_1(x) &= a_1 + \int_c^x \overline{z_1(s)} f(s)\,\mathrm{d}s, \\ c_2(x) &= a_2 + \int_c^x \overline{z_2(s)} f(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

kde z_1, z_2 jsou řešení rovnice $(s-\overline{\lambda})z = 0$, jednoznačně určená volbou y_1, y_2.

Důkaz. Řešení budeme hledat metodou variace konstant, viz [6]. Předpokládejme tedy, že řešení rovnice $(s-\lambda)y = f$ je ve tvaru

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

kde koeficienty c_1, c_2 jsou řešením systému

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= -\frac{f}{p}. \end{aligned}$$

Pomocí kvazi-derivací tento systém zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1^{[0]}(x) + c_2'(x)y_2^{[0]}(x) &= 0, \\ c_1'(x)y_1^{[1]}(x) + c_2'(x)y_2^{[1]}(x) &= -f. \end{aligned}$$

Obdrželi jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a její determinant $W(y_1,y_2,x) \neq$ $\neq 0$, neboť y_1, y_2 tvoří fundamentální systém řešení. Proto, využitím Cramerova pravidla, dostaneme

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= W(y_1,y_2,x)^{-1} y_2(x) f(x), \\ c_2'(x) &= -W(y_1,y_2,x)^{-1} y_1(x) f(x), \end{aligned}$$

neboť

$$\det\begin{pmatrix} 0 & y_2^{[0]} \\ -f & y_2^{[1]} \end{pmatrix} = y_2 f \quad \text{a} \quad \det\begin{pmatrix} y_1^{[0]} & 0 \\ y_1^{[1]} & -f \end{pmatrix} = -y_1 f.$$

Integrací obdržíme

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= c_1(c) + \int_c^x W(y_1,y_2,y)^{-1} y_2(y) f(y) \mathrm{d}y, \\
c_2(x) &= c_2(c) - \int_c^x W(y_1,y_2,y)^{-1} y_1(y) f(y) \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

kde konstanty $a_1 = c_1(c)$ a $a_2 = c_2(c)$ jsou libovolné (v případě dodání počáteční podmínky pro řešení y jsou určeny jednoznačně). Po vhodném označení funkcí z_1, z_2 můžeme psát

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= a_1 + \int_c^x \overline{z_1(s)} f(s) \mathrm{d}s, \\
c_2(x) &= a_2 + \int_c^x \overline{z_2(s)} f(s) \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

kde z_1, z_2 jsou absolutně spojité na (a,b). Abychom dokázali, že z_1, z_2 jsou řešení rovnice $(s - \overline{\lambda})z = 0$, ukážeme, že pro každý kompaktní interval $I = [\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$ platí

$$z_j|_I \in \mathscr{R}(T_{I,0} - \lambda I)^{\perp} = \mathrm{Ker}(T_{I,1} - \overline{\lambda} I),$$

kde $T_{I,0}$ a $T_{I,1}$ jsou definovány v důkazu Věty 2.1.15.

Nechť $f \in \mathscr{R}(T_{I,0} - \lambda I)$ a $f = (T_{I,0} - \lambda)g = (s - \lambda)g$, kde $g \in \mathscr{D}(T_{I,0}) \subseteq \mathscr{D}(T_0')$. Funkce g je tedy tvaru

$$\begin{aligned}
g(x) &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = \\
&= \left[a_1 + \int_c^x \overline{z_1(s)} f(s) \mathrm{d}s\right] y_1(x) + \left[a_2 + \int_c^x \overline{z_2(s)} f(s) \mathrm{d}s\right] y_2(x)
\end{aligned}$$

pro $x \in (a,b)$. Protože $g(x) = 0$ pro $x \notin [\alpha,\beta]$, platí

$$\begin{aligned}
a_1 &= \int_\alpha^c \overline{z_1(s)} f(s) \mathrm{d}s = -\int_c^\beta \overline{z_1(s)} f(s) \mathrm{d}s, \\
a_2 &= \int_\alpha^c \overline{z_2(s)} f(s) \mathrm{d}s = -\int_c^\beta \overline{z_2(s)} f(s) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Proto

$$\int_\alpha^\beta \overline{z_j(s)} f(s) \mathrm{d}s = 0, \quad \text{tj.} \quad z_j|_I \perp f.$$

Protože $f \in \mathscr{R}(T_{I,0} - \lambda I)$ bylo libovolné, platí

$$z_j|_I \in \mathscr{R}(T_{I,0} - \lambda I)^{\perp}.$$

□

Poznámka. Obecné řešení rovnice $(s - \lambda)y = f$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \\
+ W(y_1,y_2,x)^{-1} \left[y_1(x) \int_c^x y_2(s) f(s) \mathrm{d}s - y_2(x) \int_c^x y_1(s) f(s) \mathrm{d}s \right],
\end{aligned}$$

neboť Wronskián $W(y_1,y_2,x)$ nezávisí na x podle Věty 2.2.2. Dále platí

$$c_1(x) = a_1 + \int_c^x W(y_1,y_2,s)^{-1} y_2(s) f(s)\mathrm{d}s = a_1 + \int_c^x \overline{z_1(s)} f(s)\mathrm{d}s,$$
$$c_2(x) = a_2 - \int_c^x W(y_1,y_2,s)^{-1} y_1(s) f(s)\mathrm{d}s = a_2 + \int_c^x \overline{z_2(s)} f(s)\mathrm{d}s.$$

Odtud

$$z_1(x) = W(\overline{y_1},\overline{y_2},x)^{-1}\overline{y_2(x)},$$
$$z_2(x) = -W(\overline{y_1},\overline{y_2},x)^{-1}\overline{y_1(x)}.$$

Věta 2.2.4. *Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Předpokládejme, že pro nějaké $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ všechna řešení rovnic*

$$(s-\lambda_0)y = 0 \quad a \quad (s-\overline{\lambda_0})y = 0$$

leží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$. Pak toto tvrzení platí pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Analogicky pro řešení ležící zleva v $\mathscr{L}^2(a,b)$.

Důkaz. Můžeme psát

$$0 = (s-\lambda)y = (s-\lambda_0-\lambda+\lambda_0)y = (s-\lambda_0)y-(\lambda-\lambda_0)y.$$

Diferenciální rovnice $0=(s-\lambda)y$ tedy přejde na tvar

$$(s-\lambda_0)y = (\lambda-\lambda_0)y,$$

který můžeme chápat jako nehomogenní rovnici

$$(s-\lambda_0)y = f,$$

kde $f=(\lambda-\lambda_0)y$. Nyní můžeme využít Větu 2.2.3. Nechť y_1,y_2 je fundamentální systém řešení rovnice $(s-\lambda_0)y=0$, pak řešení y splňuje

$$y(x) = a_1y_1(x)+a_2y_2(x)+\sum_{j=1}^{2} y_j(x)\int_c^x \overline{z_j(s)}(\lambda-\lambda_0)y(s)\mathrm{d}s =$$
$$= a_1y_1(x)+a_2y_2(x)+(\lambda-\lambda_0)\sum_{j=1}^{2} y_j(x)\int_c^x \overline{z_j(s)}y(s)\mathrm{d}s$$

Protože funkce z_1,z_2 jsou řešení rovnice

$$(s-\overline{\lambda_0})z = 0,$$

platí $z_1,z_2,y_1,y_2 \in \mathscr{L}^2(c,b)$, kde $c\in(a,b)$. Označme

$$z(x) = |y_1(x)|+|y_2(x)|, \quad A = \max\{|a_1|,|a_2|\}.$$

Dále označme

$$M = 2|\lambda-\lambda_0|^2\left[\int_c^b |z_1(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_c^b |z_2(x)|^2\,\mathrm{d}x\right].$$

Užitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}|y(x)| \le |a_1|\,|y_1(x)| + \left|(\lambda-\lambda_0)\int_c^x \overline{z_1(s)}y(s)\mathrm{d}s\right| |y_1(x)| + \\ + |a_2|\,|y_2(x)| + \left|(\lambda-\lambda_0)\int_c^x \overline{z_2(s)}y(s)\mathrm{d}s\right| |y_2(x)| \le \\ \le Az(x) + |\lambda-\lambda_0| \left[\left|\int_c^x \overline{z_1(s)}y(s)\mathrm{d}s\right| |y_1(x)| + \left|\int_c^x \overline{z_2(s)}y(s)\mathrm{d}s\right| |y_2(x)|\right].\end{aligned}$$

Z Cauchyovy nerovnosti plyne

$$\begin{aligned}\left|\int_c^x \overline{z_1(s)}y(s)\mathrm{d}s\right| |y_1(x)| + \left|\int_c^x \overline{z_2(s)}y(s)\mathrm{d}s\right| |y_2(x)| \le \\ \le \sqrt{\left|\int_c^x \overline{z_1(s)}y(s)\mathrm{d}s\right|^2 + \left|\int_c^x \overline{z_2(s)}y(s)\mathrm{d}s\right|^2}\sqrt{|y_1(x)|^2+|y_2(x)|^2}.\end{aligned}$$

Dohromady tedy

$$\begin{aligned}|y(x)| \le Az(x) + \\ + |\lambda-\lambda_0| \left[\left(\left|\int_c^x \overline{z_1(s)}y(s)\mathrm{d}s\right|^2 + \left|\int_c^x \overline{z_2(s)}y(s)\mathrm{d}s\right|^2\right)\left(|y_1(x)|^2+|y_2(x)|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Opět z Cauchyovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}|y(x)|^2 \le 2\left[A^2(z(x))^2 + |\lambda-\lambda_0|^2(z(x))^2\sum_{i=1}^{2}\left(\int_c^x |z_i(s)|^2\mathrm{d}s\int_c^x |y(s)|^2\mathrm{d}s\right)\right] \le \\ \le 2A^2(z(x))^2 + M(z(x))^2\int_c^x |y(s)|^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Zřejmě $z \in \mathscr{L}^2(c,b)$, tj.

$$\int_c^b (|y_1(s)|+|y_2(s)|)^2\mathrm{d}s < \infty,$$

tedy existuje $d \in (c,b)$ takové, že

$$\int_d^b (|y_1(s)|+|y_2(s)|)^2\mathrm{d}s < \frac{1}{2M}.$$

Odtud pro $r \ge d$ platí

$$\begin{aligned}\int_d^r |y(s)|^2\mathrm{d}s \le 2A^2\int_d^r (z(s))^2\mathrm{d}s + M\int_d^r (z(t))^2\int_c^t |y(s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t \le \\ \le 2A^2\int_d^b (z(s))^2\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_c^r |y(s)|^2\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

a proto

$$\frac{1}{2}\int_d^r |y(s)|^2\mathrm{d}s \le 2A^2\int_d^b (z(s))^2\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_c^d |y(s)|^2\mathrm{d}s,$$

neboť
$$\frac{1}{2}\int_c^r |y(s)|^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_c^d |y(s)|^2\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_d^r |y(s)|^2\,\mathrm{d}s.$$
Pravá strana poslední nerovnosti je nezávislá na r, proto $y \in \mathscr{L}^2(d,b)$, tj. y leží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$. □

Věta 2.2.5 (Weylova alternativa)**.** *Nechť s je Sturm-Liouvilleův diferenciální výraz. Pak platí buď*

a) *pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ všechna řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$ leží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$,*

nebo

b) *pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ existuje nejméně jedno řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$, které neleží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$, v tomto případě pro každé $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$ (až na multiplikativní konstantu), které leží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$.*

Analogicky pro řešení ležící zleva v $\mathscr{L}^2(a,b)$.

Důkaz. Předpokládejme, že pro nějaké $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ každé řešení u rovnice $(s-\lambda_0)y = 0$ leží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$. Protože s je reálný diferenciální výraz, platí
$$0 = \overline{(s-\lambda_0)u} = \left(s - \overline{\lambda_0}\right)\overline{u},$$
a tedy $\overline{u}$ je řešení rovnice $(s-\overline{\lambda_0})y = 0$. Naopak, je-li v řešením rovnice $(s-\overline{\lambda_0})y = 0$, pak
$$0 = \overline{(s-\overline{\lambda_0})v} = (s-\lambda_0)\overline{v},$$
a tedy $\overline{v}$ je řešením rovnice $(s-\lambda_0)y = 0$. Proto všechna řešení $(s-\lambda_0)y = 0$ a $(s-\overline{\lambda_0})y = 0$ leží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$. Odtud, podle Věty 2.2.4, pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ všechna řešení $(s-\lambda)y = 0$ leží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$.

Dokázali jsme, že pokud pro libovolné jedno $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ leží všechna řešení rovnice $(s-\lambda_0)y = 0$ zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$, pak pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ leží všechna řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$ zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$. Tedy pokud nenastává varianta a), tj. existuje $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ tak, že nejméně jedno řešení rovnice $(s-\lambda_1)y = 0$ neleží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$, pak pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ existuje nejméně jedno řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$ neležící zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$.

Zbývá dokázat, že v případě b) pro každé $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$, které leží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$. Zřejmě stačí dokázat pouze existenci aspoň jednoho takového řešení, protože počet lineárně nezávislých řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$ je roven dvěma. Z Věty 2.1.23 platí
$$\gamma_b^+ \geq 1 \quad \text{pro} \quad \operatorname{Im}(\lambda) > 0,$$
$$\gamma_b^- \geq 1 \quad \text{pro} \quad \operatorname{Im}(\lambda) < 0.$$
Protože číslo γ_b^+ (resp. γ_b^-) udává počet lineárně nezávislých řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$ ležících zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$ pro $\operatorname{Im}(\lambda) > 0$ (resp. $\operatorname{Im}(\lambda) < 0$), platí Weylova alternativa. □

Definice 2.2.6. Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Řekneme, že výraz s je *limit circle* (zkráceně *LC*) v bodě b, jestliže platí varianta a) Weylovy alternativy. Řekneme, že výraz s je *limit point* (zkráceně *LP*) v bodě b, jestliže platí varianta b) Weylovy alternativy. Analogicky definujeme případy LC a LP pro bod a.

Věta 2.2.7. *Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz.*

a) *Pokud s je LC v bodech a a b, pak platí* $(\gamma_+, \gamma_-) = (2,2)$.
b) *Pokud s v jednom bodě LP a v druhém LC, pak* $(\gamma_+, \gamma_-) = (1,1)$.
c) *Pokud s je LP v bodech a a b, pak platí* $(\gamma_+, \gamma_-) = (0,0)$.

Důkaz. Protože T_0 je reálný operátor, podle Věty 1.4.16 platí $\gamma_+ = \gamma_- =: A$. Podobně platí $\gamma_a^+ = \gamma_a^- =: A_a$ a $\gamma_b^+ = \gamma_b^- =: A_b$. Podle Věty 2.1.21 platí

$$A = A_a + A_b - 2.$$

Odtud platí

$$\begin{aligned}
s \text{ je LC v bodě } a &\Rightarrow A_a = 2 = \gamma_a^+ = \gamma_a^-,\\
s \text{ je LP v bodě } a &\Rightarrow A_a = 1 = \gamma_a^+ = \gamma_a^-,\\
s \text{ je LC v bodě } b &\Rightarrow A_b = 2 = \gamma_b^+ = \gamma_b^-,\\
s \text{ je LP v bodě } b &\Rightarrow A_b = 1 = \gamma_b^+ = \gamma_b^-.
\end{aligned}$$

Tvrzení dostáváme dosazením případů a), b) a c) do vztahu $(\gamma_+, \gamma_-) = (A, A)$. □

Poznámka. Pokud nastane případ c) Věty 2.2.7, operátor $T_0 = T$ je samoadjungovaný, neboť $T^* = T_0$.

Zaměřme se nyní na speciální případ, ve kterém Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz $s(y) = -(p(x)y')' + q(x)y$ platí pro $x \in (0, \infty)$ a navíc je regulární v bodě 0, tedy

$$s(y) = -(p(x)y')' + q(x)y \quad \text{pro} \quad x \in [0, \infty). \tag{2.15}$$

Ukážeme, že v tomto případě platí buď $(\gamma_+, \gamma_-) = (2,2)$, nebo $(\gamma_+, \gamma_-) = (1,1)$ pro minimální operátor generovaný tímto speciálním výrazem s. Skutečnost, že $(\gamma_+, \gamma_-) = (0,0)$ nemůže nastat, je obsahem Věty 2.2.8. Tato věta spolu se svým důkazem také vysvětluje důvod zavedení pojmů limit point a limit circle. Uvidíme, že pojmy jsou založeny na geometrické interpretaci Weylovy alternativy. Stručně zavedeme ještě několik pojmů, které se využijí v důkazu Věty 2.2.8.

Zobecněnou kružnicí rozumíme množinu bodů z $\mathbb{C}$ danou rovnicí

$$\alpha z\bar{z} + \overline{B}z + B\bar{z} + \beta = 0 \tag{2.16}$$

pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$, $|B|^2 - \alpha\beta > 0$. Pro $\alpha \neq 0$ je rovnice (2.16) rovnicí kružnice a pro $\alpha = 0$ je rovnice (2.16) rovnicí přímky.

Homografií (*Möbiovou transformací*) rozumíme zobrazení $F\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ (symbol $\mathbb{C}^*$ značí rozšířenou množinu komplexních čísel, tj. množinu komplexních čísel se symbolem ∞ a se standardně rozšířenými operacemi), které je tvaru

$$F(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

pro konstanty $A,B,C,D \in \mathbb{C}$, které splňují podmínku $AD - BC \neq 0$. Pro $C = 0$ definujeme $L(\infty) = \infty$ a pro $C \neq 0$ definujeme $L(-D/C) = \infty$ a $L(\infty) = A/C$. Zobrazení F je bijekce $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$. Inverzní zobrazení F^{-1} existuje a je rovněž homografie. Platí, že homografický obraz zobecněné kružnice je opět zobecněná kružnice (viz [3]).

Následující věta má spíše charakter příkladu než účelové matematické věty.

Věta 2.2.8. *Nechť $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ a s je Sturmův-Liouvilleův výraz (2.15). Dále, nechť φ, ψ jsou řešení rovnice $(s - \lambda) = 0$ splňující počáteční podmínky*

$$\begin{aligned} \varphi^{[0]}(0) &= \varphi(0) = \sin\alpha, & \varphi^{[1]}(0) &= p(0)\varphi'(0) = -\cos\alpha, \\ \psi^{[0]}(0) &= \psi(0) = \cos\alpha, & \psi^{[1]}(0) &= p(0)\psi'(0) = \sin\alpha \end{aligned} \tag{2.17}$$

pro $\alpha \in [0,\pi)$. Nechť $b \in (0,\infty)$, pak řešení $y = \varphi + m\psi$ pro $m \in \mathbb{C}$ vyhovuje podmínce

$$y(b)\cos\beta + p(b)y'(b)\sin\beta = 0 \quad \textit{pro} \quad \beta \in [0,\pi) \tag{2.18}$$

právě tehdy, když $m \in C_b$, kde C_b je určitá kružnice v komplexní rovině. Pro $b \to \infty$ platí buď

a) *kružnice C_b konverguje k limitní kružnici C_∞ (v tomto případě všechna řešení rovnice $(s - \lambda) = 0$ leží v $\mathscr{L}^2(a,\infty)$ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dokonce pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C}$),*

nebo

b) *kružnice C_b konverguje k limitnímu bodu m_∞ (v tomto případě pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení (až na multiplikativní konstantu), které leží v $\mathscr{L}^2(a,\infty)$).*

Důkaz. Zřejmě φ, ψ jsou lineárně nezávislá řešení. Dále, z podmínek (2.17) pro Wronskián funkcí φ, ψ platí

$$W(0) = [\overline{\varphi}, \psi](0) = \varphi(0)p(0)\psi'(0) - p(0)\varphi'(0)\psi(0) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Podle části b) Věty 2.2.2 je Wronskián konstantní, proto

$$[\overline{\varphi}, \psi](x) = 1$$

pro $x \in [0,\infty)$. Všimněme si, že řešení φ, ψ také splňují v bodě 0 okrajové podmínky

$$\begin{aligned} \varphi(0)\cos\alpha + p(0)\varphi'(0)\sin\alpha &= 0, \\ \psi(0)\sin\alpha - p(0)\psi'(0)\cos\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Řešení rovnice $(s - \lambda) = 0$ jsou buď tvaru $y = \varphi + m\psi$ (až na konstantní násobek), kde $m \in \mathbb{C}$ je konstanta, nebo konstantním násobkem ψ. Dosazením y do rovnice (2.18) obdržíme

$$[\varphi(b) + m\psi(b)]\cos\beta + p(b)[\varphi'(b) + m\psi'(b)]\sin\beta = 0.$$

Úpravami dostaneme ekvivalentní tvar

$$m = -\frac{\varphi(b)\cos\beta + p(b)\varphi'(b)\sin\beta}{\psi(b)\cos\beta + p(b)\psi'(b)\sin\beta} = -\frac{\varphi(b)\operatorname{cotg}\beta + p(b)\varphi'(b)}{\psi(b)\operatorname{cotg}\beta + p(b)\psi'(b)}$$

pro

$$\psi(b)\cos\beta + p(b)\psi'(b)\sin\beta \neq 0 \quad \text{a} \quad \beta \neq 0. \tag{2.19}$$

Označme $A = \varphi(b)$, $B = p(b)\varphi'(b)$, $C = \psi(b)$, $D = p(b)\psi'(b)$, pak zřejmě $A,B,C,D \in \mathbb{C}$. Platí

$$BC - AD = p(b)\varphi'(b)\psi(b) - \varphi(b)p(b)\psi'(b) = -[\overline{\varphi}, \psi](b) = -1. \tag{2.20}$$

Proto zobrazení definované předpisem

$$F(z) = \frac{(-A)z + (-B)}{Cz + D} = -\frac{Az + B}{Cz + D}$$

je homografie.

Definujme $\operatorname{cotg} 0 = \infty$. Pokud připustíme, že ve vztahu (2.19) místo negací rovností nastávají rovnosti, pak $C = 0$ a nutně (z podmínky (2.20)) $-AD \neq 0$. V tomto případě platí $F(\operatorname{cotg} 0) = \infty$. Pokud platí pouze $\beta = 0$ a druhá nerovnost je splněna, pak tedy $C \neq 0$ a $L(\operatorname{cotg} 0) = A/C$. Pokud je splněna pouze nerovnost $\beta \neq 0$, pak C nebo D je nula, neboť dvojice $(\sin\beta, \cos\beta) \neq (0,0)$ na intervalu $(0,\pi)$ a případ $C = D = 0$ je vyloučen z podmínky (2.20). Pokud $C = 0$, pak $F(\infty) = \infty$ a pokud $C \neq 0$, pak $D = 0$, $L(\operatorname{cotg}(\pi/2)) = \infty$ a $L(\infty) = A/C$.

Množina

$$M = \{z \in \mathbb{C} : z = \operatorname{cotg}\beta \text{ pro } \beta \in [0,\pi)\}$$

je reálná přímka v rozšířených komplexních číslech, tj. zobecněná kružnice, proto i $F(M) = C_b$ je zobecněná kružnice. Vzhledem k tomu, že zobrazení F je bijekcí, platí: β probíhá od 0 k π právě tehdy, když m probíhá kružnici C_b. Odtud plyne ekvivalence: Řešení $y = \varphi + m\psi$ pro $m \in \mathbb{C}$ vyhovuje podmínce (2.18) právě tehdy, když m probíhá zobecněnou kružnici C_b.

Nechť $m \in C_b$ je libovolné, pak

$$F^{-1}(m) = -\frac{Dm + B}{Cm + A} = z$$

pro určité $z \in M$. Neboť M je reálná osa, platí

$$\operatorname{Im}\left(-\frac{Dm + B}{Cm + A}\right) = \operatorname{Im} z = 0.$$

Za pomoci vztahu $\operatorname{Im} z = (z - \overline{z})/2\mathrm{i}$ získáme vztah

$$\frac{\overline{Dm} + \overline{B}}{\overline{Cm} + \overline{A}} = \frac{Dm + B}{Cm + A}. \tag{2.21}$$

Vztah (2.21) je rovnicí pro neznámou m. Zřejmě $m \in C_b$ právě tehdy, když m splňuje rovnici (2.21). Rovnice (2.21) po úpravách přejde na tvar

$$(C\overline{D} - D\overline{C})m\overline{m} + (C\overline{B} - D\overline{A})m + (A\overline{D} - B\overline{C})\overline{m} + A\overline{B} - B\overline{A} = 0. \tag{2.22}$$

Jak později uvidíme, platí $C\overline{D} - D\overline{C} \neq 0$, tedy (2.22) je rovnicí kružnice. Rovnici kružnice lze zapsat také ve tvaru

$$|m - m_b| = r_b,$$

kde m_b je střed kružnice, r_b poloměr kružnice. Umocníme-li tuto rovnici na druhou a upravíme na tvar (2.16), pak porovnáním koeficientů můžeme získat střed kružnice. Platí

$$m_b = -\frac{A\overline{D} - B\overline{C}}{C\overline{D} - D\overline{C}}.$$

Podobně získáme poloměr

$$r_b = \sqrt{\left|\frac{B\overline{C} - A\overline{D}}{C\overline{D} - D\overline{C}}\right|^2 - \frac{A\overline{B} - B\overline{A}}{C\overline{D} - D\overline{C}}} = \left|\frac{AD - BC}{C\overline{D} - D\overline{C}}\right|.$$

Snadno se lze přesvědčit, že rovnice (2.22) lze přepsat do tvaru $-[y,y](b) = 0$ a že platí

$$\begin{aligned} A\overline{D} - B\overline{C} &= \varphi(b)p(b)\overline{\psi'(b)} - p(b)\varphi'(b)\overline{\psi(b)} = -[\psi,\varphi](b) \\ C\overline{D} - D\overline{C} &= \psi(b)p(b)\overline{\psi'(b)} - p(b)\psi'(b)\overline{\psi(b)} = -[\psi,\psi](b), \\ AD - BC &= -(BC - AD) = [\overline{\varphi},\psi](b) = 1. \end{aligned}$$

Vztahy pro střed a poloměr kružnice pak vypadají následovně

$$m_b = -\frac{[\psi,\varphi](b)}{[\psi,\psi](b)}, \qquad r_b = \frac{1}{|[\psi,\psi](b)|}.$$

Vnitřek kružnice C_b je tedy zadán následující nerovnicí

$$\frac{[y,y](b)}{[\psi,\psi](b)} < 0.$$

Nyní aplikujeme Greenovu formuli (2.6) na řešení ψ rovnice $(s-\lambda)y = 0$ a dostaneme

$$\int_0^b \left[\overline{\lambda\psi(x)}\psi(x) - \overline{\psi(x)}\lambda\psi(x)\right] \mathrm{d}x = [\psi,\psi](b) - [\psi,\psi](0).$$

Z podmínek (2.17) plyne, že $[\psi,\psi](0) = 0$. Odtud

$$[\psi,\psi](b) = -2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\lambda \int_0^b |\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

kde $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, což plyne přímo z předpokladu věty. Podobně platí

$$[y,y](b) = [y,y](0) - 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\lambda \int_0^b |y(x)|^2\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,m - 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\lambda \int_0^b |y(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

neboť platí $[\varphi,\varphi](0) = 0$, $[\varphi,\psi](0) = 1$, $[\psi,\varphi](0) = -1$. Odtud nerovnost (2.2) je ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{\mathrm{Im}\,\lambda \int_0^b |y(x)|^2\,\mathrm{d}x - \mathrm{Im}\,m}{\mathrm{Im}\,\lambda \int_0^b |y(x)|^2\,\mathrm{d}x} < 0,$$

tedy i nerovnosti

$$\int_0^b |y(x)|^2\,\mathrm{d}x < \frac{\mathrm{Im}\,m}{\mathrm{Im}\,\lambda}. \tag{2.23}$$

Zřejmě platí, že body kružnice C_b jsou dány rovnicí, která vznikne ze vztahu (2.23) nahrazením nerovnosti rovností. Pro poloměr kružnice platí

$$r_b^{-1} = |[\psi,\psi](b)| = 2\,|\mathrm{Im}\,\lambda| \int_0^b |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Nechť $b_1, b_2 \in (0,\infty)$ jsou takové, že $b_1 < b_2$. Pro m z vnitřku C_{b_2} platí

$$\int_0^{b_1} |y(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_0^{b_2} |y(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \frac{\mathrm{Im}\,m}{\mathrm{Im}\,\lambda}.$$

Proto m leží i uvnitř C_{b_1}. Označme

$$m_\infty = \lim_{b\to\infty} m_b \quad \text{a} \quad r_\infty = \lim_{b\to\infty} r_b.$$

Pak buď C_b konverguje k (limitní) kružnici C_∞ nebo k (limitnímu) bodu m_∞. Pokud $\widehat{m}$ je libovolný bod ležící na kružnici C_∞ (resp. $\widehat{m} = m_\infty$), pak $\widehat{m} \in C_b$ pro každé $b \in \mathbb{R}$. Proto

$$\int_0^b |\varphi(x) + \widehat{m}\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^b |\widehat{y}(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \frac{\mathrm{Im}\,\widehat{m}}{\mathrm{Im}\,\lambda}.$$

Limitním přechodem pro $b \to \infty$ dostáváme, že $\widehat{y} \in \mathscr{L}^2(0,\infty)$. Odtud plyne, že pro $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ vždy alespoň jedno řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$ je v $\mathscr{L}^2(0,\infty)$.

Nechť C_b konverguje ke kružnici C_∞. Pak existuje nekonečně mnoho řešení y patřících do $\mathscr{L}^2(0,\infty)$, které jsou tvaru $y = \varphi + m\psi$ pro $m \in C_\infty$ a generují celý prostor řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$.

Nechť C_b konverguje k bodu m_∞, tj. $r_b \to 0$ pro $b \to \infty$ a existuje jediné řešení $y = \varphi + m_\infty\psi$, které patří do $\mathscr{L}^2(0,\infty)$, neboť

$$0 = \lim_{b\to\infty} r_b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\,|\mathrm{Im}\,\lambda| \int_0^b |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x},$$

tj. $\psi \notin \mathscr{L}^2(0,\infty)$. $\square$

2.3 LP/LC kriteria

Následující věta je důsledkem Věty 2.2.4, proto ji uvedeme bez důkazu.

Věta 2.3.1. *Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Předpokládejme, že pro nějaké $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ všechna řešení rovnic*

$$(s-\lambda_0)y = 0 \quad a \quad (s-\overline{\lambda_0})y = 0$$

leží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$. Pak s je limit circle v bodě b. Analogicky pro řešení ležící zleva v $\mathscr{L}^2(a,b)$.

Nyní uvedeme i dostačující podmínku pro případ LP.

Věta 2.3.2. *Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Předpokládejme, že existuje $c \in (a,b)$ takové, že $p(x) > 0$ pro $x \in (c,b)$. Dále, označme*

$$g(x) = \int_c^x \frac{1}{p(t)} \mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad x \in (c,b).$$

Pokud platí

$$g \notin \mathscr{L}^2(c,b) \quad a \quad \liminf_{x \to b} q(x) > -\infty,$$

pak výraz s je limit point v bodě b. Analogické tvrzení platí pro hraniční bod a.

Důkaz. Nechť $g \notin \mathscr{L}^2(c,b)$, pak $c + g \notin \mathscr{L}^2(c,b)$, neboť integrál

$$\int_c^b |c+g|^2 \, \mathrm{d}x$$

zřejmě diverguje. Zvolme $\gamma \in \mathbb{R}$ a $x_0 \in (a,b)$ takové, že platí

$$q(x) > \gamma \quad \text{pro} \quad x \geq x_0.$$

Chceme dokázat, že s je limit point v bodě b, tj. stačí dokázat, že pro nějaké λ existuje nějaké řešení rovnice $(s-\lambda)y = 0$, které neleží zprava v $\mathscr{L}^2(a,b)$. Proto uvažme počáteční problém

$$(s-\gamma)y = 0, \quad y^{[0]}(x_0) = y(x_0) = 1, \; y^{[1]}(x_0) = p(x_0)y'(x_0) = 0. \tag{2.24}$$

Nechť y je řešení rovnice (2.24), pak platí

$$(p(x)y'(x))' = (q(x) - \gamma)y(x) = k(x)y(x),$$

kde $k(x) = (q(x) - \gamma) > 0$. Vzhledem k tomuto vztahu a počátečním podmínkám ze vztahu (2.24) platí, že funkce py' a y jsou rostoucí na intervalu (x_0, b). Pak pro $c \in (x_0, b)$ platí

$$p(x)y'(x) > p(c)y'(c) > 0 \quad \text{pro} \quad x \in (c,b).$$

Odtud

$$y(x) = 1 + \int_{x_0}^x y'(t)\mathrm{d}t > 1 + \int_c^x \frac{d}{p(t)} \mathrm{d}t = 1 + p(c)y'(c)g(x).$$

Proto $y \notin \mathscr{L}^2(c,b)$, tedy s je limit point v bodě b. □

Nakonec uveďme dostatečnou podmínku pro případ LP, kdy hraniční bod $b = \infty$. Větu ponecháme bez důkazu (důkaz lze nalézt v [9]).

Věta 2.3.3. *Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz na intervalu (a,∞) takový, že $p(x) = 1$ pro $x \in (a,\infty)$. Dále předpokládejme, že existuje $c \in (a,\infty)$ a konstanta $k \geq 0$ tak, že platí*

$$q(x) \geq -kx^2 \quad \text{pro} \quad x \in (c,\infty).$$

Pak s je limit point v bodě ∞.

2.4 Oscilační vlastnosti

V tomto odstavci uvažujeme vyšetřovaný Sturmův-Liouvilleův výraz pouze nad reálnými funkcemi.

2.4.1 Regulární případ

Následující věta je důsledkem Sturmovy srovnávací věty a oscilační věty, které lze i s důkazem nalézt v [4].

Věta 2.4.1 (Sturmova separační věta)**.** *Nechť s je regulární Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz takový, že $p(x) > 0$ na $[a,b]$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a u_1 (resp. u_2) je reálné řešení rovnice $(s-\lambda_1)y = 0$ (resp. $(s-\lambda_2)y = 0$).*

a) *Pokud $\lambda_1 = \lambda_2$ a u_1, u_2 jsou lineárně nezávislé, pak mezi každými dvěma po sobě jdoucími nulovými body řešení u_1 leží právě jeden nulový bod řešení u_2.*

b) *Pokud $\lambda_1 < \lambda_2$, pak mezi dvěma po sobě jdoucími nulovými body řešení u_1 leží nejméně jeden nulový bod řešení u_2.*

Nyní využijeme Sobolevova prostoru $W^{1,2}(a,b)$. Připomeňme stručně, jak je definován. Platí

$$W^{1,2}(a,b) = \{y \in \mathscr{AC}(a,b) : y' \in \mathscr{L}^2(a,b)\}.$$

Norma na tomto prostoru je zadána následujícím vztahem

$$\|y\|_{W^{1,2}(a,b)} = \Big(\|y\|_{\mathscr{L}^2(a,b)} + \|y'\|_{\mathscr{L}^2(a,b)}\Big)^{1/2}$$

pro $y \in W^{1,2}(a,b)$. Prostor $W^{1,2}(a,b)$ je Hilbertův prostor a často se značí symbolem $H^1(a,b)$. Skalární součin na $W^{1,2}(a,b)$ je zadán následujícím vztahem

$$\langle y_1, y_2\rangle_{W^{1,2}(a,b)} = \langle y_1, y_2\rangle_{\mathscr{L}^2(a,b)} + \langle y_1', y_2'\rangle_{\mathscr{L}^2(a,b)}$$

pro $y_1, y_2 \in W^{1,2}(a,b)$. Dále, označme

$$W_0^{1,2}(a,b) = \{y \in W^{1,2}(a,b) : y(a) = 0 = y(b)\}$$

pro $a, b \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Pro reálné $y \in W_0^{1,2}(a,b)$

$$\langle y, s(y)\rangle_{\mathscr{L}^2(a,b)} = \int_a^b y\left[-(p(t)y')' + q(t)y\right] \mathrm{d}t = -\left[py'y\right]_a^b + \int_a^b \left[p(t)y'^2 + q(t)y^2\right] \mathrm{d}t.$$

2.4.2 Singulární případ

Definice 2.4.2. Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz na intervalu $[\alpha,\infty)$ takový, že $\lambda \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ na $[a,\infty)$. Řekneme, že rovnice $(s-\lambda)y = 0$ je *oscilatorická*, jestliže každé řešení má nekonečně mnoho nulových bodů na $[a,\infty)$. Řekneme, že rovnice $(s-\lambda)y = 0$ je *neoscilatorická*, jestliže není oscilatorická.

Poznámka. Z části a) Věty 2.4.1 plyne, že definice oscilatoričnosti, resp. neoscilatoričnosti je korektní, neboť pokud jedno řešení osciluje (má nekonečně mnoho nulových bodů na $[a,\infty)$), pak každé řešení osciluje a z části b) této věty plyne, že pokud $(s-\lambda)y = 0$ je oscilatorická, pak $(s-\mu)y = 0$ je oscilatorická pro každé $\mu > \lambda$.

Definice 2.4.3. Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz regulární v bodě a a $b = \infty$. Řekneme, že s je *zdola ohraničený* na $[a,\infty)$, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $y \in W^{1,2}(a,\infty)$ splňující $y(a) = 0$, $\operatorname{supp}(y)$ je kompaktní v $[a,\infty)$ platí

$$\int_a^\infty \left[p(t)y'^2 + q(t)y^2\right] \mathrm{d}t \geq k \int_a^\infty |y|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Řekneme, že operátor T generovaný výrazem s je *ohraničený zdola*, jestliže s je ohraničený zdola.

Poznámka. Platí

$$\langle y, s(y)\rangle_{\mathscr{L}^2(a,\infty)} = \int_a^\infty y\left[-(p(t)y')' + q(t)y\right] \mathrm{d}t \geq k \int_a^\infty |y|^2 \,\mathrm{d}t = \|y\|^2_{\mathscr{L}^2(a,\infty)}$$

pro $y \in W^{1,2}(a,\infty)$ s kompaktním nosičem v $[a,\infty)$ splňujícím $y(a) = 0$, neboť

$$\int_a^\infty y\left[-(p(t)y')' + q(t)y\right] \mathrm{d}t = \int_a^\infty \left[p(t)y'^2 + q(t)y^2\right] \mathrm{d}t,$$

kde jsme využili skutečnosti, že $y(a) = 0$ a existuje $c_1 > a$ takové, že $y(t) = 0$ pro $t \in [c_1,\infty)$.

Věta 2.4.4. *Nechť s je regulární Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

a) *Rovnice $s(y) = 0$ je diskonjungovaná na intervalu $[a,b]$, tj. řešení y této rovnice zadané okrajovými podmínkami $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$ splňuje podmínku $y(t) \neq 0$ pro $t \in (a,b]$.*
b) *Existuje řešení y rovnice $s(y) = 0$, které nemá žádný nulový bod v $[a,b]$.*
c) *Existuje řešení w ($w = -(py')/y$, kde y je řešením rovnice $s(y) = 0$) Riccatiho rovnice*

$$w' + q(t) - \frac{w^2}{p(t)} = 0,$$

které je definované na celém intervalu $[a,b]$.
d) *Kvadratický funkcionál*

$$\mathscr{F}(y;a,b) = \int_a^b \left[p(t)y'^2 + q(t)y^2\right] \mathrm{d}t > 0$$

pro každé $y \in W_0^{1,2}(a,b)$, které není identicky rovno 0.

Důkaz Věty 2.4.4 lze nalézt v [2].

Poznámka. Zejména, pokud s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz na intervalu $[a,\infty)$, tj. regulární v bodě a, pak rovnice $(s-\lambda)y=0$ je neoscilatorická právě tehdy, když existuje $c_2 > a$ takové, že rovnice $(s-\lambda)y=0$ je diskonjungovaná na intervalu $[c_2,\infty)$, tj. právě tehdy, když

$$\int_{c_2}^{\infty} \left[p(t)y'^2 + (q(t)-\lambda)y^2\right] \mathrm{d}t > 0$$

pro $y \in W^{1,2}(c_2,\infty)$ mající kompaktní nosič v $[c_2,\infty)$ takové, že $y(c_2)=0$ a y není identicky rovno 0.

Věta 2.4.5. *Nechť s je Sturmův-Liouvilleův diferenciální výraz. Dále, nechť s je regulární v bodě a a operátor A je nějaké samoadjungované rozšíření minimálního operátoru T_0. Pak operátor A je ohraničený zdola právě tehdy, když existuje $\mu \in \mathbb{R}$ takové, že rovnice*

$$(s-\mu)y=0$$

je neoscilatorická.

Důkaz. Nechť operátor A je ohraničený zdola, tj. existuje $\mu \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\langle y, s(y)\rangle_{\mathscr{L}^2(a,b)} \geq \mu \, \|y\|^2_{\mathscr{L}^2(a,b)} \, .$$

Tento vztah můžeme ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\langle y, (s-\mu)y\rangle_{\mathscr{L}^2(a,b)} \geq 0.$$

Z Věty 2.4.4 a za ní uvedené poznámky plyne, že tato nerovnost nastane právě tehdy, když rovnice $(s-\mu)y=0$ je neoscilatorická. □

Seznam použité literatury

[1] CODDINGTON, Earl A a Norman LEVINSON. *Theory of ordinary differential equations*. Malabar: Krieger Publishing Company, 1984, 429 s. ISBN 08-987-4755-4.

[2] DOŠLÝ, Ondřej. Oscillation theory of linear differential and difference equations. In *Proceedings of Seminar "Differential Equations 2002", Palava 2002*. Plzeň : West Bohemia University Press7, 2002. s. 7-73.

[3] KALAS, Josef. *Analýza v komplexním oboru*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2006, 202 s. ISBN 80-210-4045-9.

[4] KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001, 207 s. ISBN 80-210-2589-1.

[5] LEVITAN, Boris Moiseevich a I SARGSJAN. *Sturm-Liouville and Dirac operators*. 2. vyd. Boston: Kluwer Academic, c1991, 350 s. Mathematics and its applications (Kluwer Academic Publishers), 59. ISBN 07-923-0992-8.

[6] RÁB, Miloš. *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004, 96 s. ISBN 80-210-3416-5.

[7] ROSICKÝ, Jiří. *Algebra*. 4. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002, 132 s. ISBN 80-210-2964-1.

[8] WEIDMANN, Joachim. *Linear operators in Hilbert spaces*. New York: Springer-Verlag, c1980, 402 s. ISBN 03-879-0427-1.

[9] WEIDMANN, Joachim. *Spectral theory of ordinary differential operators*. Berlin: Springer, 1987, 303 s. Lecture notes in mathematics, 1258. ISBN 03-871-7902-X.

[10] ZETTL, Anton. *Sturm-Liouville theory*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, c2005, 328 s. Mathematical surveys and monographs, no. 121. ISBN 08-218-3905-5.