MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2018 MARIÁN SUCHÁNEK

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Příklady z Lebesgueovy míry a Lebesgueova integrálu

Bakalářská práce

Marián Suchánek

Vedoucí práce: prof. RNDr. Roman Šimon Hilscher, DSc. **Brno 2018**

Bibliografický záznam

Autor:	Marián Suchánek Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Příklady z Lebesgueovy míry a Lebesgueova integrálu
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Roman Šimon Hilscher, DSc.
Akademický rok:	2017/2018
Počet stran:	ix + 34
Klíčová slova:	Lebesgueův integrál; Lebesgueova míra; Integrál; Riemannův integrál; Newtonův integrál;

Bibliographic Entry

Author:	Marián Suchánek Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Examples from Lebesgue measure and Lebesgue integral
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	General mathematics
Supervisor:	prof. RNDr. Roman Šimon Hilscher, DSc.
Academic Year:	2017/2018
Number of Pages:	ix + 34
Keywords:	Lebesgue integral; Lebesgue measure; Integral; Riemann integral; Newton integral;

Abstrakt

V bakalářské práci studujeme Lebesgueovu míru, Lebesgueův integrál a jeho vztah s Riemannovým a Newtonovým integrálem. Práce je rozdělena do tří ekvivalentních celků. Každá kapitola obsahuje prvně základy teorie příslušného tématu a později řešené příklady. Teorie z první části je dostatečná k vyřešení všech příkladů.

Abstract

In this thesis we study Lebesgue measure, Lebesgue integral, and its relationship with Riemann and Newton integral. The thesis is divided into three equivalent chapters. Each chapter firstly includes theoretical basics of the particular topic and secondly solved problems. Theory from the first parts is sufficient for solving all the problems.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2016/2017

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Student: Marián Suchánek

Program: Matematika

Obor: Obecná matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce: Příklady z Lebesgueovy míry a Lebesgueova integrálu

Název práce anglicky: Examples from Lebesgue measure and Lebesgue integral

Oficiální zadání:
Student pojedná o základních vlastnostech Lebesgueovy míry a Lebesgueova integrálu a doplní je o vzorové řešené příklady z této teorie. Zaměří se také na srovnání Lebesgueova, Riemannova a Newtonova integrálu.

Literatura:

LUKEŠ, Jaroslav a Jan [matematik] MALÝ. *Míra a integrál*. 2. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2002. 179 s. ISBN 80-246-0430-2.

TORCHINSKY, Alberto. *Problems in real and functional analysis*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2015. x, 467. ISBN 9781470420574.

Další literatura: Kleknerová, Eva: Různé typy integrálů a jejich aplikace, diplomová práce, FAV ZČU, Plzeň, 2009.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: prof. RNDr. Roman Šimon Hilscher, DSc.

Datum zadání práce: 20. 9. 2016

V Brně dne: 3. 11. 2016

Souhlasím se zadáním (podpis, datum): 7. 12. 2016

Marián Suchánek
student

prof. RNDr. Roman Šimon Hilscher, DSc.
vedoucí práce

v. z.
prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat rodině, Jiřímu Jirešovi a hlavně prof. RNDr. Romanovi Šimonovi Hilscherovi, DSc. za pomoc za cenné připomínky při psaní práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 29. května 2018 ....

Marián Suchánek

Obsah

Úvod

Bakalářská práce je rozčleněna do tří kapitol. Kapitoly postupně představují čtenáři teorii Lebesgueovy míry, Lebesgueova integrálu a porovnávají teorii Lebesgueova integrálu s integrálem v Riemannově a Newtonově smyslu. Každá kapitola je složena z teoretické části a části obsahující řešené příklady, které si kladou za cíl aplikovat a prohloubit teoretické poznatky.

Obsahem první kapitoly je Lebesgueova míra. Teoretická část kapitoly je rozdělená na dva celky. První vysvětluje teorii míry. Jsou zde definovány základní pojmy a vlastnosti míry. Druhá část se zabývá konstrukcí Lebesgueovy míry pomocí vnější míry, pokrývacího systému a Carathéodhoryho konstrukce. Na závěr jsou ukázány vlastnosti systému lebesgueovsky měřitelných množin. Část s příklady je vybudována tak, aby postupně představila množinu měřitelných množin a jejich míry. První kapitolu uzavírá krátké pojednání o měřitelných funkcích.

Druhá kapitola pojednává o teorii Lebesgueova integrálu. V části věnované teorii nalezneme tři podkapitoly, v kterých se zabýváme budováním Lebesgueova integrálu. Postupně budujeme integrál pro jednoduché funkce, nezáporné funkce a nakonec pro obecné měřitelné funkce. V kapitole věnované nezáporným funkcím představíme Lebesgueovu větu o limitním přechodu a v kapitole věnované obecným měřitelným funkcím představíme Lebesgueovu větu o majorizovaném limitním přechodu. Příklady v druhé kapitole představují vlastnosti Lebsgueova integrálu.

V třetí kapitole podáme stručné definice Newtonova a Riemannova integrálu. Popíšeme podmínky integrovatelnosti a vlastnosti integrálů. Nakonec ukážeme věty porovnávající vztahy mezi těmito integrály. Druhá část obsahující příklady ukazuje funkce, které jsou určitými typy integrálů integrovatelné a jinými ne.

Přehled použitého značení

Pro snažší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
C	Cantorovo diskontinuum
$\mathscr{P}(A)$	potenční množina množiny A
$\lambda(A)$	míra množiny A
$\mathscr{R}[a,b]$	množina všech integrovatelných funkcí v Riemannově smysu na intervalu $[a,b]$
$\mathscr{N}(a,b)$	množina všech integrovatelných funkcí v Newtonově smyslu na intervalu (a,b)
$\mathscr{L}(M)$	množina všech integrovatelných funkcí v Lebesgueově smyslu na množině M
$\mathscr{D}([a,b])$	množina všech dělení intervalu $[a,b]$
$(\mathscr{L})\int_A f(x)\mathrm{d}\lambda$	Lebesgeův integrál z funkce f na množině A
$(\mathscr{R})\int_A f(x)\mathrm{d}x$	Riemannův integrál z funkce f na množině A
$(\mathscr{N})\int_A f(x)\mathrm{d}x$	Newtonův integrál z funkce f na množině A
$\mathscr{L}$	σ -algebra všech lebesgueovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}$
$\mathscr{B}$	σ -algebra všech borelovských množin v $\mathbb{R}$
A^C	komplement množiny $A \subseteq X$ v množině X

Kapitola 1

Lebesgueova míra

Jedno z prvních užití matematiky se zabývalo, jak různým objektům přiřadit jejich délku, plochu nebo objem. Časem se tyto objekty stávaly abstraktnější (např. různé nespojité funkce nebo množiny). Stále se jednalo o to stejné měření, u kterého jsme předpokládali určité vlastnosti. Tyto vlastnosti daly vzniknout axiomům, na nichž byla vybudovaná teorie, ve shodě s původními vzorci, která rozšířila množinu měřitelných objektů. Kapitola vychází z knih [1] a [6].

1.1 Teorie míry

Od axiomů, o kterých se zmiňujeme výše, požadujeme, aby zajistily následující. Míra libovolné množiny je nezáporná, míra prázdné množiny je nulová a míra po dvou disjunktních množin je součet měr množin.

Definice 1.1 (Míra)**.** Nechť $X \neq \emptyset$ a $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je množinová funkce definovaná na σ-algebře $\mathscr{A}$ na X splňující,

M1) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow 0 \leq \mu(A) \leq \infty$ (nezápornost),

M2) $\mu(\emptyset) = 0$,

M3) $A_n \in \mathscr{A}, \forall n \in \mathbb{N}$, kde $A_i \cap A_j$ pro $i \neq j$, $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (σ-aditivita).

Potom se množinová funkce μ nazývá míra. O množině $A \in \mathscr{A}$ řekneme, že je měřitelná.

Definice 1.2 (σ-algebra)**.** Buď $X \neq \emptyset$ množina. Definujeme σ-algebru $\mathscr{A}$ na X jako neprázdný systém podmnožin X, který splňuje

a) $X \in \mathscr{A}$,

b) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^C = X \setminus A \in \mathscr{A}$,

c) $A_n \in \mathscr{A}; n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Definice 1.3 (Úplná míra)**.** Nechť μ je míra na σ-algebře $\mathscr{A}$. Pokud pro množinu A míry nula platí, že všechny podmnožiny A jsou měřitelné, nazýváme míru μ na $\mathscr{A}$ úplnou mírou.

Poznamenejme, že míra všech podmnožin množiny míry nula je také nula, což plyne z monotonie (Věta 1.4 a)

Lze ukázat, že libovolnou míru lze vhodně rozšířit tak, že bude úplnou mírou.

Věta 1.4 (Vlastnosti míry)**.** *Nechť μ je míra. Pak má následující vlastnosti.*

a) Nechť $A \subseteq B$ jsou měřitelné. Pak $\mu(A) \leq \mu(B)$.

b) Nechť $A \subseteq B$ jsou měřitelné a $\mu(A) < \infty$. Potom $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

c) Nechť A_n pro $n \in \mathbb{N}$ je měřitelná. Potom $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Od míry μ na $\mathbb{R}$ požadujeme, aby splňovala následující body.

1.) Zachování délky intervalu. Tedy $\mu(I) = d(I)$, kde I je interval a d funkce přiřazující intervalu jeho délku.

2.) Monotonie. Pro $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ platí, že $0 \leq \mu(A) \leq \mu(B) \leq \infty$. Tato vlastnost plyne z definice míry. Platí, že libovolná míra je monotonní.

3.) Invarianci vůči translaci. Pro $A \subseteq \mathbb{R}$ měřitelnou a $x_0 \in \mathbb{R}$ mějme $\mu(x_0 + A) = \mu(\{x_0 + x; x \in A\}) = \mu(A)$.

1.2 Konstrukce Lebesgueovy míry

Obecná konstrukce Lebesgueovy míry klade množinu X z definice míry rovnu $\mathbb{R}^n$. Konstrukce podána v této sekci uvažuje pouze případ, že X je $\mathbb{R}$. Následné rozšíření na $\mathbb{R}^n$ se provede analogicky.

Pokud budujeme míru na $\mathbb{R}$, ideálně bychom požadovali, aby množinová funkce, která je mírou a splňuje předchozí vlastnosti, byla definována na $2^{\mathbb{R}}$, tedy na maximální σ-algebře na $\mathbb{R}$. Carathéodoryho konstrukcí popsanou níže vytvoříme Lebesgueovu míru λ pro σ-algebru $\mathscr{L}$ ostře menší než $2^{\mathbb{R}}$. O množinách neležících v $\mathscr{L}$ řekneme, že jsou lebesgueovsky neměřitelné. Existence takové množiny plyne z axiomu výběru a v následující kapitole takovou množinu zkonstruujeme.

Konstrukci Lebesgueovy míry provedeme tak, že nejprve definujeme Lebesgueovu vnější míru pro každou podmnožinu $\mathbb{R}$. Potom vybereme podmnožiny, které splňují vlastnost z Carathéodoryho konstrukce. Celkem dostaneme, že Lebesgueova vnější míra je na těchto podmnožinách mírou.

Definice 1.5 (Vnější míra)**.** Buď $X \neq \emptyset$ a μ^* je množinová funkce splňující,

VM$_1$) $A \subseteq X \Rightarrow \mu^*(A) \geq 0$,

VM$_2$) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

VM3) $A \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} A_n;\ A_n \subseteq X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$

Potom μ^* nazýváme vnější mírou.

Definice 1.6 (Lebesgueova vnější míra)**.** Pro každou množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ definujeme její vnější Lebesgueovu míru $\lambda^*(M)$ následovně,

$$\lambda^*(M) := \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} d(I_k); \{I_k\} \text{ je posloupnost intervalů typu } (-\infty,b), [a,b), [a,\infty), (-\infty,\infty);\ M \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \Big\}.$$

Definice 1.7 (Pokrývací systém)**.** Dvojici (β,ν) nazýváme pokrývající systém, jestliže β je systém množin obsahující prázdnou množinu a $\nu:\beta \to [0,\infty]$ je množinová funkce, která navíc splňuje $\nu(\emptyset)=0$.

Potom obecně z libovolného pokrývajícího systému (β,ν) vytvoříme vnější míru na X, kde $\beta \subseteq \mathscr{P}(X)$ a $A \subseteq X$, následovně,

$$\lambda^*(A) := \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(M_n);\ M_n \in \beta,\ n \in \mathbb{N};\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \Big\},$$

Vytvoříme množinu $\mathscr{L}$ lebesgueovsky měřitelných podmnožin na $\mathbb{R}$. Vezmeme všechny podmnožiny $A \subseteq \mathbb{R}$, pro které vzhledem k Lebesgueově vnější míře platí následující,

$$\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \setminus A),$$

kde podmnožina $T \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná (Carathéodory konstrukce).

O rozšíření pokrývajícího systému říkáme, že je úspěšné pokud splňuje následující.

1.) Systém $\beta \subseteq \mathscr{L}$, kde $\mathscr{L}$ je systém měřitelných množin z Carathéodoryho konstrukce.

2.) Hodnota $\lambda(A) = \lambda^*(A)$, kde $A \in \beta$.

Definice 1.8 (Lebesgueova míra)**.** Lebesgueova míra λ je zúžení Lebesgueovy vnější míry na systém měřitelných množin z Carathéodoryho konstrukce. Množinu všech lebesgueovsky měřitelných množin značíme $\mathscr{L}$.

Definice 1.9 (Pramíra)**.** Nezáporná množinová funkce μ je pramíra na X, pokud je μ definováno na okruhu $\beta \subseteq 2^X$ a splňuje,

1.) $\mu(\emptyset) = 0$.

2.) Množiny $A_n \in \beta, n \in \mathbb{N}$ jsou po dvou disjunktní a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \beta \to \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\Big(A_n\Big)$$

Pokud má pokrývací systém vhodné vlastnosti, potom je míra určena jednoznačně a je úplná. To plyne z Hopfovy věty (1.10) a Carathéodhoryho věty o rozšíření pramíry (1.11).

Věta 1.10 (Hopfova)**.** *Buď β algebra podmnožin množiny $\mathbb{R}$ a nechť λ^* je σ-konečná pramíra definovaná na β. Potom je míra λ z Carathéodhoryho konstrukce určena jednoznačně.*

Věta 1.11 (Carathéodhoryho o rozšíření pramíry)**.** *Buď β okruh podmnožin v $\mathbb{R}$ a nechť μ je pramíra na β. Potom vnější míra λ^* splňuje*

i.) $\lambda^*(B) = \mu(B)$ *pro* $B \in \beta$.

ii.) *Okruh* $\beta \in \mathscr{L}$ *a vnější míra* λ^* *je úplná míra na* $\mathscr{L}$.

Systém $\mathscr{L}$ má následující vlastnosti.

1.) Systém $\mathscr{L}$ tvoří σ-algebru.

2.) Lebesgueova vnější míra je na $\mathscr{L}$ mírou.

3.) Lebesgueova míra je určena jednoznačně.

4.) Lebesgueova míra na $\mathscr{L}$ je úplnou mírou.

5.) Platí, že všechny intervaly typu $(-\infty,b),[a,b),[a,\infty),(-\infty,\infty)$ leží v $\mathscr{L}$. Jejich Lebesgueova míra je rovna délce intervalu. Tedy jedná se o úspěšné rozšíření.

1.3 Příklady

Následující sekci vychází z [2] , [6] a [8].

Příklad 1.12. Každá jednobodová množina má míru nula.

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, a+\frac{1}{n}\right),$$
$$\lambda\left[a, a+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

S využitím následujícího tvrzení dostaneme požadovanou vlastnost.

Nechť $A_n \in \mathscr{L}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$, kde $\lambda(A_i) < \infty$ pro $\forall i \in \mathbb{N}$. Označme $A := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n)$. Potom $\lambda(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(A_n)$. Neboť $\lambda(A_n) = \dfrac{1}{n}$, z předchozího dostáváme, že $\lambda(a) = \lim\limits_{n\to\infty} = 0$.

Poznamenejme, že z tohoto příkladu také plyne, že každá spočetná a tedy i konečná množina má Lebesgueovu míru nula.

Příklad 1.13. Je-li $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ otevřený interval, dokažte, že $(a,b) \in \mathscr{L}$ a $\lambda((a,b)) = (b-a)$.

Carathéodoryho konstrukce je úspěšná. Tedy systém, který jsme vzali za pokrývající, je měřitelný. Konkrétně, všechny intervaly typu $[a,b)$ jsou měřitelné. Interval $(a,b) = [a,b) \setminus \{a\}$, kde $[a,b)$ je měřitelný a $\{a\}$ je měřitelný podle předchozího příkladu. Systém množin $\mathscr{L}$ je σ-algebra, tedy i rozdíl je měřitelný.

V definici pokrývajícího systému jsme $[a,b)$ přiřadili $\mu([a,b)) = b-a$. Protože je rozšíření úspěšné, platí $\mu = \lambda^*$ a $\lambda^*|_{\mathscr{L}} = \lambda$, tedy $\lambda([a,b)) = b-a$. Z předchozího víme, že $\lambda\{a\} = 0$. Dohromady tedy

$$\begin{aligned} \lambda((a,b) \cup \{a\}) &= \lambda([a,b)), \\ \lambda((a,b)) &= b-a. \end{aligned}$$

Příklad 1.14. Nechť $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřený interval. Dokažte, že je $[a,b] \in \mathscr{L}$ a $\lambda([a,b]) = b-a$.

Zde využijeme rovnost $[a,b] = [a,b) \cup \{b\}$. Stejně jako předtím platí, že kvůli úspěšnému pokrytí $[a,b) \in \mathscr{L}$ a z předchozího $\{b\} \in \mathscr{L}$. Systém $\mathscr{L}$ je $\sigma - algebra$ a tedy i $[a,b) \cup \{b\} \in \mathscr{L}$. Celkem $[a,b] \in \mathscr{L}$. A dále,

$$\begin{aligned} \lambda([a,b]) &= \lambda([a,b) \cup \{b\}), \\ \lambda([a,b]) &= \lambda([a,b)) + \lambda(\{b\}), \\ \lambda([a,b]) &= b-a. \end{aligned}$$

Příklad 1.15. Ukažte, že každá borelovská množina je měřitelná.

V předchozím příkladě jsme ukázali, že otevřené intervaly jsou měřitelné. $\mathscr{L}$ je σ-algebra a obsahuje všechny otevřené intervaly. Nejmenší σ-algebra obsahující všechny otevřené množiny je právě $\sigma-$algebra $\mathscr{B}$ borelovských množin. Tedy platí, že $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{L}$.

Příklad 1.16. Najděte nespočetně velkou množinu C Lebesgueovy míry 0.

Uvažujme uzavřený interval $[0,1]$. Definujme

$$C_k = \bigcup_{j=0}^{3^{k-1}-1} \left(\left[\frac{3j+0}{3^k}, \frac{3j+1}{3^k} \right] \cup \left[\frac{3j+2}{3^k}, \frac{3j+3}{3^k} \right] \right),$$

kde

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

$$C_3 = \Big[0, \frac{1}{27}\Big] \cup \Big[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\Big] \cup \Big[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\Big] \cup \Big[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\Big] \cup \Big[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\Big] \cup$$
$$\cup \Big[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\Big] \cup \Big[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\Big] \cup \Big[\frac{26}{27}, 1\Big].$$

Potom definujeme $C := \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ a tuto množinu nazýváme Cantorovým diskontinuem. Nejprve ukážeme, že Cantorovo diskontinuum má míru nula. Platí

$$C = [0,1] - \bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{C}_k,$$

kde $\widetilde{C}_k := [0,1] - C_k$. Potom platí, že

$$\begin{aligned}\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{C}_k) &= \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots \\ &= \frac{1}{3}[1 + \frac{2}{3} + \Big(\frac{2}{3}\Big)^2 + \dots] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.\end{aligned}$$

Proto

$$\lambda(C) = \lambda[0,1] - \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{C}_k) = 1 - 1 = 0.$$

Ukážeme, že Cantorovo diskontinuum je nespočetné. Prvky x v množině C mají trojkový rozvoj $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$, kde $a_k \in \{0,2\}$ pro všechny $k \in \mathbb{N}$. Tedy $x \in C$ lze reprezentovat posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{0,2\}$. Proto $card(C) = card(\{0,2\}^{\mathbb{N}}) = 2^{\chi_0} > \chi_0$, kde $\chi_0 := card(\mathbb{N})$. Potom je C nespočetné.

Příklad 1.17. Existuje množina $M \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, která není lebesgueovsky měřitelná?

Zadefinujme si relaci ekvivalence na $(0,1)$ jako $r \backsim s$, právě když $r - s \in \mathbb{Q}$. Označme $[x] = \{y \in \mathbb{R}, y - x \in \mathbb{Q}\}$ třídu ekvivalence obsahující x. Pak například třída tvořena $x \in \mathbb{Q}$ je tvaru $[x] = \mathbb{Q}$ (tedy všechna racionální čísla leží v jedné třídě) nebo třída tvořená $x \in \mathbb{I}$ obsahuje všechny posuny x o racionální čísla. Označme $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ množinu všech reprezentantů jednotlivých tříd (využíváme axiom výběru). Každá třída má reprezentanta na intervalu $(0,1)$. Z předchozího plyne, že Ω je nespočetně velká. Dokážeme pomocné tvrzení.

Nechť $\Omega + q = \Omega + p$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$. Pak $p = q$. Předpokládejme, že $(\Omega + q) \cap (\Omega + p) \neq \emptyset$. Tedy existuje x takové, že $x \in (\Omega + q)$ a $x \in (\Omega + p)$. Pak $x = \alpha + p$, kde $\alpha \in \Omega$ a $x = \beta + p$, kde $\beta \in \Omega$. Celkem plyne, že $\alpha - \beta = q - p$. Jelikož $q, p \in \mathbb{Q}$, pak i $q - p \in \mathbb{Q}$, a tedy i $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}$. Jelikož α a β jsou vybrána z množiny reprezentantů, tedy z každé třídy pouze jeden prvek potom $\alpha = \beta$, z čehož $p = q$. Z tvrzení můžeme formulovat následující. Nechť $p \neq q$. Pak $(\Omega + q) \cap (\Omega + p) = \emptyset$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$. Uvažujme množinu

$$(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}, -1 < q < 1} (\Omega + q)).$$

Jedná se o spočetné sjednocení po dvou disjunktních množin. Navíc platí, že míra $\lambda(\Omega + q) = \lambda(\Omega)$, což plyne z invariance vůči translaci. Z definice množiny Ω a hodnoty q víme, že $\Omega \subset (0,1)$ a $q \in (-1,1)$, potom $\Omega + q \subseteq (-1,2)$. Potom

$$\lambda\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q},-1<q<1} (\Omega + q)\Big) \leq \lambda((-1,2)) = 3$$

a

$$\lambda\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q},-1<q<1} (\Omega + q)\Big) = \Big(\sum_{q\in\mathbb{Q},-1<q<1} \lambda(\Omega + q)\Big) \leq 3.$$

Z předchozího víme, že $\lambda(\Omega + q)$ je stejná pro všechny q. Jediná možnost, jak splnit všechny předchozí rovnice je, že bude $\lambda(\Omega + q) = 0$. Dokážeme pomocné tvrzení.
Množina

$$(0,1) \subseteq \Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q},-1<q<1} (\Omega + q)\Big).$$

Nechť $x \in (0,1)$. Víme, že existuje α z $[x] \cap \Omega$. Při konstrukci Ω jsme vybrali vždy jeden bod z $[x] \cap (0,1)$ a to právě α. Tedy $\alpha \in (0,1)$. Z definice $\alpha \in [x]$ víme, že $\alpha - x = q$, kde q je nějaké racionální číslo. A z toho, jakých hodnot může nabývat α a x víme, že $-1 < q < 1$. Potom $x = \alpha + q$ a tedy $x \in \Omega + q$, což jsme chtěli dokázat.

Celkem dostáváme, že

$$1 = \lambda(0,1) \leq \lambda\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q},-1<q<1} (\Omega + q)\Big).$$

Množina $\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q},-1<q<1} (\Omega + q)\Big)$ není měřitelná.

Předchozí tvrzení by šlo zobecnit nahrazením intervalu $(0,1)$ za libovolný jiný interval na tvrzení, že každý interval obsahuje neměřitelnou množinu.

Příklad 1.18. Kolik existuje lebesgueovsky neměřitelných podmnožin množiny $\mathbb{R}$?

Označme množinu $\mathscr{V} = \{N \cup P; P \in \mathscr{P}(K)\}$, kde množina N je lebesgueovsky neměřitelná množina z předchozího příkladu a K je Cantorova množina na intervalu $(1,2)$. Potom prvky množiny $\mathscr{V}$ jsou tvořeny disjunktním sjednocením N a podmnožiny K. Množina $\mathscr{V}$ obsahuje posuny neměřitelné množiny a jelikož je Lebesgueova míra invariantní vůči translaci, potom i posuny jsou neměřitelné. Celkem $card(K) = c$, potom $card(\mathscr{V}) = (\mathscr{P}(K)) = 2^c$, což je spodní odhad a zároveň $card(\exp \mathbb{R}) = 2^c$. Celkem tedy existuje 2^c lebesgueovsky neměřitelných množin.

Příklad 1.19. Ukažte, že existuje $M \in \mathscr{L}$, která není borelovská.

Nejprve si definujeme Cantorovu funkci $c : [0,1] \to [0,1]$. Označme $D_k = [0,1] - C_k$, kde C_k je množina z příkladu 1.16. Pak D_k obsahuje $2^k - 1$ intervalů, které označíme I_j^k, kde $1 \leq j \leq 2^k - 1$. Označme posloupnost spojitých funkcí $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ na intervalu $[0,1]$, kde pro f_k platí, že $f_k(0) = 0$, $f_k(1) = 1$, $f_k(x) = j \cdot 2^{-k}$ pro $x \in I_j^k$. a $f_k(x)$ je lineární pro

$x \in C_k$. Posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k funkci f, kterou nazýváme Cantorova funkce. Je rostoucí a také spojitá.

Definujme funkci $f : [0,1] \to [0,2]$ předpisem $f(x) = c(x) + x$, kde $c : [0,1] \to [0,1]$ je Cantorova funkce. Takto definovaná funkce je rostoucí (derivace je skoro všude 1), spojitá (funkce c i x jsou spojité), existuje funkce f^{-1} (je rostoucí na [0,1] a z věty o střední hodnotě nabývá všech hodnot mezi $f(0)$ a $f(1)$, tedy jedná se o bijektivní zobrazení) a f^{-1} je také spojitá (proto je f homomorfismus).

Funkce f zobrazuje intervaly, které byly během konstrukce Cantorova diskontinua odstraněny, na intervaly stejné délky, což plyne z toho, že Cantorova funkce zobrazí tyto body na stejnou hodnotu, takže se odečtou. Tedy $(a,b) \subset [0,1] - C$, pak pro Cantorovu funkci c platí, že $c(a) = c(b)$. Celkem tedy

$$\lambda((f(a), f(b))) = f(b) - f(a) = c(b) + b - c(a) - a = b - a = \lambda((a,b)).$$

Z čehož dostáváme, že

$$\lambda(f([0,1] - C)) = \lambda([0,1] - C) = 1,$$

jelikož

$$[0,2] = f(C) \cup f([0,1] - C).$$

Vidíme, že

$$2 = \lambda[0,2] = \lambda(f(C) \cup f([0,1] - C)) = \lambda(f(C)) + \lambda(f([0,1] - C)) = \lambda(f(C)) + 1,$$

odkud

$$\lambda(f(C)) = 1.$$

Lze ukázat, že nejen každý interval, ale i každá podmnožina kladné Lebesgueovy míry obsahuje neměřitelnou podmnožinu. Z čehož tedy i $f(C)$ obsahuje neměřitelné podmnožinu. Označme ji N. Potom dokážeme tvrzení, že $f^{-1}(N)$ je měřitelná, ale není borelovská.

Nejprve dokážeme pomocné tvrzení, že rostoucí funkce zobrazí borelovskou množinu na borelovskou množinu.

Z úvodní části víme, že f je rostoucí a homomorfismus. Pak platí, že funkce f zobrazí borelovskou množinu na borelovskou.

Celkem víme, že $f^{-1}(N) \subset C$ je měřitelná a má míru 0, protože je podmnožinou množiny míry 0 a Lebesgueova míra je úplná. Tvrdíme, že $f^{-1}(N)$ nemůže být borelovská množina. Pokud by byla, platilo by, že $f(f^{-1}(N)) = N$ je borelovská množina. Ta ale není měřitelná, tedy nemůže být borelovská.

Příklad 1.20. Uveďte vztah σ-algeber lebesgueovsky měřitelných množin, všech podmnožin $\mathbb{R}$ a borelovských množin.

$$\mathscr{P}(\mathbb{R}^*) \supsetneq \mathscr{L}(\mathbb{R}^*) \supsetneq \mathscr{B}(\mathbb{R}^*).$$

Příklad 1.21. Nechť $F \subseteq [0,1]$ je uzavřená a $\lambda(F) = 1$. Dokažte, že $F = [0,1]$.

Množina F i množina $[0,1]$ jsou uzavřené. Potom $G := [0,1] \setminus F$ je otevřená a předpokládejme, že je neprázdná. Existuje, tedy $x \in G$, a protože je G otevřená i $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in G$, pro libovolné malé $\varepsilon > 0$. G je měřitelná a $2 \cdot \varepsilon \leq \lambda(G)$.

$$\lambda(F) = \lambda([0,1]) - \lambda(G) = 1 - \lambda(G) \geq 1 - 2 \cdot \varepsilon < 1.$$

To je spor s předpokladem, že $\lambda(F) = 1$. Potom $G = \emptyset$ a $F = [0,1]$.

1.4 Měřitelné funkce

Tato kapitola je nezbytná k definování systému lebesgueovsky měřitelných funkcí.

Definice 1.22. Funkce $f : A \to \mathbb{R}$ je měřitelná, pokud splňuje následující požadavky.

1. Množina A je měřitelná.
2. Pro $\forall a$ je množina $\{x \in A; f(x) < a\}$ měřitelná.

Druhý požadavek je ekvivalentní s tvrzením, že množina $f^{-1}([-\infty, a)) \subseteq A$ je měřitelná.

Věta 1.23. *Nechť $f : A \to \mathbb{R}$ je měřitelná. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Funkce f je měřitelná.*
2. *Pro $\forall a$ je množina $\{x \in A; f(x) \leq a\}$ měřitelná.*
2. *Pro $\forall a$ je množina $\{x \in A; f(x) > a\}$ měřitelná.*
2. *Pro $\forall a$ je množina $\{x \in A; f(x) \geq a\}$ měřitelná.*

Věta 1.24. *Nechť je funkce f měřitelná na A. Potom pro každou borelovskou množinu $B \subseteq \mathbb{R}$ je $f^{-1}(B)$ měřitelná množina.*

Věta 1.25. *Nechť funkce f, g jsou měřitelné na A, $c \in \mathbb{R}$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na A. Potom $f \pm g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$, f^+, f^-, $|f|$, $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\liminf f_n$, $\limsup f_n$, $\lim f_n$, $\min(f,g)$ a $\max(f,g)$ jsou také měřitelné na A.*

Kapitola 2

Lebesgueův integrál

2.1 Teorie

První část této kapitoly vysvětluje budování Lebesgueova integrálu ve třech krocích. Nejprve pro jednoduché funkce, pomocí kterých následně definujeme integrál pro nezáporné měřitelné funkce, a nakonec pro libovolné měřitelné funkce. V celé této kapitole se omezíme na měřitelný prostor $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ a zavedeme konvenci, že $0 \cdot \infty = 0$. Kapitola vychází z knih [1] a [6].

2.1.1 Jednoduchá funkce

Definice 2.1 (Jednoduchá funkce)**.** Nechť funkce s („simple") : $A \to [0, \infty)$ je libovolná měřitelná funkce, jejíž obor hodnot je konečná množina. Pak funkci s nazýváme jednoduchou.

Nechť

$$H(s) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \text{ kde } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ jsou navzájem různá nezáporná čísla.}$$

Označme

$$A_i := s^{-1}(\alpha_i), \ A_i \subseteq A.$$

Pak platí, že

$$x \in A_i \Leftrightarrow s(x) = \alpha_i.$$

Potom

$$A_i \in \mathscr{L}, i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

kde A_i jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$. Měřitelnost A_i plyne z měřitelnosti funkce s. Předchozí poznatky nám umožňují definovat jednoduchou funkci následovně

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

kde χ je charakteristická funkce. Tento tvar nazýváme kanonický a je určen jednoznačně. Pokud uvažujeme funkci s na nějaké měřitelné množině $B \subseteq A$, píšeme $s|_B$ a kanonický tvar píšeme ve tvaru

$$s|_B = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{(A_i \cap B)}.$$

Věta 2.2. *Pro jednoduché funkce s, h a konstantu $c \in \mathbb{R}$ jsou i funkce $c \cdot s, s+h, |s|, \max(s,h)$, $\min(s,h)$ jednoduché.*

Definice 2.3 (Integrál z jednoduché funkce)**.** Jestliže je s jednoduchá funkce, potom integrálem funkce s značíme $\int s d\lambda$. Pro $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ definujeme $\int s d\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(A_i)$.

Poznamenejme, že číslo $\int s d\lambda$ je určeno jednoznačně. Vychází z kanonického tvaru jednoduché funkce a míry množiny A_i. Obojí je určeno jednoznačně.

Věta 2.4. *Nechť funkce s a h jsou jednoduché na množině X.*

1. *Integrál nabývá pouze nezáporných hodnot, tj. $0 \leq \int_X s d\lambda \leq \infty$.*
2. *Pro $c \in [0, \infty)$ platí, že $\int_X cs d\lambda = c \int_X s d\lambda$.*
3. *Integrál součtu je součet integrálů, tj. $\int_X (s+h) d\lambda = \int_X s d\lambda + \int_X h d\lambda$.*
4. *Nechť je $h \leq s$, pak $\int_X h d\lambda \leq \int_X s d\lambda$.*

2.1.2 Nezáporná funkce

Lemma 2.5. *Předpokládejme, že $f : X \to [0, \infty]$ je měřitelná a nezáporná funkce. Potom existuje posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoduchých a nezáporných funkcí takových, že $s_n \nearrow f$ na X, $\{s_n\}$ je neklesající posloupnost a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$.*

Důkaz. Větu dokážeme tak, že zkonstruujeme přímo posloupnost $\{s_n\}$, a to následovně. Nechť pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí, že $1 \leq i \leq n \cdot 2^n$. Označíme

$$E_n^i = \left\{ x \in X; \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}; \frac{i}{2^n} \right) \right),$$

$$F_n = \{x \in X; n \leq f(x)\} = f^{-1}([n, \infty]).$$

Buď n pevné. Potom množiny E_n^i a F_n jsou po dvou disjunktní a měřitelné. Navíc platí, že $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_n^i \cup F_n = X$. Definujme funkci s_n následovně

$$s_n = \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} \cdot \chi(E_n^i) + n \cdot \chi(F_n).$$

Potom je s_n nezáporná a jednoduchá.

Nyní ukážeme, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a má limitu f. Z definice je

$$s_n(x) = \left\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{n2^n}{2^n} = n\right\},$$

$$s_{n+1}(x) = \left\{0, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{2}{2^{n+1}}, \dots, \frac{(n+1)2^{(n+1)}}{2^(n+1)} = n+1\right\},$$

kde množina $s_n(x) \subseteq s_{n+1}(x)$, a tedy $s_n \leq s_{n+1}$. Tím jsme ukázali, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající.

Je-li $f(x)$ konečná, $0 \leq f(x) - s_n < \frac{1}{2^n}$ od jistého indexu. Tedy $s_n \to f(x)$ pro $n \to \infty$. A nebo, je-li $f(x) = \infty$, pak je $f(x) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a tedy $s_n(x) \to \infty$ pro $n \to \infty$. Celkem tedy $s_n(x) \nearrow f(x)$ pro $n \to \infty$ a $\forall x \in X$. $\square$

Lemma 2.6. *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti jednoduchých funkcí na X takové, že $f_n \nearrow f$ a $g_n \nearrow f$ pro $n \to \infty$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X g_n$.*

Podejme dvě ekvivalentní definice integrálu z nezáporné a měřitelné funkce. První využívá limity a může být snadněji uchopitelná. K jednoznačnosti této definice však byly potřebné předchozí věty. Druhá je definována pomocí suprema množiny a muže být názornější.

Definice 2.7. Buď $f : X \to [0,\infty]$ nezáporná a měřitelná funkce. Nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jednoduchých funkcí na X takových, že $s_n \nearrow f$. Potom definujeme integrál z funkce f následovně,

$$\int_X f := \lim_{n\to\infty} \int_X s_n.$$

Je-li $\int_X f < \infty$, pak říkáme, že funkce f je integrovatelná na X.

Definice je korektní.

1. Z lemmatu 2.5 máme zaručenu existenci posloupnosti $\{s_n\}$.
2. Posloupnost zkonstruovaná v lemmatu 2.5 je neklesající, a tím je zaručena existence limity.
3. Z Lemmatu 2.6 platí, že hodnota integrálu nezávisí na volbě posloupnosti $\{s_n\}$.

Věta 2.8. *Nechť funkce f a g jsou měřitelné a nezáporné na X.*

1. *Pro $c \in [0,\infty)$ platí, že $\int_X cf d\lambda = c\int_X f d\lambda$.*
2. *Integrál součtu je součet integrálů, tj. $\int_X (f+g) d\lambda = \int_X f d\lambda + \int_X g d\lambda$.*
3. *Nechť je $f \leq g$, pak $\int_X f d\lambda \leq \int_X g d\lambda$.*

Věta 2.9 (Lebesgueova věta o limitním přechodu)**.** *Nechť $f_1, f_2, f_3, \dots$ jsou měřitelné funkce na X takové, že*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots.$$

Potom

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k d\lambda = \int_X (\lim_{k\to\infty} f_k) d\lambda.$$

Důkaz věty lze nalézt v [1].

Věta 2.10. *Mějme $f_1, f_2, \ldots$ měřitelné a nezáporné funkce na X. Potom*

$$\int_X \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big) d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\lambda.$$

Označme

$$F_k = \sum_{k=1}^{j} f_j \;\text{ a }\; F = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Potom je posloupnost $\{F_k\}$ neklesající k funkci a konverguje k F. Můžeme aplikovat Lebesgueovu větu o limitním přechodu.

$$\int_X F d\lambda = \lim_{j\to\infty} \int_X F_j d\lambda = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \int_X f_k d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\lambda.$$

Lemma 2.11 (Fatouovo lemma)**.** *Nechť $f_1, f_2, f_3, \ldots$ jsou nezáporné a měřitelné funkce na X. Potom*

$$\int_X (\liminf_{k\to\infty} f_k) d\lambda \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k d\lambda.$$

Duálními úvahami dostaneme, že

$$\int (\limsup_{k\to\infty} f_k) d\lambda \geq \limsup_{k\to\infty} \int f_k d\lambda.$$

Důkaz lemmatu je následovný. Označme $g_k := \inf\{f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots\}$. Potom $g_k \geq 0$, měřitelná, $g_k \leq f_k$, posloupnost $\{g_k\}$ je neklesající a $\lim g_k = \liminf f_k$. Celkem

$$\int_X (\liminf_{k\to\infty} f_k) d\lambda = \int_X (\lim_{k\to\infty} g_k) d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k d\lambda = \liminf_{k\to\infty} \int_X g_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k,$$

kde poslední nerovnost plyne z monotonie a druhá rovnost plyne z věty o limitním přechodu.

2.1.3 Obecná měřitelná funkce

Definice 2.12. Pro $f : X \to \mathbb{R}^*$ definujeme

$$f^+ := \max\{f, 0\}$$

a

$$f^- := \min\{-f, 0\}.$$

Věta 2.13. *Pro funkce f^+ a f^- platí, že pokud f je měřitelná, pak i f^+ a f^-. Navíc $f = f^+ + f^-$.*

Definice 2.14. Nechť $f : X \to [-\infty, \infty]$ je měřitelná. Potom i f^+ a f^- jsou měřitelné a nezáporné. Pro obě funkce je definovaný integrál $\int_X f^+ d\lambda$ a $\int_X f^- d\lambda$. V případě, že oba integrály jsou konečné číslo, řekneme, že f je integrovatelná a integrál je definován jako

$$\int_X f d\lambda := \int_X f^+ d\lambda - \int_X f^- d\lambda.$$

Věta 2.15. *Nechť f je měřitelná na X. Pak je integrovatelná, právě když je f^+ i f^- integrovatelná na X.*

Věta 2.16. *Nechť funkce g a f jsou měřitelné na X.*

1. *Pro $c \in \mathbb{R}$ platí, že $\int_X cf d\lambda = c \int_X f d\lambda$.*

2. *Integrál součtu je součet integrálů, tj. $\int_X (f+g) d\lambda = \int_X f d\lambda + \int_X g d\lambda$.*

3. *Nechť je $f \leq g$, pak $\int_X f d\lambda \leq \int_X g d\lambda$.*

Věta 2.17 (Lebesgueova věta o majorizovaném limitním přechodu)**.** *Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí na X a $f_n \to f$ pro $n \to \infty$. Navíc mějme g nezápornou a integrovatelnou funkci na X, pro kterou*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ pro všechny } x \in \mathbb{R} \text{ a pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom $\lim f_n = f$ *je integrovatelná a*

$$\int_X f d\lambda = \int_X (\lim_{n\to\infty} f_n) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\lambda.$$

Z vlastnosti $|f| \leq g$ plyne, že f a každá f_n jsou integrovatelné. Využijeme Fatouova lemmatu na $g + f_n \geq 0$ následovně

$$\int_X (g+f) d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g+f_k) d\lambda,$$

$$\int_X g d\lambda + \int_X f d\lambda \leq \int_X g d\lambda + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_k d\lambda.$$

Odečteme od obou stran $\int_X g d\lambda$. Poznamenejme, že se jedná o konečné hodnotu. Dostaneme

$$\int_X f d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_k d\lambda.$$

Provedeme stejné operace a využijeme analogie Fatouova lemmatu pro sup a dostaneme

$$\int_X f d\lambda \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_k d\lambda.$$

Celkem

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_k d\lambda \leq \int_X f d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_k d\lambda,$$

a tedy limita $\int_X f_k$ existuje a je rovna $\int_X f$.

2.1.4 Skoro všude

Definice 2.18. Pokud nějaká vlastnost neplatí pouze na množině míry nula, říkáme, že vlastnost platí skoro všude (s.v.).

Ukažme pár tvrzení, která využívají vlastnosti skoro všude.

Věta 2.19. *Nechť f a g jsou měřitelné.*

1. *Jestliže $f = g$ s.v. na X. Pak $\int_X f d\lambda = \int_X g d\lambda$.*
2. *Jestliže $f = g$ s.v. na X a měřitelné na X, potom je funkce f integrovatelná, právě když je g integrovatelná. Navíc $\int f d\lambda = \int g d\lambda$.*
3. *Jestliže f je nezáporná a měřitelná na X, pak $\int_X f d\lambda = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ s.v. na X.*

2.2 Příklady

Příklady vycházejí z knih [1] a [3].

Příklad 2.20. Uvažme funkci $f \geq 0$ měřitelnou na X. Dokažte, že $\int f d\lambda < \infty \Rightarrow \lambda(\{x \in X; f(x) = \infty\}) = 0$, tzn. $f(x)$ je s.v. konečná na X.

Funkci f integrujme přes množinu $\{x \in X; f(x) = \infty\}$. Z definice integrálu je $\int_X f d\lambda = = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\lambda$, kde s_n je posloupnost jednoduchých funkcí, pro které platí, že $s_n \nearrow f$. Využijeme jednoduchou funkci s_n z 2.5. Potom $s_n = n$ na množině $C = \{x \in X; f(x) = \infty\}$, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ zde platí, že $n < f(x) = \infty$. Celkem dostaneme, že je

$$\lim_{n\to\infty} \int_C s_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lambda(C) = \lambda(C) \cdot \lim_{n\to\infty} n = \lambda(C) \cdot \infty.$$

Předpokládejme, že $\lambda(\{x \in X; f(x) = \infty\}) > 0$. To znamená, že integrál $\int_C f d\lambda = \infty$. A z monotonie integrálu by vyplývalo, že $\int_X f d\lambda \geq \infty$ a tedy $\int_X f d\lambda = \infty$. Což je spor, a tedy $\lambda(\{x; f(x) = \infty\}) = 0$.

Příklad 2.21. Dokažte, že neplatí opačná implikace. Tj. $\lambda\{x; f(x) = \infty\} = 0 \not\Rightarrow \int_X f d\lambda < < \infty$.

Zvolme $f = 1$ a množinu, přes kterou integrujeme celé $\mathbb{R}$. Potom $\lambda\{x; f(x) = \infty\} = 0$, ale $\int_X f d\lambda = \infty$.

Příklad 2.22. Nechť f je integrovatelná na X a nechť $E, F \subseteq X$ jsou měřitelné a disjunktní množiny. Ukažte, že

$$\int_{E\cup F} f d\lambda = \int_E f d\lambda + \int_F f d\lambda.$$

Z definice

$$\int_{E\cup F} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(A_i),$$

kde $A_i = E_i \cup F_i$, $E_i \subseteq E$ a $F_i \subseteq F$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(E_i \cup F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i \lambda(E_i) + a_i \lambda(F_i)),$$

kde poslední rovnost jsme dostali z aditivity míry. Dále

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(a_i\lambda(E_i)+a_i\lambda(F_i))=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda(E_i)+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda(F_i)=\int_E fd\lambda+\int_F fd\lambda.$$

Poznamenejme, že obdobně dokážeme tvrzení pro spočetné sjednocení po dvou disjunktních měřitelných množin.

Příklad 2.23. Nechť f je integrovatelná na X. Ukažte, že

$$\Big|\int_X fd\lambda\Big|\leq\int_X|f|d\lambda.$$

Začněme od definice integrálu,

$$\int_X fd\lambda=\int_X f^+d\lambda-\int_X f^-d\lambda.$$

Aplikujeme absolutní hodnotu,

$$\Big|\int_X fd\lambda|=|\int_X f^+d\lambda-\int_X f^-d\lambda\Big|.$$

Využitím trojúhelníkové nerovnosti získáme,

$$\Big|\int_X fd\lambda\Big|\leq\Big|\int_X f^+d\lambda\Big|+\Big|\int_X f^-d\lambda\Big|,$$

kde $\int f^+d\lambda,\int f^-d\lambda\geq 0$, a tedy

$$\Big|\int_X fd\lambda\Big|\leq\int_X f^+d\lambda+\int_X f^-d\lambda.$$

Využijeme definici absolutní hodnoty funkce

$$|f|=f^++f^-.$$

Aplikujeme integrál, využijeme aditivity a dostaneme

$$\int_X|f|d\lambda=\int_X f^+d\lambda+\int_X f^-d\lambda.$$

Dohromady

$$\Big|\int_X fd\lambda\Big|\leq(\int_X f^+d\lambda+\int_X f^-d\lambda)=\int_X|f|d\lambda.$$

Příklad 2.24. Nechť f integrovatelná na X a M je konstanta taková, že $|f(x)|\leq M$. Ukažte, že

$$\Big|\int_X fd\lambda\Big|\leq M\cdot\lambda(X).$$

Z využitím předchozího příkladu dostaneme, že

$$\left|\int_X f d\lambda\right| \leq \int_X |f| d\lambda.$$

Potom

$$\int_X |f| d\lambda \leq \int_X M d\lambda = M\lambda(X).$$

Příklad 2.25. Dokažte pomocí věty o limitním přechodu, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \arctan nx d\lambda = \frac{\pi}{2}.$$

Posloupnost funkcí $\{\arctan nx\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí nezáporná posloupnost na $[0,1]$, a proto můžeme využít Lebesgueovy věty o limitním přechodu. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \arctan nx d\lambda = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} (\arctan nx) d\lambda,$$

kde $\lim\limits_{n\to\infty} (\arctan nx) = f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ pro $x \in [0,1)$ a $f(x) = 0$ v bodě 0. Celkem dostaneme, že

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} (\arctan nx) d\lambda = \int_0^1 f(x) d\lambda = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 2.26. Dokažte pomocí věty o limitním přechodu, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n d\lambda = 0.$$

Funkci x^n ohraničíme na intervalu $[0,1]$ např. funkcí $g = 1$. Pro $\forall x$ z intervalu $[0,1]$ a $\forall n$ platí, že $x^n \leq g$. Využijeme Lebesgueovu větu o majoritním limitním přechodu. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n d\lambda = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} (x^n) d\lambda,$$

kde $\lim\limits_{n\to\infty} (x^n) = 0$ na intervalu $[0,1)$ a 1 v bodě 1. Celkem dostaneme, že

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} (x^n) d\lambda = \int_0^1 0 d\lambda = 0.$$

Poznamenejme, že příklady 2.25 a 2.26 lze řešit i přímo.

Kapitola 3

Riemannův, Lebesgueův a Newtonův integrál

V této kapitole nejprve podáme stručný výklad integrálu v Newtonově a Riemannově smyslu, jejich definice, podmínky integrovatelnosti a vlastnosti. Nakonec je porovnáme s integrálem v Lebesgueově smyslu. Porovnáme množiny měřitelných funkcí jednotlivých integrálů a podáme věty, jež tyto integrály spojují. Definice a tvrzení podané v této kapitole vychází z [3]. Newtonův integrál budeme uvozovat symbolem $(\mathscr{N})$, Riemannův symbolem $(\mathscr{R})$ a Lebesgueův symbolem $(\mathscr{L})$.

3.1 Integrál v Newtonově smyslu

V tomto oddíle budeme mluvit pouze o integrálu pocházejícího od Newtona.

3.1.1 Definice integrálu

Definice 3.1 (Integrál v Newtonově smyslu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, kde $a < b$ a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a,b). Nechť platí následující.

1.) Existuje primitivní funkce F k funkci f na (a,b).

2.) Existují vlastní limity $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = A$, $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) = B$.

Pak tvrdíme, že funkce f je na intervalu (a,b) integrovatelná v Newtonově smyslu a její integrál přes (a,b) definujeme následovně:

$$(\mathscr{N}) \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = B - A.$$

3.1.2 Podmínky integrovatelnosti

Definice 3.2 (Darbouxovská funkce)**.** Funkce f je darbouxovská, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in I$ s vlastností $f(x_1) < f(x_2)$ a každé číslo $y_0 \in \mathbb{R}$, pro které platí $f(x_1) < y_0 <$ $< f(x_2)$, existuje v intervalu s krajními body x_1, x_2 takový bod x_0, že $f(x_0) = y_0$.

Věta 3.3. *Pokud existuje k funkci f na intervalu $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ primitivní funkce F, pak je funkce f darbouxovská.*

Pozn. Užitečná je obměna: není-li funkce f darbouxovská na intervalu $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, pak k ní neexistuje primitivní funkce.

Věta 3.4. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Pak k ní na tomto intervalu existuje funkce primitivní.*

3.1.3 Vlastnosti integrálu

Věta 3.5. *Nechť funkce $f \in (\mathscr{R}([a,b]) \cap \mathscr{N}((a,b)))$. Pak*

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)dx = (\mathscr{N}) \int_a^b f(x)dx.$$

Věta plyne z Newtonovy-Leibnizovy formule.

Věta 3.6. *Nechť funkce $f,g \in \mathscr{N}(a,b)$. Pak i $f+g \in \mathscr{N}(a,b)$ a platí*

$$(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)dx + (\mathscr{N}) \int_a^b g(x)dx = (\mathscr{N}) \int_a^b (f+g)(x)dx.$$

Věta 3.7. *Nechť funkce $f \in \mathscr{N}(a,b), c \in \mathbb{R}$. Pak i $cf \in \mathscr{N}(a,b)$ a platí*

$$c \cdot (\mathscr{N}) \int_a^b f(x)dx = (\mathscr{N}) \int_a^b cf(x)dx.$$

Pozn. Newtonův integrál je uzavřen na konečné sčítání a násobení konstantou.

Věta 3.8. *Nechť funkce $f,g \in \mathscr{N}(a,b)$ a pro všechny $x \in (a,b)$ platí, že $f(x) \leq g(x)$. Pak*

$$(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)dx \leq (\mathscr{N}) \int_a^b g(x)dx.$$

Věta 3.9. *Nechť funkce $f \in \mathscr{N}(a,b)$ a nechť $(c,d) \subseteq (a,b)$. Pak $f \in \mathscr{N}(c,d)$.*

Věta 3.10. *Nechť funkce $f \in \mathscr{N}(a,b)$ a nechť $a < c < b$. Pak pro $f \in \mathscr{N}(a,c)$ a $f \in \mathscr{N}(c,b)$ platí, že*

$$(\mathscr{N}) \int_a^c f(x)dx + (\mathscr{N}) \int_c^b f(x)dx = (\mathscr{N}) \int_a^b f(x)dx.$$

Věta 3.11. *Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}^*, a < c < b$, nechť $f \in \mathscr{N}(a,c)$ a $f \in \mathscr{N}(c,b)$ a nechť je funkce f spojitá v bodě c. Pak je $f \in \mathscr{N}(a,b)$.*

Pozn. Předpoklad spojitosti nelze vypustit.

3.2 Integrál v Riemannově smyslu

V tomto oddíle budeme mluvit pouze o integrálu pocházejícího od Riemanna. Proto každým znakem $\int$ myslíme níže definovaný integrál.

3.2.1 Definice integrálu

Definice 3.12. Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $[a,b]$ a uvažujme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{D}([a,b])$. Označme

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \\ M_k &= \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}. \end{aligned}$$

Pak pro $k = 1, \dots, n$ definujeme

$$s(D,f) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \text{ nazýváme dolní Riemannův součet funkce } f \text{ při dělení } D,$$

$$S(D,f) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}), \text{ nazýváme horní Riemannův součet funkce } f \text{ při dělení } D.$$

Definice 3.13. Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $[a,b]$. Pak

$$(\mathscr{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup\{s(D,f) : D \in \mathscr{D}[a,b])\},$$

$$(\mathscr{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf\{S(D,f) : D \in \mathscr{D}[a,b])\},$$

kde číslo

$$(\mathscr{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \text{ nazýváme dolním integrálem funkce } f \text{ na } [a,b]$$

a číslo

$$(\mathscr{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \text{ horním integrálem funkce } f \text{ na } [a,b].$$

Definice 3.14. Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $[a,b]$. Jestliže platí

$$(\mathscr{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,$$

řekneme, že funkce f je integrovatelná v Riemannově smyslu na intervalu $[a,b]$ a klademe

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x := (\mathscr{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Množinu všech integrovatelných funkcí na $[a,b]$ v Riemannově smyslu značíme $\mathscr{R}[a,b]$.

Věta 3.15. *Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a,b]$ a nechť $\{D_n\}$ je libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = (\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Zejména platí, že je-li funkce $f \in \mathscr{R}[a,b]$, pak je

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(D_n, f).$$

Pozn. Věta nám umožňuje hledat integrál jako limitu číselné posloupnosti namísto suprema a infima množiny dolních a horních součtů.

3.2.2 Podmínky integrovatelnosti

Věta 3.16. *Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $[a,b]$. Pak je $f \in \mathscr{R}[a,b]$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D \in \mathscr{D}([a,b])$ tak, že platí*

$$S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

Pozn. Jedná se o nutnou a postačující podmínku konvergence.

Věta 3.17. *Nechť je funkce f monotonní na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in [a,b]$.*

Věta 3.18. *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in [a,b]$.*

Definice 3.19. Množinu $A \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá množinou nulové Jordanovy míry, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $\{I_1, ... I_n\}$ otevřených intervalů v $\mathbb{R}$ taková, že $\sum\limits_{k=1}^{n} d(I_k) < \varepsilon$ (kde $d(I)$ je délkou intervalu I) a $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_k$.

Věta 3.20. *Nechť je funkce f ohraničená na intervalu $[a,b]$. Jestliže množina bodů nespojitosti funkce f je množina nulové Jordanovy míry, pak je funkce f na intervalu $[a,b]$ integrovatelná. Zejména pokud má funkce f v $[a,b]$ pouze konečný počet bodů nespojitosti, pak $f \in \mathscr{R}[a,b]$.*

3.2.3 Vlastnosti integrálu

Věta 3.21. *Nechť funkce $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$. Pak i $f + g \in \mathscr{R}[a,b]$ a platí*

$$(\mathscr{R})\int\limits_a^b f(x)dx + (\mathscr{R})\int\limits_a^b g(x)dx = (\mathscr{R})\int\limits_a^b (f+g)(x)dx.$$

Věta 3.22. *Nechť funkce $f \in \mathscr{R}[a,b], c \in \mathbb{R}$. Pak i $cf \in \mathscr{R}[a,b]$ a platí*

$$c(\mathscr{R})\int\limits_a^b f(x)dx = (\mathscr{R})\int\limits_a^b cf(x)dx.$$

Pozn. Riemannův integrál je uzavřen na konečné sčítání a násobení konstantou.

Věta 3.23. *Nechť funkce $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ a pro všechny $x \in [a,b]$ platí, že $f(x) \le g(x)$. Pak*

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)dx \le (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)dx.$$

Věta 3.24. *Nechť funkce $f \in \mathscr{R}[a,b]$ a nechť $[c,d] \subseteq [a,b]$. Pak $f \in \mathscr{R}[c,d]$.*

Věta 3.25. *Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}, a < c < b$ a nechť $f \in \mathscr{R}[a,c]$ a $f \in \mathscr{R}[c,b]$. Pak je $f \in \mathscr{R}[a,b]$*

$$(\mathscr{R}) \int_a^c f(x)dx + (\mathscr{R}) \int_c^b f(x)dx = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)dx.$$

Věta 3.26. *Nechť funkce $f \in \mathscr{R}[a,b]$. Pak i funkce $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ a platí, že*

$$\left|(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)dx\right| \le (\mathscr{R}) \int_a^b |f(x)|dx.$$

Věta 3.27. *Nechť funkce $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$. Pak platí, že $f \cdot g \in \mathscr{R}[a,b]$.*

Věta 3.28. *Nechť funkce $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ a nechť existuje $c > 0$ takové, že platí $|g(x)| \ge c$ pro všechna $x \in [a,b]$. Pak také $\frac{f}{g} \in \mathscr{R}[a,b]$.*

3.3 Nevlastní Riemannův integrál

3.3.1 Integrál přes neohraničený interval

Definice 3.29. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť funkce f je definována na intervalu $[a,\infty)$, která je integrovatelná na každém intervalu $[a,b]$, kde $b > a$. Definujeme funkci F na intervalu $[a,\infty)$ vztahem $F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Jestliže existuje vlastní limita $\lim_{b\to\infty} F(b)$, říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)$ konverguje, a klademe

$$(\mathscr{R}) \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} F(b) = \lim_{b\to\infty} (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Pokud je limita $\lim_{b\to\infty} F(b)$ nevlastní, říkáme, že integrál diverguje, a pokud limita neexistuje říkáme, že integrál osciluje.

Analogicky pro funkci definovanou na intervalu $(-\infty,a]$, která je integrovatelná na každém $[c,a]$, kde $c < a$, klademe

$$(\mathscr{R}) \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} (\mathscr{R}) \int_c^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Celkem tedy můžeme říct, že i nevlastní integrál z funkce f, která je integrovatelná na každém intervalu $[a,b]$, konverguje na $(-\infty,\infty)$, pokud pro všechna $a \in \mathbb{R}$ integrály $\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergují. Klademe

$$(\mathscr{R}) \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x + (\mathscr{R}) \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

3.3.2 Integrál z neohraničených funkcí

Definice 3.30 (Singulární bod). Nechť $a,b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Pak singulárním bodem b funkce f nazýváme krajní bod intervalu $[a,b)$. Funkci f uvažujeme ohraničenou na každém intervalu $[a,b-\varepsilon]$, kde $0 < \varepsilon < b-a$ a zároveň neohraničenou na intervalu $(b-\varepsilon,b]$, která je integrovatelná na každém intervalu $[a,b-\varepsilon]$.

Definice 3.31. Nechť funkce f je definována na intervalu $[a,b)$ a nechť b je jejím singulárním bodem. Nechť funkce $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ je definovaná na intervalu $[a,b)$. Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$, řekneme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje a klademe

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{x\to b^-} F(x).$$

Neexistuje-li vlastní limita, říkáme, že nevlastní integrál osciluje. Je-li limita rovna $\pm\infty$ říkáme, že diverguje. Analogicky definujeme nevlastní integrál funkce f na intervalu $(a,b]$, kde a je singulární bod funkce f.

3.3.3 Nevlastní Riemannův integrál

Zobecněním předchozích úvah dostaneme definici pro libovolný Riemannův nevlastní integrál.

Definice 3.32. Nechť $a,b \in \mathbb{R}^*, a < b$ a nechť $\{a_0,a_1,a_2,...,a_n\}$ je konečná množina reálných čísel, pro které platí, že $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n = b$. Mějme funkci f definovanou na $\bigcup_k^n = 1(a_{k-1},a_k)$, pro niž jsou $a_1,...,a_n$ singulární body (a_0,a_n mohou být také singulárními body). Zvolme $c_1,...c_n$ pro které platí, že $a_0 < c_1 < a_1 < c_2 < a_2 < c_3 < ... < c_n < a_n$. O nevlastním integrálu z funkce f přes $[a,b]$ řekneme, že konverguje, pokud konvergují všechny nevlastní integrály $\int_{a_{k-1}}^{c_k} f(x)\,\mathrm{dx}$ a $\int_{c_k}^{a_k} f(x)\,\mathrm{dx}$ pro $k = 1,...,n$ a klademe

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \sum_{k=1}^n \left((\mathscr{R})\int_{a_{k-1}}^{c_k} f(x)\,\mathrm{dx} + (\mathscr{R})\int_{c_k}^{a_k} f(x)\,\mathrm{dx}\right).$$

Pokud některý z integrálů $\int_{a_{k-1}}^{c_k} f(x)\,\mathrm{dx}$ a $\int_{c_k}^{a_k} f(x)\,\mathrm{dx}$ diverguje, řekneme, že také $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ diverguje.

3.4 Srovnaní integrálů

V této kapitole budeme srovnávat předchozí typy integrálů a Lebesgueův integrál. Aby nedošlo k nedorozumění, budeme před každý znak integrálu psát označení pro příslušnou definici integrálu.

3.4.1 Množina integrovatelných funkcí

Uvedeme několik důležitých vět, které nám pomohou si udělat představu o vztahu mezi jednotlivými integrály.

Věta 3.33. *[Newtonova-Leibnizova formule] Nechť funkce f je integrovatelná v Riemannově smyslu na $[a,b]$ a nechť funkce F je spojitá na $[a,b]$ a primitivní k funkci f na (a,b). Pak je f integrovatelná i v Newtonově smyslu a platí*

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)dx = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Věta 3.34. *Nechť funkce f a $|f|$ jsou integrovatelné v Newtonově smyslu na intervalu (a,b). Pak je funkce integrovatelná i v Lebesgueově smyslu a navíc platí*

$$(\mathscr{L})\int_a^b f(x)dx = (\mathscr{N})\int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz věty najdeme v [5].

Věta 3.35. *[Lebesgueova] Nechť funkce $f \in \mathscr{R}[a,b]$ je ohraničená na $[a,b]$. Pak je f integrovatelná v Lebesgueově smyslu na $[a,b]$ a platí*

$$(\mathscr{L})\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)dx.$$

Zejména je ohraničená funkce f integrovatelná v Riemannově smyslu na $[a,b]$, právě když množina bodů nespojitosti funkce f má Lebesgueovu míru 0.

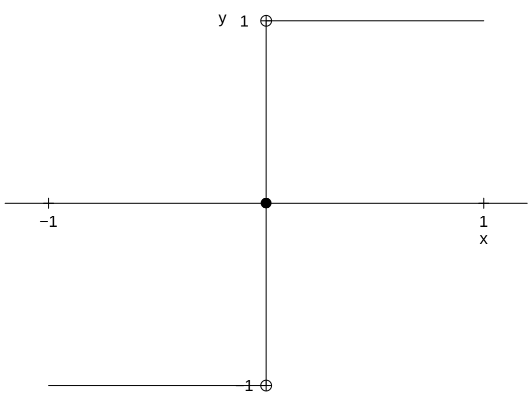
3.5 Příklady

Příklady vycházejí z knih [3] a [4].

Příklad 3.36. Rozhodněte, zda jsou funkce integrovatelné v Riemannově, Newtonově nebo Lebesgueově smyslu, zdůvodněte, a pokud lze, určete hodnotu integrálu.

a) Mějme na intervalu $[-1,1]$ funkci

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 1 \ge x > 0. \end{cases}$$

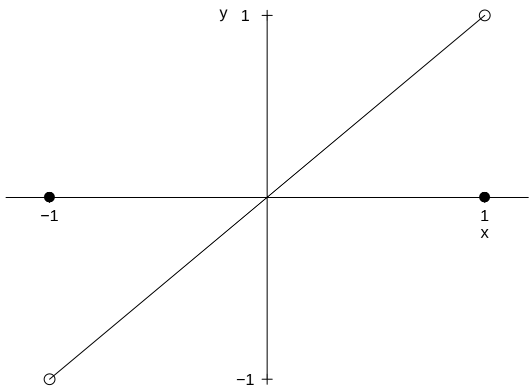


Funkce není newtonovsky integrovatelná, protože nemá darbouxovskou vlastnost, a tedy neexistuje primitivní funkce na příslušném intervalu. Funkce je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[-1,1]$, protože je ohraničená na intervalu $[-1,1]$ a na uzavřeném intervalu má pouze jeden bod nespojitosti. Riemannův integrál roven 0. Funkce je lebesgueovsky integrovatelná podle věty 3.35. Celkem

$$(\mathscr{R})\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}(x)\mathrm{d}x = 0 = (\mathscr{L})\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}(x)\mathrm{d}x.$$

b) Mějme na intervalu $[-1,1]$ funkci

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1,1), \\ 0, & x = \pm 1. \end{cases}$$

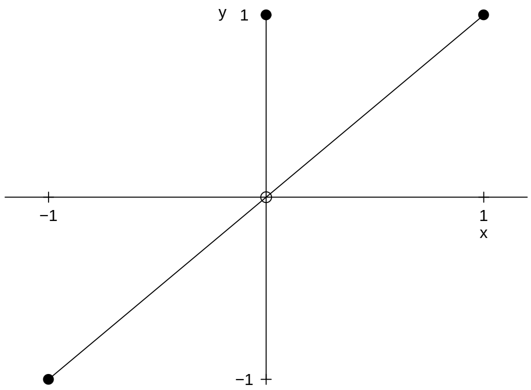


Funkce je spojitá na $(-1,1)$, a proto zde má primitivní funkci. Limity z primitivní funkce v bodech $1,-1$ jsou vlastní, tedy je newtonovsky integrovatelná a integrál je roven 0. Funkce je na intervalu $[-1,1]$ ohraničená a má zde pouze dva body nespojitosti. Potom podle věty 3.33 a věty 3.35 je funkce riemannovsky i lebesgueovsky integrovatelná. Celkem

$$(\mathscr{N})\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = (\mathscr{L})\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

c) Mějme na intervalu $[-1,1]$ funkci

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,1], x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$



Funkce nemá darbouxovskou vlastnost, a proto neexistuje primitivní funkce na intervalu $(-1,1)$. Funkce tedy není newtonovsky integrovatelná. Funkce je na intervalu $[-1,1]$ ohraničená a má zde pouze jeden bod nespojitosti. Riemannův integrál potom existuje a je roven nule. Podle věty 3.35 je funkce lebesgueovsky integrovatelná. Celkem

$$(\mathscr{R})\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0 = (\mathscr{L})\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$$

d) Mějme na intervalu $[0,1]$ Dirichletovu funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{pro } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Funkce nemá darbouxovskou vlastnost, proto neexistuje primitivní funkce. Funkce tedy není newtonovsky integrovatelná. Funkce není spojitá v žádném bodě. Supremum množiny dolních součtů je 0 a infimum množiny horních součtů je 1. Funkce není riemannovsky integrovatelná. Funkce je lebesgueovsky integrovatelná, protože je skoro všude rovna 0. Celkem

$$(\mathscr{L})\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

e) Mějme Riemannovu funkci na intervalu $[0,1]$

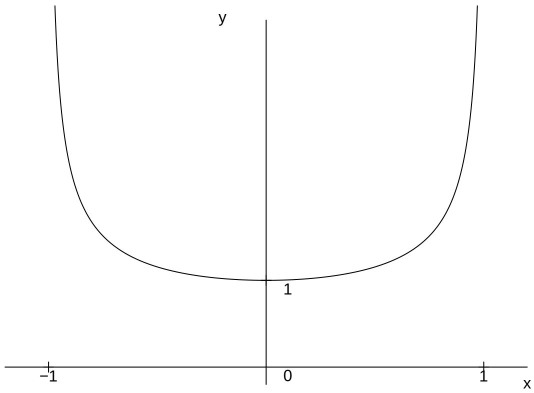
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I}, \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, \text{ kde } p \text{ a } q \text{ jsou nesoudělná.} \end{cases}$$

Funkce nemá darbouxovskou vlastnost, a proto nemá primitivní funkci a ani Newtonův integrál. Funkce je spojitá v každém iracionálním bodě. Podle věty 3.20 je funkce riemannovsky integrovatelná a integrál je roven 0. Podle věty 3.35 je lebesgueovsky integrovatelná. Celkem

$$(\mathscr{R})\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0 = (\mathscr{L})\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

f) Mějme na intervalu $(-1,1)$ funkci

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

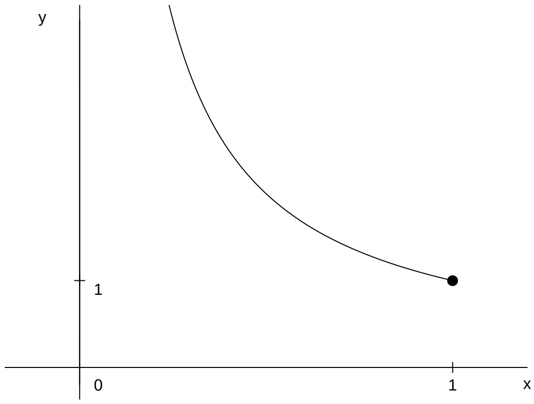


Funkce má nevlastní Riemannův integrál i Newtonův intergrál a hodnota je rovna π. Funkce je Lebesgueovsky integrovatelná z věty 3.34, jelikož $f = |f|$ na $(-1,1)$.

$$(\mathscr{R})\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = (\mathscr{L})\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \pi.$$

g) Mějme na intervalu $(0,1]$ funkci

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

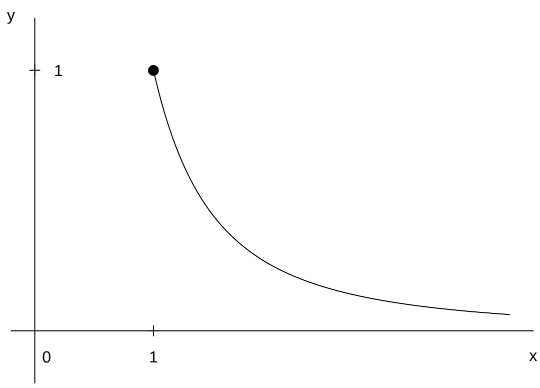


Nevlastní Riemannův integrál diverguje. Pro Newtonův integrál existuje primitivní funkce $F(x) = \ln(x)$. Avšak $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Tedy integrál není definován. Funkce není lebesgueovsky integrovatelná. Limita integrálů z jednoduchých funkcí konvergujících k f je rovna ∞.

$$(\mathscr{R}) \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \infty.$$

h) Mějme na intervalu $[1,\infty)$ funkci

$$\frac{1}{x^2}.$$

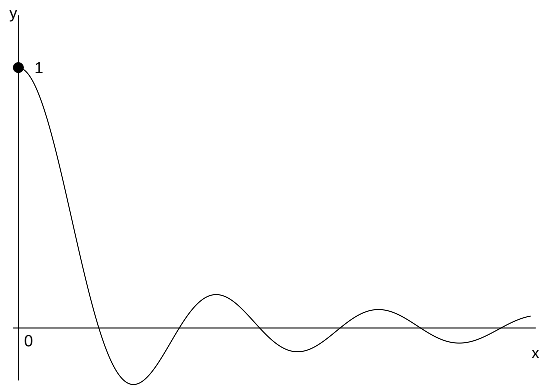


Nevlastní Riemannův integrál konverguje. Pro Newtonův integrál existuje primitivní funkce tj. $F(x) = -\frac{1}{x}$. Limity $\lim_{x\to 1^+} F(x) = -1$ a $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 0$. Tedy je newtonovsky integrovatelná. Funkce je lebesgueovsky integrovatelná z věty 3.34, jelikož $f = |f|$ na $[1,\infty)$.

$$(\mathscr{R})\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x = (\mathscr{L})\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

i) Mějme na intervalu $[0,\infty)$ funkci

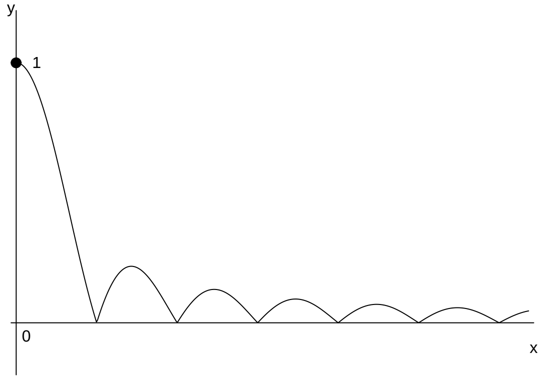
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



Funkce je spojitá na $[0,\infty)$, takže zde existuje primitivní funkce. Primitivní funkci však nejsme schopni zapsat pomocí elementárních funkcí, a to ani na žádné podmnožině $[0,\infty)$. Potom tedy nejsme schopni nalézt ani Riemannův nevlastní integrál. V následujícím příkladu ukážeme, že $\int_0^\infty |f| d\lambda = \infty$. Potom tedy ani funkce f není lebesgueovsky integrovatelná.

j) Mějme na intervalu $[0,\infty)$ funkci

$$|f(x)| = \begin{cases} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



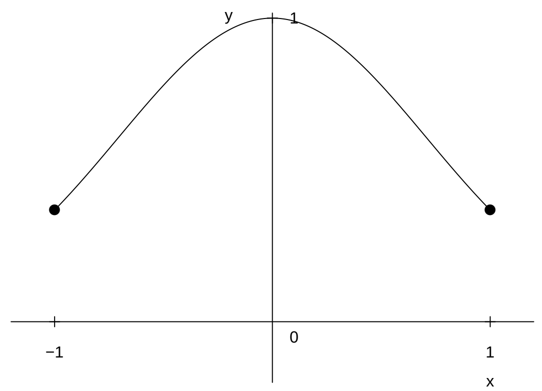
Funkce je spojitá na $[0,\infty)$, takže zde existuje primitivní funkce. Primitivní funkci však nejsme schopni zapsat pomocí elementárních funkcí, a to ani na žádné podmnožině $[0,\infty)$. Potom tedy nejsme schopni nalézt ani Riemannův nevlastní integrál. Není lebesgueovsky integrovatelná, protože $\int_0^\infty |f(x)|d\lambda = \infty$. Z nerovnosti

$$\int_0^{m\pi} \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n},$$

kde $m \in \mathbb{N}$ platí, že integrál diverguje.

k) Mějme na intervalu $[-1,1]$ funkci

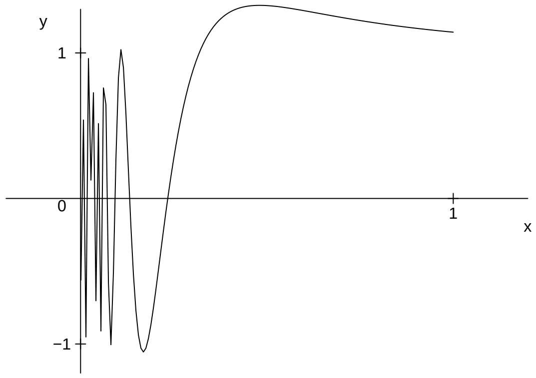
$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2}}.$$



Funkce je spojitá, tedy existuje i primitivní funkce. Ta však nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Funkce je riemannovsky integrovatelná, protože je na uzavřeném intervalu spojitá a ohraničená. Podle věty 3.34. je funkce lebesgueovsky integrovatelná. Integrál nemůžeme spočítat pomocí věty 3.33.

l) Mějme na intervalu $[0,1]$ funkci

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



Funkce má na intervalu $[0,1]$ primitivní funkci

$$F(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},\ F(0) = 0.$$

Primitivní funkce má vlastní limity v krajních bodech, a tedy je funkce newtonovsky integrovatelná. Podle věty 3.33 je funkce rieamannovsky integrovatelná. Lebesgueovsky funkce integrovatelná není, protože $|f(x)|$ není lebesgueovsky integrovatelná.

$$(\mathscr{N})\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sin 1 = (\mathscr{R})\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Příklad 3.37. Mějme funkci f integrovatelnou. Rozhodněte, zda je i $|f|$ integrovatelná vzhledem k příslušnému integrálu.

a) Nechť je funkce f integrovatelná v Lebesgueově smyslu. Potom i $|f|$ je integrovatelná v Lebesgueově smyslu, protože integrovatelnost vzhledem k Lebesgueově integrálu znamená, že $-\infty < \int f^+ - \int f^- < \infty$. Potom $\int f^+ < \infty$ a $\int f^- < \infty$. Z definice $\int |f| = \int f^+ + \int f^- < \infty$.

b) Nechť je funkce f integrovatelná v Newtonově smyslu. Potom $|f|$ není obecně integrovatelná v Newtonově smyslu. Např. funkce

$$f(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

na intervalu $[0,1]$. Funkce f je zde integrovatelná, ale funkce $|f|$ není. Důkaz je k nalezení v knize [7].

c) Nechť je funkce f integrovatelná v Riemannově smyslu na intervalu $[a,b]$. Potom i funkce $|f|$ je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$ podle věty 3.28.

Závěr

V bakalářské práci jsme se zabývali Lebesgueovou mírou a jejími vlastnostmi, Lebesgueovým integrálem a jeho vlastnostmi a vztahy Lebesgueova integrálu s Newtonovým a Riemannovým integrálem. Práce obsahuje řešené příklady z těchto oblastí. Příklady tvoří celek, který uvádí čtenáře do problematiky a názorně ukazuje vybudovanou teorii.

V kapitole věnované Lebesgueově míře jsme na základě vybudované teorie pomocí příkladů čtenáři představili množinu lebesgueovsky měřitelných množin. Díky tomuto kroku jsme následně byli schopni vybudovat teorii Lebesgueova integrálu a na příkladech ilustrovat jeho vlastnosti. Závěrem jsme čtenáři podali výklad Newtonova a Riemannova integrálu, abychom mohli zřetelně porovnat rozdíly mezi jednotlivými přístupy. Tyto rozdíly byly nejjasněji vidět na příkladech funkcí, které nebyly vždy integrovatelné všemi typy integrálů.

Seznam použité literatury

[1] *Lebesgue Integration on Euclidian Space*. Jones and Bartlett Learning, 2001.

[2] Tai-Danae Bradley. Lebesgue measurable but not borel, 2015.

[3] Ondřej Došlý and Petr Zemánek. *Integrální počet v R*. Masarykova univerzita, Brno, 1. vyd. edition, 2011.

[4] Eva Kleknerová. Různé typy integrálů a jejich aplikace. Master's thesis, FAV ZČU, Plzeň, 2009.

[5] J Koliha. Lebesgue through newton integral. 30, 01 2003.

[6] Jaroslav Lukeš. *Teorie míry a integrálu*. Universita Karlova, Praha, 3. vyd., edition, 1980.

[7] Brian S. Thomson. *Theory of the Integral*. ClassicalRealAnalysis.com, 2012.

[8] Alberto Torchinsky. *Problems in real and functional analysis*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, [2015].