MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2015 BARBORA NEVESELÁ

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Cauchyova věta a její užití

Bakalářská práce

Barbora Neveselá

Vedoucí práce: RNDr. Michal Veselý, Ph.D. **Brno 2015**

Bibliografický záznam

Autor:	Barbora Neveselá Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Cauchyova věta a její užití
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Statistika a analýza dat
Vedoucí práce:	RNDr. Michal Veselý, Ph.D.
Akademický rok:	2014/15
Počet stran:	viii + 29
Klíčová slova:	Holomorfní funkce; komplexní křivkový integrál; Cauchyho věta; Cauchyho vzorec; Laurentova řada; izolovaná singularita; pól; reziduum; reziduová věta

Bibliographic Entry

Author:	Barbora Neveselá Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Cauchy's theorem and its applications
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Statistics and data analysis
Supervisor:	RNDr. Michal Veselý, Ph.D.
Academic Year:	2014/15
Number of Pages:	viii + 29
Keywords:	Holomorphic functions; complex line integral; Cauchy's theorem; Cauchy's formula; Laurent serie; isolated singularities; poles; residue; residue theorem

Abstrakt

V této bakalářské práci formulujeme a dokážeme Cauchyho věty a uvedeme jejich aplikace při výpočtech integrálů. Text je rozčleněn do čtyř kapitol. V první kapitole jsou vysloveny základní definice a věty, na něž poté navazujeme. Ve druhé kapitole jsou dokázány Cauchyho věty. Třetí kapitola se věnuje Laurentovým řadám a reziduím. V poslední kapitole se zabýváme především výpočty nevlastních integrálů.

Abstract

In this thesis we formulate and prove Cauchy's theorems and their applications in the calculations of integrals. This text is divided into four chapters. In the first chapter, we formulate basic definitions and theorems. In the second chapter, there are proved Cauchy's theorems. The third chapter deals with the Laurent series and residues. In the last chapter, we analyse the calculations of improper integrals.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2014/2015

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Studentka: Barbora Neveselá

Program: Matematika

Obor: Statistika a analýza dat

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Téma práce: Cauchyova věta a její užití

Téma práce anglicky: Cauchy's theorem and its applications

Oficiální zadání:
Práce obsahově spadá do teorie funkcí komplexní proměnné. Jejím cílem je uceleně prezentovat Cauchyovu větu a uvést její fundamentální aplikace infinitezimální povahy.

Literatura:

AHLFORS, Lars Valerian. *Complex analysis :an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1979. 331 s. ISBN 0-07-000657-1.

CHIRKA, E. M. *Introduction to complex analysis*. 2nd. printing. Berlin: Springer, 1997. 248 s. ISBN 3-540-63005-8.

STALKER, John. *Complex analysis _ fundamentals of the classical theory of functions*. Boston: Birkhäuser, 1998. xi, 228 s. ISBN 0-8176-4038-X.

VESELÝ, Jiří. *Komplexní analýza*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum, 2000. 244 s. ISBN 80-246-0202-4.

LANG, Serge. *Complex analysis*. 4th ed. New York: Springer, 1999. xiv, 485 s. ISBN 0-387-98592-1.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: RNDr. Michal Veselý, Ph.D.

Datum zadání práce: 3. 6. 2014

V Brně dne: 22. 10. 2014

Souhlasím se zadáním (podpis, datum): 10. 11. 2014

Neveselá
Barbora Neveselá
studentka

RNDr. Michal Veselý, Ph.D.
vedoucí práce

v. z.
prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce RNDr. Michalovi Veselému, Ph.D. za cenné rady, připomínky, vstřícný přístup a čas, který mi věnoval.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 25. května 2015 ....

Barbora Neveselá

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce se věnuje Cauchyho teorii s cílem jejího následného užití při výpočtu komplexního křivkového integrálu. Dále se zaměřuje na důležitou aplikaci Cauchyho věty, a to na výpočet reziduí.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole jsou uvedeny základní definice a vlastnosti z teorie funkcí komplexní proměnné. Zejména definice holomorfní funkce, křivky v komplexním oboru a základní vlastnosti komplexního křivkového integrálu. Tyto poznatky budeme využívat v dalších kapitolách.

Druhá kapitola je stěžejní, protože jsou zde dokázány Cauchyho věty, což je hlavní cíl této práce. Dále jsou zde uvedeny Cauchyho vzorce, které používáme při výpočtu komplexního křivkového integrálu.

Další kapitola se zabývá rozvojem komplexní funkce do mocninné řady. A dále zde definujeme izolované singularity. Tato kapitola je ukončena reziduovou větou. V poslední kapitole aplikujeme tuto větu především na výpočet nevlastních integrálů.

Při psaní práce jsem vycházela v první řadě z knih [1], [3], [5] a [6]. Je předpokládána znalost látky v rozsahu základních kurzů matematické analýzy v reálném oboru.

Kapitola 1

Základní definice a vlastnosti

1.1 Holomorfní funkce

Definice 1.1. Nechť $f : S \to \mathbb{C}$, kde $S \subseteq \mathbb{C}$, je otevřená množina. Derivaci funkce f v bodě $z_0 \in S$ definujeme jako limitu

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

nebo pro $h \in \mathbb{C}$ ekvivalentně

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Pokud existuje vlastní limita, řekneme, že funkce f je komplexně diferencovatelná v bodě z_0.

Poznámka. Pro derivaci v komplexním oboru platí známá pravidla jako pro derivování v $\mathbb{R}$, především:

1. Pokud jsou funkce f, g komplexně diferencovatelné v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, pak také funkce $f \pm g$ a $f \cdot g$ jsou komplexně diferencovatelné v bodě z_0 a platí

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0),$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

2. Jsou-li funkce f, g komplexně diferencovatelné v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a $g(z_0) \neq 0$, potom také funkce f/g je komplexně diferencovatelná v bodě z_0 a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

3. Jestliže je funkce g diferencovatelná v bodě z_0 a funkce f diferencovatelná v bodě $v_0 = g(z_0)$, pak také funkce $f \circ g$ je komplexně diferencovatelná v bodě z_0 a platí

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(v_0)g'(z_0).$$

4. Pokud je funkce g prostá v okolí bodu z_0, je komplexně diferencovatelná v bodě z_0 a platí $g'(z_0) \neq 0$, pak je také inverzní funkce g^{-1} komplexně diferencovatelná v bodě $v_0 = g(z_0)$ a platí
$$\left(g^{-1}\right)'(v_0) = \frac{1}{g'(z_0)}.$$

Výše uvedená tvrzení lze dokázat analogicky jako v $\mathbb{R}$.

Věta 1.2. Nechť $f \equiv u + iv$, kde $u = u(x,y)$, $v = v(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Funkce f je komplexně diferencovatelná v bodě $z = x + iy$, právě když existují obě parciální derivace funkcí u a v v bodě z a jsou splněny Cauchyho-Riemannovy podmínky
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.1}$$

Důkaz. Máme funkci $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Chceme-li spočítat derivaci funkce f v nějakém bodě, pak uvažujeme nejprve přiblížení podél reálné osy a poté podél imaginární osy. Je-li funkce f v daném bodě diferencovatelná, pak se obě hodnoty rovnají.

Nechť $h \in \mathbb{R}$. Potom podle definice
$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}.$$
Rozepsáním první části dostaneme
$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) + iv(x+h,y) - (u(x,y) + iv(x,y))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\,\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$
Analogicky pro druhou část
$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h) + iv(x,y+h) - (u(x,y) + iv(x,y))}{ih} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{h} - i\,\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{h} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$
Obě derivace se musí rovnat. Platí tedy
$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$
Porovnáním reálné a imaginární části dostáváme rovnice (1.1). □

Poznámka. Cauchyho-Riemannovy podmínky lze ekvivalentně zapsat jedním vztahem
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Definice 1.3. Nechť $S \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina. Funkci F nazýváme primitivní funkcí k funkci f na množině S, jestliže platí $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in S$.

Definice 1.4. Funkce f definovaná na otevřené oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$ je holomorfní na S, jestliže existuje $f'(z)$ pro všechna $z \in S$.
Funkce f se nazývá holomorfní v bodě z_0, jestliže je diferencovatelná v tomto bodě a v jistém jeho okolí.

1.2 Křivky

Definice 1.5. Nechť $\langle A,B\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktní interval. Spojité zobrazení $K : \langle A,B\rangle \to \mathbb{C}$ nazýváme křivkou v $\mathbb{C}$. Mluvíme o parametrickém vyjádření křivky. Body $K(A), K(B)$ se označují jako krajní body křivky K, kde $K(A)$ je počáteční bod a $K(B)$ je koncový bod křivky K. Jestliže $K(A) = K(B)$, nazýváme K uzavřenou křivkou.

Definice 1.6. Nechť $K_1 : \langle A,B\rangle \to \mathbb{C}$ a $K_2 : \langle C,D\rangle \to \mathbb{C}$ jsou křivky, pro něž platí $K_1(B) = K_2(C)$. Součet křivek K_1, K_2 je křivka $K_1 + K_2$ definovaná vztahem

$$(K_1+K_2)(s) = \begin{cases} K_1(s), & s \in \langle A,B\rangle; \\ K_2(s+C-B), & s \in \langle B, B+D-C\rangle. \end{cases}$$

Definice 1.7. Křivka $K : \langle A,B\rangle \to \mathbb{C}$ je jednoduchá, pokud pro libovolné $t_1, t_2 \in (A,B)$ takové, že $t_1 \neq t_2$, platí $K(t_1) \neq K(t_2)$.

Definice 1.8. Jednoduchou uzavřenou křivku nazýváme Jordanova křivka.

Definice 1.9. Křivka $K : \langle A,B\rangle \to \mathbb{C}$ je hladká, pokud její parametrické vyjádření má spojitou derivaci v každém bodě $t \in \langle A,B\rangle$ a tato derivace je různá od nuly. Křivka K se nazývá po částech hladká, je-li součtem konečného počtu hladkých křivek.

Definice 1.10. Křivku nazveme regulární, jestliže je součtem konečného počtu křivek, jejichž parametrická vyjádření mají spojité derivace. O regulární křivce se také hovoří jako o cestě. Jordanovu křivku, která je cestou, nazýváme Jordanovou cestou.

1.3 Křivkové integrály

Nechť f, g jsou spojité funkce na otevřené oblasti S a $K : \langle A,B\rangle \to \mathbb{C}$ je křivka v S. Integrál funkce komplexní proměnné má stejné základní vlastnosti jako integrál funkce reálné proměnné.

1. Linearita. Platí
$$\int_K c \cdot f(z) + d \cdot g(z)\,\mathrm{d}z = c\int_K f(z)\,\mathrm{d}z + d\int_K g(z)\,\mathrm{d}z$$
pro $c, d \in \mathbb{C}$.

2. Aditivita. Je-li křivka $K : \langle A,B\rangle \to \mathbb{C}$ složena ze dvou částí $K_1 : \langle A,C\rangle \to \mathbb{C}$ a $K_2 : \langle D,B\rangle \to \mathbb{C}$ tak, že $K_1(C) = K_2(D)$, pak platí
$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{K_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{K_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

3. Změna orientace. Platí
$$\int_{-K} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_K f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Poznámka. Pro spojitou funkci $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ platí

$$\left|\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq \int_a^b |f(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Definice 1.11. Délku cesty $K : \langle A,B\rangle \to \mathbb{C}$ značíme $L(K)$ a je definována jako

$$L(K) = \int_A^B \left|K'(s)\right|\,\mathrm{d}s.$$

Definice 1.12. Uzavřená jednoduchá křivka K rozděluje $\mathbb{C}$ na dvě oblasti. Vnější neohraničenou oblast křivky K označujeme $\operatorname{Ext} K$ a vnitřní ohraničenou jako $\operatorname{Int} K$.

Věta 1.13 (Základní odhad pro křivkový integrál). Mějme cestu $K = z(s) : \langle A,B\rangle \to \mathbb{C}$. Nechť f je spojitá funkce. Jestliže $|f(z)| \leq M$ na K, potom platí

$$\left|\int_K f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq M \cdot L(K).$$

Důkaz. Z poznámky před Definicí 1.11 dostáváme

$$\left|\int_K f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_A^B f(z(s))\,z'(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq \int_A^B |f(z(s))| \cdot |z'(s)|\,\mathrm{d}s \leq$$
$$\leq M \int_A^B |z'(s)|\,\mathrm{d}s = M \cdot L(K).$$

□

Věta 1.14. Nechť $S \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina a F je spojitá funkce definovaná na S. Jestliže je funkce $f : S \to \mathbb{C}$ spojitá, jsou následující podmínky ekvivalentní:

(I) Funkce F je holomorfní v S a je primitivní funkcí k f v S.

(II) Pro libovolnou dvojici bodů $m,n \in S$ a libovolnou cestu $K \subseteq S$ takovou, že m je počáteční bod a n je koncový bod cesty K, platí

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = F(n) - F(m).$$

Důkaz. Dokažme $(I) \Rightarrow (II)$. Předpokládáme tedy, že platí $F'(z) = f(z)$. Dále mějme křivku $K : \langle A,B\rangle \to \mathbb{C}$ s počátečním bodem $m = K(A)$ a koncovým bodem $n = K(B)$. Pak je

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = \int_A^B f(K(s))K'(s)\,\mathrm{d}s = \int_A^B F'(K(s))K'(s)\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_A^B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F(K(s))\,\mathrm{d}s = F(K(B)) - F(K(A)) = F(n) - F(m).$$

Nyní dokážeme opačnou implikaci $(II) \Rightarrow (I)$. Chceme ukázat, že pro libovolný bod $p \in S$ existuje $F'(p)$, přičemž funkce F je primitivní funkcí k funkci f, tedy $F'(p) = f(p)$. Nechť je $\varepsilon > 0$ takové, že pro ε-okolí bodu p platí $\mathscr{O}_\varepsilon(p) \subset S$. Nechť $U = U(s) = p + (n-p)s$, $s \in \langle 0, 1 \rangle$ je úsečka spojující body p, n. Z (II) dostáváme

$$F(n) = F(p) + \int_U f(z)\,\mathrm{d}z \tag{1.2}$$

pro všechna $n \in \mathscr{O}_\varepsilon(p)$. Definujme funkci

$$F^*(n) = \begin{cases} \frac{1}{n-p} \int_U f(z)\,\mathrm{d}z, & n \in \mathscr{O}_\varepsilon(p) \smallsetminus \{p\}; \\ f(p), & n = p. \end{cases}$$

Potom z (1.2) dostaneme

$$F(n) = F(p) + (n-p)F^*(n)$$

pro všechna $n \in \mathscr{O}_\varepsilon(p)$.

Jestliže je funkce F^* spojitá v bodě p, pak $F^*(p) = f(p) = F'(p)$. Stačí tedy dokázat, že funkce F^* je v bodě p spojitá. Platí

$$\int_U f(p)\,\mathrm{d}z = f(p) \int_U \mathrm{d}z = f(p)(n-p) = F^*(p)(n-p)$$

pro $n \in \mathscr{O}_\varepsilon(p) \smallsetminus \{p\}$. Potom

$$F^*(n) - F^*(p) = \frac{1}{n-p} \int_U f(z)\,\mathrm{d}z - \frac{1}{n-p} \int_U f(p)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{n-p} \int_U f(z) - f(p)\,\mathrm{d}z.$$

Tedy

$$\begin{aligned} |F^*(n) - F^*(p)| &\leq \frac{1}{|n-p|} \int_U |f(z) - f(p)|\,\mathrm{d}z \leq \frac{1}{|n-p|} \max_{z \in U} |f(z) - f(p)| \int_U \mathrm{d}z \leq \\ &\leq \frac{1}{|n-p|} \max_{z \in U} |f(z) - f(p)| \cdot |n-p| = \max_{z \in U} |f(z) - f(p)| \end{aligned}$$

pro všechna $n \in \mathscr{O}_\varepsilon(p)$. Protože je funkce f v bodě p spojitá, je také funkce F^* spojitá v tomto bodě. $\square$

Věta 1.15. Nechť $S \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená množina. Je-li funkce $f : S \to \mathbb{C}$ spojitá, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(I) K funkci f existuje v S primitivní funkce.

(II) Nechť $K \subseteq S$ je uzavřená cesta, potom platí

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(III) Integrál $\int_K f(z)\,\mathrm{d}z$, kde $K \subset S$ je libovolná křivka, nezávisí v S na integrační cestě.

Důkaz. To že z tvrzení (I) plynou tvrzení (II) a (III), je zřejmé z Věty 1.14. Dokažme $(III) \Rightarrow (II)$. Nechť $A, B \in S$ a K_1, K_2 jsou různé křivky ležící v S spojující body A, B. Nejprve předpokládejme, že se cesty K_1, K_2 neprotínají. Z *(III)* plyne

$$\int_{K_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{K_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Odtud pro uzavřenou cestu $K_1 - K_2$ dostáváme

$$\int_{K_1 - K_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dále předpokládejme, že se cesty K_1, K_2 protínají v jednom bodě. Označme jej C. Bod C rozděluje cesty K_1, K_2 na dvě části $K_1 = K_{11} + K_{12}$ a $K_2 = K_{21} + K_{22}$. Platí

$$\int_{K_{11}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{K_{21}} f(z)\,\mathrm{d}z, \qquad \int_{K_{12}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{K_{22}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Odtud pro uzavřené cesty $K_{11} - K_{21}$ a $K_{12} - K_{22}$ dostaneme

$$\int_{K_{11}-K_{21}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \qquad \int_{K_{12}-K_{22}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Stejnou úvahou bychom postupovali, kdyby se cesty protínaly ve více bodech.

Nyní tak stačí dokázat jen implikaci $(II) \Rightarrow (I)$. Mějme libovolnou cestu K v S s počátečním bodem $m = K(A)$ a koncovým bodem $n = K(B)$. Nechť $p \in S$ je libovolný pevně zvolený bod. Cestu s počátečním bodem p a koncovým bodem m označme K_1, podobně cestu s počátečním bodem p a koncovým bodem n označme K_2. Dále definujme funkci F pro všechna $m \in S$ předpisem

$$F(m) = \int_{K_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Vidíme, že cesta $K_1 + K - K_2$ je uzavřená, a proto

$$\begin{aligned} 0 = \int_{K_1+K-K_2} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{K_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{K} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{K_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \\ &= F(m) + \int_K f(z)\,\mathrm{d}z - F(n). \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = F(n) - F(m).$$

Dle Věty 1.14 víme, že funkce F je primitivní k funkci f. □

Definice 1.16. Nechť K je uzavřená cesta v $\mathbb{C}$. Nechť $b \in \mathbb{C}$ je bod neležící na cestě K. Index bodu b vzhledem ke křivce K definujeme vztahem

$$\operatorname{ind}_K b = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{1}{\xi - b}\, \mathrm{d}\xi.$$

Poznámka. Nechť K je uzavřená cesta v $\mathbb{C}$ a $b \in \mathbb{C}$ je bod, který neleží na K. Funkce $\operatorname{ind}_K b$ má následující vlastnosti:

1. Funkce $\operatorname{ind}_K b$ nabývá pouze celočíselných hodnot.
2. Pro $b \in \operatorname{Ext} K$ je index bodu b roven nule.
3. Nechť $b \in \operatorname{Int} K$. Potom je index bodu b roven 1, má-li cesta K kladnou orientaci. Má-li cesta K zápornou orientaci, je index bodu b roven -1.

Kapitola 2

Cauchyho teorie

2.1 Cauchyho věty

Nejprve je zde uvedeno Goursatovo lemma, které poté použijeme v důkazu Cauchyho věty a také Cauchyho vzorce.

Lemma 2.1 (Goursatovo). Nechť $f : S \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, kde S je otevřená množina v $\mathbb{C}$. Dále nechť K je cesta v S. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje lomená čára $\widetilde{K} \subset S$, jejíž vrcholy leží na K a

$$\left| \int_K f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\widetilde{K}} f(z)\,\mathrm{d}z \right| < \varepsilon.$$

Navíc, jestliže je cesta K uzavřená, pak i lomená čára $\widetilde{K}$ je uzavřená.

Důkaz. Cesta K je kompaktní množina. Existuje tedy kompaktní množina $T \subset S$, která obsahuje cestu K a jisté její okolí. Funkce f je spojitá na S. Na kompaktní množině $T \subset S$ je proto stejnoměrně spojitá. Uvažujme libovolné $\varepsilon > 0$. Existuje tak $\delta > 0$, že pro každá $x, y \in T$ splňující $|\, x - y \,| < \delta$ platí

$$|\, f(x) - f(y) \,| \leq \frac{\varepsilon}{3L(K)}. \tag{2.1}$$

Interval $\langle A, B \rangle$ lze rozdělit na n dílů

$$A = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = B$$

tak, že lomená čára $\widetilde{K} \subseteq T$ se skládá z úseček $\widetilde{K}_i(p) = z_{i-1} + (z_i - z_{i-1})p$, $p \in \langle 0, 1 \rangle$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $z_i = K(t_i)$. Předpokládejme, že všechny body nespojitosti derivace K' jsou rovny některému z dělících bodů t_i, a to bez újmy na obecnosti. Dále může platit $|\, z - z_i \,| < \delta$ pro $z \in \langle K(t_{i-1}), K(t_i) \rangle$. Označme K_i část K definovanou na $\langle K(t_{i-1}), K(t_i) \rangle$. Stejně tak musí platit $|\, z - z_i \,| < \delta$ pro $z \in \widetilde{K}_i$.

S použitím (2.1) obdržíme

$$\left|\int_K f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(z_i - z_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{K_i} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\int_{K_i}\mathrm{d}z\right| =$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{K_i} f(z) - f(z_i)\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\varepsilon}{3L(K)}L(K) = \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogicky pro $\widetilde{K}$ dostáváme

$$\left|\int_{\widetilde{K}} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(z_i - z_{i-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{\widetilde{K}_i} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\int_{\widetilde{K}_i}\mathrm{d}z\right| =$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{\widetilde{K}_i} f(z) - f(z_i)\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\varepsilon}{3L(K)}L\left(\widetilde{K}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Celkem tedy platí

$$\left|\int_K f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\widetilde{K}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \left|\int_K f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(z_i - z_{i-1})\right| +$$
$$+ \left|\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(z_i - z_{i-1}) - \int_{\widetilde{K}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Je zřejmé, že lomená čára $\widetilde{K}$ je uzavřená, když cesta K je uzavřená. □

Věta 2.2 (Cauchyho věta pro trojúhelník). Nechť $S \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a funkce f je holomorfní v S. Potom pro každý trojúhelník $\mathscr{T} \subset S$, jehož hranici označíme T, platí

$$\int_T f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{2.2}$$

Důkaz. Nechť T má kladnou orientaci. Označme $I = \left|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z\right|$. Trojúhelník $\mathscr{T}$ rozdělíme úsečkami spojujícími středy stran na čtyři trojúhelníky. Jejich hranice (označené T^i, $i = = 1,2,3,4$) jsou kladně orientované lomené čáry. Platí

$$\int_T f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{4}\int_{T^i} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{2.3}$$

Neboť integraci přes úsečky spojující středy stran provádíme dvakrát, v jednom a poté v opačném směru, součet těchto integrálů je nulový.

Z trojúhelníkové nerovnosti a z (2.3) vidíme, že pro alespoň jednu křivku T^i platí

$$\left| \int_{T^i} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \geq \frac{I}{4}.$$

Tuto křivku označíme T_1 a příslušný trojúhelník $\mathscr{T}_1$. Zopakováním tohoto postupu dostaneme trojúhelník $\mathscr{T}_2$, dále trojúhelník $\mathscr{T}_3$ atd. Takto získáme posloupnost trojúhelníků

$$\mathscr{T} \supseteq \mathscr{T}_1 \supseteq \mathscr{T}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{T}_n \supseteq \cdots$$

takovou, že délky nejdelších stran tvoří posloupnost konvergující k 0 a

$$\left| \int_{T_n} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \geq \frac{I}{4^n}. \tag{2.4}$$

Také platí

$$L(T_n) = \frac{L(T)}{2^n}. \tag{2.5}$$

Dále využijeme Cantorovu větu, která říká, že posloupnost do sebe vnořených kompaktních množin má neprázdný průnik. Protože trojúhelníky $\mathscr{T}_n$ jsou kompaktní množiny, existuje bod z_0 takový, že $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{T}_n$. Je zřejmé, že $z_0 \in \mathscr{T} \subset S$. Funkce f má tedy v bodě z_0 derivaci. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $0 < |z - z_0| < \delta$. Pak

$$\left| f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \right| \leq \varepsilon \, |z - z_0|. \tag{2.6}$$

Ke každé lineární funkci $h(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ existuje primitivní funkce. Potom platí

$$\int_{T_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{T_n} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\,\mathrm{d}z. \tag{2.7}$$

Pro libovolné $z \in T_n$ můžeme říct, že $|z - z_0| < L(T_n)$. Z (2.4), (2.6) a (2.7) plyne

$$\frac{I}{4^n} \leq \left| \int_{T_n} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \int_{T_n} \left| f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \right| \mathrm{d}z \leq \int_{T_n} \varepsilon \, |z - z_0| \leq \varepsilon L^2(T_n).$$

Odtud a z (2.5) vidíme, že

$$I \leq \varepsilon \, 4^n L^2(T_n) = \varepsilon (2^n L(T_n))^2 \leq \varepsilon L^2(T).$$

Protože jsme číslo $\varepsilon > 0$ volili libovolně, musí být $I = 0$. □

Nyní Větu 2.2 zobecníme.

Věta 2.3 (**Cauchyho věta**)**.** Nechť f je holomorfní funkce v jednoduše souvislé oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$. Pak pro každou uzavřenou cestu K v oblasti S platí

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{2.8}$$

Důkaz. Předpokládejme, že funkce $f' = f'(z)$ je spojitá v oblasti S. Dále nechť funkce $u = u(x,y)$, $v = v(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pro něž platí $f \equiv u + iv$, mají spojité parciální derivace. Potom

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = \int_K (u+iv)\,(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = \int_K u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_K v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

Dále s použitím Stokesovy věty a Cauchyových-Riemannových podmínek můžeme pro reálnou část psát

$$\int_K u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{C}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{C}} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

kde $\mathscr{C}$ je oblast ohraničená křivkou K. Analogicky pro imaginární část

$$\int_K v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{C}} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathscr{C}} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Celkem tedy

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Nyní dokážeme uvedenou větu bez předpokladu spojitosti f'. Máme spojitou funkci f a uzavřenou cestu K. Podle Goursatova lemmatu 2.1 pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje lomená čára $\widetilde{K}$, jejíž vrcholy leží na K a

$$\left| \int_K f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\widetilde{K}} f(z)\,\mathrm{d}z \right| < \varepsilon.$$

Jestliže položíme

$$\left| \int_{\widetilde{K}} f(z)\,\mathrm{d}z \right| = 0,$$

potom musí být

$$\left| \int_K f(z)\,\mathrm{d}z \right| < \varepsilon.$$

Protože je $\varepsilon > 0$ libovolné, dostáváme

$$\left| \int_K f(z)\,\mathrm{d}z \right| = 0.$$

Uvažujme tak uzavřenou lomenou čáru $\widetilde{K}$, která je tvořená úsečkami $\widetilde{K}_i$ pro $i = 1, \ldots, n$. Tyto úsečky jsou po dvou disjunktní nebo je jejich průnikem společný krajní bod. Platí, že integrál je aditivní vzhledem k integrační cestě. Dále platí

$$\int_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{L_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

kde L_1 a L_2 jsou stejné křivky lišící se pouze orientací. Můžeme říct, že existuje konečně mnoho uzavřených lomených čar $U_1,\dots,U_k$ tvořených úsečkami $\widetilde{K}_i$, $i=1,\dots,n$ takových, že jsou Jordanovými cestami. Potom

$$\int\limits_{\widetilde{K}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{U_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int\limits_{U_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dále tedy uvažujme uzavřené lomené čáry, které jsou Jordanovými cestami. Takovéto uzavřené lomené čáry představují hranici mnohoúhelníku, o němž můžeme předpokládat, že každá jeho strana je tvořena pouze jednou úsečkou $\widetilde{K}_i$. V každém mnohoúhelníku s více než 3 stranami existuje alespoň jedna úhlopříčka. Pomocí úhlopříček můžeme mnohoúhelník rozdělit na trojúhelníky a poté integrovat přes tyto trojúhelníky. Trojúhelníky mají stejnou orientaci jako je orientace Jordanovy cesty tvořící vnější mnohoúhelník. Integraci přes úhlopříčky provádíme tedy dvakrát, v jednom a poté v opačném směru. Součet integrálů přes úhlopříčky dává 0. Větu tedy stačí dokázat pro Jordanovu cestu, která vymezuje trojúhelník. Dále je postup stejný jako v důkazu Věty 2.2. □

Věta 2.4. Nechť K je Jordanova cesta v $\mathbb{C}$. Nechť funkce f je holomorfní na $\operatorname{Int} K$ a je spojitá a konečná na $\overline{\operatorname{Int} K}$. Potom platí

$$\int\limits_K f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Důkaz kvůli technické komplikovanosti vynecháme.

Věta 2.5 (Cauchyho věta pro dvojici Jordanových cest). Nechť křivky J,K jsou Jordanovými cestami v $\mathbb{C}$, které mají kladnou orientaci a $K \subseteq \operatorname{Int} J$. Dále nechť je funkce f holomorfní na $\operatorname{Ext} K \cap \operatorname{Int} J$ a je spojitá a konečná na $\overline{\operatorname{Ext} K \cap \operatorname{Int} J}$. Potom platí

$$\int\limits_J f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_K f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Důkaz. Vyjádříme $J = J_\frown + J_\smile$ a $K = K_\frown + K_\smile$. Nechť A,B jsou dva libovolné body na křivce J takové, že B je počátečním bodem $J_\frown$ a koncovým bodem $J_\smile$ a bod A je koncovým bodem $J_\frown$ a počátečním bodem $J_\smile$. Podobně nechť C,D jsou libovolné dva body na křivce K tak, že bod D je počátečním bodem $K_\frown$ a koncovým bodem $K_\smile$ a bod C je koncovým bodem $K_\frown$ a počátečním bodem $K_\smile$. Dále nechť P_1 je křivka jdoucí od bodu A k bodu C a neprochází žádnou z křivek J,K. Podobně nechť P_2 je křivka jdoucí od bodu D k bodu B a neprotíná křivky J,K. Podle Lemmatu 2.4 platí

$$\int\limits_{J_\frown + P_1 - K_\frown + P_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \qquad \int\limits_{J_\smile - P_2 - K_\smile - P_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Odtud

$$0 = \int\limits_{J_\frown + P_1 - K_\frown + P_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{J_\smile - P_2 - K_\smile - P_1} f(z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{J_\frown} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{P_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{K_\frown} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{P_2} f(z)\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{J_\smile} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{P_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{K_\smile} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{P_1} f(z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{J_\frown} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{K_\frown} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{J_\smile} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{K_\smile} f(z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{J_\frown} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{J_\smile} f(z)\,\mathrm{d}z - \left(\int_{K_\frown} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{K_\smile} f(z)\,\mathrm{d}z \right) = \int_J f(z)\,\mathrm{d}z - \int_K f(z)\,\mathrm{d}z.$$

□

2.2 Cauchyho vzorce

V této části jsou uvedeny Cauchyho vzorce a poté je na příkladech ukázáno jejich užití při výpočtu křivkových integrálů.

Věta 2.6 (Cauchyho vzorec pro Jordanovu cestu). Nechť K je Jordanova cesta v $\mathbb{C}$ s kladnou orientací a $\operatorname{Int} K = V$. Nechť $f : \overline{V} \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce na V a je spojitá na $\overline{V}$. Potom platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} f(z), & z \in V; \\ 0, & z \notin \overline{V}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Důkaz. Mějme pevně zvolené $z \in V$. Funkce f je stejnoměrně spojitá na $\overline{V}$. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\xi \in V$, pro která $|\xi - z| < \delta$, platí

$$|f(\xi) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Dále mějme kruh $\overline{K(z,r)} \subset V$, kde poloměr r splňuje $0 < r < \delta$. Tento kruh je vymezen kružnicí $k(s) = z + re^{is}$, $s \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Potom podle Věty 2.5 dostáváme

$$\int_K \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \int_k \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \int_k \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi + f(z) \int_k \frac{1}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_k \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi + f(z) \int_0^{2\pi} \frac{re^{is} i}{z + re^{is} - z}\,\mathrm{d}s = \int_k \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi + f(z) 2\pi i.$$

Zřejmě platí $L(k) = 2\pi r$ a $\xi \in \overline{K(z,r)}$ zapíšeme jako $|\xi - z| \le r$, kde rovnost nastává právě, když ξ leží na kružnici k. Platí tedy

$$\left| \int_K \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - f(z) 2\pi i \right| = \left| \int_k \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \right| \le \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2\pi r = \varepsilon.$$

Jelikož jsme číslo ε volili libovolně, dostáváme z předchozího

$$\int_K \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = f(z)2\pi i.$$

Tím je věta dokázána pro $z \in V$.

Pro $z \notin \overline{V}$ plyne z Lemmatu 2.4. □

Věta 2.7 (**Zobecněný Cauchyho vzorec**)**.** Nechť je funkce f holomorfní v jednoduše souvislé oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$. Dále nechť $K \subseteq S$ je uzavřená cesta. Potom pro libovolné $z \in S \setminus K$ platí

$$f(z)\mathrm{ind}_K z = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.10}$$

Důkaz. Nechť číslo $\varepsilon \in (0, 2\pi)$ je libovolné. Podle Lemmatu 2.1 pro libovolné ε existuje lomená čára $\widetilde{K} \subseteq S$ neprocházející bodem z splňující

$$\left| \int_K \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - \int_{\widetilde{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \right| < \varepsilon, \tag{2.11}$$

$$\left| \int_K \frac{1}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - \int_{\widetilde{K}} \frac{1}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \right| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme v obou nerovnostech lomenou čáru $\widetilde{K}$ volit stejně. Podle definice indexu bodu můžeme nerovnost (2.12) psát jako

$$|\mathrm{ind}_K z - \mathrm{ind}_{\widetilde{K}} z| < \frac{\varepsilon}{2\pi} < 1.$$

Navíc, protože index bodu je celočíselná funkce, platí $\mathrm{ind}_K z = \mathrm{ind}_{\widetilde{K}} z$.

Protože je cesta K uzavřená, můžeme také o lomené čáře $\widetilde{K}$ předpokládat, že je uzavřená. Máme tedy uzavřenou lomenou čáru $\widetilde{K}$ tvořenou úsečkami $\widetilde{K}_i$ pro $i = 1, \ldots, n$, které jsou po dvou disjunktní nebo je jejich průnikem společný krajní bod. Potom existuje konečný počet uzavřených lomených čar $U_1, \ldots, U_k$, které tvoří některé z úseček $\widetilde{K}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tyto uzavřené lomené čáry jsou Jordanovými cestami a platí

$$\int_{\widetilde{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi,$$

$$\int_{\widetilde{K}} \frac{1}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} \frac{1}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Vydělením číslem $2\pi i$ dostáváme

$$\mathrm{ind}_{\widetilde{K}} z = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{ind}_{U_i} z.$$

Z vlastností indexu bodu víme, že

$$\operatorname{ind}_{U_i} z = \begin{cases} 1, & z \in \operatorname{Int} U_i \text{ pro kladně orientovanou } U_i; \\ -1, & z \in \operatorname{Int} U_i \text{ pro záporně orientovanou } U_i; \\ 0, & z \notin \overline{\operatorname{Int} U_i}. \end{cases}$$

Podle předchozího a Věty 2.6 platí

$$f(z)\operatorname{ind}_{U_i} z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{U_i} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \quad \text{pro } i = 1, \dots, k.$$

Odtud sečtením

$$f(z)\operatorname{ind}_{\widetilde{K}} z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\widetilde{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi.$$

Dále dostáváme

$$\left| f(z)\operatorname{ind}_K z - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \right| \le \left| f(z)\operatorname{ind}_{\widetilde{K}} z - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\widetilde{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\widetilde{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\widetilde{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi - \int\limits_K \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Na začátku jsme volili $\varepsilon \in (0, 2\pi)$ libovolně. Platí tak 2.10. □

Příklad 2.1. Vypočítejte integrál

$$\int\limits_K \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 1},$$

kde K je kladně orientovaná kružnice $|z - 1 - i| = 2$.

Řešení. Nejprve řešíme rovnici $z^2 + 1 = 0$. Jejími kořeny jsou $z = \pm i$. Dále chceme zjistit, které z těchto kořenů leží uvnitř a které vně křivky K. Vzdálenost kořene $z = i$ od středu kružnice K je $|1 + i - i| = 1$. Tento kořen tedy leží uvnitř křivky K. Pro druhý kořen platí $|1 + i - (-i)| = \sqrt{5} > 2$. Vidíme, že $z = -i$ leží vně křivky K. Zadaný integrál můžeme upravit na tvar

$$\int\limits_K \frac{\frac{1}{z+i}}{z - i} \mathrm{d}z.$$

Funkce $f(z) = (z + i)^{-1}$ je zřejmě holomorfní na $\operatorname{Int} K$ a je spojitá na $\overline{\operatorname{Int} K}$. Můžeme proto použít Cauchyho vzorec (2.9) se ziskem

$$\int\limits_K \frac{\frac{1}{z+i}}{z - i} \mathrm{d}z = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

□

Příklad 2.2. Vypočítejte integrál

$$\int_K \frac{dz}{(z+i)(z-3)z},$$

kde K je kladně orientovaná kružnice $|z+i| = r$ a $1 < r < 3$.

Řešení Nejdříve hledáme řešení rovnice $z(z+i)(z-3) = 0$. Se ziskem $z_1 = 0$, $z_2 = -i$, $z_3 = 3$. Nyní chceme vědět, která z těchto z leží uvnitř a která vně křivky K. Je zřejmé, že $-i \in \operatorname{Int} K$. Pro z_1 a z_3 počítáme $|0+i| = 1 < r$ a $|3+i| = \sqrt{10} > 3$. Tedy $z_1 = 0$ leží také uvnitř křivky K, ale $z_3 = 3 \notin \operatorname{Int} K$. Integrovanou funkci chceme upravit tak, aby platilo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+i)(z-3)z} &= \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-3} + \frac{C}{z}, \\ 1 &= A(z-3)z + B(z+i)z + C(z+i)(z-3). \end{aligned}$$

Dosazením $z = -i$ získáme rovnici $1 = A(-i-3)(-i)$, odtud $A = (-1+3i)^{-1}$. Podobně dosazením $z = 3$ řešíme rovnici $1 = B(3+i)3$ se ziskem $B = (9+3i)^{-1}$. Nyní pro $z = 0$ máme rovnici $1 = Ci(-3)$, a tedy $C = (-3i)^{-1}$. Dostáváme

$$\int_K \frac{dz}{(z+i)(z-3)z} = \int_K \frac{\frac{1}{-1+3i}}{z+i}\,dz + \int_K \frac{\frac{1}{9+3i}}{z-3}\,dz - \int_K \frac{\frac{1}{3i}}{z}\,dz.$$

Konstantní funkce jsou holomorfní na $\operatorname{Int} K$ a jsou spojité na $\overline{\operatorname{Int} K}$. Můžeme tedy použít Cauchyho vzorec pro Jordanovu cestu a vypočítat

$$\begin{aligned} \int_K \frac{dz}{(z+i)(z-3)z} &= 2\pi i \frac{1}{-1+3i} + 0 - 2\pi i \frac{1}{3i} = 2\pi i \frac{1}{-9-3i} = \\ &= -2\pi i \frac{9-3i}{90} = -\pi i \frac{3-i}{15} = -\pi \frac{1+3i}{15}. \end{aligned}$$

□

Kapitola 3

Laurentovy řady a reziduová věta

3.1 Laurentovy řady

Definice 3.1. Řekneme, že řada konverguje na množině S lokálně stejnoměrně, když na každé její kompaktní podmnožině T konverguje stejnoměrně.

Definice 3.2. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Řada ve tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{3.1}$$

se nazývá Laurentova řada se středem z_0. Čísla $a_n \in \mathbb{C}$ nazýváme koeficienty. Laurentova řada je součet řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

První řadu budeme nazývat regulární část a druhou hlavní část Laurentovy řady.

Laurentova řada konverguje právě tehdy, když konvergují obě její části. Obor konvergence Laurentovy řady je proto průnik oborů pro obě její části. Regulární část je mocninná řada. Nechť R_2 je její poloměr konvergence. Pro hlavní část provedeme substituci $\xi = (z-z_0)^{-1}$. Potom dostáváme mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\xi^n$. Nechť $\lambda > 0$ je její poloměr konvergence, a tedy řada konverguje pro

$$\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \lambda, \quad \text{tj.} \quad |z-z_o| > \frac{1}{\lambda}.$$

Označme $R_1 = (\lambda)^{-1}$, resp. položme $R_1 = \infty$ pro $\lambda = 0$. Vidíme, že hlavní část konverguje na vnějšku kruhu $|z-z_0| > R_1$. Obor konvergence Laurentovy řady obsahuje tedy mezikruží

$$P(z_0,R_1,R_2) = \{z \in \mathbb{C}, R_1 < |z-z_0| < R_2\} \quad \text{pro } R_1 < R_2.$$

Připouštíme $R_1 = 0$ i $R_2 = \infty$. Dále víme, že Laurentova řada konverguje absolutně v každém bodě $z \in P(z_0,R_1,R_2)$ a konverguje lokálně stejnoměrně v $P(z_0,R_1,R_2)$.

Věta 3.3 (Laurentova věta). Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Potom pro libovolnou holomorfní funkci f na $P(z_0, R_1, R_2)$ existuje Laurentova řada se středem v z_0, která konverguje v $P(z_0, R_1, R_2)$ a platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Pro koeficienty platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

kde $K = K(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $r \in (R_1, R_2)$ je libovolné.

Důkaz. Zvolme pevně $z \in P(z_0, R_1, R_2)$ a poloměry r_1, r_2 takové, že

$$R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2.$$

Mějme kružnice $I = I(t) = z_0 + r_1 \mathrm{e}^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $J = J(t) = z_0 + r_2 \mathrm{e}^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Podobně jako v důkazu Věty 2.5 si vyjádříme $I = I_\frown + I_\smile$ a $J = J_\frown + J_\smile$. Dále mějme libovolné body A, B, C, D, pro které platí, že A je počáteční bod $J_\frown$ a koncový bod $J_\smile$, bod B je koncový bod $J_\frown$ a počáteční bod $J_\smile$. Podobně je C počáteční bod $I_\frown$ a koncový bod $I_\smile$ a bod D je koncový bod $I_\frown$ a počáteční bod $I_\smile$. Nechť P_1 je úsečka jdoucí od bodu B k D a P_2 je úsečka jdoucí od bodu C k A. Označme si křivky $\mathscr{M}_1 = J_\frown + P_1 - I_\frown + P_2$ a $\mathscr{M}_2 = J_\smile - P_2 - I_\smile - P_1$. Tyto křivky jsou Jordanovými cestami. Předpokládejme, že $z \in \operatorname{Int} \mathscr{M}_2$. Podle Cauchyho vzorce pro Jordanovu cestu platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{M}_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{M}_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi = f(z).$$

Odtud

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{M}_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{M}_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{J_\smile - P_2 - I_\smile - P_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi + \int_{J_\frown + P_1 - I_\frown + P_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi \right) = \qquad (3.2) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_J \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi - \int_I \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi \right). \end{aligned}$$

Dále $(\xi - z)^{-1}$ rozepíšeme pro $\xi \in J$ jako

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}.$$

Protože

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r_2} < 1,$$

můžeme druhý zlomek napsat jako geometrickou řadu. Dostáváme tedy

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}.$$

Podobně pro $\xi \in I$ je

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^n},$$

neboť

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r_1}{|z - z_0|} < 1.$$

Dosazením do (3.2) obdržíme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_J \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n} \, \mathrm{d}\xi + \int_I \frac{f(\xi)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^n} \, \mathrm{d}\xi \right).$$

Jelikož uvažované geometrické řady konvergují stejnoměrně, můžeme zaměnit pořadí sumace a integrace. Dostáváme tak

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi + \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^{-n} \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \, \mathrm{d}\xi.$$

Z Cauchyho věty pro dvojici Jordanových cest vidíme, že pro koeficienty platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Zcela analogicky můžeme poté postupovat ve druhém případě, tj. pro hlavní část Laurentovy řady. □

3.2 Izolované singularity

Označme $P(z_0, R) = P(z_0, 0, R)$.

Definice 3.4. Nechť je funkce f holomorfní na $P(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ a není holomorfní v bodě z_0, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Bod z_0 potom nazýváme izolovanou singularitou funkce f.

Definice 3.5. Jsou tři typy izolovaných singularit:

1. Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ nazýváme odstranitelnou singularitou funkce f, jestliže je hlavní část Laurentovy řady funkce f v $P(z_0, R)$ rovna nule.

2. Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ nazýváme podstatnou singularitou funkce f, když má hlavní část Laurentovy řady funkce f v $P(z_0, R)$ nekonečně mnoho nenulových členů.

3. Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ nazýváme pól řádu $m \in \mathbb{N}$ (m-násobný pól), jestliže hlavní část Laurentovy řady má konečně mnoho nenulových členů tak, že $a_{-m} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro všechna $n < -m$, $n \in \mathbb{Z}$.

Věta 3.6. Funkce f má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ pól řádu k právě tehdy, když v jistém $P(z_0, R)$ platí

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}, \tag{3.3}$$

kde g je holomorfní funkce v bodě z_0 a $g(z_0) \neq 0$.

Důkaz. Nechť z_0 je pól řádu k funkce f. Funkci f můžeme v jistém $P(z_0, R)$ napsat jako Laurentovu řadu

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Úpravou dostáváme

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k} = \frac{1}{(z-z_0)^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z-z_0)^n.$$

Získali jsme tedy (3.3), kde funkce $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-z_0)^n$ je holomorfní na $\mathscr{O}_R(z_0)$. Protože $a_{-k} \neq 0$, je také $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$.

Nyní dokážeme opačnou implikaci. Nechť v $P(z_0, R)$ platí (3.3), kde g je holomorfní a nenulová funkce v bodě z_0. Potom existuje okolí $\mathscr{O}_r(z_0)$, v němž můžeme funkci g rozepsat do Laurentovy řady

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

přičemž $a_0 \neq 0$. Dosazením do (3.3) tedy dostáváme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} a_{n+k} (z-z_0)^n.$$

Odtud vidíme, že bod z_0 je k-násobným pólem funkce f. $\square$

Důsledek 3.7. Pokud je bod $z_0 \in \mathbb{C}$ pólem funkce f, pak platí

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Důkaz. Plyne z předchozí věty, protože

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} \right| = \infty.$$

$\square$

3.3 Reziduová věta

Definice 3.8. Nechť bod $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f je holomorfní na $P(z_0, R)$. Reziduem funkce f v bodě z_0 nazýváme koeficient a_{-1} v Laurentově řadě (3.1) se středem v bodě z_0. Značíme ho $\operatorname{res}_{z_0} f$.

Věta 3.9. Nechť bod $z_0 \in \mathbb{C}$ je m-násobný pól funkce f. Potom platí

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right].$$

Důkaz. V jistém $P(z_0, r)$ můžeme funkci f rozepsat do Laurentovy řady

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n. \tag{3.4}$$

Vyjádření (3.4) vynásobíme $(z-z_0)^m$ a $(m-1)$-krát zderivujeme. Dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] = \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[\sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} \right] = \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-z_0)^n \right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} n(n-1) \cdots (n-m+2)(z-z_0)^{n-m+1}.$$

Použitím limitního přechodu $z \to z_0$ dostaneme

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] = a_{-1}(m-1)(m-2)\cdots 1 = a_{-1}(m-1)! = (m-1)! \operatorname{res}_{z_0} f.$$

□

Věta 3.10 (Věta o reziduích). Nechť $S \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast. Nechť je dána množina $N = \{z_1, \ldots, z_k\} \subset S$. Dále nechť f je holomorfní funkce na $S \setminus N$. Potom pro libovolnou uzavřenou cestu $K \subseteq S$ neprocházející body množiny N platí

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z \in N} (\operatorname{res}_z f \cdot \operatorname{ind}_K z). \tag{3.5}$$

Důkaz. Funkce f je holomorfní na $\mathscr{O}_R(z_i) \setminus \{z_i\}$ pro každé $i = 1, \ldots, k$ a jisté $R > 0$. Funkci f můžeme v okolí $\mathscr{O}_R(z_i)$ vyjádřit pomocí Laurentovy řady jako

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^i (z-z_i)^n.$$

Hlavní část této Laurentovy řady, označme ji P_i, je holomorfní funkce na $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$. Funkce $f - P_i$ je holomorfní na $S \setminus N$ a také v bodě z_i, protože v okolí $\mathscr{O}_R(z_i)$ se jedná o regulární část Laurentovy řady. Definujme funkci

$$h(z) = f(z) - \sum_{i=1}^{k} P_i(z), \qquad z \in S.$$

Tato funkce je podle předchozího holomorfní na celém S. Můžeme proto použít Cauchyho větu, podle níž

$$\int_K h(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

a tedy

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{k} \int_K P_i(z)\,\mathrm{d}z. \tag{3.6}$$

Rozepsáním integrálu na pravé straně dostaneme

$$\int_K P_i(z)\,\mathrm{d}z = \int_K \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{i}(z-z_i)^{-n}\,\mathrm{d}z.$$

Protože je hlavní část Laurentovy řady stejnoměrně konvergentní na K, můžeme zaměnit pořadí sumace a integrace, což vede na

$$\int_K P_i(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_K a_{-n}^{i}(z-z_i)^{-n}\,\mathrm{d}z.$$

K funkcím $(z-z_i)^{-n}$ pro $n = 2,3,4,\ldots$ existují v $S \setminus N$ primitivní funkce. Podle Věty 1.15 jsou integrály takových funkcí přes uzavřenou cestu K rovny nule. Odtud

$$\int_K P_i(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1}^{i} \int_K \frac{1}{z-z_i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, a_{-1}^{i} \operatorname{ind}_K z_i = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z_i} f \cdot \operatorname{ind}_K z_i\right).$$

Dosazením zpět do rovnice (3.6) dostáváme

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{k} 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z_i} f \cdot \operatorname{ind}_K z_i\right) = 2\pi i \sum_{z \in N} \left(\operatorname{res}_z f \cdot \operatorname{ind}_K z\right).$$

□

Důsledek 3.11. Nechť K je kladně orientovaná Jordanova cesta v jednoduše souvislé oblasti $S \subseteq \mathbb{C}$ a $N = \{z_1, \ldots, z_k\} \subset \operatorname{Int} K$. Nechť f je holomorfní funkce na $S \setminus N$. Potom

$$\int_K f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z \in N} \operatorname{res}_z f.$$

Důkaz. Plyne z předchozí věty. Z poznámky za Definicí 1.16 víme, že pro $z \in \operatorname{Int} K$ a kladně orientovanou křivku K je $\operatorname{ind}_K z = 1$. □

Kapitola 4

Aplikace reziduové věty na výpočet integrálů

V této kapitole se budeme zabývat především výpočtem nevlastních reálných integrálů pomocí reziduové věty.

Definice 4.1. Rozšířenou množinou komplexních čísel nazýváme množinu $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ společně s následujícími operacemi:

$$
\begin{aligned}
\infty = -\infty &= |\infty|; & & & z+\infty &= \infty & &\text{pro } z \in \mathbb{C};\\
z \cdot \infty &= \infty & &\text{pro } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; & \infty \cdot \infty &= \infty; & &\\
\frac{z}{\infty} &= 0 & &\text{pro } z \in \mathbb{C}; & \frac{z}{0} &= \infty & &\text{pro } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\};\\
\frac{\infty}{z} &= \infty & &\text{pro } z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

Příklad 4.1. Nechť $Q = Q(x,y)$ je spojitá racionální funkce v proměnných $x, y \in \mathbb{R}$, pro něž $x^2 + y^2 = 1$. Dokažte, že platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos s, \sin s)\,\mathrm{d}s = 2\pi \sum_{|z|<1} \mathrm{res}_z f,$$

kde

$$f(z) = \frac{1}{z} Q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), -\frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Řešení Nechť $K = z(s)$ je jednotková kružnice se středem v počátku. Položme

$$z(s) = \mathrm{e}^{is} = \cos s + i \sin s, \qquad s \in [0, 2\pi].$$

Pro $|z| = 1$ platí

$$\cos s = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{a} \quad \sin s = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Dále si vyjádřeme diferenciál

$$\mathrm{d}z = i\,\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s, \text{ a odtud dostáváme } \mathrm{d}s = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Potom

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos s, \sin s)\, \mathrm{d}s = \int_K Q\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{z}\, \mathrm{d}z =$$
$$= \frac{1}{i}\int_K f(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{i} 2\pi i \sum_{|z|<1} \mathrm{res}_z f.$$

□

Lemma 4.2. Nechť f je spojitá funkce pro $\operatorname{Im} z \geq 0$. Dále nechť $S = S(t)$ je půlkružnice zadaná parametricky $S(t) = Re^{it}$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ a $R > 0$. Pokud existuje číslo $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro dostatečně velká R platí

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^2}, \qquad z \in S,$$

potom

$$\lim_{R\to\infty} \int_S f(z)\, \mathrm{d}z = 0.$$

Důkaz. Podle Základního odhadu pro křivkový integrál (tj. dle Věty 1.13) víme, že

$$\left| \int_S f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{M}{R^2} R\pi = \frac{M\pi}{R}.$$

Aplikujeme-li limitu $R \to \infty$, musí být hodnota integrálu nulová. □

Věta 4.3. Nechť funkce f má konečný počet izolovaných singularit v polorovině $\operatorname{Im} z > 0$. Dále nechť je holomorfní pro $\operatorname{Im} z = 0$ a spojitá pro $\operatorname{Im} z \geq 0$. Nechť pro z taková, že $\operatorname{Im} z \geq 0$, platí

$$\limsup_{z\to\infty} \left| z^2 f(z) \right| < \infty \tag{4.1}$$

a nechť existuje integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \mathrm{d}s.$$

Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \mathrm{d}s = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \mathrm{res}_z f. \tag{4.2}$$

Důkaz. Nechť je křivka K součtem následujících křivek $K_1 = K_1(s) = re^{is}$, $s \in \langle 0, \pi \rangle$ a $K_2 = K_2(s) = s$, $s \in \langle -r, r \rangle$. Pro dostatečně velké r obsahuje křivka K všechny izolované singularity ležící v polorovině $\operatorname{Im} z > 0$. Podle Důsledku 3.11 víme, že

$$\int_K f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{K_1} f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{-r}^{r} f(s)\, \mathrm{d}s = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \mathrm{res}_z f.$$

Použitím limitního přechodu $r \to \infty$ a z předchozího lemmatu máme

$$\int_{K_1} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0, \qquad \int_{-r}^{r} f(s)\,\mathrm{d}s \to \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dostáváme tedy (4.2). □

Poznámka. Předpoklady předchozí věty splňuje například racionální lomená funkce P/Q taková, že stupeň Q je větší aspoň o 2 než stupeň P a žádný pól neleží na reálné ose.

Příklad 4.2. Nechť je funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní na $\mathbb{C}$ až na konečný počet izolovaných singularit, které leží v $\operatorname{Im} z > 0$. Dále nechť existuje konstanta M taková, že pro všechna dostatečně velká $|z|$ platí

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|}.$$

Dokažte, že platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z \left(f(z)\mathrm{e}^{iz}\right). \tag{4.3}$$

Řešení Nechť integrační cesta $K = K(s)$ je obdélník, jehož vrcholy jsou $-A$, B, $B+iC$, $-A+iC$, kde $A,B,C > 0$. Pro dostatečně velké A,B a C obsahuje tento obdélník všechny izolované singularity ležící v $\operatorname{Im} z > 0$. Nechť $K = K_1+K_2+K_3+K_4$, kde $K_1 = K_1(s) = s$, $s \in \langle -A,B\rangle$, $K_2 = K_2(s) = B+is$, $s \in \langle 0,C\rangle$, $-K_3 = -K_3(s) = s+iC$, $s \in \langle -A,B\rangle$ a $-K_4 = -K_4(s) = A+is$, $s \in \langle 0,C\rangle$. Uvažujme $C = A+B$.

Podle Věty 3.10 platí

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z \left(f(z)\mathrm{e}^{iz}\right) = \int_K f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z = \int_{K_1+K_2+K_3+K_4} f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z.$$

Integrujme postupně přes všechny strany obdélníku.

Použitím limitních přechodů $A \to \infty$ a $B \to \infty$ dostáváme

$$\int_{K_1} f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z = \int_{-A}^{B} f(s)\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s \to \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s.$$

Integrací přes další stranu obdélníku dostáváme

$$\int_{K_2} f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z = \int_0^C f(B+is)i\mathrm{e}^{i(B+is)}\,\mathrm{d}s.$$

Platí

$$\left|\int_0^C f(B+is)i\mathrm{e}^{i(B+is)}\,\mathrm{d}s\right| \leq \int_0^C |f(B+is)|\cdot\left|i\mathrm{e}^{iB}\right|\cdot\left|\mathrm{e}^{-s}\right|\,\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq \max_{s\in\langle 0,C\rangle} \frac{M}{|B+is|}\int_0^C \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \leq \frac{M}{B}\left(1-\mathrm{e}^{-C}\right).$$

Použitím limitního přechodu $B \to \infty$ vidíme, že hodnota integrálu přes cestu K_2 jde do nuly. Stejně dostaneme hodnotu integrálu přes cestu K_4, která také jde do nuly. Dále

$$\int_{K_3} f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z = -\int_{-A}^{B} f(s+iC)\mathrm{e}^{i(s+iC)}\,\mathrm{d}s.$$

Platí

$$\left| -\int_{-A}^{B} f(s+iC)\mathrm{e}^{i(s+iC)}\,\mathrm{d}s \right| \le \int_{-A}^{B} |f(s+iC)| \cdot \left|-\mathrm{e}^{-C}\right| \cdot \left|\mathrm{e}^{is}\right|\,\mathrm{d}s \le$$

$$\le \max_{s\in\langle -A,B\rangle} \frac{M}{|s+iC|}\mathrm{e}^{-C}(A+B) \le \mathrm{e}^{-C}\frac{M}{C}(A+B) = \mathrm{e}^{-C}M.$$

Limitním přechodem $C \to \infty$ dostáváme hodnotu integrálu přes cestu K_3 rovnu nule. Celkem tedy dostáváme (4.3). □

Příklad 4.3. Nechť je funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní na $\mathbb{C}$ až na konečný počet izolovaných singularit, přičemž na reálné ose připouštíme pouze póly řádu 1. Nechť funkce f nabývá na reálné ose jen reálných hodnot a nechť platí (4.1) Jestliže integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s$$

existuje, dokažte, že platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z\left(f(z)\mathrm{e}^{iz}\right) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} z=0} \operatorname{res}_z\left(f(z)\mathrm{e}^{iz}\right). \tag{4.4}$$

Řešení Nechť $x_1 < x_2 < \cdots < x_l$ jsou singulární body funkce f ležící na reálné ose. Nechť pro integrační cestu K platí $K = K_1 + K_2$, kde $K_1 = K_1(s) = R\mathrm{e}^{is}$, $s \in \langle 0,\pi\rangle$ a křivka K_2 je součtem půlkružnic $-k_i(s) = x_i + r\mathrm{e}^{is}$, $s \in \langle 0,\pi\rangle$, $i = 1,\dots,l$ a úseček mezi nimi $u_1(s) = s$, $s \in \langle -R,\ x_1 - r\rangle$, $u_i(s) = s$, $s \in \langle x_{i-1}+r, x_i - r\rangle$, $i = 2,\dots,l$ a $u_{l+1}(s) = s$, $s \in \langle x_l + r, R\rangle$. Pro dostatečně velké R a dostatečně malé r obsahuje křivka K všechny izolované singularity ležící v $\operatorname{Im} z > 0$. Podle Věty 3.10 tedy víme, že platí

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z\left(f(z)\mathrm{e}^{iz}\right) = \int_K f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z = \int_{K_1} f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z + \int_{K_2} f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z.$$

Z Lemmatu 4.2 vidíme, že pro $R \to \infty$ je hodnota prvního integrálu rovna nule.

V každém $P(x_i, r)$, $i = 1,\dots,l$ lze funkci $f(z)\mathrm{e}^{iz}$ vyjádřit jako

$$f(z)\mathrm{e}^{iz} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-x_i)^n = \frac{a_{-1}}{z-x_i} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x_i)^n = \frac{\operatorname{res}_{x_i}\left(f(z)\mathrm{e}^{iz}\right)}{z-x_i} + g_i(z),$$

kde g_i je holomorfní funkce v $P(x_i,r)$ pro dostatečně malé r. Potom platí

$$\int_{k_i} f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z = \int_{k_i} \frac{\mathrm{res}_{x_i}\left(f(z)\mathrm{e}^{iz}\right)}{z-x_i}\,\mathrm{d}z + \int_{k_i} g_i(z)\,\mathrm{d}z =$$
$$= -\int_0^\pi \frac{\mathrm{res}_{x_i}\left(f(z)\mathrm{e}^{iz}\right)}{x_i+r\mathrm{e}^{is}-x_i}\,ir\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s - \int_0^\pi g_i\left(x_i+r\mathrm{e}^{is}\right)ir\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s =$$
$$= -i\pi\,\mathrm{res}_{x_i}\left(f(z)\mathrm{e}^{iz}\right) - ir\int_0^\pi g_i\left(x_i+r\mathrm{e}^{is}\right)\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s.$$

Limitním přechodem $r \to 0^+$ získáme

$$\int_{k_i} f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z \to -i\pi\,\mathrm{res}_{x_i}\left(f(z)\mathrm{e}^{iz}\right).$$

Zbývá nám tedy zjistit hodnotu integrálu, když integrujeme přes úsečky $u_i(s)$, $i = 1,\dots,l+1$. Platí

$$\sum_{i=1}^{l+1}\int_{u_i} f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{x_1-r} f(s)\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s + \sum_{i=2}^{l}\int_{x_{i-1}+r}^{x_i-r} f(s)\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s + \int_{x_l+r}^{R} f(s)\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s.$$

Pro $r \to 0^+$ a $R \to \infty$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^{l+1}\int_{u_i} f(z)\mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{is}\,\mathrm{d}s.$$

Dokázali jsme tedy, že platí (4.4). □

Poznámka. Analogicky s Příklady 4.2 a 4.3 bychom dokázali následující tvrzení.

1. Nechť $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je holomorfní funkce na $\mathbb{C}$ až na konečný počet izolovaných singularit ležících v $\mathrm{Im}\,z > 0$. A nechť existuje taková konstanta M, že pro všechna dostatečně velká $|z|$ platí
$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|}.$$
Potom
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{iks}\,\mathrm{d}s = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,z>0} \mathrm{res}_z\left(f(z)\mathrm{e}^{ikz}\right),$$
pro $k > 0$.

2. Nechť $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je holomorfní funkce na $\mathbb{C}$ až na konečný počet izolovaných singularit. Na reálné ose připouštíme pouze póly řádu 1. Dále nechť nabývá funkce f na reálné ose pouze reálných hodnot a platí (4.1). Jestliže integrál
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{iks}\,\mathrm{d}s$$

existuje, potom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{e}^{iks}\,\mathrm{d}s = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z \left(f(z)\mathrm{e}^{ikz}\right) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} z=0} \left(f(z)\mathrm{e}^{ikz}\right) \tag{4.5}$$

pro $k > 0$.

Příklad 4.4. Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde $n > 0$ a $k > 0$.

Řešení Využijeme tvrzení z předchozí poznámky, protože

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z \left(f(z)\mathrm{e}^{ikz}\right) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} z=0} \operatorname{res}_z \left(f(z)\mathrm{e}^{ikz}\right)\right).$$

Nejprve ale musíme ověřit, že jsou splněny předpoklady.

Izolované singularity funkce $f(z) = (n^2+z^2)^{-1}$ jsou body $z = \pm in$. Tyto body jsou póly řádu 1. Tedy funkce f je holomorfní na $\mathbb{C}$ až na konečný počet izolovaných singularit a na reálné ose neleží žádná z nich. Je zřejmé, že funkce f nabývá na reálné ose jen reálných hodnot. Podmínka (4.1) je také splněna. Jsou tedy splněny všechny předpoklady daného tvrzení a můžeme použít vzorec (4.5).

Nyní chceme znát rezidua v izolovaných singularitách, pro něž platí $\operatorname{Im} z > 0$ nebo $\operatorname{Im} z = 0$. Počítáme tedy reziduum v bodě $z = in$. K tomu použijeme vzorec z Věty 3.9 se ziskem

$$\operatorname{res}_{in}\left(\frac{1}{n^2+z^2}\mathrm{e}^{ikz}\right) = \lim_{z\to in}(z-in)\frac{\mathrm{e}^{ikz}}{n^2+z^2} = \lim_{z\to in}\frac{\mathrm{e}^{ikz}}{z+in} = \frac{\mathrm{e}^{ikin}}{2in} = \frac{\mathrm{e}^{-kn}}{2in}.$$

Celkem tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left(2\pi i\frac{\mathrm{e}^{-kn}}{2in}\right) = \operatorname{Re}\left(\pi\frac{\mathrm{e}^{-kn}}{n}\right) = \frac{\pi\mathrm{e}^{-kn}}{n}.$$

□

Seznam použité literatury

[1] AHLFORS, Lars Valerian. *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. New York: McGraw-Hill, 1979. ISBN 00-700-0657-1.

[2] BOUCHALA, Jiří. *Funkce komplexní proměnné* [online]. Plzeň: Západočeská univerzita, 2012 [cit. 2015-04-21]. Dostupné z URL: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/funkce_komplexni_promenne_interaktivne.pdf

[3] KALAS, Josef. *Analýza v komplexním oboru*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2006. ISBN 80-210-4045-9.

[4] KOLÁŘOVÁ, Edita. *Matematika 2 - Sbírka úloh* [online]. Brno: Vysoké učení technické [cit. 2015-05-10]. Dostupné z URL: http://www.umat.feec.vutbr.cz/ kolara/bmadvanovaverze.pdf

[5] LANG, Serge. *Complex analysis*. New York: Springer, 1999. ISBN 03-879-8592-1.

[6] VESELÝ, Jiří. *Komplexní analýza*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2000. ISBN 80-246-0202-4.