MASARYKOVA UNIVERZITA • PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

**Diplomová práce**

# MATEMATICKÉ MODELY V TEORII PORTFOLIA

**Zuzana Špiritová**

Brno, květen 2006

Poděkování

Chtěla bych poděkovat RNDr. Martinu Kolářovi, Ph.D. za vedení diplomové práce, čas strávený jejím čtením a za dobré rady.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci psala sama, pouze za pomoci RNDr. Martina Koláře, Ph.D. a uvedené literatury.

V Brně, dne 12. května 2006

Zuzana Špiritová

# Obsah

# Úvod

Cílem této diplomové práce je představit základní přístupy k teorii portfolia a zaměřit se především na matematické modely, na kterých tato ekonomická teorie stojí.

Teorie portfolia se zabývá zkoumáním kapitálových trhů, aktiv, která se na nich obchodují, a snaží se nalézt co nejlepší popis chování cen aktiv. Na základě těchto znalosti potom doporučuje, jakým způsobem by si měl investor vybírat pro něj co nejoptimálnější portfolium aktiv. Matematika a zejména statistika v této oblasti našla uplatnění velice brzy, v novějších pracích se pro potřeby teorie portfolia s úspěchem využívá také stochastického kalkulu.

Práce se dělí do tří částí. V první kapitole je představen Markowitzův model, který je základním stavebním kamenem všech pozdějších prací v teorii portfolia. Další částí je Sharpeho Capital Asset Pricing Model, který na Markowitze navazuje, ale rozpracovává zejména teorii rovnováhy aktiv i celých kapitálových trhů. Poslední kapitola je předstupněm pro dynamickou teorii portfolia. Ta využívá stochastického kalkulu a Brownova pohybu, které jsou ve třetí kapitole podrobněji popsány.

Příloha pak obsahuje programy pro Matlab, které jsem napsala a použila pro vytváření obrázků Brownova pohybu a generování množin přípustných portfolií.

# Kapitola 1

# Markowitzův model

Tento model pochází z roku 1952 a jeho autotem je Harry Markowitz. Článek, který tehdy publikoval v časopise The Journal of Finance, obsahoval nový pohled na výběr optimálního portfolia na kapitálovém trhu. Do té doby se vesměs předpokládalo, že investor vybírá portfolium tak, aby maximalizoval jeho výnos. Markowitz upozornil, že je v tomto případě třeba počítat i s rizikem změny výnosu portfolia. Argumentoval, že dosavadní přístupo nezahrnuje a nevysvětluje neoddiskutovatelná pozitiva diverzifikace, tedy rozdělení prostředků na nákup aktiv z nejrůznějších nezávislých oborů.

Markowitz své úvahy pojal jako základ jak k širší teorii o chování investorů, tak jako praktický návod, který by měl vést k efektivnějšímu rozhodování investorů. Vycházel z předpokladu, že investor zná očekávaný výnos portfolia i riziko změny tohoto výnosu a na základě těchto těchto informací se pak rozhoduje. Ukázal, že nezávisle na investorových konkrétních preferencích výnosu a rizika jsou v těchto ohledech některá portfolia vždy lepší než jiná. Tato portfolia shnul do tzv. efektivní množiny a předpokládá, že investor bude vybírat pouze z ní.

Markowitz si byl vědom, že nevysvětlil velmi podstatnou záležitost, a to, jak si investor vytvoří očekávání o výnosu a riziku portfolia. Očekával, že řešení bude ležet někde mezi matematickými odhady na základě teorie pravděpodobnosti a statistiky a expertními odhady odborníků.

Z Markowitzovy práce pak čerpalo množství následovníků, především Markowitz sám svou teorii dál prohluboval. Jeho myšlenky se staly základem pro další teorie, zejména pak pro Sharpeho Capital Asset Pricing Model.

### Předpoklady Markovitzova modelu

Aktiva
- předpokádáme, že uvažovaná aktiva jsou libovolně dělitelná

Investor
- je nenasycený - preferuje vyšší výnos před nižším výnosem
- je rizikově averzní - preferuje nižší riziko před vyšším rizikem
- je schopen porovnat všechna portfolia na trhu podle očekávaného výnosu a rizika změny výnosu a rozhodnout se, které portfolium je pro něj nejlepší

Portfolium
- vzniká v jednom časovém okamžiku, trvá předem stanovenou pevnou dobu a po jejím ukončení se v jediném časovém okamžiku realizuje

## 1.1 Charakteristiky aktiva a portfolia

Základy teorie portfolia jsou postaveny na teorii pravděpodobnosti. Ta poskytuje zásadní matematický aparát, pomocí kterého jsou popisovány jednotlivé důležité charakteristiky aktiv, jejich vztahy a jejich chování. Výnos aktiva za určitou dobu je chápán jako náhodná veličina.

**Definice 1.** Charakteristiky aktiva

$Z_i$ ... náhodná veličina popisující výnos $i$-tého aktiva za určitou dobu, předpokládáme, že má konečnou střední hodnotu a konečný rozptyl

$R_i$ ... $R_i = E(Z_i)$ je střední hodnota náhodné veličiny výnos $i$-tého aktiva, nazývá se očekávaný výnos aktiva za určitou dobu

$\sigma_i^2$ ... $\sigma_i^2 = D(Z_i)$ je rozptyl náhodné veličiny výnos $i$-tého aktiva

$\sigma_i$ ... $\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$ je směrodatná odchylka náhodné veličiny výnos $i$-tého aktiva, nazývá se riziko změny výnosu $i$-tého aktiva za určitou dobu

$\sigma_{ij}$ ... $\sigma_{ij} = C(Z_i, Z_j)$ je kovariance náhodných veličin výnos $i$-tého aktiva a výnos $j$-tého aktiva

$\rho_{ij}$ ... $\rho_{ij} = \frac{C(Z_i,Z_j)}{\sqrt{D(Z_i)D(Z_j)}}$ je korelační koeficient náhodných veličin výnos $i$-tého aktiva a výnos $j$-tého aktiva

V tomto případě tedy $R_i$ popisuje očekávaný výnos cenného papíru a $\sigma_i$ riziko, které podstupuje investor při nákupu tohoto cenného papíru, a jsou tedy těmi zásadními kategoriemi, na kterých staví Markowitzův model.

"Určitá doba" je pro naše účely pevně zvolená doba trvání portfolia od jeho vzniku do okamžiku realizace.

**Definice 2.** Charakteristiky portfolia

Portfolium se skládá z $N$ aktiv, kde $N \in \mathbb{N}$, a výnos z portfolia vnímáme tedy jako náhodný vektor. Jeho jednotlivé složky jsou náhodné veličiny popisující výnos z aktiv, které tvoří portfolium.

$N$ ... počet aktiv v portfoliu $P$

$X_i$ ... váha, kterou je $i$-té aktivum zastoupeno v portfoliu. Platí, že

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$Z_P$ ... $Z_P = \sum_{i=1}^{N} X_i Z_i$ je náhodný vektor popisující výnos portfolia za určitou dobu

$R_P$ ... $R_P = E(Z_P)$ je střední hodnota náhodného vektoru výnos portfolia, nazývá se očekávaný výnos portfolia za určitou dobu

$\sigma_P^2$ ... $\sigma_P^2 = D(Z_P)$ je rozptyl náhodného vektoru výnos portfolia

$\sigma_P$ ... $\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$ je směrodatná odchylka náhodného vektoru výnos portfolia, nazývá se riziko změny výnosu portfolia za určitou dobu

O rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin $Z_i$ a náhodného vektoru $Z_P$ se toho bohužel nedá mnoho zjistit. Neexistují metody, které by tato rozdělení spolehlivě určily. Ovšem pro potřeby teorie portfolia není znalost těchto rozdělení nezbytná, důležitá je pouze hodnota výše uvedených charakteristik. Upřesněme si zde, jak bude vypadat očekávaný výnos a riziko změny výnosu portfolia.

$$R_P = E(Z_P) = E(\sum_{i=1}^{N} X_i Z_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i E(Z_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i R_i$$

$$\sigma_P = \sqrt{D(Z_P)} = \sqrt{D(\sum_{i=1}^{N} X_i Z_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j C(Z_i, Z_j)}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j}$$

Pro praktické výpočty používá teorie portfolia kvůli neznalosti marginálních a simultánních rozdělení pravděpodobnosti výběrové ekvivalenty charakteristik náhodných veličin. Tento přístup se nazývá historická metoda.

## 1.2 Historická metoda

S problémem, jak co nejpřesněji určit očekávaný výnos a riziko změny výnosu portfolia se teorie portfolia potýká již dlouho. Problém je, že na tyto charakteristiky působí velké množství vlivů, které je těžké určit a ještě těžší kvantifikovat. V praxi se většinou využívá nějaká kombinace expertních odhadů, které poskytují lidé, kteří se pohybují v prostředí finančních trhů a jsou schopni zhodnocovat nejrůznější náznaky a výjimečné informace, současně s odhady získanými historickou metodou z minulého vývoje cen aktiv.

Historická metoda má také jednu nezanedbatelnou výhodu. S její pomocí je možné odhadnout kovariance mezi náhodnými veličinami, které popisují výnos aktiv. Tento odhad sice není příliš přesný, ale je velmi snadno proveditelný.

Definujme nyní další charakteristiky portfolia pro potřeby historické metody.

**Definice 3.** Tržní cena

$TC_{it}$ ... náhodná veličina, která popisuje velikost tržní ceny $i$-tého aktiva v čase $t$

$W_{itk}$ ... náhodná veličina, která popisuje relativní přírustek tržní ceny $i$-tého aktiva v čase $t$ vůči tržní ceně aktiva v čase $t-k$, kde $k = 1, 2, 3, ...$

$$W_{itk} = \frac{TC_{it} - TC_{it-k}}{TC_{it-k}}$$

$T$ ... doba trvání portfolia v časových okamžicích

Pomocí takto definovaných náhodných veličin se počítají výběrové charakteristiky aktiv a portfolia pro dobu trvání portfolia.

$\overline{W_{ik}}$ ... výběrový průměr náhodné veličiny $Z_i$, vyjadřuje očekávaný výnos $i$-tého aktiva za dobu trvání portfolia

$$\overline{W_{ik}} = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} W_{itk}$$

Koeficient $k$ se volí pevně, často rovno 1, proto jej jako index můžeme kvůli přehlednosti v dalších charakteristikách vypustit.

$S_i^2$ ... výběrový rozptyl náhodné veličiny $Z_i$

$S_i$ ... výběrová směrodatná odchylka náhodné veličiny $Z_i$, vyjadřuje riziko změny výnosu $i$-tého aktiva za dobu trvání portfolia

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{T-k-1} \sum_{t=1}^{T-k} (W_{it} - \overline{W_i})^2}$$

$S_{ij}$ ... výběrová kovariance náhodných veličin $Z_i$ a $Z_j$ vyjadřuje vzájemnou závislost výnosů $i$-tého a $j$-tého aktiva

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{1}{T-k-1} \sum_{t=1}^{T-k} (W_{it} - \overline{W_i})(W_{jt} - \overline{W_j})}$$

$\overline{W_P}$ ... výběrový průměr náhodného vektoru $Z_P$, vyjadřuje očekávaný výnos za dobu trvání portfolia

$$\overline{W_P} = \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{W_i}$$

$S_P^2$ ... výběrový rozptyl náhodného vektoru $Z_P$

$S_P$ ... výběrová směrodatná odchylka náhodného vektoru $Z_P$, vyjadřuje riziko změny výnosu za dobu trvání portfolia

$$S_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j S_{ij}}$$

## 1.3 Přípustná množina

**Definice 4.** Předpokládejme, že portfolium $P$ se skládá z $N$ aktiv s relativními podíly v portfoliu $X_1, X_2, ..., X_N$. Množinou přípustných portfolií nazýváme množinu všech možných portfolií, která mohou vzniknout z daných $N$ aktiv změnou jejich relativních podílů. Tato množina se často nazývá zkráceně přípustná množina.

Relativní podíly musí přirozeně splňovat podmínku $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$. Dalším běžným omezením je $X_i \geq 0$. Situace, kdy tato podmínka neplatí, se nazývá sell short.

### 1.3.1 Sell short

Pokud je sell short povolen, znamená to, že investor drží v portfoliu záporný podíl některého aktiva. Jinými slovy to znamená, že investor si toto aktivum vypůjčil, pak jej tzv. nakrátko prodal a za prostředky takto získané přidal do svého portfolia větší podíl nějakého jiného aktiva. V okamžiku realizace portfolia pak investor nakrátko prodané aktivum nakoupí zpět a vrátí jej majiteli.

Z čistě teoretického hlediska je tento postup často žádoucí, protože pouze jeho prostřednictvím lze některá portfolia skutečně optimalizovat. Zvyšuje se tím efektivnost alokace zdrojů na finančních trzích.

Ovšem v praxi sell short naráží na nemalé obtíže. S půjčováním aktiv se pojí transakční náklady, subjekty na finančním trhu většinou vyžadují nějakou záruku. Málokdo je proto ochoten a schopen vytvořit portfolium s vyšším záporným podílem některého z aktiv.

Existují také další omezení na relativní velikost podílů aktiv v portfoliu. Určité fondy, například důchodové, mají ze zákona nařízenou maximální možnou velikost relativního podílu jednoho aktiva, přičemž sell short bývá zakázán úplně.

### Bezrizikové aktivum

**Definice 5.** Aktivum se nazývá bezrizikové, jestliže riziko změny výnosu aktiva se rovná nule. Očekávaný výnos je tedy roven skutečnému výnosu a nazývá se bezrizikový výnos a označuje se $R_f$.

**Bezriziková půjčka** - část portfolia je tvořena bezrizikovým aktivem. Například vkladem v bance nebo státními pokladničními poukázkami.

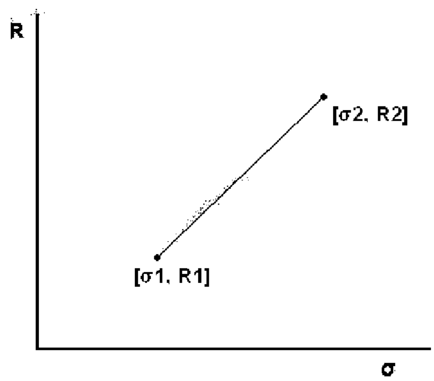
**Bezriziková výpůjčka** - část portfolia tvoří aktiva koupená za vypůjčené bezrizikové aktivum, za které se platí poplatky. Například aktiva zakoupená z bezhotovostního úvěru v bance.

### 1.3.2 Tvar přípustné množiny pro dvousložková portfolia

Tvar přípustné množiny je ovlivňován zejména korelací mezi jednotlivými aktivy. Je zřejmé, že korelace libovolného aktiva s bezrizikovým aktivem je rovna nule.
Podrobněji zde rozebereme 4 různá dvousložková portfolia, která se budou lišit korelací svých složek, přičemž ve všech případech je sell short zakázán. Platí tedy $X_1 + X_2 = 1$, neboli $X_2 = 1 - X_1$. Předpokládáme, že $R_1 < R_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$. Riziko změny výnosu je vždy nezáporné.

**1. Portfolium $P_1$ :** $\rho_{12} = 1$ tzn. aktiva jsou absolutně pozitivně korelována

$$
\begin{aligned}
R_{P_1} &= X_1 R_1 + (1 - X_1) R_2 \\
\sigma_{P_1} &= \sqrt{X_1^2 \sigma_1^2 + (1 - X_1)^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_{12} X_1 (1 - X_1)} \\
&= \sqrt{X_1^2 \sigma_1^2 + (1 - X_1)^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 X_1 (1 - X_1)} \\
&= \sqrt{(X_1 \sigma_1 + (1 - X_1)\sigma_2)^2} \\
&= X_1 \sigma_1 + (1 - X_1)\sigma_2
\end{aligned}
$$

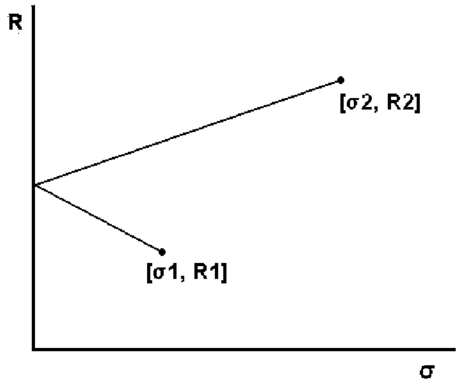



Obrázek 1.1: Přípustná množina absolutně pozitivně korelovaných aktiv

*Poznámka.* Minimálního rizika změny výnosu portfolia $P_1$ lze dosáhnout volbou $X_1 = 1$, pak je portfolium $P_1$ tvořeno pouze jedním aktivem.

**2. Portfolium** $P_2$ **:** $\rho_{12} = -1$ tzn. aktiva jsou absolutně negativně korelována

$$
\begin{aligned}
R_{P_2} &= X_1 R_1 + (1 - X_1) R_2 \\
\sigma_{P_2} &= \sqrt{X_1^2 \sigma_1^2 + (1 - X_1)^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_{12} X_1 (1 - X_1)} \\
&= \sqrt{X_1^2 \sigma_1^2 + (1 - X_1)^2 \sigma_2^2 + 2(-1)\sigma_1 \sigma_2 X_1 (1 - X_1)} \\
&= \sqrt{(X_1 \sigma_1 - (1 - X_1)\sigma_2)^2} \\
&= X_1 \sigma_1 - (1 - X_1)\sigma_2
\end{aligned}
$$



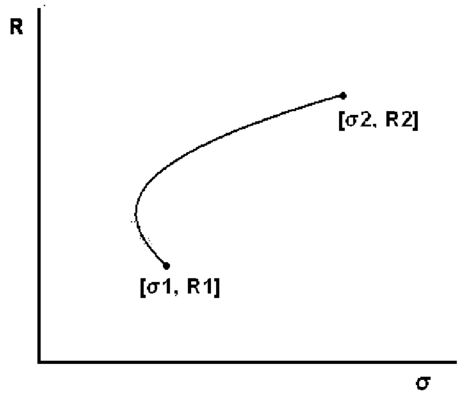

Obrázek 1.2: Přípustná množina absolutně negativně korelovaných aktiv

*Poznámka.* Minimálního rizika změny výnosu portfolia $P_2$ lze dosáhnout volbou $X_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$. Při této volbě je riziko změny výnosu portfolia $P_2$ nulové, tedy portfolium $P_2$ se chová jako bezrizikové aktivum.

**Tvrzení 1.3.1.** *Nulového rizika výnosu portfolia je možné dosáhnout pouze tehdy, pokud jsou jeho rizikové složky absolutně negativně korelovány.*

**3. Portfolium** $P_3$ **:** $\rho_{12} = 0$ tzn. aktiva jsou nekorelována

$$\begin{aligned} R_{P_3} &= X_1 R_1 + (1 - X_1) R_2 \\ \sigma_{P_3} &= \sqrt{X_1^2 \sigma_1^2 + (1 - X_1)^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_{12} X_1 (1 - X_1)} \\ &= \sqrt{X_1^2 \sigma_1^2 + (1 - X_1)^2 \sigma_2^2 + 2 \cdot 0 \cdot \sigma_1 \sigma_2 X_1 (1 - X_1)} \\ &= \sqrt{X_1 \sigma_1 - (1 - X_1) \sigma_2} \end{aligned}$$



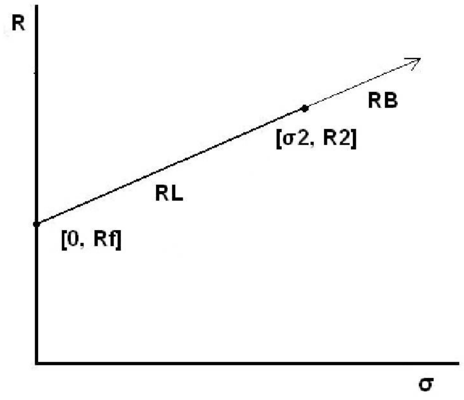

Obrázek 1.3: Přípustná množina nekorelovaných aktiv

*Poznámka.* Minimálního rizika změny výnosu portfolia $P_3$ lze dosáhnout volbou $X_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

**4. Portfolium** $P_4$ **:** kombinace bezrizikového a rizikového aktiva (Uvědomme si, že kovariance očekávaných výnosů bezrizikového aktiva a libovolného rizikového aktiva je rovna nule.)

$$\begin{aligned} R_{P_4} &= X_1 R_f + (1 - X_1) R_2 \\ \sigma_{P_4} &= \sqrt{X_1^2 \sigma_1^2 + (1 - X_1)^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_{12} X_1 (1 - X_1)} \\ &= \sqrt{X_1^2 \cdot 0^2 + (1 - X_1)^2 \sigma_2^2 + 2 \cdot 0 \cdot X_1 (1 - X_1)} \\ &= (1 - X_1) \sigma_2 \end{aligned}$$

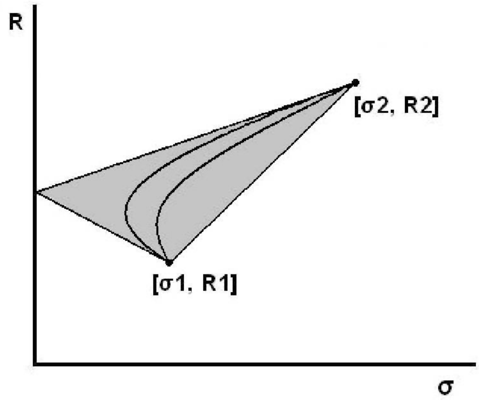
*Poznámka.* Minimálního rizika změny výnosu portfolia $P_4$ lze přirozeně dosáhnout volbou $X_1 = 1$, tj. investovat pouze do bezrizikového aktiva.




Obrázek 1.4: Přípustná množina bezrizikového a rizikového aktiva

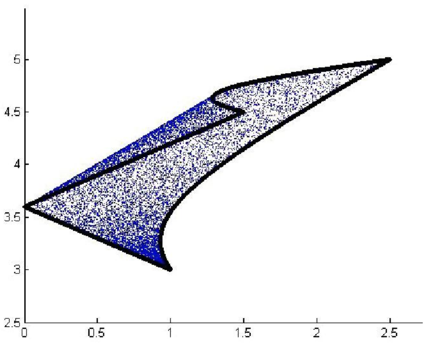
*Poznámka.* Úsek $RL$ na obrázku 1.4 odpovídá bezrizikové půjčce, úsek $RB$ bezrizikové výpůjčce.

Podle dosavadních výsledků není těžké představit si, jak budou vypadat všechny přípustné množiny dvousložkových portfolií pro libovolné korelace aktiv. Vytvoří trojúhelník, jehož strany jsou přípustné množiny absolutně pozitivně a negativně korelovaných aktiv a uvnitř něhož jsou křivky ostatních přípustných množin. Tento trojúhelník se jedním vrcholem dotýká osy očekávaného výnosu v bodě odpovídajícímu bezrizikovému aktivu.

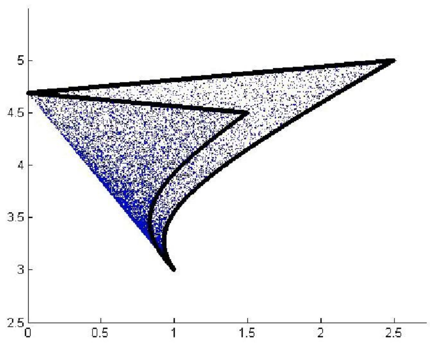



Obrázek 1.5: Trojúhelník všech přípustných množin dvousložkových portfolií

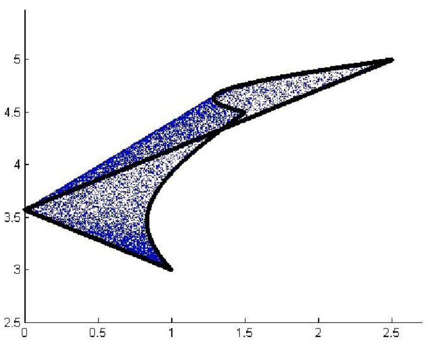
Na následujících obrázcích je vidět, jak vypadají přípustné množiny třísložkových portfolií. Pro tyto ukázky jsme zvolili tři aktiva $A, B, C$, přičemž jejich očekávané výnosy jsou $R_A = 3$, $R_B = 4,5$, $R_C = 5$ a rizika změny výnosu jsou $\sigma_A = 1$, $\sigma_B = 1,5$, $\sigma_C = 2,5$. Jejich vzájemné kovariance pak volíme pro každý obrázek jiné.



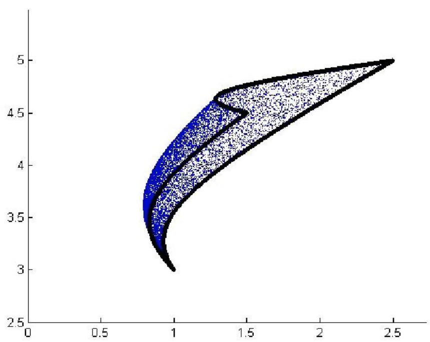

Obrázek 1.6: C(A,B)= -1, C(A,C)= 0, C(B,C)= 0



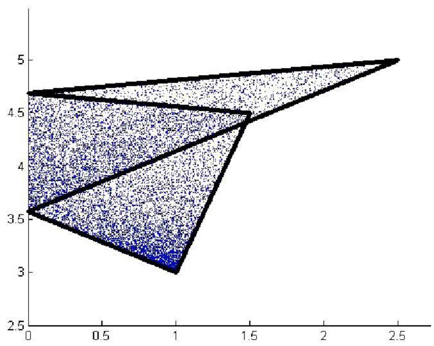

Obrázek 1.7: C(A,B)= 0, C(A,C)= 0, C(B,C)= -1




Obrázek 1.8: C(A,B)= 0, C(A,C)= -1, C(B,C)= 0




Obrázek 1.9: C(A,B)= 0, C(A,C)= 0, C(B,C)= 0




Obrázek 1.10: C(A,B)= 1, C(A,C)= -1, C(B,C)= -1

## 1.4 Efektivní množina

Definování efektivní množiny a zdůraznění její klíčové role při výběru portfolia je základním kamenem Markowitzova modelu. Další kroky, které obsahují nalezení efektivní množiny a výběr portfolia s její pomocí, rozpracoval Markowitz sám a na něj později navázali další.

### 1.4.1 Princip dominance

Jak jsme již uvedli výše, předpokládáme, každý investor při svém jednání vykazuje nenasycenost a odpor k riziku (je rizikově averzní). Proto bude z množiny přípustných portfolií vybírat pouze ta portfolia, která vyhovují těmto dvěma předpokladům. Proto je nyní vhodné definovat dominanci aktiv.

**Definice 6.** Mějme aktiva $A$ a $B$. Řekneme, že aktivum $A$ dominuje aktivum $B$ právě tehdy, když platí $R_A \geq R_B$, $\sigma_A \leq \sigma_B$ a současně nenastává rovnost. Aktivum $B$ je dominováno aktivem $A$.

**Definice 7.** Je dána množina přípustných portfolií $\mathcal{P}$. Jestliže nějaké aktivum $A \in \mathcal{P}$ není dominováno jiným aktivem $B \in \mathcal{P}$, řekneme, že aktivum $A$ je nedominováno v množině aktiv $\mathcal{P}$.

### 1.4.2 Vymezení efektivní množiny

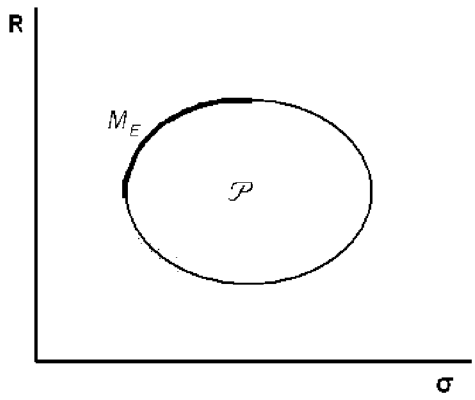
**Definice 8.** Efektivní množina aktiv $M_E$ je množina $M_E \in \mathcal{P}$ všech nedominovaných aktiv v $\mathcal{P}$.

Jinak řečeno: Efektivní množina je množina portfolií, pro která platí, že

1. neexistuje portfolium v množině přípustných portfolií $\mathcal{P}$, které by při stejné nebo vyšší úrovni očekávaného výnosu mělo menší riziko změny výnosu
2. neexistuje portfolium v množině přípustných portfolií $\mathcal{P}$, které by při stejném nebo nižším riziku změny výnosu mělo vyšší očekávaný výnos

*Poznámka.* Pojmy aktivum a portfolium je ve většině kontextů možno zaměňovat. Proto se také často používá označení efektivní množina portfolií $M_E$. Stejný význam má také pojem množina efektivních portfolií $M_E$.

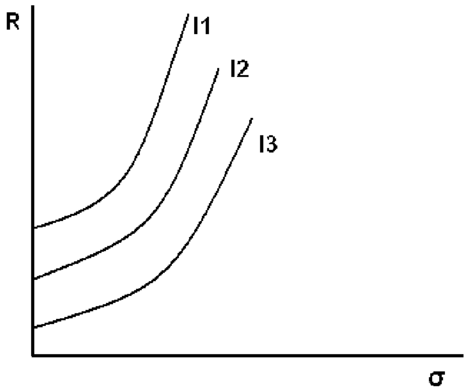
*Poznámka.* Z definice dominance a efektivní množiny je vidět, že každý nenasycený a rizikově averzní investor si své portfolium vybírá právě z množiny efektivních portfolií.



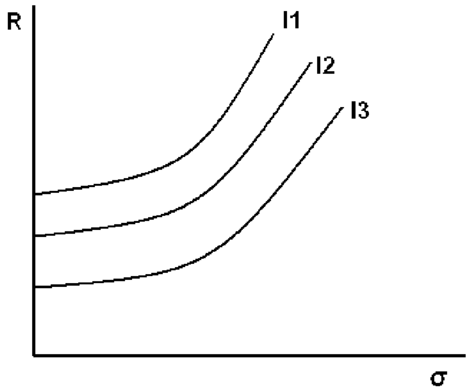

Obrázek 1.11: Efektivní množina

*Poznámka.* Z definice efektivní množiny aktiv lze také odvodit, že obsahuje nanejvýš jedno bezrizikové aktivum. Různá bezriziková aktiva mají stejný nulový rozptyl a různý očekávaný výnos. Potom bezrizikové aktivum s nejvyšším výnosem dominuje všechna ostatní bezriziková aktiva. Proto může efektivní množina obsahovat pouze jediné bezrizikové aktivum, to s nejvyšším výnosem.

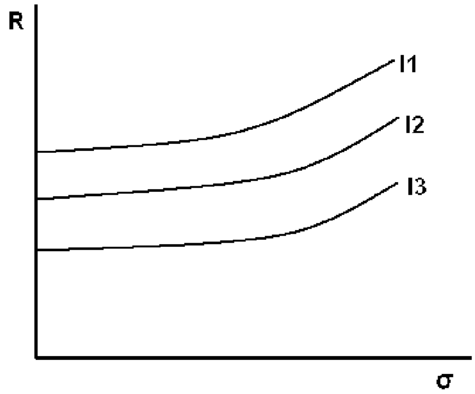
To, které portfolium si investor z efektivní množiny vybere, záleží na jeho konkrétním odporu k riziku. Každému investorovi přísluší systém indiferenčních křivek, jejichž tvar je dán silou investorova odporu k riziku. Body jedné indiferenční křivky představují kombinace očekávaného výnosu a rizika změny výnosu portfolia, které jsou investorem vnímány jako "stejně dobré".




Obrázek 1.12: Investor s vysokým odporem k riziku

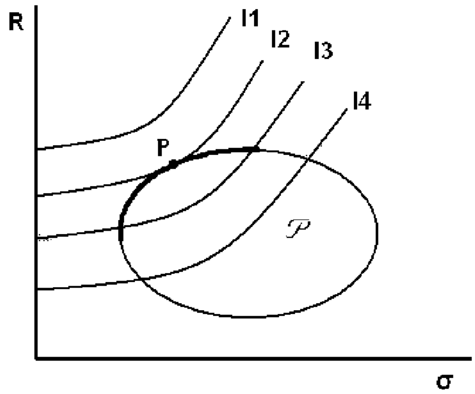



Obrázek 1.13: Investor se středním odporem k riziku




Obrázek 1.14: Investor s nízkým odporem k riziku

Pokud zná investor efektivní množinu portfolií a svůj odpor k riziku (tedy své indiferenční křivky), vybírá pak to portfolium z efektivní množiny, které leží na "nejvyšší" indiferenční křivce.




Obrázek 1.15: Nalezení optimálního portfolia P

### 1.4.3 Hledání množiny efektivních portfolií

Při hledání efektivní množiny vycházíme ze slovní definice efektivní množiny, která má dvě části. Získáme z nich tyto dvě podmínky:

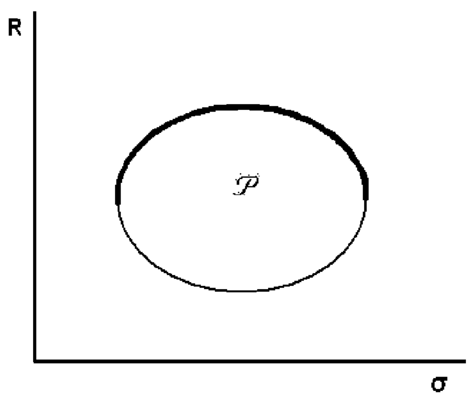
1. efektivní portfolium minimalizuje riziko při stejné nebo vyšší úrovni očekávaného výnosu

$$\sigma_P \to min \quad \text{za podmínek} \quad R_P \geq b,\ b \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

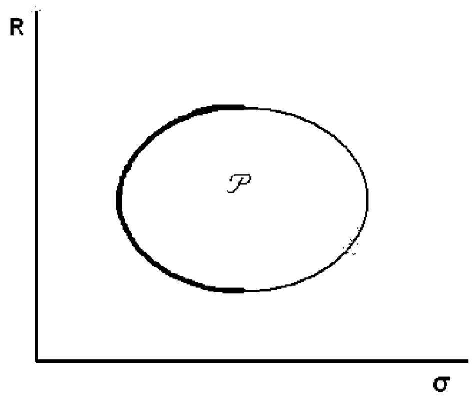
2. efektivní portfolium maximalizuje očekávaný výnos při stejném nebo nižším riziku změny výnosu

$$R_P \to max \quad \text{za podmínek} \quad \sigma_P \leq a,\ a > 0,\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

Znázorněme si tyto dvě množiny:

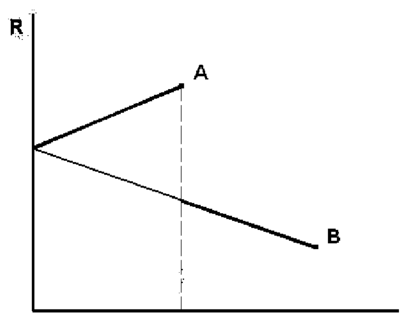



Obrázek 1.16: Maximalizace očekávaného výnosu




Obrázek 1.17: Minimalizace rizika změny výnosu

V zásadě lze najít efektivní množinu jejich průnikem. Ovšem v některých speciálních tvarech přípustné množiny to nestačí. Aby byl tento průnik skutečně efektivní množinou, je třeba z něj ještě vyloučit všechna portfolia, která mají riziko změny výnosu větší, než je riziko portfolia s nejvyšším očekávaným výnosem.




Obrázek 1.18: Příklad množiny, kde efektivní množina není pouze průnikem řešení minimalizační a maximaliční úlohy

### Řešení optimalizačních úloh

Je třeba si uvědomit, že jak $R_P$, tak $\sigma_P$ jsou funkcí vah $X_i$, konkrétně

$$R_P = \sum_{i=1}^{N} X_i R_i$$

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}}$$

Úloha (1) z odstavce 1.4.3 je tedy úlohou kvadratického programování. Ta má v obecném zápisu tvar:

$$f(x) = \langle Cx, x \rangle \rightarrow min$$

na množině

$$\langle a_i, x \rangle \leq b_i$$

$$\langle a_j, x \rangle = b_j$$

$$x \geq 0$$

V tomto případě tedy $C = \sigma_{ij}$ je kovarianční matice, $a_1 = -R_P$, $a_2 = \mathbf{1}$, $b_1 = -b$, $b_2 = 1$.
Tuto úlohu lze řešit metodami kvadratického programování, například Wolfovou metodou.

## 1.4.4 Markowitzův model a diverzifikace

Markowitzův model je modelem hledání optimálního portfolia pro investora s určitými preferencemi. Je vybudován s pomocí teorie pravděpodobnosti a statistiky. Jedním z jeho velkých kladů je, že dokázal významnost diverzifikace. Z předchozí kapitoly je vidět, že čím víc jsou jednotlivá aktiva v potrfoliu negativně korelována, tím víc klesá riziko změny výnosu portfolia. Tedy že výběr nekorelovaných, popř. negativně korelovaných aktiv, činí portfolium efektivnějším.

V praxi výběr nekorelovaných aktiv znamená diverzifikaci portfolia. Tato diverzifikace může probíhat v několika rovinách. V rovině finančních produktů - diverzifikuje se mezi akciemi, obligacemi, hotovostí atd. V rovině geografické - doporučuje se investovat do různých zemí po celém světě, a zejména pak je důležitá diverzifikace v rovině oborové - akcie firem z nejrůznějších odvětví bývají mezi sebou korelovány jen velmi málo. Faktem je, že silně negativně korelovaná aktiva se na kapitálových trzích téměř nevyskytují.

Druhým prostředkem, který vede k efektivitě portfolia, je sell short. Pomocí něj je v podstatě možné dosáhnout neomezeně vysokého výnosu, popřípadě vhodně snížit riziko. Ovšem ačkoliv teoretické výsledky optimalizace portfolia se sell shortem často počítají, z praktických důvodů uvedených v odstavci 1.3.1 je jeho užití silně omezeno.

# Kapitola 2

# Capital Asset Pricing Model

S modelem Capital Asset Pricing Model (CAPM, česky Model oceňování kapitálových aktiv) přišel v roce 1964 William F. Sharpe. Navázal na práce H. Markowitze a dalších, které se zabývaly výběrem optimálního portfolia. Tyto práce byly vesměs normativního charakteru, tedy doporučovaly investorům, podle čeho se při výběru portfolia řídit. Sharpe vypracoval vlastní model, ve kterém dosavadní teorie rozšířil na rovnovážnou teorii trhu kapitálových aktiv. Ve svém článku z roku 1964 se snaží jednak vysvětlit empiricky prokázanou závislost očekávaného výnosu portfolia na riziku změny výnosu tohoto portfolia a jednak rozvinul Markowitzovu teorii efektivní množiny portfolií s bezrizikovým aktivem. Takto pak odvodil rovnováhu na kapitálovém trhu ve tvaru CML (Capital Market Line), která je konzistentní s tehdejšími klasickými finančními teoriemi.

CAPM byl od svého vzniku mnohokrát rozšiřován a upravován. Existuje mnoho variant tohoto modelu, které se blíže zaměřují na vysvětlení vybraných problémů, nebo do modelu implementují další vlivy vyplývající z praxe, například zdanění, transakční náklady, různá omezení a snaží se takto model přiblížit realitě. Vznikly také různé přístupy, jimiž se odvozovaly základní výsledky modelu CAPM. Ten starší přístup využívá teorie užitku, tedy maximalizace užitkových funkcí, ten novější pracuje s existencí arbitáže.

## 2.1 Předpoklady CAPM

Model CAPM má předpoklady poměrně silné. Někteří autoři se model snažili upravit, aby předpoklady mohli přiblížit reálnému trhu, zatímco trh sám se od vzniku CAPM změnil, a to vstříc jeho předpokladům. S masovým využíváním výpočetní techniky a Internetu se zvýšila informovanost investorů, různé produkty, jako například finanční deriváty, zpřesňují odhady očekvaných výnosů i rizik změny výnosu aktiv. I přes stále značnou idealizaci skutečných podmínek výsledky modelu CAPM popisují realitu kapitálových trhů velmi dobře. Uveďme zde konkrétní předpoklady:

1. Portfolium je sestavováno na jedno odbobí. Pro jednotlivá aktiva existuje očekávaný výnos a riziko změny výnosu aktiva
2. Všichni investoři jsou rizikově averzní.
3. Každý investor na trhu je schopen všechna přípustná portfolia porovnat mezi sebou pomocí očekávaného výnosu a rizika změny výnosu a sestavit portfolium, které je pro něj optimální.
4. Všechna aktiva jsou nekonečně dělitelná.
5. Bezrizikové aktivum existuje a existuje pouze jedna úroková sazba, za kterou investor může realizovat bezrizikovou půjčku. Existuje pouze jedna úroková sazba, za kterou investor může realizovat bezrizikovou výpůjčku. Většinou předpokládáme, že tyto úrokové sazby jsou stejné.
6. Všechna aktiva jsou obchodovatelná na trhu.
7. Všechny typy informací jsou komukoliv a kdykoliv dostupné, nejsou kladena žádná omezení na objem aktiv v portfoliu, tedy sell short je povolen. Nejsou žádné transakční náklady.
8. Všichni investoři mají stejná očekávání do budoucnosti ohledně výnosu, rizika změny výnosu a kovariancí mezi výnosy jednotlivých aktiv.

## 2.2 Užitečnostní odvození SML

Jedním ze zásadních přínosů CAPM je křivka SML (Security Market Line), která vyjadřuje skutečnost, že existuje vztah mezi očekávaným výnosem a rizikem změny výnosu portfolia, přičemž očekávaný výnos portfolia je do jisté míry determinován jeho závislostí na ostatních aktivech na trhu. Sharpe se snažil odvodit, jak velká část rizika portfolia připadá na vrub jeho očekávané výnosnosti a co určuje to zbylé riziko, které s výnosností nesouvisí. Přímka SML tento vztah ilustruje.

Ještě dříve, než si ukážeme návaznost Sharpeho úvah na Markowitzovu teorii efektivní množiny, odvodíme zde přímku SML pomocí užitečnosti. Později uvidíme, že to není jediný možný způsob.

Předpokládejme, že na trhu působí $K$ investorů. Označme $W_K$ bohatství, které investuje $k$ - tý investor, vyjádřené jako část celkového bohatství investovaného $K$ investory. $k$ - tý investor se bude snažit maximalizovat

$$U_k = R_k - \frac{\sigma_k^2}{\tau_k} \tag{2.2.1}$$

kde $U_k$ je užitek $k$ - tého investora, $R_k$ je očekávaný výnos jeho portfolia, $\sigma_k^2$ je rozptyl výnosů tohoto portfolia a $\tau_k$ je investorova tolerance rizika. Investoři se liší právě v toleranci rizika. Tato veličina se dá chápat jako investorova mezní míra substituce rozptylu za očekávaný výnos portfolia. Předpokládejme, že tolerance rizika každého nvestora je konstantní pro přípustnou množinu očekávaných výnosů a rizik.

### Optimalizace portfolia

Investor $k$ bude maximalizovat $U_k$ vzhledem k omezení ve tvaru $\sum_{i=1}^{N} X_{ik} = 1$, kde $X_{ik}$ má stejný význam jako dříve, tedy poměr bohatství investovaného do $i$ - tého aktiva v portfoliu. Připomeňme také, že platí

$$R_k = \sum_{i=1}^{N} X_{ik} R_i \qquad \text{pro očekávaný výnos portfolia,}$$

$$\sigma_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_{ik} X_{jk} \sigma_{ij}} \qquad \text{pro riziko změny výnosu portfolia,}$$

kde $\sigma_{ij}$ je kovariance mezi aktivy $i$ a $j$.

Napišme Lagrangeovu funkci:

$$L_k = U_k + \lambda_{fk}(1 - \sum_{i=1}^{N} X_{ik})$$

Multiplikátor $\lambda_{fk}$ zde vyjadřuje mezní užitečnost bohatství investora $k$. Mezní užitečnosti jednotlivých aktiv v portfoliu musí být stejné.

Nutné podmínky 1. řádu:

$$\frac{\partial L_k}{\partial X_{ik}} = R_i - \frac{2}{\tau_k} \sum_{j=1}^{N} X_{jk} \sigma_{ij} - \lambda_{fk} = 0$$

Pro kovarianci $i$ - tého aktiva s libovolným portfoliem $P$ $k$ - tého investora platí, že je rovna váženému průměru kovariancí $i$ - tého aktiva s aktivy v $P$, tedy

$$\sigma_{ik} = \sum_{j=1}^{N} X_{jk}\sigma_{ij}$$

Substitucí dostáváme

$$R_i - \frac{2}{\tau_k}\sigma_{ik} - \lambda_{fk} = 0$$

takže podmínka optimality 1.řádu má tvar

$$R_i - \frac{2}{\tau_k}\sigma_{ik} = \lambda_{fk} \quad \text{pro } \forall i \tag{2.2.2}$$

Předpokládejme, že trh se vyčistil, že tedy všechna aktiva jsou držena $K$ investory. Provedeme agregaci proměnných, a to tak, že výsledná proměnná je váženým průměrem proměnných příslušných jednotlivým investorům v poměru bohatství, které každý z nich investoval. Takže:

Vynásobíme rovnici (2.2.2) $\tau_k$ a přeuspořádáme členy

$$\tau_k R_i - 2\sigma_{ik} = \tau_k \lambda_{fk}$$

potom vynásobíme rovnici bohatstvím $W_k$ a sečteme přes všechny investory

$$\sum_{k=1}^{K} W_k \tau_k R_i - 2\sum_{k=1}^{K} W_k \sigma_{ik} = \sum_{k=1}^{K} W_k \tau_k \lambda_{fk} \tag{2.2.3}$$

Dále definujeme $\tau_m$ jako

$$\tau_m = \sum_{k=1}^{K} W_k \tau_k$$

Připomeňme, že $\sigma_{ik} = C(Z_i, Z_j)$, kde $Z_i, Z_j$ jsou náhodné veličiny popisující výnos aktiv $i$ a $j$. Můžeme psát

$$\sum_{k=1}^{K} W_k \sigma_{ik} = C(Z_i, \sum_{k=1}^{K} W_k Z_k)$$

Sumace na pravé straně je bohatstvím vážený průměr výnosů portfolií všech investorů, tedy vlastně výnos odpovídající celému trhu - výnos tržního portfolia. Takže sumace na levé straně je rovna kovarianci výnosu $i$ - tého aktiva s výnosem tržního portfolia a tu označíme $\sigma_{im}$. Provedeme substituce do rovnice (2.2.3)

$$\tau_m R_i - 2\sigma_{im} = \sum_{k=1}^{K} W_k \tau_k \lambda_{fk}$$

Rovnici vydělíme $\tau_m$

$$R_i - \frac{2}{\tau_m}\sigma_{im} = \frac{\sum_{k=1}^{K} W_k \tau_k \lambda_{fk}}{\tau_m}$$

Člen na pravé straně je vážený průměr $\lambda_{fk}$. Označíme-li ho $\lambda_{fm}$, dostáváme

$$R_i - \frac{2}{\tau_m}\sigma_{im} = \lambda_{fm} \qquad \text{pro } \forall i \tag{2.2.4}$$

Význam členů v rovnici (2.2.4) je následující:
$\tau_m$ je společenská tolerance rizika, $\sigma_{im}$ je kovariance $i$ - tého aktiva s tržním portfoliem a $\lambda_{fm}$ je společenská mezní užitečnost bohatství. Po jednoduchém přeuspořádání členů dostaneme

$$R_i = \lambda_{fm} + \frac{2}{\tau_m}\sigma_{im} \qquad \text{pro } \forall i \tag{2.2.5}$$

Vidíme, že při rovnováze existuje lineární závislost mezi očekávaným výnosem aktiva a jeho kovariancí s tržním portfoliem. Označme $\beta_{im}$ podíl této kovariance a rozptylu tržního portfolia

$$\beta_{im} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

Substitucí do (2.2.5) dostáváme

$$R_i = \lambda_{fm} + \frac{2\sigma_m^2}{\tau_m}\beta_{im} \qquad \text{pro } \forall i \tag{2.2.6}$$

Uvědomme si, že jelikož očekávaný výnos portfolia a kovariance s tržním portfoliem jsou vážené průměry těchto ukazatelů u jednotlivých aktiv portfolia, bude vztah (2.2.6) platit pro všechna aktiva a portfolia na trhu, tedy i tržní portfolium. Je zřejmé, že $\beta_{mm} = 1$. Potom jestliže označíme $R_m$ očekávaný výnos tržního portfolia, dostaneme

$$R_m = \lambda_{fm} + \frac{2\sigma_m^2}{\tau_m}$$

$$\frac{R_m - \lambda_{fm}}{\sigma_m^2} = \frac{2}{\tau_m} \tag{2.2.7}$$

Dosazením z (2.2.7) do (2.2.6) pak získáme

$$R_i = \lambda_{fm} + (R_m - \lambda_{fm})\beta_{im} \qquad \text{pro } \forall i \tag{2.2.8}$$

Tato rovnice vyjadřuje již výše zmíněný významný závěr CAPM, a to, že očekávaný výnos aktiva je lineárně zavislý na tržním riziku (také nazývaném systematické riziko). To je součástí celkového rizika a do výnosu aktiva se promítá přes kovarinaci aktiva s tržním portfoliem. Tento vztah, který umožňuje na základě parametrů tržního portfolia a příslušného $\beta$ určit očekávaný výnos aktiva, je označován SML.

Z rovnice (2.2.8) je vidět, že $\lambda_{fm}$ je rovna očekávanému výnosu z libovolného portfolia, jehož $\beta$ je rovna nule. Tuto podmínku splňuje například bezrizikové aktivum, protože jeho korelace s tržním portfoliem je nulová. Jestliže bezrizikové aktivum existuje, označme jeho výnos $R_f$ a můžeme psát nejznámější tvar SML

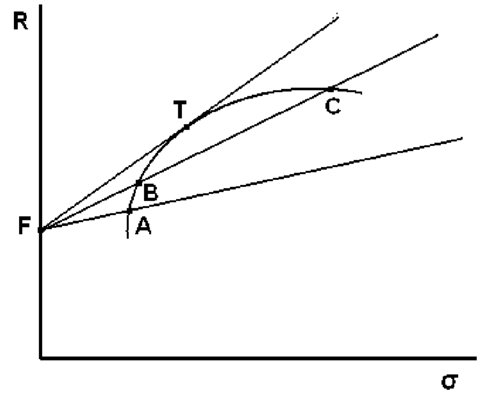
$$R_i = R_f + (R_m - R_f)\beta_{im} \qquad \text{pro } \forall i \tag{2.2.9}$$

## 2.3 Rovnováha v CAPM

### 2.3.1 Tangenciální portfolium

CAPM rozvíjí Markowitzovu ideu efektivní množiny. Počítá s existencí bezrizikového aktiva a zkoumá jeho vliv na efektivní množinu. Mějme riziková portfolia $A, B, C$ a $T$, která jsou prvky efektivní množiny. V první kapitole jsme odvodili, jak budou vypadat všechna portfolia, která vzniknou kombinací libovolného portfolia s bezrizikovým aktivem $F$. Tato portfolia budou ležet na polopřímkách tak, jak je vidět na obrázku 2.1.

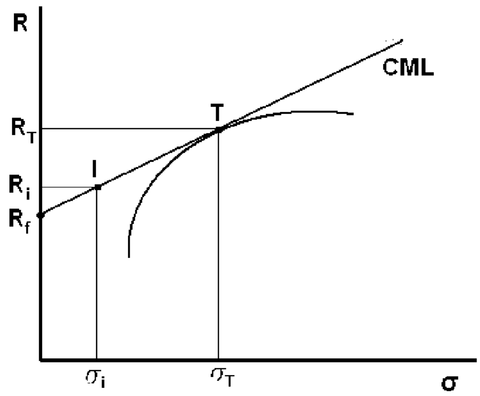
Je zřejmé, že portfolia na polopřímce $FT$ dominují portfolia z původní efektivní množiny. Z toho plyne, že zahrnutím bezrizikového aktiva vznikne nová efektivní množina, která má lepší vlastnosti než ta původní. Kromě toho je na obrázku názorně vidět význam portfolia T. Jestliže je k dispozici bezrizikové aktivum, pak budou všichni investoři poptávat pouze kombinaci bezrizikového aktiva a portfolia $T$. Toto portfolium se nazývá tangenciální, protože je právě bodem dotyku tečny z bodu $F$ k původní množině efektivních portfolií. Nastane - li pak v takové situaci rovnováha, můžeme označit tangenciální portfolium jako tržní portfolium, protože obsahuje všechna riziková aktiva, do nichž se na trhu investuje.




Obrázek 2.1: Kombinace rizikových portfolií s bezrizikový aktivem

Proces výběru portfolia se pak skládá ze dvou částí. Nejprve investor najde portfolium $T$ a potom se podle svého odporu k riziku rozhodne pro specifickou kombinaci portfolia $T$ a bezrizikového aktiva. Investor s vyšším odporem k riziku vybírá kombinace $T$ a bezrizikové půjčky a zůstává na úsečce $FT$, investor s nižším odporem k riziku volí $T$ a bezizikovou výpůjčku a posouvá se na polopřímce $FT$ dále za bod $T$.

Polopřímka $FT$ se nazývá CML (Capital Market Line) a její rovnici odvodíme jednoduše podle obrázku 2.2.




Obrázek 2.2: Odvození CML

$I$ je libovolné portfolium z efektivní množiny, jeho očekávaný výnos je $R_i$, riziko změny výnosu je $\sigma_i$. Podobně $R_T$ a $\sigma_T$ pro tangenciální portfolium a $R_f$ je výnos bezrizikového aktiva. Z podobnosti trojúhelníků $R_f I R_i$ a $R_f T R_T$

plyne

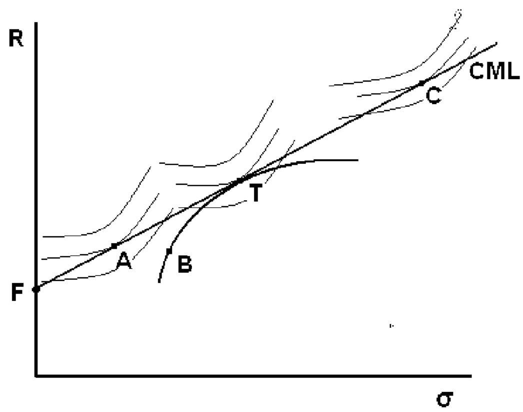
$$\frac{R_i - R_f}{\sigma_i} = \frac{R_T - R_f}{\sigma_T}$$

Odtud dostáváme rovnici CML ve tvaru

$$R_i = R_f + (R_T - R_f)\frac{\sigma_i}{\sigma_T}$$

### 2.3.2 Rovnováha na kapitálových trzích

CAPM je modelem rovnovážným. Je zde třeba brát v úvahu předpoklady, které jsme uvedli na začátku kapitoly. Mějme výchozí ceny aktiv a pozorujme investory na kapitálovém trhu.

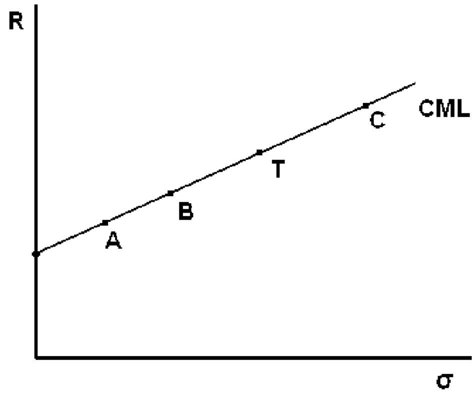



Obrázek 2.3: Preference investorů

Podle svých preferencí, a tedy indiferenčních křivek, vybírají investoři z efektivní množiny portfolia $A$, $T$ nebo $C$. Jak bylo zmíněno už výše, poptávají tak vždy nějakou část portfolia $T$. Vzhledem k tomu, že očekávaná výnosnost portfolia je budoucí hodnota vztažená k současným cenám, tato poptávka způsobí růst ceny portfolia $T$ a tím způsobí pokles jeho očekávané výnosnosti. Naopak ceny aktiv, které nejsou součástí tangenciálního portfolia, poklesnou, a tím se jejich očekávaná výnosnost zvýší.

Graficky to znamená, že portfolium $T$ se na obrázku 2.3 posune doprava a například portfolium $B$ se posune doleva. Změnám v očekávaných výnosnostech budou investoři přizpůsobovat své chování a poptávka po jednotlivých aktivech se bude měnit. Následně se pak opět změní ceny, očekávané výnosnosti, poptávka atd.

Vzájemné přizpůsobování bude trvat tak dlouho, dokud se nedospěje k takovým cenám, pro které budou všechna aktiva obsažena přinejmenším v jednom portfoliu ležícím na CML.




Obrázek 2.4: Rovnováha na finančním trhu

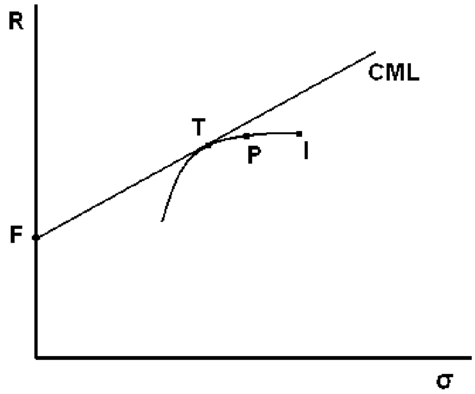
*Poznámka.* Bylo by chybou domnívat se, že v rovnováze leží všechna aktiva na přímce CML. Leží tam pouze jako součást tržního (tangenciálního) portfolia, ovšem samotná aktiva leží téměř vždy pod CML. Je to proto, že nejsou diverzifikovaná, a tedy nejsou tak efektivní jako portfolia na CML.

Fakt, že v rovnováze je opět zřejmá lineární závislost mezi očekávaným výnosem portfolia a rizikem změny jeho výnosu, vede k dalšímu zkoumání povahy této závislosti a zejména konkrétnímu vyjádření, jaká část rizika se takto přímo promítá do očekávaného výnosu. V podstatě je možné na základě znalosti přímky CML odvodit přímku SML.

### 2.3.3 Odvození SML z CML

Uvažujme libovolné vybrané rizikové aktivum $I$. Předpokládejme, že $I$ je součástí efektivního portfolia $T$. Toto aktivum bude na obrázku 2.5 typicky ležet pod přímkou CML, protože není diverzifikováno.

Zvolme libovolné portfolium $P$, které obsahuje relativní podíl $\alpha$ aktiva $I$ a relativní podíl $(1-\alpha)$ portfolia $T$. Portfolium $P$ bude ležet na křivce mezi $I$ a $T$ (popř. i za $T$), která je tečnou k efektivní množině v bodě $T$. To, že je tato křivka tečnou, je lehce vidět, protože pokud by protínala přímku CML v bodě $T$, existovala by portfolia, která by dominovala CML, což není možné, protože CML je efektivní množina.




Obrázek 2.5: Neefektivní aktivum I

Pro očekávaný výnos a riziko změny výnosu portfolia $P$ platí:

$$R_P = \alpha R_i + (1-\alpha) R_T$$
$$\sigma_P = \sqrt{\alpha^2 \sigma_i^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_T^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{iT}\sigma_i\sigma_T}$$

Z požadavku, aby se v bodě $T$, kde je $\alpha = 0$, křivka $TI$ dotýkala CML, dostáváme

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial \alpha} = \frac{2\alpha\sigma_i^2 - 2(1-\alpha)\sigma_T^2 + 2\sigma_{iT} - 4\alpha\sigma_{iT}}{2\sqrt{\alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\sigma_T^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{iT}\sigma_i\sigma_T}}$$
$$\frac{\partial R_P}{\partial \alpha} = R_i - R_T$$
$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial \alpha} = \frac{-2\sigma_T^2 + 2\sigma_{iT}}{2\sqrt{\sigma_T^2}} = \frac{\sigma_{iT} - \sigma_T^2}{\sigma_T} \qquad \text{pro } \alpha = 0$$

Takže

$$\frac{\partial R_P}{\partial \sigma_P} = \frac{\sigma_T(R_i - R_T)}{-\sigma_T^2 + \sigma_{iT}}$$

Připomeňme si rovnici CML:

$$R_i = R_f + (R_T - R_f)\frac{\sigma_i}{\sigma_T}$$

Směrnice křivky $IT$ v bodě $T$ a přímky CML v bodě $T$ se musí rovnat

$$\frac{\sigma_T(R_i - R_T)}{\sigma_{iT} - \sigma_T^2} = \frac{R_T - R_f}{\sigma_T}$$

Upravíme

$$R_i - R_T = \frac{(R_T - R_f)\sigma_{iT} - (R_T - R_f)\sigma_T^2}{\sigma_T^2} = R_f - R_T + (R_T - R_f)\frac{\sigma_{iT}}{\sigma_T^2}$$
$$R_i = R_f + (R_T - R_f)\frac{\sigma_{iT}}{\sigma_T^2}$$

Označíme-li

$$\frac{\sigma_{iT}}{\sigma_T^2} = \beta_{iT}$$

dostáváme rovnici SML

$$R_i = R_f + (R_T - R_f)\beta_{iT}$$

Protože se nacházíme v rovnovážném stavu, tangenciální portfolium je vlastně tržní portfolium, takže můžeme rovnici SML přeindexovat

$$R_i = R_f + (R_m - R_f)\beta_{im} \tag{2.3.1}$$

**Beta cenného papíru**

Koeficient $\beta_{im}$ vyjadřuje závislost očekávaných výnosů $i$ - tého aktiva na tržním portfoliu. Do určité míry determinuje riziko změny výnosu cenného papíru. V teorii portfolia se takto vlastně používá jako alternativní vyjádření rizika portfolia. Hodnota koeficientu $\beta_{im}$ není teoreticky nijak ohraničená, přesto se málokdy pohybuje mimo interval $\langle 0.5, 2 \rangle$. I když se takovéto hodnoty vyskytnou, jsou dlouhodobě neudržitelné.

Podle velikosti koeficientu $\beta_{im}$ dělíme cenné papíry na:

1. **Agresivní** - pro $\beta_{im} > 1$, tyto cenné papíry kolísají (rostou) více než tržní portfolium
2. **Defenzivní** - pro $\beta_{im} < 1$, tyto cenné papíry kolísají (rostou) méně než tržní portfolium
3. **Neutrální** - pro $\beta_{im} = 1$, tyto cenné papíry kolísají zároveň s trhem

### 2.3.4 Charakteristická přímka

Je pochopitelné, že výše uvedený tvar SML (2.3.1) nemůže očekávaný výnos aktiva popsat úplně přesně. Tržní riziko není jediná veličina, která očekávaný výnos aktiva ovlivňuje. Působí i jiné vlivy, často nekvantifikovatelné, v jejichž důsledku očekávané výnosy aktiva kolísají kolem SML. Budeme-li uvažovat náhodné veličiny $Z_i$ a $Z_m$, kter0 popisují výnos $i$ - tého aktiva, respektive tržního portfolia, bude platit

$$Z_i = \alpha_i + \beta_{im} Z_m + \epsilon_i \tag{2.3.2}$$

kde $\epsilon_i$ je reziduální výnos netržních složek $i$ - tého aktiva.

Vlastnosti $\epsilon_i$ :

1. $E(\epsilon_i) = 0$ ... lze dosáhnout vhodnou volbou $\alpha_i$
2. $C(\epsilon_i, Z_m) = 0$ ... protože $\epsilon_i$ je právě ten výnos, který není vysvětlován pohyby tržního portfolia
3. $C(\epsilon_i, \epsilon_j) \neq 0$ ... bohužel není důvod předpokládat, že náhodné složky jednotlivých aktiv jsou vzájemně nekorelovány

Pro určení hodnoty $\alpha_i$ vyjdeme z požadavku $E(\epsilon_i) = 0$. Aplikujeme střední hodnotu na členy rovnice (2.3.2)

$$R_i = \alpha_i + \beta_{im} R_m$$

Ze srovnání s (2.3.1) dostáváme

$$\alpha_i = (1 - \beta_{im}) R_f$$

Potom se rovnice

$$Z_i = (1 - \beta_{im} R_f) + \beta_{im} Z_m + \epsilon_i$$

respektive

$$Z_i = R_f + (Z_m - R_f)\beta_{im} + \epsilon_i$$

nazývá charakteristická přímka cenného papíru.

### 2.3.5 Systematické a nesystematické riziko portfolia

V předchozí části se podařilo odvodit, že riziko změny výnosu portfolia obsahuje z část systematickou (tržní), která souvisí se vztahem portfolia k tržnímu portfoliu. Zbylou část celkového rizika nazýváme nesystematické riziko, které vyplývá ze všech ostatních vlivů na portfolium. Nesystematické riziko lze minimalizovat diverzifikací, a tím snížit celkové riziko a zefektivnit portfolium. Tržní riziko diverzifikací ovlivnit příliš nelze. Zde si odvodíme, jaký je mezi těmito druhy rizika vztah. Vyjdeme z rovnice (2.3.2). Vyjádřeme z ní náhodnou chybu

$$\epsilon_i = Z_i - \alpha_i - \beta_{im} Z_m$$

Napišme rozptyl náhodných veličin na obou stranách rovnice, přičemž víme, že $\alpha_i$ je konstanta.

$$\begin{aligned} D(\epsilon_i) &= D(Z_i - \alpha_i - \beta_{im} Z_m) \\ &= D(Z_i) + D(\beta_{im} Z_m) - 2C(Z_i, \beta_{im} Z_m) \end{aligned}$$

Uvědomíme-li si, že

$$\sigma_{im} = \beta_{im} \sigma_m^2$$

pak po přeznačení dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_{\epsilon_i}^2 &= \sigma_i^2 + \beta_{im}^2 \sigma_m^2 - 2\beta_{im}\beta_{im}\sigma_m^2 \\ &= \sigma_i^2 - \beta_{im}^2 \sigma_m^2 \end{aligned}$$

Pro celkové riziko portfolia tedy máme

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{\epsilon_i}^2 + \beta_{im}^2 \sigma_m^2}$$

kde jako $\sigma_{\epsilon_i}^2$ označujeme nesystematické riziko a $\beta_{im}^2 \sigma_m^2$ systematické (tržní) riziko portfolia.

# Kapitola 3

# Brownův pohyb

V závěru této práce bych ráda nastínila přechod od statické teorie portfolia k její dynamické verzi. Pro popis spojitých změn cen aktiv je s úspěchem využíván náhodný proces zvaný Brownův pohyb, případně Wienerův proces. Proto se jím budu v této kapitole podrobně zabývat.

Brownův pohyb dostal své jméno po anglickém botaniku Brownovi, který na konci 19. století pozoroval pod mikroskopem pohyb částic pylu v kapalině a zjistil, že vykonávají nepravidelný pohyb. V roce 1900 tento pohyb zkoumal Bachelier a jako první jej vnímal jako nepravidelný pohyb, kterým by se daly popsat změny cen akcií na finančním trhu. V dalších letech se Brownůvým pohybem zabývali další matematici a fyzici, například Albert Einstein, a snažili se je popsat pomocí teorie pravděpodobnosti. Pak jej v roce 1923 studoval už jako stochastický proces Wiener, po němž se tento proces také někdy nazývá Wienerův proces. Při tomto zkoumání se Brownův pohyb ukázal být vhodným pro popis difuze či vedení tepla, ovšem pro účely této práce je důležitý pro model pohybu cen aktiv.

Při konstrukci Brownova pohybu navážu na svou bakalářsku práci, která se částečně věnovala náhodné procházce. V druhé polovině této kapitoly si budu všímat některých pozoruhodných vlastností tohoto procesu, z nichž některé jsou analogiemi týchž vlastností náhodné procházky a jiné jsou specifické pouze pro Brownův pohyb. Díky svým nezvyklým vlastnostem je Brownův pohyb vhodný pro popis mnohých reálných jevů.

Samotný závěr kapitoly je věnován úvodu do stochastickéhu kalkulu, pomocí nějž je Brownův pohyb implementován v dynamické teorii portfolia.

**Definice 9.** Brownův pohyb je stochastický proces $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ s následujícícmi vlastnostmi:

1. $B(0) = 0$
2. S pravděpodobností 1 je $B(t)$ spojitý v $t$
3. Proces $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ má stacionární, nezávislé přírustky
4. Přírustek $B(t+s) - B(s)$ má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem $\sigma^2 t$, kde $\sigma$ je reálná konstanta

*Poznámka.*

1. Jedná se o konvenci. Brownův pohyb začínající v bodě $x$ získáme jako $\{B(t+x)\}_{t\geq 0}$
2. Později se ukáže, že současně je $B(t)$ nediferencovatelný v $t$
3. Nezávislé přírustky znamená, že pro každý výběr nezáporných reálných čísel
   $$0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \ldots \leq s_n < t_n < \infty$$
   jsou náhodné veličiny
   $$B(t_1) - B(s_1), B(t_2) - B(s_2), \ldots, B(t_n) - B(s_n)$$
   sdružené nezávislé.
   Stacionární přírustky znamená, že pro libovolná $0 < s, t < \infty$ má náhodná veličina $B(t+s) - B(s)$ stejné rozdělení jako náhodná veličina $B(t) - B(0) = B(t)$
4. Parametr $\sigma^2$ je možné znormovat. Proces $\{B(\frac{t}{\sigma})\}_{t\geq 0}$ je Brownův pohyb s rozptylem $t$

**Definice 10.** Brownův pohyb s parametrem $\sigma^2 = 1$ se nazývá standardní Brownův pohyb.

Proces, který splňuje tyto vlastnosti, skutečně existuje. Dokázal to Wiener v roce 1923 a později jiným způsobem Lévy. Zde existenci Brownova pohybu dokazovat nebudeme, raději uvedeme jeho konstrukci pomocí limity náhodné procházky. Tento přístup je velmi intuitivní a umožní čtenáři lépe si Brownův pohyb představit a porozumět jeho vlastnostem.

## 3.1 Brownův pohyb jako limita náhodné procházky

**Definice 11.** Nechť $X_1, X_2, X_3, \dots$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny takové, že $P(X_i = 1) = p, P(X_i = -1) = 1-p$. Označme $S(t) = \sum_{i=1}^{t} X_i$. Posloupnost $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ se nazývá náhodná procházka.
Platí - li $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$, nazývá se náhodná procházka $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ symetrická.

Je lehce vidět, jak vypadají střední hodnota a rozptyl $X_i$:

$$E(X_i) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$$
$$D(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 0 = 1$$

Z těchto hodnot a nezávislosti náhodných veličin $X_i$ podobně dopočítáme střední hodnotu a rozptyl $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$:

$$E(\{S(t)\}_{t\in\mathbb{N}} = E\left(\sum_{i=1}^{t} X_i\right) = \sum_{i=1}^{t} EX_i = 0$$
$$D\{S(t)\}_{t\in\mathbb{N}} = D\left(\sum_{i=1}^{t} X_i\right) = \sum_{i=1}^{t} DX_i = t$$

Abychom dostali Brownův pohyb, musíme nejprve změnit délku časového a prostorového kroku náhodné procházky. Délku kroku zkrátíme $\sqrt{n}$ - krát a délku časového okamžiku $n$ - krát. Definujme tedy pro každé $n \geq 1$ náhodný proces ve spojitém čase $t$ označený $\{B_n(t)\}_{t\geq 0}$ jako

$$B_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt]} X_j$$

kde $X_j$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny z definice náhodné procházky. Tento proces dělá $n$ kroků o velikosti $\frac{1}{\sqrt{n}}$ za jednotku času. Jeden krok tedy trvá $\frac{1}{n}$. Vzhledem k tomu, že náhodné veličiny $X_j$ jsou nezávislé, také přírustky $B_n(t)$ jsou nezávislé. Připomeňme zde velmi důležitou a užitečnou Centrální limitní větu.

**Věta 3.1.1 (Centrální limitní věta).** *Nechť $X_1, X_2, X_3, ...$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou $\mu$ a rozptylem $\sigma^2$. Potom náhodná veličina*

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \qquad n = 1, 2, ...$$

*konverguje v distribuci k rozdělení $N(0, \sigma^2)$.*

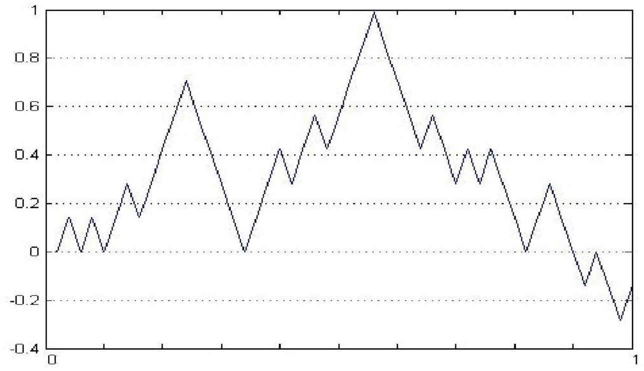
Budeme-li Centrální limitní větu aplikovat na náš případ, dostaneme, že pro velká $n$ je rozdělení přírustků $B_n(t+s) - B_n(s)$ blízké normálnímu rodělení se střední hodnotou 0 a rozptylem $t$.

$$\begin{aligned}
E[B_n(t+s) - B_n(s)] &= E\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[n(t+s)]} X_j - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[ns]} X_j\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[n(t+s)]} EX_j - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[ns]} EX_j \\
&= 0 \\
D[B_n(t+s) - B_n(s)] &= D\left[\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + ... + X_{n(t+s)}) - \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + ... + X_{ns})\right] \\
&= \frac{1}{n}[DX_1 + DX_2 + ... + DX_{nt+ns} - DX_1 - DX_2 - ... - DX_{ns}] \\
&= \frac{1}{n}[nt + ns - ns] \\
&= t
\end{aligned}$$

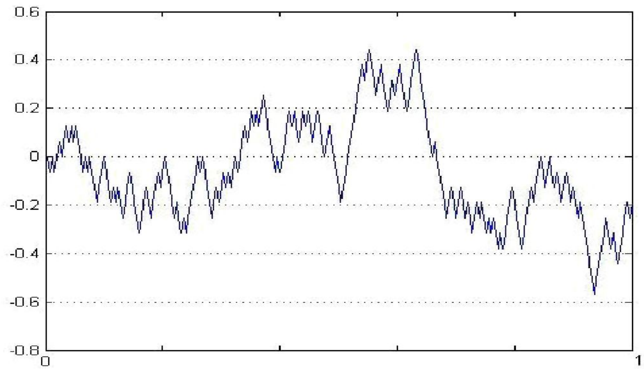
Lze si pak představit, že pro $n \to \infty$ se rozdělení náhodného procesu $B_n(t)$ blíží rozdělení standardního Brownova pohybu $\{B_n(t)\}_{t\geq 0}$. Tento přechod ukazují obrázky 3.1, 3.2 a 3.3.

*Poznámka.* Není náhoda, že změna časového ($\triangle t$) a prostorového ($\triangle x$) kroku byla zvolena $\triangle t = \frac{1}{n}$ a $\triangle x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, tedy $\triangle x^2 = \triangle t$. Představme si $B_n(t)$ obecněji:

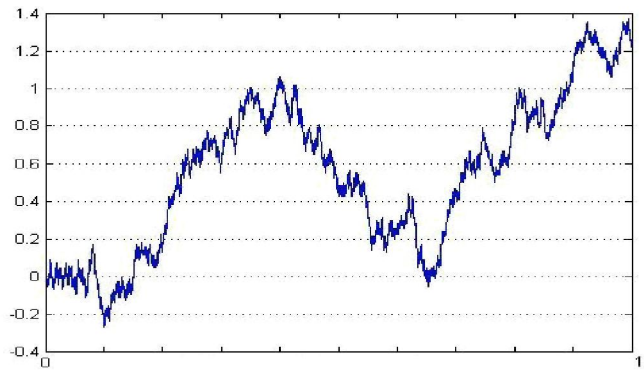
$$B_n(t) = \triangle x \sum_{j=1}^{\frac{t}{\triangle t}} X_j$$




Obrázek 3.1: Náhodná procházka pro $n = 50$




Obrázek 3.2: Náhodná procházka pro $n = 250$




Obrázek 3.3: Náhodná procházka pro $n = 5000$

Potom

$$E(B_n(t)) = E\left[\triangle x \sum_{j=1}^{\frac{t}{\triangle t}} X_j\right] = \triangle x \sum_{j=1}^{\frac{t}{\triangle t}} EX_j = 0$$

$$D(B_n(t)) = D\left[\triangle x \sum_{j=1}^{\frac{t}{\triangle t}} X_j\right] = \triangle x^2 \sum_{j=1}^{\frac{t}{\triangle t}} DX_j = \triangle x^2 \frac{t}{\triangle t}$$

Uvažujme závislost mezi $\triangle t$ a $\triangle x$ ve tvaru $\triangle x = \sigma(\triangle t)^p$ a sledujme rozptyl $B_n(t)$ pro $\triangle t \to 0, \triangle x \to 0$:

Je-li $p > \frac{1}{2}$, dostaneme

$$D(B_n(t)) = \sigma^2(\triangle t)^{2p}\frac{t}{\triangle t} \quad \to 0$$

Je-li $p < \frac{1}{2}$, dostaneme

$$D(B_n(t)) = \sigma^2(\triangle t)^{2p}\frac{t}{\triangle t} \quad \to \infty$$

Je-li $p = \frac{1}{2}$, dostaneme

$$D(B_n(t)) = \sigma^2(\triangle t)\frac{t}{\triangle t} \quad \to \sigma^2 t$$

Výsledek pro $p = \frac{1}{2}$ koresponduje s požadavky Brownova pohybu. Pro odvození standardního Brownova pohybu je třeba volit $\sigma = 1$ a vztah pak získá námi použitý tvar $\triangle x = \sqrt{\triangle t}$, tedy $\triangle t = \frac{1}{n}$ a $\triangle x = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

## 3.2 Vlastnosti Brownova pohybu

**Tvrzení 3.2.1.** *Nechť $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ je standardní Brownův pohyb. Potom také každý z následujích procesů je standardní Brownův pohyb.*

1. $\{-B(t)\}_{t\geq 0}$
2. $\{B(t+s) - B(s)\}_{t\geq 0}$
3. $\{aB(\frac{t}{a^2})\}_{t\geq 0}$
4. $\{tB\frac{1}{t}\}_{t\geq 0}$

*Poznámka.* Vlastnost (3) budu v dalším textu nazývat změnou měřítka. Je to tatáž transformace, jakou jsme použili při konstrukci Brownova pohybu jako limity náhodné procházky.

Všechny tyto transformace jsou velmi užitečné v dalším zkoumání Brownova pohybu. Abychom mohli pokračovat dál, definujme na tomto místě dvě zajímavé náhodné veličiny $M(t)$ a $M^-(t)$ popisující dosažené maximum a minimum Brownova pohybu.

$$M(t) = max\{B(s); \quad 0 \leq s \leq t\}$$

$$M^-(t) = min\{B(s); \quad 0 \leq s \leq t\}$$

Tyto veličiny jsou korektně definované, protože Brownův pohyb je spojitý a spojité funkce vždy nabývají svého maxima a minima na uzavřeném intervalu.

Zaměříme-li se na rozdělení $M(t)$ a $M^-(t)$, podívejme se, co se stane, když nahradíme Brownův pohyb $B(t)$ jeho transformací $-B(t)$. Pro proces $-B(t)$ se minimum změní v maximum s opačným znaménkem. Ovšem $-B(t)$ je také Brownův pohyb, a tedy $M(t)$ a $-M^-(t)$ mají stejné rozdělení.

$$M(t) \sim -M^-(t)$$

Ukážeme si také, že pro náhodné veličiny $M(t)$ a $M^-(t)$ platí i změna měřítka. Nechť $a > 0$ a definujme náhodnou veličinu $B^*(t)$:

$$B^*(t) = aB(t/a^2)$$

Pak analogicky můžeme definovat

$$\begin{aligned} M(^*t) &= max\{B^*(s); \quad 0 \leq s \leq t\} \\ &= max\{aB(s/a^2); \quad 0 \leq s \leq t\} \\ &= aM(t/a^2) \end{aligned}$$

Protože ale $B^*(t)$ je také Brownův pohyb, má náhodná veličina $M^*(t)$ stejné rozdělení jako $M(t)$. Tedy

$$M(t) \sim aM(t/a^2)$$

### 3.2.1 Chování Brownova pohybu

Jestliže vnímáme Brownův pohyb jako proces, který dělá nekonečně malé kroky v nekonečně krátkých časových intervalech, můžeme potom intuitivně věřit následujícím tvrzením. Jsou uvedena bez důkazu, mají sloužit jen k lepší představě o vcelku zvláštním chování Brownova pohybu.

**Tvrzení 3.2.2.** *Ačkoliv je $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ spojitý v každém bodě, není s pravděpodobností 1 v žádném bodě diferencovatelný.*

**Tvrzení 3.2.3.** *Brownův pohyb dosáhne s pravděpodobností 1 libovolné reálné hodnoty, ať je jakkoliv velká, kladná či záporná. S pravděpodobností 1 se pak v nějakém pozdějším čase Brownův pohyb zase vrátí k hodnotě 0.*

**Tvrzení 3.2.4.** *Jakmile jednou Brownův pohyb dosáhne nějaké hodnoty, dosáhne jí pak s pravděpodobností 1 ještě nekonečně mnohokrát znovu.*

**Tvrzení 3.2.5.** *Budeme-li sledovat Brownův pohyb v jakkoliv malých časových intervalech, bude jeho struktura vypadat stále stejně.*

Poslední tvrzení ilustrují obrázky 3.4, 3.5 a 3.6 na následující straně. Proces na nich zachycený je aproximací Brownova pohybu pomocí náhodné procházky. Každý následující obrázek představuje podrobněji výřez naznačený na obrázku předcházejícím.

### 3.2.2 Brownova filtrace

**Definice 12.** Nechť $\Omega$ je prostor všech možných událostí (například všechny možné pohyby cen aktiv na finančním trhu). Představme si množinu $\mathcal{F}_t$ všech událostí, které mohly nastat do času $t$.
Potom konečnou posloupnost $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, pro niž platí následují vlastnosti, nazveme filtrací na prostoru $\Omega$.

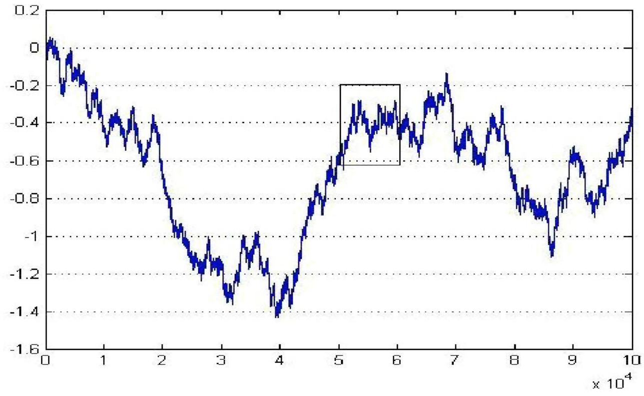
1. Každá $\mathcal{F}_t$ je $\sigma$-algebra událostí z $\Omega$
2. $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, pro $s < t$

Filtraci je možné spojit s náhodným procesem. Pro naše účely zavedeme

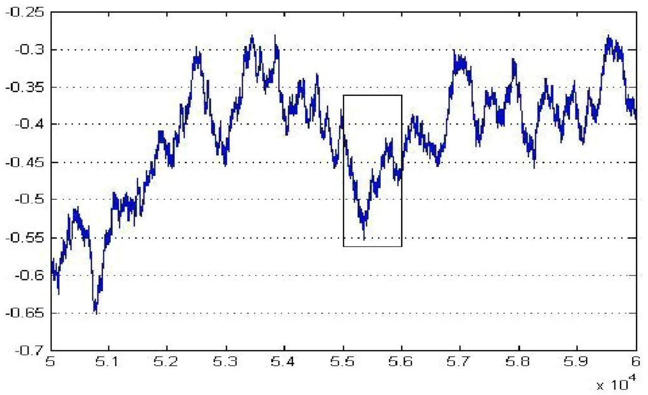
$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{B(s)\}_{0\leq s\leq t})$$

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\{B(s)\}_{0\leq s\leq \infty})$$

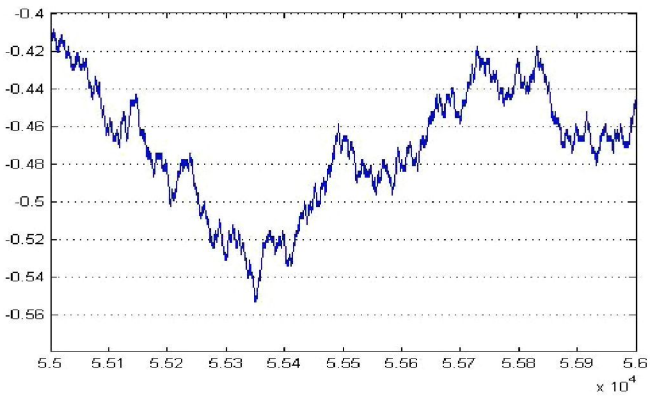
tedy pro každé $t$ je $\mathcal{F}_t$ $\sigma$-algebra, která obsahuje všechny události tvaru $\{B(s) \leq a\}$, kde $a \in \mathbb{R}, s \leq t$. Potom posloupnost $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ nazveme Brownovou filtrací.




Obrázek 3.4: Brownův pohyb




Obrázek 3.5: Brownův pohyb - výřez




Obrázek 3.6: Brownův pohyb - výřez výřezu

Brownova filtrace $\mathcal{F}_t$ obsahuje všechny možné varianty Brownova pohybu, které mohly nastat od počátku do času $t$.

**Příklad:**
Pro každé $t \geq 0$ je náhodná veličina $M(t)$ měřitelná vzhledem k $\mathcal{F}_t$. To znamená, že $\forall a \in \mathbb{R}$ je událost $\{M(t) > a\}$ prvkem $\mathcal{F}_t$. Ze spojitosti plyne

$$\{M(t) > a\} = \bigcup_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ 0 \leq s \leq t}} \{B(s) > a\}$$

Protože množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná, sjednocení na pravé straně je také spočetná množina. Vzhledem k tomu, že každá z událostí $\{B(s) > a\}$ ve sjednocení je prvkem $\mathcal{F}_t$, pak i $\{M(t) > a\}$ musí být prvkem $\mathcal{F}_t$.

### 3.2.3 Markovova vlastnost

V odstavci 3.2 jsme zmínili, že proces $\{B(t+s) - B(s)\}_{t \geq 0}$ je také Brownův pohyb. Tato vlastnost je základní forma obecnější Markovovy vlastnosti. Díky ní lze o procesu $\{B(t+s) - B(s)\}_{t \geq 0}$ nejen říci, že je to Brownův pohyb, ale také, že je nezávislý na $\{B(r)\}_{0 \leq r \leq s}$, neboli že podmíněné rozdělení procesu $\{B(t+s) - B(s)\}_{t \geq 0}$ závisí pouze na hodnotě $B(s)$ a žádné předchozí. Řečeno formálněji pomocí filtrací:

**Věta 3.2.6 (Markovova vlastnost).** *Nechť $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ je standardní Brownův pohyb, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ je Brownova filtrace a pro $s > 0, t \geq 0$ definujeme $B^*(t) = B(t+s) - B(s)$ a nechť $\{\mathcal{F}_t^*\}_{t \geq 0}$ je jeho filtrace. Pak pro $\forall t > 0$ jsou filtrace $\mathcal{F}_s$ a $\mathcal{F}_t^*$ nezávislé.*

Abychom mohli formulovat silnější verzi Markovovy vlastnosti, musíme nejprve definovat pojem stopping time.

**Definice 13.** Nezáporná náhodná veličina $\tau$ se nazývá stopping time, jestliže pro $\forall t \geq 0$ je událost $\{\tau \leq t\}$ prvkem $\sigma$-algebry $\mathcal{F}_t$.

Současně také definujme $\tau(a)$, čas prvního průchodu bodem $a$, jako

$$\tau(a) = min\{t;\ B(t) = a\}$$

nebo $\tau(a) = \infty$, pokud proces $B(t)$ nikdy nedosáhne bodu $a$.

**Tvrzení 3.2.7.** *Čas prvního průchodu bodem a je stopping time.*

Tvrzení můžeme ověřit takto:
Vzhledem k tomu, že Brownův proces je spojitý, událost $\{\tau(a) \leq t\}$ je totožná s událostí $\{M(t) \geq a\}$. O této události jsme v předchozím příkladě ukázali, že je prvkem $\mathcal{F}_t$, tedy i $\{\tau(a) \leq t\}$ je prvkem $\mathcal{F}_t$, a proto $\tau(a)$ je stopping time.

*Poznámka.* Každému stopping time $\tau$ je možné přiřadit $\sigma$-algebru $\mathcal{F}_\tau$, kterou definujeme jako množinu všech událostí $B$ takových, že $B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Tedy $\mathcal{F}_\tau$ obsahuje všechny události, které mohly nastat do času $\tau$.

**Příklad:**
Nechť jako v předchozím případě $\tau = \tau(a)$ a nechť $B$ je událost, kdy Brownův pohyb dosáhne bodu $b$ dříve, než dosáhne bodu $a$. Potom $B \in \mathcal{F}_\tau$.

**Věta 3.2.8 (Silná Markovova vlastnost).** *Nechť $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ je standardní Brownův pohyb s filtrací $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ a nechť $\tau$ je stopping time definovaný pomocí $\mathcal{F}_t$. K $\tau$ přiřadíme $\sigma$-algebru $\mathcal{F}_\tau$. Pro $t \geq 0$ definujeme*

$$B^*(t) = B(t + \tau) - B(\tau)$$

*a nechť $\{\mathcal{F}^*_t\}_{t\geq 0}$ je filtrace procesu $\{B^*(t)\}_{t\geq 0}$. Potom*

1. *$\{B^*(t)\}_{t\geq 0}$ je standardní Brownův pohyb*
2. *Pro $\forall t > 0$ jsou $\sigma$-algebry $\mathcal{F}^*_t$ a $\mathcal{F}_\tau$ nezávislé.*

Tato velice důležitá věta v podstatě říká, že Brownův pohyb začíná v bodě $\tau$ nanovo, přičemž je úplně nepodstatné, jak se vyvíjel do času $\tau$. Proces $B^*(t)$ je Brownův pohyb nezávislý na tom, co se dělo před časem $\tau$. Je si ale třeba uvědomit, že to, že $\tau$ je stopping time, je skutečně klíčový předpoklad pro platnost Silné Markovovy vlastnosti. V následujícím příkladu ukážeme, že je tomu skutečně tak.

**Příklad:**
Nechť $T$ je první čas, ve kterém Brownův pohyb dosáhne maxima na časovém intervalu [0,1]. Tedy

$$T = min\{t;\ B(t) = M(1)\}$$

Čas $T$ je dobře definovaný, protože Brownův pohyb je spojitý a množina časů $t \leq 1$, při kterých $B(t) = M(1)$, je uzavřená a neprázdná. Protože $M(1)$ je maximální hodnota, kterou Brownův pohyb dosáhl do času 1, pak část Brownova pohybu po čase $T$, $B^*(s) = B(T + s) - B(T)$, nemůže dosáhnout žádné kladné hodnoty v čase $s \leq 1-T$. Pokud by zde platila Silná Markovova vlastnost pro čas $T$, pak by pro Brownův pohyb $B^*(s)$ muselo platit, že nedosáhne žádné hodnoty z intervalu $(0,\infty)$. Vzhledem k tomu, že $-B^*(s)$ je také Brownův pohyb, který analogicky nemůže dosáhnout žádné hodnoty z intervalu $(-\infty,0)$, tak z toho plyne, že

$$B^*(s) = 0 \qquad \text{pro } \forall s \in [0, 1-T]$$

To ale není možné, protože pro Brownův pohyb platí s pravděpodobností 1, že

$$B(s) \neq 0 \qquad \text{pro } \forall s > 0$$

### 3.2.4 Princip reflexe

**Tvrzení 3.2.9.** *Nechť $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ je Brownův pohyb, $a > 0, \tau(a)$ je čas prvního dosažení bodu $a$. Platí*

$$P[\tau(a) < t] = 2P[B(t) > a]$$

*Důkaz.* Jestliže je $B(t) > a$, potom ze spojitosti Brownova pohybu plyne $\tau(a) < t$. Protože $\tau(a)$ je stopping time, pak $\{B(t+\tau(a)) - B(\tau(a))\}$ je Brownův pohyb nezávislý na vývoji před časem $\tau(a)$. Jestliže $\tau(a) < t$, pak $\{B(t) - B(\tau(a))\}$ má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem $t - \tau(a)$. Ze symetrie normálního rozdělení plyne

$$P[B(t) - B(\tau(a)) > 0 \mid \tau(a) < t] = P[B(t) - B(\tau(a)) < 0 \mid \tau(a) < t] = \frac{1}{2}$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} P[B(t) > a] &= P[\tau(a) < t,\ B(t) - B(\tau(a)) > 0] \\ &= P[\tau(a) < t]\ P[B(t) - B(\tau(a)) > 0 \mid \tau(a) < t] \\ &= \frac{1}{2} P[\tau(a) < t] \end{aligned}$$

□

Tento důkaz využil principu reflexe Brownova pohybu, který říká, že pokud $\tau(a) < t$, pak je stejná pravděpodobnost, že $B(t)$ se bude nacházet nad úrovní $a$ i pod úrovní $a$. Tento princip se používá v různých výpočtech, proto zde uvedeme ještě jednu jeho verzi.

Vycházíme opět z toho, že $\tau = \tau(a)$ je stopping time a že podle Silné Markovovy vlastnosti je proces

$$B^*(t) = B(\tau + t) - B(t)$$

Brownův pohyb nezávislý na $\mathcal{F}_\tau$. Také $\{-B^*(t)\}_{t\geq 0}$ je Brownův pohyb nezávislý na $\mathcal{F}_\tau$. Vytvoříme nový proces $\widetilde{B}(s)$ následujícím způsobem. Necháme běžet původní $B^*(t)$ až po čas $\tau = \tau(a)$ a potom navážeme procesem $-B^*(t)$, tedy vlastně odrazem procesu $B^*(t)$.
Nový proces bude mít tvar:

$$\widetilde{B}(s) = \begin{cases} B(s) & \text{pro } s \leq \tau = \tau(a) \\ 2a - B(s) & \text{pro } s \geq \tau = \tau(a) \end{cases}$$

**Tvrzení 3.2.10 (Princip reflexe).** *Jestliže $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ je Brownův pohyb, potom také $\{\widetilde{B}(t)\}_{t\geq 0}$ je Brownův pohyb.*


Obrázek 3.7: Procesy $B(t)$ a $\widetilde{B}(t)$ pro $a = 0,4$

Princip reflexe Brownova pohybu umožňuje vyjádřit sdružené rozdělení náhodných veličin $M(t)$ a $B(t)$:

**Tvrzení 3.2.11.** $P[M(t) \geq a, B(t) \leq a - b] = P[B(t) \geq a + b] \qquad \forall a, b > 0$

*Důkaz.* Protože procesy $B(s)$ a $\widetilde{B}(s)$ se shodují až do času $\tau - \tau(a)$, tak událost $M(t) \geq a$ se shoduje s událostí $\widetilde{M}(t) \geq a$, kde $\widetilde{M}(t)$ je maximum $\widetilde{B}(s)$ pro $0 \leq s \leq t$. Z definice $\widetilde{B}(t)$ pro $s \geq \tau$ dostáváme:

$$
\begin{aligned}
B(t) &\leq a - b \\
2a - \tilde{B}(t) &\leq a - b \\
\tilde{B}(t) &\geq a + b
\end{aligned}
$$

Z principu reflexe víme, že

$$P[\tilde{B}(t) \geq a + b] = P[B(t) \geq a + b]$$

Vyjádříme si sdružené pravděpodobnosti

$$
\begin{aligned}
P[M(t) \geq a, B(t) \leq a - b] &= P[\tilde{M}(t) \leq a, \tilde{B}(t) \geq a + b] \\
&= P[\tilde{B}(t) \geq a + b] \\
&= P[B(t) \geq a + b]
\end{aligned}
$$

□

### 3.2.5 Vlastnost martingalu a kvadratická variace

Obě tyto vlastnosti jsou velmi důležité při aplikaci Brownova pohybu pro dynamickou teorii portfolia.

**Definice 14.** Nechť jsou dány časy $0 \leq s \leq t$. Známe chování náhodného procesu $B(t)$ až po čas $s$. Řekneme, že náhodný proces $B(t)$ má vlastnost martingalu, jestliže podmíněná střední hodnota $B(t)$ je rovna $B(s)$.

**Tvrzení 3.2.12.** *Brownův pohyb $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ má vlastnost martingalu.*

Dalším zajímavým rysem Brownova pohybu je hodnota jeho kvadratické variace.

**Definice 15.** Je dáno $t > 0$ a nechť $D_n = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n\}$ je dělení intervalu $[0, t]$, tj. rostoucí posloupnost $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = t$. Nechť $X(s)$ je libovolný náhodný proces. Kvadratická variace procesu $X(s)$ vzhledem k dělení $D_n$ má tvar:

$$QV(X, D_n) = \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

**Tvrzení 3.2.13.** *Nechť $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ je standardní Brownův pohyb. Pak pro $\forall t > 0$ platí s pravděpodobností 1, že*

$$\lim_{n \to \infty} QV(B, D_n[0, t]) = t$$

## 3.3 Stochastický kalkulus

V poslední sekci této práce se budu zabývat úvodem do stochastického kalkulu, který je nástrojem pro odvození dynamické teorie portfolia. V rámci toho uvidíme, jak se pracuje s Brownovým pohybem v diferenciálních rovnicích.

### 3.3.1 Geometrický Brownův pohyb

V předchozím textu jsme uvedli, že Brownův pohyb může v dynamické teorii portfolia sloužit k popisu pohybu cen aktiv na kapitálových trzích. Ovšem standardní Brownův pohyb ve své základní podobě ještě tento pohyb cen dokonale neukazuje. Například proto, že standardní Brownův pohyb začínající v kladném bodě se v nějakém čase skoro jistě dostane pod hodnotu nula. Ovšem ceny aktiv na kapitálových trzích pod nulu nikdy neklesají.

Proto vznikl model, který je pro popis pohybu cen aktiv vhodnější, přičemž Brownův pohyb je jeho součástí:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t),$$

kde $\mu$ reprezentuje okamžitou míru výnosu z bezrizikového aktiva, $\sigma$ pak volatilitu rizikových cenných papírů v portfoliu a $dB(t)$ změnu Brownova pohybu v tomto časovém okamžiku. Stochastický proces $S(t)$ se nazývá geometrický Brownův pohyb.

Problémem je, že se tato rovnice nedá interpretovat jako běžná diferenciální rovnice, protože Brownův pohyb není diferencovatelný. Tento problém vyřešil Itô, který odvodil nástroje, jimiž lze počítat diferenciální rovnice obsahující stochastické integrály. Odstavce 3.3.2 a 3.3.1 poslouží jako úvod do Itôova kalkulu. Jeho samotná aplikace při odvození dynamické teorie portfolia je pak další komplexní a složitou kapitolou, která však již leží mimo rámec a rozsah této diplomové práce.

### 3.3.2 Stochastický integrál

Stochastický kalkulus musí začít vymezením stochastického integrálu $I(t)$:

$$I(t) = \int_0^t \rho(s) dB(s) \tag{3.3.1}$$

kde $B(s)$ je Brownův pohyb, $\rho(s)$ je náhodný proces, jehož hodnota v čase $s$ záleží pouze na hodnotách Brownova pohybu do času $s$. Tento integrál dostaneme, jak bývá zvykem u konstrukcí integrálů, pomocí aproximace. Nechť

$0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = t$ je dělení časového intervalu $[0, t]$. Pak můžeme stochastický integrál $I(t)$ aproximovat sumou

$$\sum_{j=1}^{k} \rho(t_{j-1})(B(t_j) - B(t_{j-1})) \tag{3.3.2}$$

Dále postupujeme běžným způsobem. Zjemňujeme dělení, až se norma dělení blíží k nule, potom suma (3.3.2) konverguje k náhodné veličině $I(t)$.

*Poznámka.* Důležité je, aby člen $\rho(t_{j-1})$ byl vyčíslován v levém krajním bodě intervalu $[t_{j-1}, t_j]$, přes nějž se bere přírustek Brownova pohybu. Pokud by $\rho$ bylo portfolium a $B$ ceny jeho aktiv, pak by to právě znamenalo, že nejprve vybíráme portfolium a až poté sledujeme změnu ceny.

Stochastický integrál ve tvaru (3.3.1) můžeme vnímat jako stochastický proces, měníme-li horní mez integrace $t$. Důležitá vlastnost stochastického integrálu $I(t)$ je velikost jeho střední hodnoty.

$$E \int_0^t \rho(s) dB(s) = 0 \qquad \text{pro } \forall t \geq 0$$

Je to důsledkem toho, že $\rho(s)$ závisí pouze na Brownově pohybu do času $s$, tedy podle vlastností Brownova pohybu je $\rho(t_{j-1})$ nezávislé na změně $B(t_j) - B(t_{j-1})$ v sumě (3.3.2).

### 3.3.3 Itôova formule

Itôova formule je klíčovým prvkem stochastického kalkulu. Vyjadřuje se v mnoha různých formách s různým stupněm zobecnění. Formulace z věty 3.3.1 patří k těm nejjednodušším.

**Věta 3.3.1.** *Nechť $u(x, t)$ je funkce $x \in \mathbb{R}$ a $t \geq 0$, která je spojitě diferencovatelná v $t$ a dvakrát spojitě diferencovatelná v $x$ a nechť $B(t)$ je Brownův pohyb. Označme $u_t, u_x$ a $u_{xx}$ první, respektive druhé parciální derivace $u$ podle $t$ a $x$. Potom platí*

$$u(B(t), t) - u(0, 0) = \int_0^t u_x(B(s), s) dB(s) + \int_0^t u_t(B(s), s) ds + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t u_{xx}(B(s), s) ds$$

**Příklad:**
Nechť $u(x,t) = x^2 - t$.
Vyjádřeme si potřebné parciální derivace:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= -1 \\ u_x(x,t) &= 2x \\ u_{xx}(x,t) &= 2 \end{aligned}$$

Použitím Itôovy formule dostáváme

$$\begin{aligned} B(t)^2 - t &= \int_0^t 2B(s)dB(s) + \int_0^t -ds + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds \\ &= 2\int_0^t B(s)dB(s) \end{aligned}$$

**Příklad:**
Nechť $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou dané konstanty.
Parciální derivace jsou:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \beta u(x,t) \\ u_x(x,t) &= \alpha u(x,t) \\ u_{xx}(x,t) &= \alpha^2 u(x,t) \end{aligned}$$

Z Itôovy formule dostáváme:

$$\begin{aligned} u(B(t),t) &= e^0 + \alpha \int_0^t u(B(t),t)dB(t) + \beta \int_0^t u(B(t),t)dt + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t u(B(t),t)dt \\ &= 1 + \alpha \int_0^t u(B(t),t)dB(t) + (\beta + \frac{1}{2}\alpha^2) \int_0^t u(B(t),t)dt \end{aligned}$$

Položíme-li $S(t) = u(B(t),t)$ a rovnici zderivujeme, dostaneme

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dB(t) + (\beta + \frac{1}{2}\alpha^2)dt$$

Speciálně, jestliže $\alpha = \sigma$, $\beta = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$, pak je $S(t)$ řešením stochastické diferenciální rovnice geometrického Brownova pohybu

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t).$$

# Přílohy

Zde jsou uvedeny programy, pomocí nichž byly vytvořeny některé obrázky v této práci. Tyto programy jsou funkční skripty pro Matlab.

**Generování přípustných množin trísložkových portfolií**

```
clear all
close all
clc

    % Volba očekávaných výnosů
r1 = 3;
r2 = 4.5;
r3 = 5;

    % Volba rizika změny výnosu
s1 = 1;
s2 = 1.5;
s3 = 2.5;

    % Volba kovariancí
c12 = 0;
c13 = -1;
c23 = 0;

    % Vytvoření kovarianční matice
cov = [s1^2, s1*s2*c12, s1*s3*c13;
s1*s2*c12, s2^2, s2*s3*c23;
s1*s3*c13, s2*s3*c23, s3^2];

    for i = 1 : 15000
```

```
% Náhodné generování vah aktiv v portfoliu
a1 = rand;
a2 = (1 - a1)*rand;
a3 = 1 - a1 - a2;
a = [a1, a2, a3];

% Výpočet výnosu a rizika portfolia
rp(i) = a1*r1 + a2*r2 + a3*r3;
sp(i) = sqrt(a*cov*a');

% Výpočet výnosu a rizika "okrajových" dvousložkových portfolií
r12(i) = a1*r1 + (1-a1)*r2;
s12(i) = sqrt(a1^2*s1^2 + (1-a1)^2*s2^2 + 2*c12*s1*s2*a1*(1-a1));
r13(i) = a1*r1 + (1-a1)*r3;
s13(i) = sqrt(a1^2*s1^2 + (1-a1)^2*s3^2 + 2*c13*s1*s3*a1*(1-a1));
r23(i) = a1*r2 + (1-a1)*r3;
s23(i) = sqrt(a1^2*s2^2 + (1-a1)^2*s3^2 + 2*c23*s2*s3*a1*(1-a1));

end

% Vykreslení výsledku
hold on
plot(sp, rp, '.' );
axis([0, 1.1*max(sp), 2.5, 1.1*max(rp)]);
plot(s12, r12, 'k.');
plot(s13, r13, 'k.');
plot(s23, r23, 'k.');
plot(s1, r1, 'r');
plot(s2, r2, 'r');
plot(s3, r3, 'r');
```

**Generování Brownova pohybu jako limity náhodné procházky**
(pro obrázky 3.4, 3.5, 3.6)

```
close all
clear all
clc

% Volba počtu kroků
n = 100000;
```

```
p = zeros(1,n);
t = 1 : n;
krok = 1/sqrt(n);
i = 1;

    % Cyklus pro generování kroků Brownova pohybu

    for i = 2 : n

k = round(rand(1));
if k == 0
k = k - 1;
end
p(1) = 0;
p(i) = p(i - 1) + k*krok;

    end

    % Vykreslení základního Brownova pohybu
figure
subplot(2,2,1)
bp1 = plot(t,p);
title('Brownův pohyb - základ')
grid

    % Vykreslení vybrané části původního procesu
subplot(2,2,2)
bp2 = plot(t(round(n/2):round(n/2) + (n/10)), p(round(n/2):round(n/2) +
(n/10)));
title('Brownův pohyb - výřez')
grid

    % Vykreslení vybrané části z předchozího výřezu
subplot(2,2,3)
bp3 = plot(t(round(n/2+n/20):round(n/2+n/20) + (n/100)),
p(round(n/2+n/20):round(n/2+n/20) + (n/100)));
title('Brownův pohyb - výřez výřezu')
grid
```

**Zrcadlení v Brownově pohybu**
(pro obrázek 3.7)

```
close all
clear all
clc

    % Volba počtu kroků
n = 10000;
p = zeros(1, n);
t = 1 : n;
krok = 1/sqrt(n);
i = 1;
zmena = zeros(1,n);
pocitadlo = 0;

    % Cyklus pro výpočet kroků Brownova pohybu

    for i = 2 : n

k = round(rand(1));
if k == 0
k = k - 1;
end
p(1) = 0;
p(i) = p(i - 1) + k*krok;
if p(i) > 0.4
zmena(i) = i;
end

    end

i = 1;

    % Zachycení bodu, odkud se bude zrcadlit
while (zmena(i) == 0) == (i<n)
i = i+1;
pocitadlo = i;
end

    % Zakreslení výsledku
```

```
figure
hold on
zrcadlo = plot(t, [p(1:pocitadlo), 2*p(pocitadlo) - p(pocitadlo+1:end)],'m');
brown = plot(t, p, 'k');
hold off
grid
```

# Literatura


[1] **Brada J.**: Teorie portfolia, Vysoká škola ekonomická, 1996

[2] **Čámský F.**: Teorie portfolia, Masarykova universita v Brně, 2001

[3] **Duffie D.**: Security Markets, Stochastic Models, Academic Press, 1988

[4] **Ingersoll J.E.**: Theory of Financial Decision Making, Rowman and Littlefield Publishers, 1987

[5] **Lalley S.**: Brownian motion, The Itô Calculus, The Fundamental Theorem of Arbitrage Pricing, http://www.stat.uchicago.edu/~/lalley/Courses/390/

[6] **Markowitz H.**: Portfolio selection, The Journal of Finance, March 1952

[7] **Rosenberg B., Ohlson J.A.**: The Stationary Distribution of Returns and Portfolio Separatin in Capital Markets: A Fundamental Contradiction, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, September 1976

[8] **Sharpe W.F.**: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, The Journal of Finance, September 1964

[9] **Sharpe W.F.**: Capital Asset Prices with and without Negative Holdings, Economics Sciences, December 1990

[10] **Shreve S.E.**: Quantitative Methods for Portfolio Management, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, American Mathematical Society, 1999