Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

Časové škály - jednotný kalkulus pro diferenciální a diferenční rovnice

Bakalářská práce

Brno 2008

Jiří Kamýček

Poděkování

Děkuji panu doc. RNDr. Romanu Hilscherovi, Ph.D. za jeho odborné vedení při psaní této bakalářské práce, za jeho podnětné připomínky a rady, a také především za jeho trpělivost se mnou.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím zdrojů uvedených na konci v seznamu literatury.

V Brně dne 2. června 2008 Jiří Kamýček

Obsah

Úvod

Cílem této bakalářské práce je ukázat způsoby řešení některých diferenciálních a diferenčních rovnic a následně ukázat sjednocující algoritmus pro výpočet obou těchto typů modelů – pomocí časových škál. Předpokládá se přitom znalost učiva probíraná především v kurzech Matematické analýzy I., II. a III.

V první kapitole si pouze velice stručně ukážeme typy některých diferenciálních rovnic a jejich řešení. Jak je napsáno v předchozím odstavci, předpokládá se zde již jistá znalost problému, a proto jsou zde uvedeny pouze nezbytné definice popř. věty.

V druhé kapitole si nejdříve zavedeme několik základních pojmů, které jsou v diferenčním počtu nezbytné. Následně si, tak jako tomu je v první kapitole, ukážeme některé typy diferenčních rovnic a jejich řešení. U těch diferenčních rovnic, u kterých existuje analogie se spojitým modelem (zde máme na mysli především homogenní rovnici 1. řádu a lineární diferenční rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty), je rovněž uvedeno srovnání s řešením obdobné rovnice v diferenciálním počtu.

Třetí nejrozsáhlejší kapitola pojednává o časových škálách, které sjednocují a zobecňují diferenciální a diferenční rovnice. O něco málo podrobněji jsou zde vysvětleny důležité a jiné často používané pojmy, pro ilustraci jsou zde také uvedeny ukázky příkladů některých časových škál. V úplném závěru kapitoly je uvedeno řešení některých typů rovnic na časových škálách spolu se srovnáním s jednotlivými analogiemi rovnic z diferenciálního a diferenčního počtu.

Kapitola 1

Diferenciální rovnice

V této kapitole se budeme zabývat pouze některými typy diferenciálních rovnic a způsoby jejich řešení. Nejdříve začneme jednoduššími rovnicemi prvního řádu, kde si uvedeme i některé speciální tvary. Následovat pak budou diferenciální rovnice vyšších řádů, kterými tuto kapitolu ukončíme.

Definice 1.1. Nechť $y = y(x)$ je funkce jedné reálné proměnné x. Rovnice, ve které se vyskytuje neznámá funkce y společně s jejími derivacemi až do řádu n, se nazývá **obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu.**

Její obecnou podobu lze zapsat implicitně:

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad \text{kde } ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{1.1}$$

Poznámka. Řešením takové rovnice rozumíme libovolnou funkci $y = y(x)$, která ji po dosazení do dané rovnice vyhovuje, tj. má derivace až do příslušného řádu včetně a pro x z určitého intervalu splňuje naši rovnici.

1.1 Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Začněme s nejjednodušším typem diferenciální rovnice – a to rovnicí se separovanými proměnnými.

1.1.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Definice 1.2. Rovnice se separovanými proměnnými jsou rovnice tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{1.2}$$

kde funkce f, g jsou spojité na intervalu $[a, b]$, respektive $[c, d]$ a současně $g \neq 0$ na $[c, d]$.

Postup při řešení rovnic tohoto typu:

Je-li $g \equiv 1$, pak bude rovnice (1.2) ve tvaru $y' = f(x)$. Způsob řešení tudíž nalezneme v teorii primitivních funkcí.

$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Pokud je $f \equiv 1$, lze rovnici (1.2) řešit pomocí inverzních funkcí.

Jestliže nenastane ani jedna z výše uvedených možností, je obecný postup při řešení těchto rovnic následující:

Rovnici (1.2) lze zapsat ve tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

Převedeme výrazy s y na jednu stranu a výrazy s x na druhou

$$\mathrm{d}y = f(x)g(y)\mathrm{d}x, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \frac{f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Dále prointegrujeme obě strany:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)},$$

dostaneme tak obecné řešení naší obecné diferenciální rovnice v implicitním tvaru

$$G(y) = F(x) + c,$$

kde c je libovolná konstanta.

1.1.2 Homogenní rovnice

Dalším typem je takzvaná homogenní diferenciální rovnice, která je typická tím, že se v ní objevují členy ve tvaru $\frac{y}{x}$.

Definice 1.3. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$, $a; b \in Dom(f)$ a zároveň $a < b$. Homogenní rovnicí rozumíme diferenciální rovnici ve tvaru:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.3}$$

Postup řešení:

Pomocí transformace $u = \frac{y}{x}$ převedeme homogenní rovnici na rovnici se separovanými proměnnými. Pokud položíme

$$u = \frac{y}{x},$$

pak
$$y(x) = u(x) \cdot x.$$
Odtud derivací
$$y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x)$$
a dosazením do původní rovnice dostaneme
$$u'(x) \cdot x + u(x) = f(u).$$
Osamostatněním u' obdržíme:
$$u' = \frac{1}{x} \cdot [F(u) - u].$$
Po nalezení řešení dosadíme $u = \frac{y}{x}$ zpět a dostaneme řešení naší původní rovnice (1.3).

Nyní si předchozí rovnici uvedeme v trochu obecnějším tvaru.

1.1.3 Zobecněná homogenní rovnice

Definice 1.4. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $I \subseteq Dom(f)$. Nechť také $\alpha, a, \beta, b, \gamma, c$ jsou reálné konstanty. Pak rovnici tvaru:
$$y' = f\Big(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\Big) \tag{1.4}$$
nazýváme zobecněnou homogenní rovnicí.

Postup řešení:

1. Jestliže $\gamma = c = 0$, je rovnice ve tvaru
$$y' = f\left(\frac{\alpha \cdot x + \beta \cdot y}{a \cdot x + b + \cdot y}\right).$$
Lehkou úpravou převedeme tuto rovnici na homogenní diferenciální rovnici, tedy na tvar
$$y' = f\left(\frac{\alpha + \beta \cdot \dfrac{x}{y}}{a + b \cdot \dfrac{x}{y}}\right).$$

2. Pokud $\gamma^2 + c^2 \neq 0$, řešíme systém lineárních rovnic:
$$\begin{aligned} \alpha \cdot m + \beta \cdot n + \gamma &= 0 \\ a \cdot m + b \cdot n + c &= 0 \end{aligned}$$

a položíme

$$x = u + m, \qquad y = v + n,$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$$

Naše rovnice se tak transformuje na

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{\alpha \cdot u + \beta \cdot v}{a \cdot u + b \cdot v}\right),$$

což je tvar popsaný v předcházejícím bodě.

1.1.4 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Nyní si ukažme další důležitý typ diferenciální rovnice, kterým je rovnice lineární. Při demonstraci postupu řešení si uvedeme pouze tzv. metodu variace konstant. V literatuře lze nalézt i tzv. metodu integračního faktoru. Pro naši potřebu však bude bohatě postačovat metoda popsaná zde.

Definice 1.5. Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a, b]$, $a; b \in Dom(f)$ a zároveň $a < b$. Rovnici tvaru:

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{1.5}$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1.řádu.

Za předpokladu, že funkce f a g jsou spojité, vyplývá, že existuje jediné řešení počáteční (Cauchyovy) úlohy

$$y(x_0) = y_0,$$

kde $x_0 \in \langle a, b\rangle$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné.

Postup řešení:
V případě, že $g(x) \equiv 0$, je rovnice (1.5) ve tvaru

$$y' = f(x)y \tag{1.6}$$

a nazýváme jí *homogenní* diferenciální rovnicí. Pokud $g(x) \not\equiv 0$, nazýváme jí *nehomogenní* diferenciální rovnicí.

Homogenní rovnice je speciálním případem diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, proto stejným postupem jako při řešení těchto rovnic integrujeme náš výraz:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = f(x)\mathrm{d}x$$

a dostaneme tak:

$$\ln|y| = \int f(x)\mathrm{d}x + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$.

Obecné řešení má tedy tvar:

$$y = C \cdot e^{\int f(x)\mathrm{d}x}, \tag{1.7}$$

kde C je libovolná konstanta.

Získali jsme obecné řešení, z něhož můžeme pomocí počátečních podmínek získat partikulární řešení.

Uvažujme nyní $g \not\equiv 0$. Pak rovnici

$$y' = f(x)y + g(x)$$

s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ budeme řešit pomocí *metody variace konstant.*

Metoda variace konstant spočívá v nahrazení konstanty C, v obecném řešení homogenní rovnice, funkcí $C(x)$. To znamená, že vyjádření (1.7) nahradíme tvarem

$$y = C(x) \cdot e^{\int f(x)\mathrm{d}x}. \tag{1.8}$$

Pak tedy

$$y' = C'(x) \cdot e^{\int f(x)\mathrm{d}x} + C(x) \cdot e^{\int f(x)\mathrm{d}x} \cdot f(x).$$

Dosazením do naší původní rovnice $y' = f(x)y + g(x)$ získáme následující tvar:

$$C'(x) \cdot e^{\int f(x)\mathrm{d}x} + C(x) \cdot e^{\int f(x)\mathrm{d}x} \cdot f(x) = f(x)C(x) \cdot e^{\int f(x)\mathrm{d}x} + g(x)$$

po úpravě:

$$C'(x) = g(x) \cdot e^{-\int f(x)\mathrm{d}x}$$

a dále tedy po prointegrovaní obou stran dostaneme:

$$C(x) = \int g(x) \cdot e^{-\int f(x)\mathrm{d}x} + C_1$$

Po dosazení do rovnice(1.8) tak obdržíme obecný tvar řešení naší nehomogenní diferenciální rovnice (1.5), který vypadá takto:

$$y = \left(\int g(x) \cdot e^{-\int f(x)\mathrm{d}x} + C_1\right) e^{\int f(x)\mathrm{d}x},$$

kde C_1 je libovolná konstanta.

Ve zbytku této části, ve které se zabýváme diferenciálními rovnicemi 1. řádu, si ukážeme speciální tvary diferenciálních rovnic. Začněme tedy nejdříve Bernoulliovou rovnicí, dále se pak zabývejme rovnicí nerozřešenou k derivaci, Lagrangeovou, Clairautovou a exaktní diferenciální rovnicí.

1.1.5 Bernoulliova rovnice

Definice 1.6. Nechť funkce $a(x), b(x)$ jsou spojité na intervalu $[c, d]$, $c < d, b(x) \not\equiv 0$ a zároveň $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Rovnice tvaru:

$$y' = a(x)y + b(x)y^r \tag{1.9}$$

se nazývá Bernoulliova diferenciální rovnice.

Poznámka. Pokud by $r = 0$ nebo $r = 1$ jednalo by se o lineární rovnici, jež je popsána výše.

Postup při řešení takovýchto rovnic:
Provedeme transformaci

$$u(x) = y^{1-r}(x)$$

na lineární diferenciální rovnici 1. řádu, neboť v tomto případě

$$u' = (1 - r) \cdot [a(x)u + b(x)] \,. \tag{1.10}$$

Z této lineární rovnice (1.10) obdržíme všechna řešení rovnice (1.9), pro které $y \neq 0$.
Je–li $r > 0$, je také $y \equiv 0$ řešením rovnice (1.9).

Příklad 1.7. Mějme zadanou rovnici

$$y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{y}.$$

Pokusme se určit řešení této rovnice. Jak je napsáno v postupu řešení Bernoulliho rovnice, zavedeme substituci pro $r = -1$

$$y^2 = u.$$

Derivováním dostaneme

$$2yy' = u'.$$

Naše původní zadaná rovnice je tedy ve tvaru

$$u' = u\,\frac{2}{x} + 2,$$

jež má obecné řešení

$$u = cx^2 - 2x,$$

tedy

$$y = \pm\sqrt{cx^2 - 2x}.$$

1.1.6 Rovnice nerozřešené vzhledem k derivaci

Definice 1.8. Rovnice nerozřešená vzhledem k derivaci je rovnice 1. řádu tvaru:

$$F(x, y, y') \; = \; 0. \tag{1.11}$$

Rovnice tohoto typu lze za určitých předpokladů řešit pomocí tzv. *metody derivování* (metody zavedení nového parametru). Uvažujme například rovnice rozřešené vzhledem k x nebo y:

$$y = f(x, y').$$

Položíme

$$y' = p,$$

konkrétně $y'(x) = p(x)$ a provedeme derivování podle x:

$$p = f'_x \cdot 1 + f'_p \cdot p',$$

což je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci p. Potom lze vypočítat p':

$$p' = \frac{p - f'_x}{f'_p}.$$

Tuto rovnici již lze vyrešit postupy, které jsou uvedeny v předcházejících typech diferenciálních rovnic. Po získání p dosadíme do vztahu $y'(x) = p(x)$ a následně obě strany prointegrujeme.

Analogicky řešíme i rovnici

$$x = f(y, y').$$

Položme $y' = p$ a uvedenou rovnici nyní derivujeme podle y.
Pak získáme:

$$x' = f'_y + f'_p \cdot p' \qquad \Longrightarrow \qquad p' = \frac{\frac{1}{p} - f'_y}{f'_p},$$

kde $x' = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$. Tento tvar již lze vypočíst podobně jako u rovnice uvedené o pár řádků výše.

Poznámka. Speciálními případy těchto rovnic řešitelných pomocí metody derivování jsou:

- Lagrangeova rovnice : $y = f(y')x + g(y')$
- Clairautova rovnice : $y = y'x + g(y')$

1.1.7 Lagrangeova rovnice

Definice 1.9. Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $[a, b]\,, a < b$. Rovnici ve tvaru

$$y = f\left(y'\right)x + g\left(y'\right) \tag{1.12}$$

nazýváme *Lagrangeovou* diferenciální rovnicí 1. řádu.

Rovnici vyřešíme následujícím způsobem:
Nahradíme-li za $y' = p$, dostaneme

$$y = f(p)x + g(p). \tag{1.13}$$

Derivujme podle proměnné x. Získáme tak:

$$p = f(p) + \left[xf'(p) + g'(p)\right]p'.$$

Počítejme nejdříve pro $f(p) \neq p$, pak:

$$p' = \frac{xf'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)},$$

což je lineární diferenciální rovnice vzhledem k proměnné x. Řešením této rovnice je funkce $x = \varphi(p)$. Potom řešení rovnice (1.12) je

$$x = \varphi(p), \quad y = f(p)\varphi(p) + g(p).$$

Nyní počítejme pro $f(p) = p$. Má-li funkce f takovou vlastnost, že v nějakém bodě definičního oboru platí

$$f(a) = a,$$

pak je lineární funkce

$$y = xf(a) + g(a)$$

singulárním řešením rovnice (1.12).

1.1.8 Clairautova rovnice

Definice 1.10. Nechť je funkce g spojitá na intervalu $[c, d]\,, c < d$. Rovnici tvaru

$$y = y'x + g\left(y'\right) \tag{1.14}$$

nazveme *Clairautovou* diferenciální rovnicí 1. řádu. Tato rovnice je speciálním případem Lagrangeovy rovnice, pro $f\left(y'\right) \equiv y'$.

Postup řešení:
Stejně tak jako u Lagrangeovy rovnice zavedeme substituci $y' = p$ a derivujeme podle x. Dostaneme tak:

$$p = p + (x + g'(p))\, p',$$

to jest

$$p'\, (x + g'(p)) = 0.$$

Je-li

$$p' = 0, \text{ pak je } p = a, a \in \mathbb{R}$$

a obecným řešením jsou tak lineární funkce

$$y = ax + g(a).$$

Je-li $x + g'(p) = 0$, je singulární řešení zadané parametricky rovnicemi:

$$x = -g'(p), \quad y = -pg'(p) + g(p).$$

Poznámka. Zmiňme zajímavý vztah mezi jednotlivými řešeními Clairautovy rovnice. Každá přímka obecného řešení je také tečnou ke křivce singulárního řešení.

Příklad 1.11. Pokusme se vyřešit rovnici

$$y = xy' + a\sqrt{1 + (y')^2}\,,$$

kde a je libovolná konstanta.

Pokud je $a = 0$, je rovnice ve tvaru $y = xy'$ a její řešení je tak ve tvaru $y = Cx$.

Položíme–li $p = y'$, pak $g(y') = a\sqrt{1 + (y')^2}$ a vypočteme si g'' pro $a \neq 0$

$$g'' = \frac{-\,a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Můžeme tedy použít metody derivování. Obdržíme tak:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left[x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}\right] = 0.$$

Tedy

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}.$$

1.1.9 Exaktní diferenciální rovnice

Definice 1.12. Rovnice

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{1.15}$$

se nazývá *exaktní diferenciální rovnice.*

Jestliže výraz

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

je úplným diferenciálem $dF(x,y)$ funkce $F(x,y)$ a navíc, za předpokladu spojitosti M_y a N_x musí platit:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,. \tag{1.16}$$

Za výše uvedených podmínek hledáme řešení v podobě funkce $u(x,y)$, pro jejíž totální diferenciál platí rovnice

$$\mathrm{d}u = 0.$$

Hledáme tedy funkci, pro kterou platí

$$u'_x = M(x,y) \quad \text{a} \quad u'_y = N(x,y).$$

Z těchto dvou rovnic lze funkci u vypočítat. Podmínka (1.16) je důsledkem Schwartzovy věty o záměně, aplikované na řešení $u = u(x,y)$ naší rovnice.

Poznámka.

1. Není li splněna podmínka exaktnosti, tj. podmínka (1.16), lze za velmi obecných předpokladů násobením tzv. integračním faktorem

$$\eta = \eta(x,y),$$

   získat exaktní diferenciální rovnici ve tvaru:

$$\eta M \mathrm{d}x + \eta N \mathrm{d}y = 0.$$

2. V tomto smyslu lze na exaktní diferenciální rovnici převést například i rovnici se separovanými proměnými, lineární rovnici a další.

Ukončili jsme již část zabývající se rovnicemi prvního řádu a nyní se zde budeme zabývat dvěma typy diferenciálních rovnic vyššího řádu. Konkrétně se bude jednat o lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty a Eulerovy rovnice. Pro připomenutí si zde uvedeme větu o superpozici, definici fundamentálního systému i metodu jeho řešení.

1.2 Diferenciální rovnice vyšších řádů

1.2.1 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Definice 1.13. Nechť $a_0, \dots, a_n$ jsou reálná, libovolně zvolená čísla, $n \in \mathbb{N}$. Dále nechť $f(x)$ je funkce reálné proměnné, spojitá na intervalu I (obvykle $I = \mathbb{R}$). Pak rovnici

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(x) \tag{1.17}$$

nazýváme *lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu s konstantními koeficienty.*

Za výše uvedených předpokladů lze dokázat, že existuje jediné řešení y takovéto rovnice vyhovující počátečním podmínkám:

$$y^{(i-1)}(x_0) = c_i, \qquad \text{pro } (i = 1, \dots, n), \text{ kde } x_0 \in I, c_1 \dots c_n \in \mathbb{R} \text{ libovolné.}$$

Poznámka. Pokud $f(x) \equiv 0$, rovnice se nazývá homogenní. Je-li $f(x) \not\equiv 0$, rovnice se nazývá nehomogenní.

Zabývejme se tedy nejdříve homogenní rovnicí. Řešení této rovnice nám pak poslouží k nalezení všech řešení nehomogenního tvaru lineární rovnice n-tého řádu.

1.2.2 Homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Jak lze vidět z Definice 1.13 a z předchozí poznámky, je homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty, rovnice ve tvaru:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0. \tag{1.18}$$

Označme

$$L_n(y)(x) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y.$$

Věta 1.14. (O superpozici)
Je-li u řešením rovnice $L_n(y) = f_1(x)$ a v řešením rovnice $L_n(y) = f_2(x)$, pak pro $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ je funkce

$$y = c_1 u + c_2 v$$

řešením rovnice

$$L_n(y) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x).$$

Definice 1.15. *Fundamentální systém* homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je n-prvková množina funkcí, které jsou lineárně nezávislé a kde každá je řešením dané rovnice.

Metoda konstrukce fundamentálního systému homogenní lineární diferenciální rovnice

$$L_n(y) = 0:$$

1. Zkonstruujeme charakteristický polynom $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ a najdeme kořeny této charakteristické rovnice (včetně násobností).

(i) Pokud jsou řešením charakteristické rovnice všechny kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reálné a navzájem různé, pak řešením rovnice (1.18) jsou funkce

$$e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}, \tag{1.19}$$

které zároveň tvoří fundamentální systém řešení.

(ii) Jestliže má charakteristická rovnice $k, k < n$ různých kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ s násobností $m_1, \ldots, m_k$ tak, že $m_1 + \cdots + m_k = n$, pak řešením rovnice (1.18) je

$$e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \ldots, x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}, \tag{1.20}$$

jež tvoří fundamentální systém řešení, pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

(iii) Má–li charakteristický polynom m-násobný komplexní kořen, pak je také jeho řešením i jeho komplexně sdružený tvar. Proto ke každé dvojici m–násobných kořenů odpovídá $2m$ reálných řešení

$$x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{k-2}e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{1.21}$$

$$x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x, x^{k-2}e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{1.22}$$

které jsou navzájem lineárně nezávislé a všechny takové funkce tvoří fundamentální systém řešení naší lineární diferenciální rovnice $L_n(y) = 0$.

2. Označíme–li pro jednoduchost všech těchto n řešení rovnice (1.18) $y_1, y_2 \ldots, y_n$, pak můžeme napsat, že:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x),$$

je obecné řešení rovnice (1.18), kde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.

1.2.3 Nehomogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Tato rovnice je stejná jako homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty s tím rozdílem, že na pravé straně se zde vyskytuje funkce reálné proměnné $f(x)$. Pro názornost zde ukažme její tvar:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(x). \tag{1.23}$$

Pro vyřešení tohoto typu diferenciální rovnice použijeme tzv. *metodu variace konstant.* Nejdříve zkonstruujeme charakteristický polynom rovnice (1.23), ale bez její pravé strany. Najdeme obecné řešení této homogenní rovnice

$$L_n(y) = 0, \quad \text{tedy } y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x).$$

Kde $y_i, i = 1, \ldots, n$ je fundamentální systém homogenní rovnice.

Dále předpokládejme, že řešením

$$L_n(y) = f(x)$$

bude

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$$

se stejnými $y_1, \ldots, y_n$.

Po dosazení do původní rovnice

$$L_n(y) = f(x)$$

získáme systém n-lineárních rovnic s neznámými $c_i'(x)$, pro $i = 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned}
&c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_n' y_n = 0 \\
&c_1' y_1' + c_2' y_2' + \cdots + c_n' y_n' = 0 \\
&\quad\vdots \\
&c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\
&c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x)
\end{aligned}$$

Protože determinant soustavy (tzv. *Wronskián*) fundamentálního systému je různý od nuly

$$\begin{vmatrix}
y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\
y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)}
\end{vmatrix} \neq 0,$$

existuje jednoznačné řešení této soustavy.

Integrací obdržíme funkce $c_i(x)$ pro $i = 1, \ldots, n$ a dosazením do předpokládaného tvaru řešení, získáme obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty. Lze dokázat, že řešení lze vždy vyjádřit ve tvaru:

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x), \quad \text{kde } y_o \text{ je obecné řešení homogenního tvaru a}$$
$$y_p \text{ je libovolné partikulární, řešení } L_n(y) = f(x),$$

tedy

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x)c_1(x) + \cdots + y_n(x)c_n(x), \\ y_o(x) &= C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x), \text{ kde } C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 1.16. Pokusme se najít řešení rovnice

$$y''' - 2y'' + y' = \frac{e^x}{1+x}.$$

Řešení:
Nejdříve určíme obecné řešení homogenního tvaru. Charakteristická rovnice je ve tvaru

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 0$. Fundamentální systém je tedy ve tvaru

$$e^x, xe^x, 1.$$

Ze soustavy rovnic fundamentálního systému

$$\begin{aligned} c_1'e^x + c_2'xe^x + c_3' &= 0 \\ c_1'e^x + c_2'(x+1)e^x &= 0 \\ c_1'e^x + c_2'(x+2)e^x &= \frac{e^x}{1+x} \end{aligned}$$

plyne, že $c_1 = -x, c_2 = \ln(1+x), c_3 = \int_0^x \frac{e^t \mathrm{d}t}{1+t}$. Obecné řešení dané rovnice tedy je

$$y = e^x\left(C_1 + C_2x\right) + C_3 + e^x\left(-x + x\ln(1+x) + \int_0^x \frac{e^t \mathrm{d}t}{1+t}\right).$$

1.2.4 Eulerova diferenciální rovnice

Definice 1.17. Nechť $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ a funkce $f = f(x)$ je definovaná na intervalu I. Eulerova diferenciální rovnice je rovnice ve tvaru:

$$a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = f(x), \tag{1.24}$$

zapsáno ve zkráceném tvaru

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x^{n-i}y^{(n-i)} = f(x), \quad \text{kde } x > 0,\ y^{(0)} = y. \tag{1.25}$$

Tato rovnice je rovněž lineární diferenciální rovnice n-tého řádu, ale narozdíl od té předchozí s *nekonstantními koeficienty.*

Tuto rovnici lze řešit buď pomocí substituce

$$x = e^t$$

nebo pomocí předpokládaného řešení

$$y = x^\lambda.$$

Ukažme tedy nejdříve řešení pomocí substituce $x = e^t$:

Jak je uvedeno v [7, strana 38]:

Eulerovu rovnici lze převést na rovnici s konstantními koeficienty substitucí

$$x = e^t,$$

což je ekvivalentní se zápisem

$$t = \ln x.$$

Pak platí

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},$$

dosadíme za $t, t = \ln x$, a dostáváme

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{x}.$$

Obdobným výpočtem, který přenecháme čtenáři jako lehké procvičení, lze ukázat tvary $y', y'', y''', \dots y^{(n)}$. Ukažme si zde jen výsledek pro první tři derivace funkce y, tedy pro y', y'', y'''.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{x} \\
y'' &= \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \\
y''' &= \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \frac{1}{x^3}.
\end{aligned}$$

Pokud dosadíme do naší Eulerovy rovnice (1.24) výše uvedené derivace vypočtené až do požadovaného řádu n, dostaneme lineární rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty a po stanovení jejího obecného řešení a následném dosazení za $t, t = \ln x$, obdržíme výsledek rovnice (1.24).

Nyní předpokládejme, že řešení Eulerovy rovnice (1.24) je

$$y = x^{\lambda}.$$

Opět si určeme derivace funkce y až do požadovaného řádu n:

$$\begin{aligned} y' &= \lambda x^{\lambda - 1} \\ y'' &= \lambda (\lambda - 1) x^{\lambda - 2} \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \lambda (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) x^{\lambda - n}. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (1.24) obdržíme rovnici

$$\begin{aligned} a_n \lambda (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) x^n x^{\lambda - n} + \dots \\ + a_2 \cdot \lambda (\lambda - 1) x^2 x^{\lambda - 2} \\ + a_1 \cdot \lambda x x^{\lambda - 1} + \dots + a_0 x^{\lambda} = 0. \end{aligned}$$

Po zkrácení členů x^{λ} dostaneme

$$a_n \lambda (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + \dots + a_2 \lambda (\lambda - 1) + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

a roznásobením všech závorek obdržíme charakteristickou rovnici kterou již snadno vyřešíme. Totožnou charakteristickou rovnici bychom získali při řešení této úlohy pomocí substituce $x = e^t$.

Jak je uvedeno v [7, strana 40]

1. Má-li charakteristická rovnice všechny kořeny reálné, různé $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, pak obecné řešení rovnice je tvaru

$$y = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} + \dots + c_n x^{\lambda_n}.$$

2. Má-li charakteristická rovnice kořen λ_1 k-násobný, pak se v řešení rovnice objeví člen

$$\left(c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x + \dots + c_k \ln^{k-1} x\right) x^{\lambda_1}$$

3. Má-li charakteristická rovnice dvojici komplexně sdružených k-násobných kořenů $\beta \pm i\gamma$, pak se v řešení rovnice objeví člen

$$\begin{aligned} x^{\beta} \left(c_1 + c_2 \ln x + \dots + c_k \ln^{k-1} x\right) \cos (\gamma \ln x) \\ + x^{\beta} \left(c_{k+1} + c_{k+2} \ln x + \dots + c_{2k} \ln^{k_1} x\right) \sin (\gamma \ln x) \end{aligned}$$

Partikulární řešení určíme metodou variace konstant, popřípadě metodou neurčitých koeficientů, je-li funkce $f(x)$ ve speciálním tvaru. Při použití této metody je nutné předpokládat, že řešení pro různé speciální funkce $f(x)$ je odlišné, než je tomu u lineárních rovnic s konstantními koeficienty.

Příklad 1.18. Mějme Eulerovu rovnici

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x.$$

Pokusme se najít obecné řešení této rovnice.

K vyřešení použijme substituci $x = e^t$. Dosaďme do rovnice vypočítané výrazy pro y', y''. Rovnice se nám tak transformuje na lineární diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = 2e^{3t} - e^t.$$

Vypočítejme tedy kořeny charakteristické rovnice homogenního tvaru

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Kořeny jsou:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2$$

a obecné řešení homogenní rovnice tedy je

$$y_0 = c_1e^t + c_2e^{2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Hledejme nyní tvar partikulárního řešení ve tvaru

$$y_p = Ae^{3t} + Bte^t.$$

Derivováním dostaneme

$$y_p' = 3Ae^{3t} + Be^t + Bte^t,$$
$$y_p'' = 9Ae^{3t} + 2Be^t + Bte^t.$$

Dosaďme zpět do transformovaného tvaru původní rovnice, čímž obdržíme:

$$9Ae^{3t} + 2Be^t + Bte^t - 9Ae^{3t} - 3Be^t - 3Bte^t + 2Ae^{3t} + 2Bte^t = 2e^{3t} - e^t,$$

po úpravě

$$2Ae^{3t} - Be^t = 2e^{3t} - e^t,$$

tedy $A = 1$, $B = 1$.

Obecný tvar je proto

$$y = e^{3t} + te^t + c_1e^t + c_2e^{2t}.$$

Po dosazení do naší původní rovnice za $t = \ln x$ je tedy obecné řešení takovéto:

$$y = x^3 + x\ln x + c_1x + c_2x^2.$$

Kapitola 2

Diferenční rovnice

V této kapitole si nejdříve zavedeme několik pojmů, bez kterých se v diferenčním počtu neobejdeme – například pojmy jako je diference a sumace. Uvedeme si rovněž některé z jejich základních vlastností. Na konci kapitoly přejdeme k diferenčním rovnicím a jejich řešení. U rovnic, jež mají svou analogii v diferenciálním počtu, je uvedeno srovnání postupu při řešení obou typů rovnic. Nejdříve si ale vysvětleme, co to vlastně diference je.

2.1 Pojem a vlastnosti diferenční funkce

Definice 2.1. Nechť funkce $y = y(x)$ je funkce reálné nebo komplexní proměnné definované na množině $\mathbb{M}$, přičemž body $x_0, x_0 + h$ patří do množiny $\mathbb{M}$. Diference funkce y v bodě x_0 je číslo $\Delta_h y(x_0)$ definované vztahem:

$$\Delta_h y(x_0) = y(x_0 + h) - y(x_0). \tag{2.1}$$

Číslo h se nazývá diferenční krok.

Pojmy diference a derivace mají k sobě velmi blízko. Dokonce lze k definici derivace využít pojmu diference.

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h y(x)}{h}\,.$$

Příklad 2.2. Vypočítejte derivaci následující funkce $y(x) = x^2$. Řešení:
$\Delta y(x) = y(x + h) - y(x) = (x + h)^2 - x^2 = x^2 + 2hx + h^2 - x^2 = 2hx - h^2$.
$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2hx-h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$.

Poznámka. Každá množina $\mathbb{M}, \{x_0, x_0 + h, x_0 + 2h \dots\} \in \mathbb{M}$ může být převedena pomocí substituce $x = x_0 + h(s - 1)$, kde s je nová proměnná, na množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$. Tím docílíme toho, že počáteční bod $x_0 = 1$ a diferenční krok $h = 1$.

Uvažujme tedy nadále množinu $M \subseteq N$ a $h = 1$.

Věta 2.3. Nechť c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty a $y(x), z(x)$ jsou funkce definované na množině $\mathbb{M}$. Platí:

1. $\Delta\left(c_1 \cdot y(x) + c_2 \cdot z(x)\right) = c_1 \cdot \Delta y(x) + c_2 \cdot \Delta z(x)$,
2. $\Delta\left(y(x) \cdot z(x)\right) = z(x)\Delta y(x) + y(x+1)\Delta z(x) = y(x)\Delta z(x) + z(x+1)\Delta y(x)$,
3. $\Delta[\frac{y(x)}{z(x)}] = \frac{z(x)\Delta y(x) - y(x)\Delta z(x)}{z(x)z(x+1)}$, pokud $z(x)z(x+1) \neq 0$.

Všimněme si, že vlastnosti, které jsou v této větě uvedeny, jsou velmi podobné vlastnostem derivací funkcí. Objevují se zde však drobné rozdíly – tzv. posuny, které se ve spojitém oboru nevyskytují. I přes značnou podobnost mezi diskrétním a spojitým případem například derivace složené funkce žádnou analogii v diskrétním oboru nemá.

2.2 Diference elementárních posloupností

Uvedeme zde několik základních pravidel pro počítání diferencí posloupností. I zde si všimněte podobnosti se spojitým případem.

Věta 2.4. Nechť c je libovolná konstanta pak:

1. $\Delta c = 0$
2. $\Delta c^x = c^x(c-1)$
3. $\Delta \sin cx = \cos(c-1)\sin cx + \sin cx \cos cx$
4. $\Delta \cos cx = \cos(c-1)\cos cx - \sin cx \sin cx$
5. $\Delta \ln cx = \ln(1 + \frac{1}{x})$

2.3 Zobecněná mocnina, diference vyšších řádů

V této části si zavedeme pojmy zobecněné mocniny a diference vyšších řádů. Dříve než tak uděláme, připomeňme si nejdříve definici a několik základních vlastností gamma funkce $\Gamma(z)$.

Definice 2.5. Nechť reálná část čísla z je kladná. Pak můžeme definovat funkci gamma $\Gamma(z)$ pomocí vztahu:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, \mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

Věta 2.6. Nechť reálná část čísla $z, z \in \mathbb{C}$ je kladná, $\mathrm{Re}(z) > 0$, pak platí:

$$\Gamma(z+1) = \Gamma(z)z.$$

Výše uvedený vztah lze použít pro definici funkce $\Gamma(z), \forall z \in \mathbb{C} - \{0, 1, 2, \dots\}$.

Poznámka. $\Gamma(z)$ ma definiční obor nejen pro všechna $z \in \mathbb{C}$ s kladnou reálnou částí, ale i pro všechna $z < 0$ kromě $z = 0, -1, -2, \dots$.

Nyní přistoupíme k definici zobecněné mocniny.

Definice 2.7. Zobecněná mocnina se značí $t^{(r)}$ a definuje se v závislosti na hodnotě r:

1. Pro $r = 0, 1, 2, \dots$, je $x^{(r)} = x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)$
2. Pokud $r = 0$, pak $x^{(r)} = 1$
3. Jestliže r není celé číslo, pak:

$$x^{(r)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-r+1)}$$

Poznámka. Lze ukázat, že první dva vztahy jsou speciálním případem vzorce uvedeného v bodě 3.

V následující větě ukážeme způsob výpočtu diference zobecněné mocniny. Opět si lze všimnout analogie mezi diferenciálním a diferenčním oborem.

Věta 2.8. Platí:

$$\Delta x^{(r)} = r x^{(r-1)}.$$

Dosud jsme se setkali jen s diferencemi 1.řádu. Zadefinujeme nyní i diference vyšších řádů. Funkci $\Delta z(x) = \Delta(\Delta y(x))$ nazýváme druhou diferencí funkce $y(x)$. Zadefinujme proto diferenci libovolného řádu rekurentně.

Definice 2.9. Nechť $y(x)$ je zadaná funkce, $k \in \mathbb{N}$. Pak definujeme diferenci n-tého řádu tímto způsobem:

$$\begin{aligned}
\Delta^0 y(x) &= y(x) \\
\Delta^1 y(x) &= \Delta y(x) \\
\Delta^2 y(x) &= \Delta(\Delta y(x)) \\
&\vdots \\
\Delta^n y(x) &= \Delta\left(\Delta^{n-1} y(x)\right). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Potom platí

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y(x) &= \Delta\big(\Delta y(x)\big) = \Delta\big(y(x+1) - y(x)\big) = \big(y(x+2) - y(x+1)\big) - \big(y(x+1) - y(x)\big) \\
&= y(x+2) - 2y(x+1) + y(x)
\end{aligned}$$

Indukcí lze dokázat tvar diference n-tého řádu:

$$\Delta^n y(x) = y(x+n) - ny(x+n-1) + \frac{n(n-1)}{2!} y(x+n-2) + \dots + (-1)^n y(x).$$

Což lze zapsat pomocí vzorce:

$$\Delta^n y(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(x+n-k). \tag{2.4}$$

2.4 Pojem sumace – základy sumačního počtu

Zatím jsme počítali jen diference ze zadaných posloupností. Nyní se pokusíme ze zadané diference najít původní posloupnost. Tuto hledanou posloupnost nazýváme sumací dané posloupnosti.

Definice 2.10. Sumaci posloupnosti $y(x)$ značíme $\sum y(x)$ a pod tímto pojmem rozumíme takovou posloupnost $Y(x)$, pro kterou platí:

$$\Delta Y(x) = y(x), \tag{2.5}$$

pro všechna x z definičního oboru funkce y.

Uveďme zde několik základních vlastností sumace. Stejně tak jako existovala analogie mezi diferencí a derivací, existuje i zde analogie mezi sumací a integrálem. Proto pro počítání se sumacemi platí obdobná pravidla jako pro počítání s integrály.

Věta 2.11. Nechť $Y(x)$ je sumací funkce $y(x)$. Pak platí, že každá sumace $y(x)$ je rovna:

$$\sum y(x) = Y(x) + c(x),$$

kde $c(x)$ má stejný definiční obor jako funkce y a zároveň $\Delta c(x) = 0$. (c je libovolná konstanta, $c \in \mathbb{R}$).

Věta 2.12. Nechť $y(x), z(x)$ jsou zadané funkce, pak:

1. $\sum [cy(x)] = c \sum y(x)$, kde c je libovolná konstanta.
2. $\sum [y(x) \pm z(x)] = \sum y(x) \pm \sum z(x)$.
3. $\sum y(x) \Delta z(x) = y(x)z(x) - \sum \Delta y(x) z(x+1)$.

Všimněte si poslední vlastnosti. Jedná se o tzv. sumaci per partes, ale objevuje se nám zde opět posun v posloupnosti $z(x)$.

2.5 Lineární diferenční rovnice prvního řádu

V této části si ukážeme několik diferenčních rovnic prvního řádu a spolu s nimi i tvary jejich řešení. U těch rovnic, které mají svou analogii v diferenciálním počtu je uvedeno srovnání obou tvarů jejich řešení. Nejdříve ale zaveďme označení, které budeme nadále používat.

Poznámka. Pro $x_0 \in \mathbb{N}$ definujeme $\mathbb{N}_{x_0} = \{x_0, x_0+1, \dots\}$.

2.5.1 Homogenní diferenční rovnice

Definice 2.13. Nechť $a(x)$ je zadaná funkce reálné proměnné, $a(x) \neq 0$. Rovnici tvaru:

$$y(x+1) = a(x)y(x), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad x \in \mathbb{N}_{x_0} \tag{2.6}$$

nazveme **homogenní diferenční rovnicí** .

Řešení tohoto typu rovnic lze nalézt pomocí iterace.

$$\begin{aligned} y(x+1) &= a(x_0)y(x_0) = a(x_0)y_0 \\ y(x+2) &= a(x_0+1)y(x_0+1) = a(x_0+1)a(x_0)y_0 \\ y(x+3) &= a(x_0+2)y(x_0+2) = a(x_0+2)a(x_0+1)a(x_0)y_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pomocí matematické indukce lze dokázat, že pro libovolné x platí:

$$y(x) = y(x_0 + x - x_0) = a(x-1)a(x-2)\dots a(x_0)y_0,$$

což lze zapsat jako

$$y(x) = \left[\prod_{i=x_0}^{x-1} a(i)\right] y_0. \tag{2.7}$$

Analogický případ homogenní diferenciální rovnice (1.6) ve tvaru:

$$y'(x) = f(x)y$$

má obecné řešení:

$$y = C \cdot e^{\int f(x)\mathrm{d}x},$$

kde C je libovolná konstanta.

2.5.2 Nehomogenní diferenční rovnice

Definice 2.14. Nechť $a(x), b(x)$ jsou zadané funkce na množině $\mathbb{N}$, $a(x) \neq 0, b(x) \neq 0$ pro $\forall\ x$. Rovnice tvaru:

$$y(x+1) = a(x)y(x) + b(x), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad x \in \mathbb{N}_{x_0} \tag{2.8}$$

se nazývá **nehomogenní diferenční rovnice**.

Postup řešení nehomogenní diferenční rovnice je následující:
Jestliže $a(x) = 1$, pak je naše rovnice ve tvaru:

$$\Delta y(x) = b(x).$$

Což lze jednoduše spočítat a proto:

$$y(x) = \sum b(x) + C, \qquad \text{kde } C \text{ je libovolná konstanta.}$$

Pro všechna jiná $a(x)$ lze řešení nalézt pomocí iterace:

$$\begin{aligned}
y(x_0+1) &= a(x_0)y(x_0) + b(x_0) = a(x_0)y_0 + b(x_0)\\
y(x_0+2) &= a(x_0+1)y(x_0+1) + b(x_0+1)\\
&= a(x_0+1)a(x_0)y_0 + a(x_0+1)b(x_0) + b(x_0+1)\\
y(x_0+3) &= a(x_0+2)y(x_0+2) + b(x_0+2)\\
&= a(x_0+2)a(x_0+1)a(x_0)y_0 + a(x_0+2)a(x_0+1)b(x_0) + a(x_0+2)b(x_0+1)\\
&+ b(x_0+2)
\end{aligned}$$

Opět je zde možné pomocí matematické indukce dokázat vztah pro libovolné $x \in \mathbb{N}_{x_0}$

$$y(x) = \left[\prod_{i=x_0}^{x-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{j=x_0}^{x-1} \left[\prod_{i=j+1}^{x-1} a(i)\right] b(j). \tag{2.9}$$

Analogický případ diferenciální rovnice prvního řádu (1.5) má tvar:

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{2.10}$$

a jeho obecné řešení je:

$$y = \left(\int g(x) \cdot e^{-\int f(x)\mathrm{d}x} + C_1\right) e^{\int f(x)\mathrm{d}x},$$

kde C_1 je libovolná konstanta.

2.5.3 Důležité speciální tvary lineárních diferenčních rovnic prvního řádu

Uveďme zde dva nejdůležitější tvary nehomogenní diferenční rovnice (2.8).

První z nich je tvaru:

$$y(x+1) = ay(x) + b(x), \qquad y(0) = y_0. \tag{2.11}$$

S využitím vzorce (2.9) lze ukázat, že pro libovolné x platí:

$$y(x) = a^x y_0 + \sum_{k=0}^{x-1} a^{x-k-1} b(k). \tag{2.12}$$

Druhý případ má tvar:

$$y(x+1) = ay(x) + b, \qquad y(0) = y_0. \tag{2.13}$$

Použitím vzorce (2.12) dostaneme:

$$y(x) = \begin{cases} a^x y_0 + b\dfrac{a^x - 1}{a - 1}, & \text{pokud } a \neq 1, \\ y_0 + bx, & \text{pokud } a = 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

2.6 Diferenční rovnice vyšších řádů

V této části se budeme zabývat diferenčními rovnicemi vyšších řádů. Ukážeme si zde způsob a tvar řešení homogenní a nehomogenní diferenční rovnice. Na konci každé z těchto dvou částí provedeme srovnání s obdobnou rovnicí v diferenciálním počtu. Začneme nejprve zavedením několika definic.

Definice 2.15. Nechť $b(x)$ a $a_0(x), \dots, a_n(x)$ jsou dané funkce reálné proměnné definované pro všechna $x \geq t_0,\ a_0(x) \neq 0,\ a_n(x) \neq 0$. Rovnici

$$a_n(x)y(x+n) + a_{n-1}(x)y(x+n-1) + \cdots + a_1(x+1)y(x+1) + a_0(x)y(x) = b(x). \tag{2.15}$$

nazýváme **nehomogenní lineární diferenční rovnicí n-tého řádu**.

Pokud $b(x) \equiv 0$ nazveme rovnici

$$a_n(x)u(x+n) + a_{n-1}(x)u(x+n-1) + \cdots + a_1(x+1)u(x+1) + a_0(x)u(x) = 0 \tag{2.16}$$

homogenní lineární diferenční rovnicí.

Věta 2.16. Předpokládejme, že $a_i(x), i = 0, \dots, n$ a $b(x)$ jsou definované funkce pro $x \in \mathbb{N}$. Pak pro jakékoliv x_0 z množiny $\mathbb{N}_{x_0}$ a libovolné počáteční podmínky $y_0, \dots, y_{n-1}$ existuje právě jediné $y(x)$ takové, které splňuje rovnici (2.15), pro $x \in \mathbb{N}_{x_0}$ a $y(x_0 + k) = y_k, k = 0, 1, \dots, n-1$.

V následujících větách se pokusíme charakterizovat obecné řešení rovnice (2.15)

Věta 2.17.

1. Nechť c_1, c_2 jsou libovolné konstanty a u_1 a u_2 jsou řešení rovnice(2.16), pak také $c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$ je řešení této rovnice.

2. Nechť $u(x)$ je řešení (2.16) a $y(x)$ je řešení rovnice (2.15). Pak $u(x) + y(x)$ je řešení rovnice (2.15).

3. Nechť $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou řešení (2.15), pak $y_1(x) - y_2(x)$ je řešení (2.16).

Poznámka. Třetí bod předchozí věty lze interpretovat i takto:
Pokud $z(x)$ je řešení (2.15), pak každé řešení $y(x)$ rovnice (2.15) lza zapsat jako
$y(x) = z(x) + u(x)$, kde $u(x)$ je nějaké řešení rovnice (2.16).

Naším dalším úkolem tedy bude:

1. Najít všechny řešení rovnice (2.16)

2. Najít jedno řešení rovnice (2.15)

K vyřešení prvního problému budeme potřebovat několik definic:

Definice 2.18. Množina funkcí $\{u_1(x), \dots, u_m(x)\}$ je lineárně závislá, jestliže existují alespoň některé nenulové konstanty $c_1, \dots, c_m$ tak, že

$$c_1u_1(x) + \dots c_mu_m(x) = 0, \qquad \text{pro } x = c, c+1, \dots$$

V opačném případě říkáme, že funkce jsou lineárně nezávislé.

Definice 2.19. Množina lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice (2.16) se nazývá *fundamentální množina řešení.*

Zadefinujme nyní matici, která nám bude velice užitečná pro řešení diferenčních rovnic.

Definice 2.20. Takzvaná *Casoratiho matice* je definovaná jako:

$$C(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1(x+1) & u_2(x+1) & \dots & u_n(x+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(x+n-1) & u_2(x+n-1) & \dots & u_n(x+n-1) \end{pmatrix},$$

kde $u_1(x), \dots, u_n(x)$ jsou známé funkce. Determinant této matice $c(x) = \det C(x)$ nazveme *Casoratián*.

$$c(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ \Delta u_1(x) & \Delta u_2(x) & \dots & \Delta u_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{n-1} u_1(x) & \Delta^{n-1} u_2(x) & \dots & \Delta u_n(x) \end{vmatrix}$$

Upozorněme zde na další analogii s diferenciálním počtem: Casoratián hraje v diferenčním počtu stejnou roli jako Wronskián v diferenciálních rovnicích. Tedy, že pokud Casoratián fundamentálního systému je různý od nuly, existuje jednoznačné řešení soustavy.

Věta 2.21. Nechť $u_1(x), \dots, u_2(x)$ jsou nezávislá řešení rovnice (2.16), pak každé řešení $u(x)$ rovnice (2.16) lze zapsat jako:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x), \quad \text{pro libovolné konstanty } c_1, \dots, c_n. \tag{2.17}$$

Tuto rovnici nazveme *obecné řešení* naší rovnice (2.15).

Stejně tak jako u spojitého modelu lze i zde získat z obecného řešení pomocí počátečních podmínek řešení partikulární.

2.6.1 Homogenní lineární diferenční rovnice n-tého řádu

Postup při řešení homogenních lineárních diferenčních rovnic

Nyní se zaměříme na postup při hledání fundamentálního systému řešení rovnice (2.16) pro případ, že se jedná o **lineární diferenční rovnici s konstantními koeficienty** Protože $a_n(x) \neq 0$ můžeme celou rovnici (2.16) podělit a_n, čímž dostaneme:

$$u(x+n) + a_{n-1} u(x+n-1) + \dots + a_0 u(x) = 0, \tag{2.18}$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1}$ jsou konstanty a $a_0 \neq 0$. Způsob řešení je naprosto obdobný jako u řešení diferenciálních rovnic.

1. Zkonstruujeme charakteristický polynom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

a nalezneme charakteristické kořeny λ a to včetně násobností.

(i) Pokud jsou charakteristické kořeny jednoduché, je fundamentální systém řešení množina:

$$G_1 = \{\lambda_1^x, \lambda_2^x, \dots, \lambda_n^x\}$$

Obecné řešení má tedy tvar:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^x, \quad \text{kde } \ c_i \in \mathbb{R}.$$

Analogickým výsledkem homogenní rovnice v diferenciálním počtu pro navzájem různé kořeny charakteristické rovnice jsou funkce

$$e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x},$$

které zároveň tvoří fundamentální systém řešení.

(ii) Pokud kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ mají násobnost $m_1, m_2, \ldots, m_r, \sum_{i=1}^{r} m_i = n$ je fundamentální množina řešení množina:

$$G_2 = \bigcup_{i=1}^{r} \left\{ \lambda_i^x, \binom{x}{1} \lambda_i^{x-1}, \binom{x}{2} \lambda_i^{x-2}, \ldots, \binom{x}{m_i - 1} \lambda^{x-m_i+1} \right\}$$

Tvar obecného řešení v tomto případě je:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^x \left(c_{i0} + c_{i1}x + c_{i2}x^2 + \cdots + c_{im_i-1}x^{m_i-1} \right)$$

V diferenciálním počtu je fundamentálním systémem řešení

$$e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, \ldots, x^{m_i-1} e^{\lambda_i x}, \tag{2.19}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

(iii) Pokud je charakteristický kořen v komplexním tvaru $\lambda = \alpha \pm i\beta$, pak se reálná část řešení rovnice (2.18) dá nalézt pomocí převedení do soustavy polárních souřadnic.

$$\lambda = r\left(\cos\theta \pm i \sin\theta\right), \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad r = \alpha^2 + \beta^2.$$

Protože lineární kombinace řešení také vyhovuje naší rovnici, dostaneme reálná řešení

$$r^x \cos x\theta \quad \text{a} \quad r^x \sin x\theta$$

V diferenciálním počtu, je řešením $2m$ reálných řešení

$$x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^{k-2} e^{\alpha x} \cos(\beta x), \ldots, e^{\alpha x} \cos(\beta x), \tag{2.20}$$

$$x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x), x^{k-2} e^{\alpha x} \sin(\beta x), \ldots, e^{\alpha x} \sin(\beta x), \tag{2.21}$$

které jsou navzájem lineárně nezávislé a všechny takové funkce tvoří fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice $L_n(y) = 0$.

Známe již způsob k nalezení obecného řešení homogenního tvaru diferenční rovnice n-tého řádu.

2.6.2 Nehomogenní lineární diferenční rovnice n-tého řádu

Nyní se vraťme k obecné nehomogenní rovnici (2.15) a jejímu homogennímu tvaru (2.16).

Předpokládejme, že známe n-lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice (2.16), pak za pomoci použití sumací n-tého řádu a *metody variace konstant* získáme všechny řešení rovnice (2.15).

Ukážeme zde výpočet pro $n = 2$ jakožto zjednodušenou verzi obecného postupu.

1. Nechť u_1, u_2 jsou nezávislá řešení rovnice (2.16) druhého řádu. Hledáme řešení rovnice (2.15) ve tvaru:

$$y(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x), \text{ kde } c_1(x), c_2(x) \text{ jsou neznámé.}$$

Pak

$$\begin{aligned} y(x+1) &= c_1(x+1)u_1(x+1) + c_2(x+1)u_2(x+1) \\ &= c_1(x)u_1(x+1) + c_2(x)u_2(x+1) + \Delta c_1(x)u_1(x+1) + \Delta c_2(x)u_2(x+1) \end{aligned}$$

Eliminujeme třetí a čtvrtý výraz zvolením c_1 a c_2 tak, že:

$$\Delta c_1(x)u_1(x+1) + \Delta c_2(x)u_2(x+1) = 0 \tag{2.22}$$

Dále máme:

$$\begin{aligned} y(x+2) &= c_1(x+1)u_1(x+2) + c_2(x+1)u_2(x+2) \\ &= c_1(x)u_1(x+2) + c_2(x)u_2(x+2) + \Delta c_1(x)u_1(x+2) + \Delta c_2(x)u_2(x+2) \end{aligned}$$

2. Nyní dosadíme výše uvedené výrazy $y(x), y(x+1), y(x+2)$ do rovnice (2.15) a osamostatníme členy $c_1(x)$ a $c_2(x)$ čímž obdržíme:

$$\begin{aligned} &a_2(x)y(x+2) + a_1(x)y(x+1) + a_0(x)y(x) = \\ &\qquad c_1(x)\left[a_2(x)u_1(x+2) + a_1(x)u_2(x+1) + a_0(x)u_1(x)\right] \\ &\qquad + c_2(x)\left[a_2(x)u_2(x+2) + a_1(x)u_2(x+1) + a_0(x)u(x)\right] \\ &\qquad\qquad + a_2(x)\left[u_1(x+2)\Delta c_1(x) + u_2(x+2)\Delta c_2(x)\right]. \end{aligned}$$

Pokud u_1 a u_2 vyhovují rovnici (2.16) jsou první dvě závorky rovny nule. Pak $y(x)$ vyhovuje rovnici (2.15) jestliže:

$$u_1(x+2)\Delta c_1(x) + u_2(x+2)\Delta c_2(x) = \frac{b(x)}{a_2(x)} \tag{2.23}$$

3. Stručně řečeno,

$$y(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x)$$

je řešením rovnice (2.15), pokud $\Delta c_1(x), c_2(x)$ vyhovuje lineárním rovnicím (2.22) a (2.23). Tento systém lineárních rovnic má jednoznačné řešení, pokud Casoratiho matice koeficientů $C(x+1)$ má nenulový determinant.

Zobecněný tvar řešení pro rovnice libovolného řádu n zformulujeme v následující větě.

Věta 2.22. Nechť $u_1(x), \dots, u_n(x)$ jsou nezávislá řešení rovnice (2.16). Pak

$$y(x) = c_1(x)u_1(x) + \cdots + c_n(x)u_n(x)$$

je řešením rovnice (2.15), pokud $c_1, \dots, c_n$ vyhovují rovnici:

$$C(x+1)\begin{pmatrix} \Delta a_1(x) \\ \Delta a_2(x) \\ \vdots \\ x\Delta a_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}.$$

Při rešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty, lze řešení vždy vyjádřit ve tvaru:

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x), \quad \text{kde } y_o \text{ je obecné řešení homogenního tvaru a}$$
$$y_p \text{ je libovolné partikulární řešení } L_n(y) = f(x),$$

tedy

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x), \\ y_o(x) &= C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x), \qquad \text{kde } C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 2.23. Najděte obecné řešení diferenční rovnice

$$y(x+2) - 6y(x+1) + 5y(x) = 2^{2x} - 7 \cdot 5^x$$

Nejdříve najděme kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

tedy

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 5$$

Obecné řešení homogenního tvaru původní rovnice má tedy podobu:

$$y_0 = c_1 \cdot 1^x + c_2 \cdot 5^x, \qquad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Najděme nyní tvar partikulárního řešení. Musíme tedy vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \Delta c_1(x) + 5^{x+1}\Delta c_2(x) &= 0 \\ \Delta c_1(x) + 5^{x+2}\Delta c_2(x) &= 2^{2x+1} - 7 \cdot 5^x. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta c_1(x) &= -\frac{1}{2}4^x + \frac{7}{4}5^x, \\ \Delta c_2(x) &= \frac{1}{10}\left(\frac{4}{5}\right)^x - \frac{7}{20.} \end{aligned}$$

Přitom tvar partikulárního řešení předpokládáme

$$c_1(x) = A \cdot 4^x + B \cdot 5^x,$$
$$c_2(x) = C \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x + D \cdot x.$$

Odtud lze porovnáním koeficientů jednotlivých členů zjistit jednotlivé hodnoty A, B, C, D:

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{6}{17}, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = -\frac{7}{20}.$$

Partikulární řešení je tedy ve tvaru

$$y_p = -\frac{1}{16}4^x + \frac{7}{16}5^x - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^x - \frac{7}{20}x.$$

Obecné řešení naší původní nehomogenní diferenční rovnice je tedy:

$$y(x) = c_1 \cdot 1^x + c_2 \cdot 5^x - \frac{1}{16}4^x + \frac{7}{16}5^x - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^x - \frac{7}{20}x.$$

Kapitola 3

Časové škály

Pojem časových škál byl zaveden Stefanem Hilgerem z důvodu potřeby vytvořit teorii, která by mohla sjednotit diskrétní a spojitý model. Jako příklad uveďme delta derivaci y^{Δ} funkce f definované na $\mathbb{T}$ (časová škála), která bude mít takovou vlastnost, že:

- pro $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ bude $f^{\Delta} = y'$ klasickou derivací funkce y, tak jak ji známe,
- pro $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ bude $y^{\Delta} = \Delta y$ diferencí funkce y.

V této kapitole zavedeme několik základních pojmů a vlastností spojených s teorií časových škál. Ukážeme zde také několik příkladů a na samém závěru si uvedeme několik rovnic časových škál spolu s tvary jejich řešení. Tak jako jsme v předešlé kapitole srovnávali diferenční a diferenciální rovnice, tak i zde provedeme srovnání všech tří tvarů řešení a to rovnic u nichž existuje analogie v diferenciálním počtu, v diferenčním počtu a v počtu časových škál.

Uveďme zde na začátek několik nezbytných a základních definic.

Definice 3.1. Časová škála je libovolná neprázdná uzavřená podmnožina reálných čísel. Takovouto množinu budeme značit $\mathbb{T}$.

Poznámka. Časové škály tedy jsou například celá množina $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0$. Také konečné sjednocení uzavřených intervalů, intervalů s přirozenými čísly nebo Cantorova množina je časovou škálou.

Zatímco $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}$, nebo otevřený interval $(0, 1)$ časové škály nejsou.

Definice 3.2. Nechť $\mathbb{T}$ je časová škála. Pro $x \in \mathbb{T}$ zadefinujme *funkci skoku vpřed* označenou jako σ:

$$\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \quad \sigma(x) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > x\}.$$

Zaveďme také *funkci skoku dozadu:*

$$\rho(x) = \sup\{s \in \mathbb{T}, s < x\}.$$

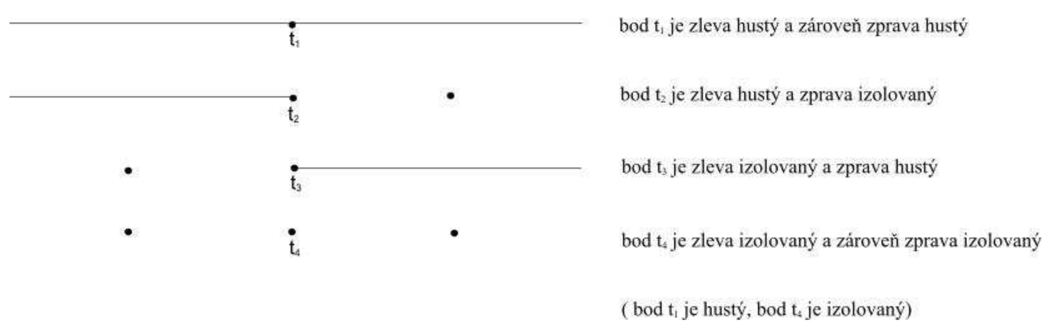
V této definici klademe $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ (tj. $\sigma(x) = x$, pokud $\mathbb{T}$ má maximum v x) a $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ (tj. $\rho(x) = x$, pokud $\mathbb{T}$ má minimum v x). Jestliže $\rho(x) < x$, říkáme, že je bod x *zleva izolovaný*. Pokud $\sigma(x) > x$, o bodu x řekneme, že je *izolovaný zprava*. Body, které jsou zároveň izolované zleva i zprava se nazývají body *izolované.*

Dále také, pokud $x < \sup \mathbb{T}$ a zároveň $\sigma(x) = x$, nazveme bod x *zprava hustý*. Pro $x > \inf \mathbb{T}$ a $\rho(x) = x$ nazveme bod x *hustý zleva*. Body, které jsou zleva i zprava husté nazveme *husté*.

Tabulka 3.1: Klasifikace bodů

bod x je zprava izolovaný	$\sigma(x) > x$
bod x je zprava hustý	$\sigma(x) = x$
bod x je zleva izolovaný	$\rho(x) < x$
bod x je zleva hustý	$\rho(x) = x$
bod x je izolovaný	$\rho(x) < x < \sigma(x)$
bod x je hustý	$\rho(x) = x = \sigma(x)$

Obrázek 3.1: Znázornění klasifikace bodů



Všimněme si, že v předchozí definici jsou $\sigma(x)$ a $\rho(x)$ součástí $\mathbb{T}$, když $x \in \mathbb{T}$. Toto je důsledek našeho předpokladu, že $\mathbb{T}$ je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$.

Definice 3.3. Nechť $\mathbb{T}$ je časová škála. Pro $x \in \mathbb{T}$ zadefinujme funkci μ (*zrnitost časové škály* $\mathbb{T}$):

$$\mu : \mathbb{T} \to [0; \infty), \ \mu(x) = \sigma(x) - x.$$

Dále pokud $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, definujeme funkce:

$$y^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}, y^\varrho : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$$

tak, že $y^\sigma(x) = y(\sigma(x))$ a $y^\varrho(x) = y(\varrho(x))$ pro všechna $x \in \mathbb{T}$, tj. $y^\sigma = y \circ \sigma$ a $y^\varrho = y \circ \varrho$.

Příklad 3.4. 1. Jestliže $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, pak

$$\sigma(x) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > x\} = \inf(x; \infty) = x,$$
$$\rho(x) = \sup\{s \in \mathbb{R} : s < x\} = \sup(-\infty, x) = x.$$

Tudíž každý bod $x \in \mathbb{R}$ je hustý.

Zrnitost je tedy v tomto případě:

$$\mu(x) = 0 \text{ pro všechny } x \in \mathbb{T}.$$

2. Jestliže je $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ pak je pro všechna $x \in \mathbb{Z}$

$$\sigma(x) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > x\} = \inf\{x+1, x+2, x+3, \dots\} = x+1$$
$$\rho(x) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < x\} = \sup\{\dots, x-3, x-2, x-1\} = x-1.$$

Z čehož plyne, že každý bod $x \in \mathbb{T}$ je izolovaný.

Zrnitá funkce tedy v tomto případě je:

$$\mu(x) = 1 \text{ pro všechny } x \in \mathbb{T}.$$

Poznámka. V obou předchozích příkladech je zrnitost μ konstatní funkcí. Dále uvidíme, že tato funkce μ hraje klíčovou roli při další analýze časových škál.

3.1 Derivace

Nyní uvažujme funkci $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Zadefinujeme delta (nebo také Hilgerovu) derivaci funkce y v bodě $x \in \mathbb{T}$.

Definice 3.5. Nechť $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je funkce a $x \in \mathbb{T}$. Pak definujeme $y^{\Delta}(x)$ jako číslo (pokud existuje) s vlastností, že:

ke každému $\epsilon > 0$, existuje okolí U (tj. $U = (x+\delta; x-\delta) \cap \mathbb{T}$ pro $\delta > 0$) tak, že:

$$|\,[y^{\sigma}(x) - y(s)] - y^{\Delta}(x)\,[\sigma(x) - s]\,| \leq \epsilon\,|\sigma(x) - s|$$

pro všechna $s \in U$.
Číslo $y^{\Delta}(x)$ nazýváme *delta* (nebo *Hilgerova*) derivace funkce y v bodě x.

Kromě toho říkáme, že funkce y je delta diferencovatelná (nebo pro jednoduchost jen diferencovatelná) na $\mathbb{T}$, pokud $y^{\Delta}(x)$ existuje pro všechny body $x \in \mathbb{T}$, přičemž $y^{\Delta}(x)$ musí být definováno v případném izolovaném maximu množiny $\mathbb{T}$. Funkce $y^{\Delta} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je pak nazývána (delta) derivací funkce y na $\mathbb{T}$.

Poznámka.

1. Jestliže je $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definována vztahem $y(x) = a, x \in \mathbb{T}$, kde a je libovolná konstanta $a \in \mathbb{R}$, pak $y^\Delta(x) \equiv 0$. Toto je zřejmé, protože pro jakékoli $\epsilon > 0$

$$|y^\sigma(x) - 0 \cdot [\sigma(x) - s] = |a - a| = 0 \leq \epsilon|\sigma(x) - s|,$$

   což platí pro $\forall s \in \mathbb{T}$.

2. Jestliže $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je definována vztahem $y(x) = x$, pro $\forall x \in \mathbb{T}$, pak $y^\Delta(x) \equiv 1$. Toto platí, neboť pro každé $\epsilon > 0$

$$|y^\sigma(x) - 1 \cdot [\sigma(x) - s] = |\sigma(x) - s - \sigma(x) + s| = 0 \leq \epsilon|\sigma(x) - s|,$$

   což opět platí pro $\forall s \in \mathbb{T}$.

Věta 3.6. Nechť $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je daná funkce a nechť $x \in \mathbb{T}$. Pak platí následující:

1. Pokud je f diferencovatelná v bodě x, pak je y v bodě x spojitá.

2. Jestliže je y spojitá v bodě x a bod x je zároveň zprava izolovaný, pak je funkce y v bodě x diferencovatelná a platí:

$$y^\Delta(x) = \frac{y^\sigma(x) - y(x)}{\mu(x)}.$$

3. Jestliže je bod x zprava hustý, pak je funkce y diferencovatelná v bodě x pokud existuje limita

$$\lim_{s \to x} \frac{y(x) - y(s)}{x - s}.$$

   a je to konečné číslo. Pak

$$y^\Delta(x) = \lim_{s \to x} \frac{y(x) - y(s)}{x - s}.$$

4. Pokud je y diferencovatelná v bodě x, pak:

$$y^\sigma(x) = y(x) + \mu(x) y^\Delta(x).$$

Příklad 3.7. Opět ukážeme příklad pro $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ a $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

1. Pro $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ pak z věty 3.6 (3) plyne, že $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je delta diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}$, pokud existuje limita

$$y'(x) = \lim_{s \to x} \frac{y(x) - y(s)}{x - s},$$

   tzn. pokud je funkce y diferencovatelná v bodě x. Pak podle věty 3.6

$$y^\Delta(x) = \lim_{s \to x} \frac{y(x) - y(s)}{x - s} = y'(x)$$

2. V případě, že $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ z věty 3.6(2) plyne, že $y : \mathbb{Z} = \mathbb{R}$ je delta diferencovatelná v $x \in \mathbb{Z}$, tedy:

$$y^{\Delta}(x) = \frac{y^{\sigma}(x) - y(x)}{\mu(x)} = \frac{y(x+1) - y(x)}{1} = y(x+1) - y(x) = \Delta y(x),$$

kde Δ je nám známá diference z předchozí kapitoly.

Dále se budeme snažit nalézt derivace součtu, součinu a podílu diferencovatelných funkcí. Což si ukážeme v následující větě.

Věta 3.8. Předpokládejme, že $y, z : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jsou funkce diferencovatelné v bodě $x \in \mathbb{T}$. Pak:

1. $(y+z)^{\Delta}(x) = y^{\Delta}(x) + z^{\Delta}(x)$.
2. $(ay)^{\Delta}(x) = ay^{\Delta}(x)$, kde a je libovolná konstanta.
3. $(yz)^{\Delta}(x) = y^{\Delta}(x)z(x) + y\left(\sigma(x)\right)z^{\Delta}(x) = y(x)z^{\Delta}(x) + y^{\Delta}(x)z\left(\sigma(x)\right)$.
4. Nechť $y(x)y^{\sigma}(x) \neq 0$ pak:

$$\left(\frac{1}{y}\right)^{\Delta}(x) = -\frac{y^{\Delta}(x)}{y(x)y^{\sigma}(x)}.$$

5. Nechť $z(x)z^{\sigma}(x) \neq 0$ pak:

$$\left(\frac{y}{z}\right)^{\Delta}(x) = \frac{y^{\Delta}(x)z(x - y(x)z^{\Delta}(x)}{z(x)z^{\sigma}(x)}.$$

Věta 3.9. Nechť a je libovolná konstanta a $m \in \mathbb{N}$.

1. Pro funkci y definovanou vztahem: $y(x) = (x-a)^m$ platí:

$$y^{\Delta}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sigma(x) - a\right)^i (x-a)^{m-1-i}$$

2. Za podmínky, že $\left(\sigma(x) - a\right)(x-a) \neq 0$, platí pro funkci z definovanou jako: $z(x) = \dfrac{1}{(x-a)^m}$:

$$z^{\Delta}(x) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{\left(\sigma(x) - a\right)^{m-i}(x-a)^{i+1}}.$$

Příklad 3.10. Ukažme si jak budou vypadat výpočty derivace na časových škálách pro dvě jednoduché funkce.

1. Pro funkci $y(x) = x^2$ platí: $y^{\Delta}(x) = x + \sigma(x)$.
2. Pro funkci $y(x) = \dfrac{1}{x}$ platí: $y^{\Delta}(x) = -\dfrac{1}{x\sigma(x)}$.

3.2 Derivace vyšších řádů

Definice 3.11. Nechť $\mathbb{T} = [a; b]$. Mějme funkci $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Za podmínky, že y^{Δ} je dále diferencovatelná na $[a; \rho(\rho(x))]$, můžeme mluvit o druhé derivaci $y^{\Delta\Delta}$, kde $y^{\Delta\Delta} = \left(y^{\Delta}\right)^{\Delta} : [a; \rho(\rho(b))] \to \mathbb{R}$. Stejně tak definujeme derivaci vyšších řádů.

$$y^{\Delta^n} : \big[a; \underbrace{\rho(\ldots\rho(x))}_{n}\big] \to \mathbb{R}\,.$$

Dále poznamenejme, že pro $x \in \mathbb{T}$ je $\sigma^2(x) = \sigma(\sigma(x))$ a $\rho^2(x) = \rho(\rho(x))$. Stejně tak pro $n \in \mathbb{N}$ lze počítat $\sigma^n(x)$ a $\rho^n(x)$. Pro úplnost dodejme, že $\sigma^0(x) = \rho^0(x) = x$ a $y^0 = y$.

Příklad 3.12. Jestliže je funkce y, z možné derivovat dvakrát neznamená to, že lze dvakrát derivovat i jejich součin $y \cdot z$.

$$(yz)^{\Delta}(x) = y^{\Delta}(x)z(x) + y^{\sigma}(x)z^{\Delta}(x).$$

Jestliže tedy chceme součin funkcí derivovat dvakrát, musíme kromě podmínky, že obě funkce y, z jsou dvakrát diferencovatelné požadovat take diferencovatelnost funkce $y^{\sigma}(x) = y(\sigma(x))$. Pokud je toto splněno, pak:

$$\begin{aligned}(yz)^{\Delta\Delta}(x) &= \left(y^{\Delta}(x)z(x) + y^{\sigma}(x)z^{\Delta}(x)\right)^{\Delta}\\ &= y^{\Delta\Delta}(x)z(x) + y^{\Delta^{\sigma}}(x)z^{\Delta}(x) + y^{\sigma^{\Delta}}(x)z^{\Delta}(x) + y^{\sigma}\sigma(x)z^{\Delta\Delta}(x)\\ &= y^{\Delta\Delta}(x)z(x) + \left[y^{\Delta^{\sigma}}(x) + y^{\sigma^{\Delta}}(x)\right] z^{\Delta}(x) + y^{\sigma}\sigma(x)z^{\Delta\Delta}(x).\end{aligned}$$

Vzorec pro n-tou derivaci je za určitých podmínek popsán v následující větě:

Věta 3.13 (Leibnitzův vzorec pro n–tou derivaci)**.**
Nechť $S_k^{(n)}$ je množina složená ze všech možných "řetězců" délky n, které obsahují přesně k – krát σ a $(n-k)$ – krát Δ. Jestliže existuje y^{Λ} pro $\Lambda \in S_k^{(n)}$, pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(yz)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} y^{\Lambda} \right) z^{\Delta^k}.$$

Příklad 3.14. Nechť $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, pak $y^{\Lambda} = y^{(n-k)}$ pro všechna $\Lambda \in S_k^{(n)}$, kde $y^{(n)}$ značí n–tou derivaci funkce y, pokud existuje. $\left|S_k^{(n)}\right| = \binom{n}{k}$, kde $|M|$ značí velikost množiny M, dostáváme:

$$\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} y^{\Lambda} = \sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} y^{(n-k)} = y^{(n-k)} \sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} 1 = \binom{n}{k} y^{(n-k)},$$

tudíž

$$(yz)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} y^{\Lambda} \right) z^{\Delta^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{(n-k)} z^{(k)}.$$

Toto je běžný Lebnitzův vztah.

3.3 Příklady některých časových škál

V této části se budeme zabývat některými typy různých časových škál.

Příklad 3.15. Nechť $h > 0$ a $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk; k \in \mathbb{Z}\}$. Pak pro $x \in \mathbb{T}$ dostaneme:

$$\sigma(x) = \inf\{s \in \mathbb{T}; s > x\} = \inf\{x + nh; n \in \mathbb{N}\} = x + h$$

a podobně tak dostaneme $\rho(x) = x - h$.

Tudíž každý bod $x \in \mathbb{T}$ je izolovaný a pro všechny $x \in \mathbb{T}$

$$\mu(x) = \sigma(x) - x = x + h - x = h,$$

μ je tedy v tomto případě konstanta.

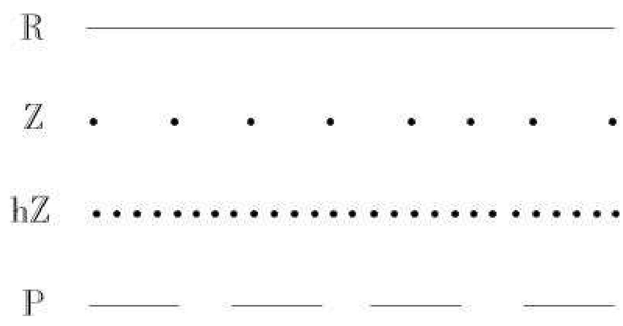
Pro funkci $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ máme:

$$y^{\Delta}(x) = \frac{y(\sigma(x)) - y(x)}{\mu(x)} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}, \qquad \text{pro } \forall x \in \mathbb{T}.$$

Dále

$$\begin{aligned} y^{\Delta\Delta}(x) &= \frac{y^{\Delta}(x+h) - y^{\Delta}(x)}{h}, \\ &= \frac{\frac{y(x+2h)-y(x+h)}{h} - \frac{y(x+h)+y(x)}{h}}{h}, \\ &= \frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2}. \end{aligned}$$

Takto bychom mohli pokračovat dále.



Obrázek 3.2: Některé časové škály.

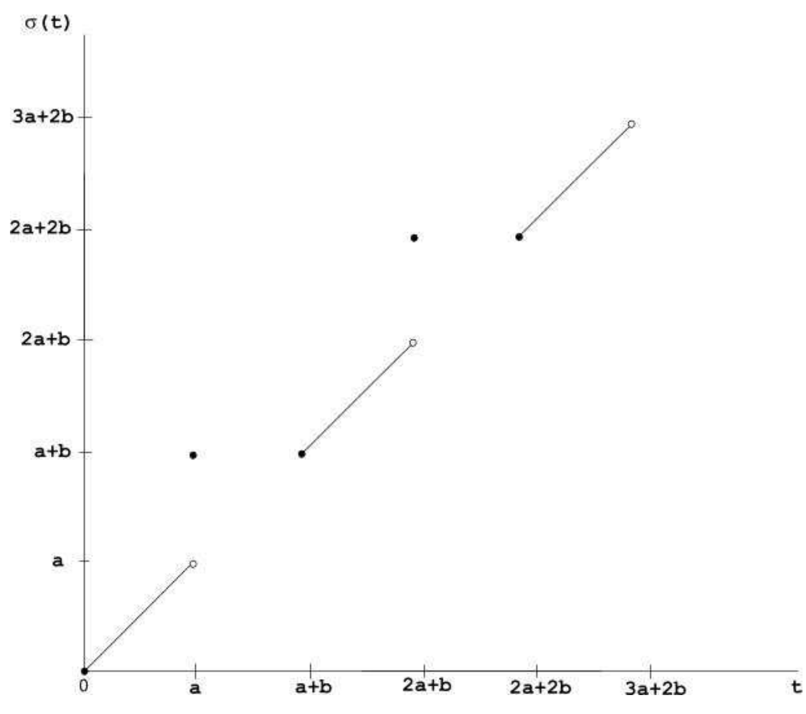
Příklad 3.16. Nechť $a, b > 0$, uvažujme časovou škálu

$$\mathbb{P}_{a,b} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a] .$$

Pak

$$\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a] , \\ x+b & \text{pro } \bigcup_{k=0}^{\infty} [k(a+b)+a] . \end{cases}$$

Obrázek 3.3: Funkce skoku vpřed této časové škály $\mathbb{P}_{a,b}$.



Příklad 3.17. Nechť $q > 0$ a

$$q^{\mathbb{Z}} = \left\{q^k; k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ a } q^{\bar{\mathbb{Z}}} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}.$$

Uvažujme časovou škálu $\mathbb{T} = q^{\bar{\mathbb{Z}}}$. Pak

$$\sigma(x) = \inf\{q^n; n \in < m+1, \infty)\} = q^{m+1} = qq^m = qx,$$

jestliže $x = q^m \in \mathbb{T}$, zřejmě $\sigma(0) = 0$. Z toho vyplývá:

$$\sigma(x) = qx \text{ a } \rho(x) = \frac{x}{q} \text{ pro } \forall x \in \mathbb{T}$$

a odtud:

$$\mu(x) = \sigma(x) - x = (q-1)x \text{ pro } \forall x \in \mathbb{T}.$$

Proto je bod 0 zprava husté minimum a každý jiný bod v $\mathbb{T}$ je izolovaný. Pro funkci: $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dostáváme:

$$y^{\Delta}(x) = \frac{y\left(\sigma(x)\right) - y(x)}{\mu(x)} = \frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x}, \text{ pro } \forall x \in \mathbb{T} - \{0\}$$

a

$$y^{\Delta}(0) = \lim_{s \to 0^+} \frac{y(0) - y(s)}{0 - s} = \lim_{s \to 0^+} \frac{y(s) - y(0)}{s}.$$

Za předpokladu, že tato limita existuje. Nyní spočtěme druhou derivaci funkce y, pro $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
y^{\Delta\Delta}(x) &= \frac{y^{\Delta}(qx) - y^{\Delta}(x)}{(q-1)x} \\
&= \frac{\frac{y(q^2x) - y(qx)}{q(q-1)x} - \frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x}}{(q-1)x} \\
&= \frac{y(q^2x) - y(qx) - qy(qx) + qy(x)}{q(q-1)^2x^2} \\
&= \frac{y(q^2x) - (q+1)y(qx) + qy(x)}{q(q-1)^2x^2}.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že se zde jedná o časovou škálu s neohraničenou zrnitostí $\mu(x)$.

Příklad 3.18. Uvažujme časovou škálu

$$\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \left\{n^2; n \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Dále počítejme

$$\begin{aligned}
\sigma(x) = \sigma(n^2) &= \inf\left\{m^2; m \in (n+1, n+2, \dots)\right\} = \\
&= (n+1)^2 \mu(x) = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = \\
&= 2n + 1.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\sigma(x) = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 \text{ a } \mu(x) = 2\sqrt{x} + 1, \text{ pro } \forall x \in \mathbb{T}.$$

$\mathbb{T}$	$\mu(x)$	$\sigma(x)$	$\rho(x)$
$\mathbb{R}$	0	x	x
$\mathbb{Z}$	1	$x+1$	$x-1$
$h\mathbb{Z}$	h	$x+h$	$x-h$
$Q^{\mathbb{N}}$	$(q-1)x$	qx	$\frac{x}{q}$
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{x}+1$	$(\sqrt{x}+1)^2$	$(\sqrt{x}-1)^2$

Tabulka 3.2: Tabulka některých časových škál.

3.4 Integrace

V souvislosti s popisováním tříd funkcí, které jsou integrabilní uveďme následující dvě definice:

Definice 3.19. Funkce $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se nazývá regulovaná, pokud její limity zprava jsou konečné a existují ve všech zprava hustých bodech v $\mathbb{T}$ a zároveň její limity zleva existují (a jsou konečné) ve všech zleva hustých bodech v $\mathbb{T}$.

Definice 3.20. Funkce $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se nazývá rd-spojitá, pokud je spojitá ve zprava hustých bodech $\mathbb{T}$ a její limita zleva existuje (a je konečná) ve zleva hustých bodech $\mathbb{T}$. Množinu rd-spojitých funkcí $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ budeme značit:

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(y : \mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Množinu funkcí $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, které jsou diferencovatelné a jejichž derivace je rd-spojitá se značí:

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(y : \mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Věta 3.21. Nechť $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

1. Jestliže je y spojitá, pak je y rd-spojitá.
2. Jestliže je y rd-spojitá, pak je y regulovaná.
3. Skoková funkce σ je rd-spojitá
4. Jestliže je y regulovaná nebo rd-spojitá, pak je také y^σ.
5. Předpokládejme, že y je spojitá. Jestliže $z : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je regulovaná nebo rd-spojitá, pak $y \circ z$ má tyto vlastnosti také.

Definice 3.22. Spojitá funkce $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se nazývá pre-diferencovatelná s (oblastí diferencovatelnosti) D, pokud $D \subset \mathbb{T}, \mathbb{T} \setminus D$ je spočetná a neobsahuje žádné zprava izolované části $\mathbb{T}$ a y je diferencovatelná v každém bodě $x \in \mathbb{T}$.

Příklad 3.23. Nechť $\mathbb{T} = \mathbb{P}_{2,1}$ a nechť $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je definovaná jako:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \cup_{k=1}^{\infty} [3k, 3k-1], \\ x - 3k - 1 & \text{pro } x \in [3k+1, 3k+2]. \end{cases}$$

Každá regulovaná funkce na celém intervalu je ohraničená.

Následující věta platí pro pre-diferencovatelné funkce a lze využít při dokazování existence vět o pre-primitivních funkcí a primitivních funkcí.

Věta 3.24. Nechť y, z jsou funkce reálné proměnné definované na $\mathbb{T}$, obě pre-diferencovatelné na D. Pak pro všechna $x \in D$

$$\left|y^{\Delta}(x)\right| \leq z^{\Delta}(x),$$

toto lze upravit na tvar:

$$|y(s) - y(r)| \leq z(s) - z(r), \qquad \text{pro } \forall\, x \in D.$$

Věta 3.25. Předpokládejme, že y a z jsou prediferencovatelné s D.

1. Jestliže $y^{\Delta}(x) = 0$ pro všechna $x \in D$, pak y je konstantní funkcí.
2. Jestliže $y^{\Delta}(x) = z^{\Delta}(x)$ pro všechna $x \in D$, pak pro všechna $x \in \mathbb{T}$ platí

   $$z(x) = y(x) + C,$$

   kde C je nějaká konstanta.

Věta 3.26 (O exitenci pre-primitivních funkcí)**.** Nechť je y regulovaná. Pak zde existuje funkce Y, která je pre-diferencovatelná s oblastí diferenciace D, takovou že:

$$Y^{\Delta}(x) = y(x), \qquad \text{platí pro všechna } x \in D.$$

Definice 3.27. Předpokládejme, že $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je regulovaná funkce. Každá funkce Y z předchozí věty (3.26) se nazývá pre-primitivní funkcí funkce y.

Definujme neurčitý integrál regulované funkce y jako:

$$\int y(x)\, \Delta x = Y(x) + C,$$

kde C je libovolná konstanta a Y je pre-primitivní funkcí funkce y. Cauchyho integrál definujeme vztahem:

$$\int_r^s y(x)\, \Delta x = Y(s) - Y(r), \qquad \text{pro } \forall\, r, s \in \mathbb{T}.$$

Funkce $Y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ se nazývá primitivní funkcí funkce y, za podmínky:

$$Y^{\Delta}(x) = y(x), \qquad \text{pro } \forall\, x \in \mathbb{T}.$$

Příklad 3.28. Pro $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ spočítejme neurčitý integrál $\int a^x \Delta x$, kde $a \neq 1$ je konstanta. Počítejme tedy:

$$\left(\frac{a^x}{a-1}\right)^\Delta = \Delta\left(\frac{a^x}{a-1}\right) = \frac{a^{x+1} - a^x}{a-1} = a^x,$$

z čehož dostáváme, že:

$$\int a^x \Delta x = \frac{a^x}{a-1} + C,$$

kde C je libovolná konstanta.

Věta 3.29 (O existenci primitivních funkcí)**.** Každá rd-spojitá funkce má primitivní funkci. V našem případě tedy pro $x_0 \in \mathbb{T}$:

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} y(s)\,\Delta s, \qquad \text{pro } x \in \mathbb{T}.$$

je primitivní funkcí y.

$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
Funkce skoku vzad	x	$x-1$
Funkce skoku vpřed	x	$x+1$
Zrnitá funkce $\mu(x)$	0	1
Derivace $y^\Delta(x)$	$y'(x)$	$\Delta y(x)$
Integrál $\int_a^b y(x)\,\Delta x$	$\int_a^b y(x)\mathrm{d}x$	$\sum_{x=a}^{b-1} y(x), (a < b)$
Rd-spojitá funkce y	spojitá funkce y	jakákoliv funkce y

Tabulka 3.3: Srovnání $\mathbb{T}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$.

Věta 3.30. Jestliže $y \in C_{rd}$ a $x \in \mathbb{T}$, pak:

$$\int_x^{\sigma(x)} y(r)\,\Delta r = \mu(x)y(x).$$

Věta 3.31. Nechť $a, b, c \in \mathbb{T}, k \in \mathbb{R}$ a $y, z \in C_{rd}$, pak

1. $\int_a^b [y(x) + z(x)]\,\Delta x = \int_a^b y(x)\Delta x + \int_a^b z(x)\Delta x$.
2. $\int_a^b (ky)(x)\Delta x = k\int_a^b y(x)\Delta x$.
3. $\int_a^b y(x)\Delta x = -\int_b^a y(x)\Delta x$.
4. $\int_a^b y(x)\Delta x = \int_a^c y(x)\Delta x + \int_c^b y(x)\Delta x$.
5. $\int_a^b y(\sigma(x))\, z^\Delta(x)\Delta x = (yz)(b) - (yz)(a) - \int_a^b y^\Delta(x)z(x)\Delta x$.
6. $\int_a^b y(x)z^\Delta(x)\Delta x = (yz)(b) - (yz)(a) - \int_a^b y^\Delta(x)z(\sigma(x))\,\Delta x$.

7. $\int_a^a y(x)\Delta x = 0$.
8. Jestliže$|y(x)| \le z(x)$ na $[a,b]$, pak:

$$\left|\int_a^b y(x)\Delta x\right| \le \int_a^b z(x)\Delta x.$$

9. Jestliže $y(x) \ge 0$ pro $\forall a \le x < b$, pak:

$$\int_a^b y(x)\Delta x \ge 0.$$

Všimněme si vztahů (5), (6). Takovéto integrace se označují integrace per–partes. Platí také, že všechny vztahy z věty (3.31) platí i pro případ, že y a z jsou pouze regulované funkce. Všimněme si také, jak předchozí věta zobecňuje Větu 2.12, ve které jsme uvažovali diferenční kalkuly.

Věta 3.32. Nechť $a, b \in \mathbb{T}$ a $y \in C_{rd}$

1. jestliže $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, pak:
$$\int_a^b y(x)\Delta x = \int_a^b y(x)\mathrm{d}x,$$
kde integrál na pravé straně je nám známý Riemannův integrál.

2. Jestliže se $[a,b]$ skládá pouze z izolovaných bodů, pak:

$$\int_a^b y(x)\Delta x = \begin{cases} \sum_{x\in\langle a,b\rangle} \mu(x)y(x) & \text{pro } a < b, \\ 0 & \text{pro } a = b, \\ -\sum_{x\in\langle b,a\rangle} \mu(x)y(x) & \text{pro } a > b. \end{cases}$$

3. Pro $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk; k \in \mathbb{Z}\}$, kde $h > 0$, pak:

$$\int_a^b y(x)\Delta x = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} y(kh)h & \text{pro } a < b, \\ 0 & \text{pro } a = b, \\ -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} y(kh)h & \text{pro } a > b. \end{cases}$$

4. Pokud $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, pak:

$$\int_a^b y(x)\Delta x = \begin{cases} \sum_{x=a}^{b-1} y(x) & \text{pro } a < b, \\ 0 & \text{pro } a = b, \\ -\sum_{x=b}^{a-1} y(x) & \text{pro } a > b. \end{cases}$$

Definice 3.33. Nechť $a \in \mathbb{T}, \sup \mathbb{T} = \infty$ a y je rd-spojitá na $[a, \infty)$, pak definujeme nevlastní integrál:

$$\int_a^\infty y(x)\Delta x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b y(x)\Delta x,$$

za podmínky, že tato limita existuje (a je konečná). Říkáme, že takový nevlastní integrál konverguje. Pokud tato limita neexistuje, pak říkáme že tento nevlastní integrál diverguje.

3.5 Dynamické rovnice

V této kapitole se budeme zabývat některými rovnicemi časových škál a metodami k jejich vyřešení.

Uvedeme si zde lineární rovnice prvního i vyšších řádů, Euler–Cauchyho rovnice, logistické rovnice, Bernoulliho rovnice, Riccatiho rovnice a Clairautovy rovnice.

Nejdříve ale zadefinujme exponenciální funkci na libovolné časové škále:

Definice 3.34. Nechť $\mathbb{T} = [a; b]$ Řekneme, že funkce $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ je regresivní pokud platí následující podmínka:

$$1 + \mu(x)f(x) \neq 0, \quad \text{pro všechna} \quad x \in [a; \rho(b)]\,.$$

Množinu všech regresivních a rd-spojitých funkcí $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ budeme nadále značit

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Definice 3.35. Nechť $f \in \mathcal{R}$, pak definujeme exponenciální funkci $e(x, s)$ jako

$$e(x, s) = \exp\left(\int_x^s \zeta_{\mu(r)}(f(r))\Delta r\right), \quad \text{pro} \quad s, x \in \mathbb{T},$$

kde $\zeta_{\mu(r)}(f(r))$ je definována : $\zeta(z) = \frac{1}{h}\mathrm{Log}(1+hz)$, Log je hlavní větev logaritmické funkce.

Uveďme zde ještě několik elementárních vlastností exponenciální funkce.

Věta 3.36. Nechť $f, g \in \mathcal{R}$, pak

1. $e_0(x, s) \equiv 1$ a $e_f(x, x) \equiv 1$.
2. $e_f\left(\sigma(x)\right), s = (1 + \mu(x)f(x))e_f(x, s)$.
3. $\frac{1}{e_f(x,s)} = e_{\ominus f}(x, s)$.
4. $e_f(x, s) = \frac{1}{e_p(s,x)} = e_{\ominus p}(s, x)$.
5. $e_f(x, s)e_f(s, r) = e_f(x, r)$.
6. $e_f(x, s)e_g(x, s) = e_{f\oplus g}(x, s)$.

7. $\frac{e_f(x,s)}{e_g(x,s)} = e_{f\ominus g}(x,s)$.

8. $\left(\frac{1}{e_f(\cdot,s)}\right)^{\Delta} = -\frac{f(x)}{e_f^{\sigma}(\cdot,s)}$.

Nyní přejděme k dynamickým rovnicím na časových škálách. Nejprve začněme řešením lineárních rovnic prvního řádu.

Příklad 3.37. Ukažme si nyní jak vypadá exponenciální funkce pro $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ a $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Opět si můžeme všimnout, že exponenciální funkce zadefinovaná na časových škálách, je jen zobecněním exponenciální funkce na množině $\mathbb{R}$ a mocninné funkce na množině $\mathbb{Z}$.

Nechť pro $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ je α je libovolná konstanta, pro $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ je α je libovolná konstanta různá od -1, pak exponenciální funkce $e_\alpha(x, x_0)$, pro $x, x_0 \in \mathbb{T}$, je:

$$\text{pro } \mathbb{T} = \mathbb{R}: \quad e^{\alpha(x-x_0)} \text{ a pro } \mathbb{T} = \mathbb{Z}: \quad (1+\alpha)^{x-x_0}.$$

Nechť $x_0 = 0$, $f(x) = 1$, pak exponenciální funkce $e_f(x, x_0)$, je

$$\text{pro } \mathbb{T} = \mathbb{R}: \quad e^{x} \text{ a pro } \mathbb{T} = \mathbb{Z}: \quad 2^{x}.$$

3.5.1 Lineární dynamické rovnice prvního řádu

Uvažujme zde nehomogenní rovnice prvního řádu. Existují dva druhy takovýchto rovnic a to:

$$y^{\Delta} = f(x)y + g(x) \tag{3.1}$$

a takzvaná adjungovaná rovnice:

$$z^{\Delta} = -f(x)y^{\sigma} + g(x). \tag{3.2}$$

V následujících dvou větách si uveďme řešení nejprve (3.1) a pak také rovnice(3.2).

Věta 3.38. Předpokládejme, že $f \in \mathcal{R}$ a $g \in C_{rd}$. Nechť $x_0 \in \mathbb{T}$ a $y_0 \in \mathbb{R}$. Jednoznačné řešení (3.1) s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ je tvaru:

$$y(x) = e_f(x, x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} e_f(x, \sigma(r))g(r)\Delta r.$$

Věta 3.39. Předpokládejme, že $f \in \mathcal{R}$ a $g \in C_{rd}$. Nechť $x_0 \in \mathbb{T}$ a $z_0 \in \mathbb{R}$. Jednoznačné řešení (3.2) s počáteční podmínkou $z(x_0) = z_0$ je tvaru:

$$z(x) = e_{\ominus f}(x, x_0)z_0 + \int_{x_0}^{x} e_{\ominus f}(x, \sigma(r))g(r)\Delta r.$$

V diferenciálním počtu je řešení obdobné rovnice (1.5)

$$y' = f(x)y + g(x)$$

takovéto:

$$y = \left(\int g(x) \cdot e^{-\int f(x)\mathrm{d}x} + C_1 \right) e^{\int f(x)\mathrm{d}x},$$

kde C_1 je libovolná konstanta.

V diferenčním počtu je řešení nehomogenní diferenční rovnice (2.8)

$$y(x+1) = a(x)y(x) + b(x)$$

následující:

$$y(t) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{j=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=j+1}^{n-1} a(i) \right] b(j).$$

3.5.2 Homogenní lineární dynamická rovnice vyššího řádu s konstantními koeficienty

Dále se zabývejme homogenní lineární dynamickou rovnicí vyššího řádu s konstantními koeficienty:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{\Delta^k} = 0, \tag{3.3}$$

kde y^{Δ^k} je defivána rekurzivně:

$$y^{\Delta^0} = y \quad \text{a} \quad y^{\Delta^{k+1}} = y^{\Delta^k \Delta}, \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

a $a_k \in \mathbb{R},\ 0 \leq k \leq n,\ a_n \neq 0.$

Polynom

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \tag{3.4}$$

nazýváme charakteristickým polynomem rovnice (3.3).

Věta 3.40. Nechť $1 + \lambda\mu(x) \neq 0$, pro všechny $x \in \mathbb{T}$. Jestliže λ je kořenem charakteristického polynomu (3.4), pak

$$y(x) = e_\lambda(x, x_0)$$

je řešením lineární rovnice (3.3).

V diferenčním počtu je fundamentální systém řešení množina:

$$G_1 = \{\lambda_1^x, \lambda_2^x, \dots, \lambda_n^x\}.$$

Obecné řešení má tedy tvar:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^x, \quad \text{kde } c_i \in \mathbb{C}.$$

Analogickým výsledkem homogenní rovnice v diferenciálním počtu pro navzájem různé kořeny charakteristické rovnice jsou funkce

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x},$$

které zároveň tvoří fundamentální systém řešení.

Definice 3.41. Rovnice (3.3) se nazývá regresivní, jestliže $\lambda \in \mathcal{R}$ pro všechny kořeny λ charakteristického polynomu (3.4).

Věta 3.42. Rovnice (3.3) je regresivní tehdy a jen tehdy, když:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(-\mu(x)\right)^{n-k} \neq 0, \quad \text{pro všechny } x \in \mathbb{T}. \tag{3.5}$$

Příklad 3.43. Nechť $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$, uvažujme rovnici:

$$y^{\Delta\Delta} - 3y^{\Delta} + 2y = 0. \tag{3.6}$$

Charakteristický polynom předchozí rovnice (3.6) je

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Kořeny tedy jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. Regresivní podmínka (3.5) pro (3.6) je

$$2\mu^2(x) + 3\mu(x) + 1 \neq 0, \quad \text{pro všechny } x \in \mathbb{T}.$$

Řešení rovnice (3.6) tedy jsou:

$$y_1(x) = e_1(x, x_1) \quad \text{a} \quad y_2(x) = e_2(x, 1).$$

Nyní se budeme zabývat lineárními rovnicemi, které mají násobné kořeny. Následující věta uvádí některé vztahy, které nám budou užitečné při řešení problému metody variace parametrů.

Věta 3.44. Předpokládejme, že $\lambda \in \mathcal{R}$ a nechť f je diferencovatelná. Předpokládejme také, že $y(x) = y(x)e_\lambda\,(x, x_0)$. Pak dostáváme:

$$y^{\Delta^k} = \left\{ \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v} f_v \lambda^{k-v} \right\} e_\lambda, \tag{3.7}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{\Delta^k} = \left\{ \sum_{v=0}^{k} f_v \frac{\varphi^{(v)}(\lambda)}{v!} \lambda^{k-v} \right\} e_\lambda. \tag{3.8}$$

Věta 3.45. Nechť $\lambda \in \mathcal{R}$ a také nechť λ je kořenem charakteristického polynomu (3.3) s násobností $m \in \mathbb{N}$. Položme

$$f_{m-1} = 1 \quad \text{a} \quad f_k = 0 \quad \text{pro} \quad k \geq m$$

a rekurzivně

$$f_k(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f_{k+1}(r)}{1 + \lambda\mu(v)} \Delta x \quad \text{pro} \quad m - 2 \geq k \geq 0.$$

Pak

$$y(x) = f(x) e_\lambda(x, x_0)$$

je řešením rovnice (3.3), kde $f = f_0$.

Pro vícenásobné kořeny λ je **v diferenčním počtu** fundamentální množinou řešení:

$$G_2 = \bigcup_{i=1}^{r} \left\{ \lambda_i^x, \binom{x}{1} \lambda_i^{x-1}, \binom{x}{2} \lambda_i^{x-2}, \ldots, \binom{x}{m_i - 1} \lambda^{x-m_i+1} \right\}.$$

Tvar obecného řešení v je:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^x \left(c_{i0} + c_{i1}x + c_{i2}x^2 + \cdots + c_{im_i-1}x^{m_i-1} \right).$$

V diferenciálním počtu je fundamentálním systémem řešení

$$e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, \ldots, x^{m_i-1} e^{\lambda_i x}, \tag{3.9}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

Příklad 3.46. Pokud $\lambda_{1,2} = 0$ je dvojnásobný kořenem, pak

$$y_1(x) = e_\lambda(x, x_0) \quad \text{a} \quad y_2(x) = e_\lambda(x, x_0) \int_{x_0}^{x} \frac{\Delta r}{1 + \lambda\mu(r},$$

jsou dvě řešení lineární rovnice (3.3). Všimněme si, že pro případ $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ dostaneme:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\Delta r}{1 + \lambda\mu(r)} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}r = x - x_0.$$

Příklad 3.47. Jestliže $\lambda_{1,2,3} = 0$ je trojnásobným kořenem charakteristického polynomu, pak třetí řešení (kromě těch dvou uvedených v předešlém příkladě) je:

$$y_3(x) = e_\lambda(x, x_o) \int_{x_0}^{x} \frac{\int_{x_o}^{r} \frac{\Delta s}{1+\lambda\mu(s)}}{1 + \lambda\mu(r)} \Delta r.$$

Opět bychom dostali známou funkci $\dfrac{(x - x_0)^2}{2}$ pro $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

3.5.3 Eulerova rovnice

V této části zaveďme úmluvu, že $\mathbb{T}$ bude časová škála $\mathbb{T} \subset (0; \infty)$.

V diferenciálním počtu je řešením Eulerovy diferenciální rovnice $y(x) = x^\lambda$ společně s $y'(x) = \dfrac{\lambda}{x} y(x)$.

Také v případě Eulerových dynamických rovnic na libovolné časové škále, zde hledejme řešení ve tvaru:

$$y(x) = e_{\frac{\lambda}{x}}(x, x_0).$$

Všimněme si, že pro taková y dostáváme

$$y^\Delta(x) = \frac{\lambda}{x} y(x) \text{ a } y^{\Delta\Delta}(x) = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{x\sigma(x)} y(x)y(x).$$

Bohužel $y^{\Delta\Delta}$ nemusí být dále diferencovatelné pro obecný případ časové škály. Všimněme si však, že

$$xy^\Delta(x) = \lambda y(x), \qquad (xy^\Delta(x))^\Delta = \frac{\lambda^2}{x} y(x),$$

$$x(xy^\Delta(x))^\Delta = \lambda^2 y(x), \qquad (x(xy^\Delta)x^\Delta)^\Delta = \frac{\lambda^3}{x}, \ldots,$$

z čehož plyne, že budeme nadále uvažovat rovnice tvaru:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k M_k y = 0, \tag{3.10}$$

kde operátor $M_k y$ je definován rekurzivně:

$$M_0 y = y \quad \text{a} \quad M_{k+1} y = x\left(M_k y\right)^\Delta, \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}_0$$

a $a_k \in \mathbb{R}$ pro všechny $0 \leq k \leq n, a_n \neq 0$. Rovnici (3.10) nazvěme Eulerovou rovnicí n-tého řádu a

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \tag{3.11}$$

nazvěme charakteristický polynom.

Věta 3.48. Nechť $x + \lambda\mu(x) \neq 0$ pro všechny $x \in \mathbb{T}$. Jestliže λ je kořenem charakteristického polynomu (3.11), pak
$$y(x) = e_{\frac{\lambda}{x}}(x, x_0)$$
je řešením Eulerovy rovnice(3.10).

V diferenciálním počtu je pro navzájem různé kořeny charakteristické rovnice λ_i, $i = 1, \dots, n$, obecný tvar řešení:

$$y = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} + \cdots + c_n x^{\lambda_n}.$$

Definice 3.49. Rovnice (3.10) se nazývá regresivní, jestliže $\frac{\lambda}{x} \in \mathcal{R}$, pro všechny kořeny λ rovnice (3.11).

Věta 3.50. Rovnice (3.10) je regresivní tehdy a jenom tehdy, když

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k (-\mu(x))^{n-k} \neq 0, \quad \text{pro všechny } \ x \in \mathbb{T}. \tag{3.12}$$

Příklad 3.51. Pro $n = 2$ lze rovnici (3.10) přepsat do tvaru:

$$a_2 x (x y^\Delta)^\Delta + a_1 x y^\Delta + a_0 y = a_2 \left[x\sigma(x) y^{\Delta\Delta} + \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) x y^\Delta + \frac{a_0}{a_2} y \right].$$

Rovnice (3.10) je ekvivalentní rovnici:

$$x\sigma(x) y^{\Delta\Delta} + \alpha x y^\Delta + \beta y = 0, \tag{3.13}$$

kde $\alpha = \frac{a_1}{a_2} + 1$ a $\beta = \frac{a_0}{a_2}$. Charakteristický polynom (3.13) je:

$$\varphi(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = a_2 \left(\lambda^2 + (\alpha - 1)\lambda + \beta \right).$$

Hledejme tedy kořeny:
$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^2 + (\alpha - 1)\lambda + \beta$$
Najděme charakteristický polynom (3.11) pro (3.13)

$$0 \neq a_2 x^2 - a_1 x \mu(x) + a_0 \left(\mu(x)\right)^2 = a_2 \left(x^2 + (1 - \alpha) x \mu(x) + \beta (\mu(x))^2 \right),$$

což můžeme ekvivalentně zapsat jako:

$$x\sigma(x) - \alpha x \mu(x) + \beta(\mu(x))^2 \neq 0, \quad \text{pro všechny } \ x \in \mathbb{T}.$$

Příklad 3.52. Pro $n \geq 3$ můžeme (3.10) rozšířit, tak jako v předešlém příkladě, pokud je $\mathbb{T}$ časová škále s diferencovatelným operátorem skoku vpřed σ. Například pro $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ lze

$$a_3 x (x (x y^\Delta)^\Delta)^\Delta + a_2 x (x y^\Delta)^\Delta + a_1 x y^\Delta + a_0 y = 0 \tag{3.14}$$

ekvivalentně přepsat na tvar:

$$x^3y''' + \alpha x^2y'' + \beta xy' + \gamma y = 0, \tag{3.15}$$

kde $\alpha = 3 + \frac{a_2}{a_3}, \beta = 1 + \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_3}$ a $\gamma = \frac{a_0}{a_3}$. Všimněme si, že charakteristická rovnice pro (3.15) je

$$\lambda^3 + (\alpha - 3)\lambda^2 + (\beta - \alpha + 2)\lambda + \gamma = 0,$$

zatímco charakteristická rovnice pro rovnici (3.14) je v jistém smyslu "více přirozená" a je jednoduše ve tvaru:

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Tato poznámka se vztahuje k Eulerově rovnici jakéhokoliv řádu a na libovolné časové škále. Charakteristická rovnice pro Eulerovu rovnici je v násobném tvaru lépe zapamatovatelná, než ta v rozšířeném tvaru.

Poznámka. Jestliže $\varphi(0) = 0$ nebo $\varphi(1) = 0$, pak vztahy

$$e_0(x, x_0) = 1 \quad \text{a} \quad e_{\frac{1}{x}}(x, x_0) = \frac{x}{x_0}$$

jsou užitečné pro libovolnou časovou škálu $\mathbb{T}$.

Příklad 3.53. Lze dokázat, že:

$$e_{\frac{\lambda}{x}}(x, x_0) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\lambda}, \quad \text{pro} \quad \mathbb{T} = \mathbb{R}, \tag{3.16}$$

$$e_{\frac{\lambda}{x}}(x, x_0) = \frac{\Gamma(x + \lambda)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(x_0)}{\Gamma(x_0 + \lambda)}, \quad \text{pro} \quad \mathbb{T} = \mathbb{Z}, \tag{3.17}$$

kde Γ je funkce gamma a

$$e_{\frac{\lambda}{x}}(x, 1) = x^{\log_q[1+(q-1)\lambda]}, \quad \text{pro} \quad \mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0} \quad \text{a} \quad q > 1.$$

Nyní ukažme tvrzení (3.17). Všimněme si,že

$$\Delta\Gamma(s) = \Gamma(s + 1) - \Gamma(s) = (s - 1)\Gamma(s),$$

takže $e_{s-1} = \Gamma(s)$. Počítejme

$$e_{\frac{\lambda}{x}} = e_{\frac{\lambda}{1+(x-1)\mu}} = e_{x+\lambda-1} \ominus (x - 1) = \frac{e_{x+\lambda-1}}{e_{x-1}}$$

a tedy

$$e_{\frac{\lambda}{x}}(x, x_0) = \frac{e_{x+\lambda-1}(x, x_0)}{e_{x-1}(x, x_0)} = \frac{\Gamma(x + \lambda)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(x_0)}{\Gamma(x_0 + \lambda)}.$$

Abychom ukázali poslední tvrzení (pro $x_0 = 1$), uvažujme rovnici

$$\frac{y(qx) - y(x)}{qx - x} = \frac{\lambda}{x} y(x),$$

což lze přepsat na tvar:

$$y(qx) = ay(x), \quad \text{kde} \quad a = 1 + (q-1)\lambda.$$

Řešení této rovnice, která bude vyhovovat podmínce $y(1) = 1$ je:

$$y(q^m) = a^m = e^{m \log a},$$

proto pro $m \in \mathbb{N}_0$

$$y(x) = e^{\log_q x \log a} = e^{\frac{\log x}{\log q} \log a} = e^{\log x \frac{\log a}{\log q}} = e^{\log x \log_q a} = \left(e^{\log x}\right)^{\log_q a} = x^{\log_q a},$$

pro $x \in q^{\mathbb{N}_0}$.

Nyní se budeme zaobírat Eulerovými rovnicemi s mnohonásobným kořenem. Následující lemma nám pomůže při řešení problémů metodou variace parametrů.

Lemma 3.54. Nechť $\frac{\lambda}{x} \in \mathcal{R}$, a nechť p je diferencovatelná. Předpokládejme, že zde existuje posloupnost $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ taková, že splňuje

$$f_0 = f \quad \text{a} \quad f_k^\Delta = \frac{f_{k+1}}{x + \lambda\mu(x)}, \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.18}$$

Nechť $y(x) = f(x) e_{\frac{\lambda}{x}}(x, x_0)$. Pak dostaneme

$$M_k y = \left\{ \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v} f_v \lambda^{k-v} \right\} e_{\frac{\lambda}{x}}(x, x_0), \tag{3.19}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k M_k y = \left\{ \sum_{v=0}^{n} f_v \frac{\varphi^{(v)}(\lambda)}{v!} \right\}. \tag{3.20}$$

Věta 3.55. Nechť $\frac{\lambda}{x} \in \mathcal{R}$ a předpokládejme, že λ je kořenem charakteristického polynomu s násobností alespoň $m \in \mathbb{N}$. Položme

$$f_{m-1} = 1 \quad \text{a} \quad f_k = 0, \quad \text{pro všechny } k \geq m.$$

a rekurzivně

$$f_k(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f_{k+1}(r)}{r + \lambda\mu(r)} \Delta x, \quad \text{pro } m - 2 \geq k \geq 0.$$

Pak

$$y(x) = f(x) e_{\frac{\lambda}{x}}(x, x_0)$$

je řešením (3.10), kde $f = f_0$.

V diferenciálním počtu se pro m-násobný kořen λ_1 charakteristická rovnice objeví v řešení Eulerovy rovnice

$$\left(c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x + \cdots + c_k \ln^{k-1} x\right) x^{\lambda_1}.$$

Příklad 3.56. Jestliže $\lambda_{1,2} = 0$ je dvojnásobný kořen charakteristického polynomu, pak

$$y_1(x) = e_{\frac{\lambda}{x}}(x, x_0) \quad \text{a} \quad y_2(x) = e_{\frac{\lambda}{x}}(x, x_0) \int_{x_0}^{x} \frac{\Delta r}{r + \lambda\mu(r)}$$

jsou dvě řešení Eulerovy rovnice (3.10). Všimněme si,že pro řípad $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ dostaneme

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\Delta r}{r + \lambda\mu(r)} = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \log \frac{x}{x_0}.$$

Příklad 3.57. Jestliže $\lambda_{1,2,3} = 0$ je trojnásobný kořen charakteristického polynomu, pak třetí řešení (první a druhé je uvedeno v předešlém příkladě) je:

$$y_3(x) = e_{\frac{\lambda}{x}}(x, x_0) \int_{x_0}^{x} \frac{\int_{x_0}^{r} \frac{\Delta s}{s + \lambda\mu(s)}}{r + \lambda\mu(r)} \Delta r.$$

Příklad 3.58. Předpokládejme, že λ je dvojnásobný kořen charakteristického polynomu (3.11) časové škály $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}, (q > 1)$, a nechť $x_0 = 1$. Pak dvě řešení dané Eulerové q-diferenční rovnice (3.10) jsou:

$$y_1(x) = x^{\log_q [1+(q-1)]\lambda}$$

a

$$y_2(x) = [1 + (q-1)\lambda]\, y_1(x) \int_{1}^{x} \frac{\Delta r}{r + \lambda\mu(r)} = y_1(x) \int_{1}^{x} \frac{\Delta r}{r}.$$

což se dá dále upravit na tvar:

$$y_2(x) = (q-1) x^{\log_q [1+(q-1)\lambda]} \log_q x.$$

Pro $q = 2$

$$y_1(x) = x^{\log_2 (1+\lambda)} \quad \text{a} \quad y_2(x) = x^{\log_2 (1+\lambda)} \log_2 x.$$

Příklad 3.59. Nechť $\mathbb{T} = \mathbb{N}^2$ s rovnicí

$$x(1 + \sqrt{x})^2 y^{\Delta\Delta} - x y^{\Delta} + y = 0.$$

$\sigma(x) = (1 + \sqrt(x))^2$ a $\mu(x) = 1 + 2\sqrt(x)$. Charakteristický polynom je

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Zde je řešením:

$$y_1(x) = e_{\frac{1}{x}}(x, 1) = x \quad \text{a} \quad y_2(x) = y_1(x) \int_{1}^{x} \frac{\Delta r}{r + \mu(r)} = x \int_{1}^{x} \frac{\Delta r}{\sigma(r)},$$

což se dá dále opět přepsat do tvaru

$$y_2(x) = x \left[\sqrt{x} - 1 - \sum_{k=1}^{\sqrt{x}-1} \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \right].$$

3.5.4 Logistické rovnice

Nechť g je řešením logistické rovnice

$$g^{\Delta} = [\ominus(f + gy)]\, y,$$

pak

$$u = \frac{1}{g}$$

je řešením lineární rovnice

$$u^{\Delta} = f(x)u + g(x) \tag{3.21}$$

Jestliže je u řešením rovnice (3.21), pak $y = \frac{1}{u}$ lze upravit

$$g^{\Delta} = \left(\frac{1}{u}\right)^{\Delta} = -\frac{u^{\Delta}}{uu^{\sigma}} = -\frac{fu + g}{uu^{\sigma}} = -(f + gy)y^{\sigma} = [\ominus(f + gy)]\, y.$$

Tudíž rovnici

$$g^{\Delta} = [\ominus(f + gy)]\, y, \quad \text{kde} \quad f + gy \in \mathcal{R} \tag{3.22}$$

nazveme logistickou dynamickou rovnicí (nebo také Verhulstovou rovnicí). Podobně bychom mohli začít s řešením druhé lineární rovnice

$$v^{\Delta} = -f(x)v^{\sigma} + y(x),$$

kde bychom zjistili,že $z = \frac{1}{v}$ lze upravit na

$$z^{\Delta} = \left(\frac{1}{v}\right)^{\Delta} = -\frac{v^{\Delta}}{vv^{\sigma}} = \frac{pv^{\sigma} - g}{vv^{\sigma}} = (f - gz^{\sigma})\, z = [f \ominus gz]\, z.$$

Také rovnici

$$z^{\Delta} = [\ominus fgz]\, z, \quad \text{kde} \quad gz \in \mathcal{R} \tag{3.23}$$

nazýváme logistickou dynamickou rovnicí. Od teď budeme nadále předpokládat, že $p \in \mathcal{R}$ a $g \in C_{rd}$. Všimněme si, že pokud $u \neq 0$ a $y = \frac{1}{u}$, pak y je řešení rovnice (3.22) a také splňuje $f + gy \in \mathcal{R}$, jak lze vidět z výpočtu

$$1 + \mu(f + gy) = \frac{u + \mu(fu + g)}{u} = \frac{u + \mu u^{\sigma}}{u} = \frac{u^{\sigma}}{u} \neq 0.$$

Podobně, jestliže $v \neq 0$ a $z = \frac{1}{v}$, pak z je řešení rovnice (3.23) a

$$1 + \mu gz = \frac{v + \mu g}{v} = \frac{v^{\sigma} + \mu(y - v^{\sigma})}{v} = \frac{v^{\sigma} + \mu f v^{\sigma}}{v} = \frac{v^{\sigma}(1 + \mu f)}{v} \neq 0.$$

Tudíž $gz \in \mathcal{R}$.

Pomocí věty 3.38 a 3.39 bude nyní snadné získat řešení logistické rovnice.

Věta 3.60. Nechť $f \in \mathcal{R}$ a $g \in C_{rd}$

1. Nechť $y_0 \neq 0$. Pokud
$$u(x) = e_f(x, x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} e_f(x, \sigma(r))g(r)\Delta r \neq 0, \quad \text{pro všechny} \quad x \in \mathbb{T},$$
pak
$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{e_{\ominus f}(x, x_0)}{\frac{1}{y_0} + \int_{x_0}^{x} e_{\ominus f}(\sigma(r), x_0)g(r)\Delta(r)}$$
je řešením rovnice (3.22) a vyhovuje počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$.

2. Nechť $z_0 \neq 0$. Jestliže
$$v(x) = \frac{e_{\ominus f}(x, x_0)}{z_0} + \int_{x_0}^{x} e_{\ominus f}(x, r)g(r)\Delta r \neq 0, \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{T},$$
pak
$$z(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{e_f(x, x_0)}{\frac{1}{z_0} + \int_{x_0}^{x} e_f(r, x_0)g(r)\Delta r}$$
je řešení rovnice (3.23) a vyhovuje počateční podmínce $z(x_0) = z_0$.

V praxi (např. v populační dynamice) se často používá úmluva, že existuje číslo $N \neq 0$ takové, že
$$f(x) = Ng(x) \quad \text{pro všechny} \quad x \in \mathbb{T}. \tag{3.24}$$
Ve zbytku této části budeme předpokládat, že platí (3.24). Můžeme tedy vypočítat integrál ve jmenovateli řešení ve Větě 3.60 (2) explicitně:
$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} e_f(r, x_0)g(r)\Delta r &= \int_{x_0}^{x} e_f(r, x_0)\frac{f(r)}{N}\Delta r = \frac{1}{N}\int_{x_0}^{x} f(r)e_f(r, x_0)\Delta r \\ &= \frac{1}{N}\int_{x_0}^{x} e_f^{\Delta}(r, x_0)\Delta r = \frac{1}{N}\left[e_f(x, x_0) - e_f(x_0, x_0)\right] \\ &= \frac{1}{N}\left[e_f(x, x_0) - 1\right].\end{aligned}$$
Odtud plyne následující důsledek.

Důsledek 3.61. Nechť $f \in \mathcal{R}$ a $N \neq 0$ je konstanta. Nechť $z_0 \neq 0$. Pokud
$$\frac{1}{z_0} - \frac{1}{N} + \frac{e_f(x, x_0)}{N} \neq 0, \quad \text{pro všechny} \quad x \in \mathbb{T},$$

pak

$$z(x) = \frac{e_f(x, x_0)}{\frac{1}{z_0} - \frac{1}{N} + \frac{e_f(x,x_0)}{N}} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{N}\right) e_{\ominus f}(x, x_0)} \tag{3.25}$$

je řešením

$$z^\Delta = \frac{fz(1 - \frac{z}{N})}{1 + \frac{\mu f}{N} z}, \qquad \text{kde} \quad \frac{fz}{N} \in \mathcal{R} \tag{3.26}$$

a vyhovuje počáteční podmínce $z(x_0) = z_0$.

3.5.5 Regresivní vektorový prostor

Pro $a \in \mathbb{R}$ budeme chtít definovat Bernoulliho rovnici tak, že substituce $\tilde{z} = z^a$ transformuje řešení x Bernoulliho rovnice do řešení $\tilde{z}$ logistické rovnice. Abychom tak mohli udělat, musíme najít vzorec pro derivování z^a. Tato otázka nás v této části dovede k zavedení násobení $\odot$, což je důvodem k zavedení vektorového prostoru $(\mathcal{R}, \oplus, \odot)$, kterému se říká *regresivní vektorový prostor*.

Definice 3.62. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{R}(a)$, definujeme

$$(a \odot f)(x) = af(x) \int_0^1 (1 + \mu(x) f(x) h))^{a-1} \, dh.$$

Poznámka. Všimněme si, že $a \odot f = af$ pro $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

Věta 3.63. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Jestliže $a \in \mathbb{N}$, předpokládejme, že $z(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{T}$. Jestliže $a \notin \mathbb{N}$ předpokládejme, že $z(x) z^\sigma(x) \leq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{T}$. Pak

$$\frac{(z^a)^\Delta}{z^a} = a \odot \frac{z^\Delta}{z}.$$

Věta 3.64. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pokud $f \in \mathcal{R}(a)$, pak $a \odot f \in \mathcal{R}$. Přesněji,

$$1 + \mu (a \odot f) = (1 + \mu f)^a.$$

Věta 3.65. Nechť $a \in \mathbb{R}$, pak

$$e_{a \odot f} = e_f^a.$$

Použijeme Větu 3.65, abychom ukázali, že $(\mathcal{R}, \oplus, \odot)$ splňuje axiomy vektorového prostoru. Následující pomocná věta se nám k tomu bude hodit.

Lemma 3.66. Nechť $f, q \in \mathcal{R}$. Pokud $e_f = e_q$, pak $f = q$.

Věta 3.67. $(\mathcal{R}, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor nad reálnými čísly.

Lze dokázat, že $(\mathcal{R}^+, \oplus)$ je Abelovská grupa. Dokažme nyní pouze zbylé vlastnosti vektorového prostoru. Budeme zde používat pravidla pro exponenciální funkci, Větu 3.65, Lemma 3.66 a klasická pravidla pro počítání s exponenty.

1. $1 \odot f = f \quad$ pro všechna $\quad f \in \mathcal{R}^+$. Tato vlastnost lze ověřit přímo z Definice 3.62.
2. $a \odot (b \odot f) = (ab) \odot f, \quad$ pro všechna $\quad a, b \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}^+$. Počítejme: $e_{a\odot(b\odot f)} = e^a_{b\odot f} = e_f^{a\odot b} = e_{(ab)\odot f}$, což nám dokazuje naši požadovanou vlastnost.
3. $a \odot (f \oplus q) = (a \odot f) \oplus (a \odot q), \quad$ pro všechna $\quad f, q \in \mathcal{R}^+, a \in \mathbb{R}$. Počítejme:
$$e_{a\odot(f\oplus q)} = e^a_{f\oplus q} = (e_f e_q)^a = e^a_f e^a_q = e_{a\odot f} e_{a\odot q} = e_{(a\odot f)\oplus(a\odot q)},$$
což je důkazem požadované vlastnosti.
4. $(a + b) \odot f = (a \odot f) + (b \odot f), \quad$ pro všechna $\quad a, b \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}^+$. Tato vlastnost je také splněna, neboť:
$$e_{(a+b)\odot p} = e_f^{a+b} = e^a_f e^b_f = e_{a\odot f} e_{b\odot f} = e_{(a\odot f)+(b\odot f)}.$$

3.5.6 Bernoulliova rovnice

Nyní uvažujme Bernoulliho rovnici
$$z^\Delta = \left[f \ominus \left(\frac{1}{a} \odot p z^a \right) \right] z, \tag{3.27}$$
kde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Všimněme si, že tato rovnice je případem rovnice (3.23) pro $a = 1$. Zaveďme nyní
$$\tilde{z} = z^a.$$
Pokud $z \neq 0$ a zároveň je řešením rovnice (3.27), pak
$$\frac{\tilde{z}^\Delta}{\tilde{z}} = \frac{(z^a)^\Delta}{z^a} = a \odot \frac{z^\Delta}{z} = a \odot \left[f \ominus \left(\frac{1}{a} \odot g z^a \right) \right] = (a \odot f) \ominus g\tilde{z},$$
zde jsme využili Větu 3.63 a některé z vlastností vektorového prostoru. Z výše uvedeného plyne, že:
$$\tilde{z}^\Delta = [(a \odot f) \ominus (g\tilde{z})]\, \tilde{z}. \tag{3.28}$$
Rovnice (3.28) je případem rovnice (3.23), můžeme tedy použít Větu 3.60(2) (použijeme také Větu 3.65), abychom mohli zjistit, že
$$\tilde{z}(x) = \frac{e^a_f(x, x_0)}{\frac{1}{\tilde{z}_0} + \int_{x_0}^x e^a_f(r, x_0) g(r) \Delta r}.$$

Věta 3.68. Nechť $a \in R - \{0\}$, $f \in \mathcal{R}(a)$ a $y \in C_{rd}$. Nechť $z_0 \neq 0$. Pokud

$$\frac{1}{z_0^a} + \int_{x_0}^{x} e_f^a(x, x_0) g(r) \Delta r > 0 \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{T},$$

pak

$$z(x) = \frac{e_f(x, x_0)}{\left[\frac{1}{z_0^a} + \int_{x_0}^{x} e_f^a(x, x_0) g(r) \Delta r\right]^{\frac{1}{a}}} \tag{3.29}$$

je řešením Bernoulliho rovnice (3.27).

Postup při řešení Bernoulliho rovnic v diferenciálním počtu:
Provede se zde transformaci

$$u(z) = g^{1-r}(z)$$

na lineární diferenciální rovnici 1.řádu, neboť v tomto případě

$$u'(z) = (1 - r) \cdot [a(z)u + b(z)] \,.$$

Z této rovnice obdržíme všechna řešení rovnice (1.9), pro které $g \neq 0$.
Je li $r > 0$, je také $y \equiv 0$ řešením rovnice (1.9).

Příklad 3.69. Uvažujme rovnici

$$z' = -z + tz^4, \quad \text{s počáteční podmínkou} \quad z(0) = 1. \tag{3.30}$$

Všimněme si, že tato diferenciální rovnice se dá přepsat na Bernoulliho dynamickou rovnici ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$)

$$z^{\Delta} = \left[f \ominus \left(\frac{1}{a} \odot g z^a\right)\right] z, \quad \text{kde} \quad f(x) \equiv -1, y(x) = -3x, a = 3.$$

Podle Věty 3.68 (pro $x_0 = 0 a z_0 = 1$), je řešení rovnice (3.30) ve tvaru:

$$z(x) = \frac{e_f(x_0, x)}{\left[\frac{1}{z_0^a} + \int_{x_0}^{x} e_f^a(r, x_0) g(r) \Delta r\right]^{\frac{1}{a}}} = \frac{e^{-x}}{\left[1 - \int_0^x 3re^{-3r} \mathrm{d}r\right]^{\frac{1}{3}}} = \frac{e^{-x}}{\left[\frac{2}{3} + \left(x + \frac{1}{3}\right) e^{-3x}\right]^{\frac{1}{3}}}.$$

Příklad 3.70. Uvažujme rovnici

$$\Delta z = \frac{5z - z^3 + 5z\sqrt{1 + z^2}}{1 + z^2 + \sqrt{1 + z^2}} \quad \text{s počáteční podmínkou} \quad z_0 = 1. \tag{3.31}$$

Poznamenejme, že

$$\frac{5 - z^2 + 5\sqrt{1 + z^2}}{1 + z^2 + 5\sqrt{1 + z^2}} = \frac{5 - \frac{z^2}{1+\sqrt{1+z^2}}}{1 + \frac{z^2}{1+\sqrt{1+z^2}}} = 5 \ominus \frac{z^2}{1 + \sqrt{1 + z^2}} = 5 \ominus \left(\frac{1}{2} \odot z^2\right).$$

Tato diferenční rovnice se dá přepsat na dynamickou Bernoulliho rovnici ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$)

$$z^{\Delta} = \left[f \ominus \left(\frac{1}{a} \odot g z^{a} \right) \right] z \quad \text{kde} \quad f(x) \equiv 5, y(x) = 1, a = 2.$$

Podle Věty 3.68 (pro x_0 a $z_0 = 1$), řešení rovnice (3.31) je podle rovnice (3.29) tvaru:

$$z(x) = \frac{e_f(x, x_0)}{\left[\frac{1}{z_0^a} + \int_{x_0}^{x} e_f^a(x, x_0) g(r) \Delta r \right]^{\frac{1}{a}}} = \frac{6^x}{\sqrt{1 + \sum_{r=0}^{x-1} 36^r}} = \frac{6^x \sqrt{35}}{\sqrt{34 + 36^x}}.$$

3.5.7 Riccatiho rovnice

Uvažujme rovnici tvaru

$$f^{\Delta} + q(t) + r(x) p^{\sigma} + \frac{p^2}{f(x) + \mu(x) p} = 0, \tag{3.32}$$

kde f, q, r jsou rd-spojité funkce a $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{T}$. Chceme přepsat rovnici (3.32) do mírně rozdílné podoby

$$p^{\Delta} + q(x) + r(x) p^{\sigma} + p(x) \left(\frac{p}{f(x)} \right) = 0, \tag{3.33}$$

kde jsme použili druhou mocninu s kolečkem $\circ 2$. Zde pro $g \in \mathcal{R}$, $g^{\circ 2}$ je definováno jako

$$g^{\circ 2} = (-g)(\ominus g).$$

Nyní předpokládejme, že řešení p_1 rovnice (3.33) známe. Vyberme nějaké jiné řešení p rovnice (3.33) a uvažujme rozdíl $y = p - p_1$. Pak

$$\begin{aligned} y^{\Delta} = p^{\Delta} - p_1^{\Delta} &= -q - r p^{\sigma} - f \left(\frac{p}{f} \right)^{\circ 2} + q + r p_1^{\sigma} + f \left(\frac{p_1}{f} \right)^{\circ 2} \\ &= -r y^{\sigma} + f \left[\left(\frac{p_1}{f} \right)^{\circ 2} - \left(\frac{p}{f} \right)^{\circ 2} \right]. \end{aligned}$$

K dalšímu pokračování ve výpočtu využijeme následující lemma, které nám usnadní práci.

Lemma 3.71. Pro $f, q \in \mathcal{R}$ máme

$$f^{\circ 2} - q^{\circ 2} = [\ominus (f \oplus q)] (q - f).$$

Použijme tedy Lemma 3.71 v pokračování ve výpočtu následovně

$$\begin{aligned} y^{\Delta} = -r y^{\sigma} + f \left[\left(\frac{p_1}{f} \right)^{\circ 2} - \left(\frac{p}{f} \right)^{\circ 2} \right] &= -r y^{\sigma} + f \left[\ominus \left(\frac{p_1}{f} \oplus \frac{p}{f} \right) \right] \left(\frac{p}{f} - \frac{p_1}{f} \right) \\ &= -r y^{\sigma} + y \left[\ominus \left(\frac{p_1}{f} \oplus \frac{p}{f} \right) \right]. \end{aligned}$$

Označme

$$s = \ominus\left(\frac{p_1}{f} \oplus \frac{p}{f}\right).$$

Pokračujme dále s počítáním y^Δ:

$$y^\Delta = -ry^\sigma + ys = -ry - r\mu y^\Delta + ys = y(s-r) - r\mu y^\Delta.$$

Tudíž

$$y^\Delta = y\frac{s-r}{1+\mu r} = g(s \ominus r). \tag{3.34}$$

Nyní použijme vzoreček

$$a \oplus (b+c) = a + b + c + \mu ab + \mu ac = (a \oplus b) + c(1 + \mu a)$$

a zjistíme, že

$$\begin{aligned}\ominus(s \ominus r) &= \frac{p_1}{f} \oplus \frac{p}{f} \oplus r = \frac{p_1}{f} \oplus r \oplus \left(\frac{p_1}{f} + \frac{p}{f}\right) = \left[\left(2 \odot \frac{p_1}{f}\right) \oplus r\right] + \frac{y}{f}\left[1 + \mu\left(\frac{p_1}{f} \oplus r\right)\right] \\ &= h + gy,\end{aligned}$$

kde

$$y = \frac{1 + \mu\left(r \oplus \frac{p_1}{f}\right)}{f} \quad \text{a} \quad h = r \oplus \left(2 \odot \frac{p_1}{f}\right). \tag{3.35}$$

Pomocí rovnice (3.34) zjistíme, že y je řešením

$$y^\Delta = \left[\ominus\left(h(x) + g(x)y\right)\right] y. \tag{3.36}$$

Tato rovnice (3.36) je logistická rovnice a je speciálním případem rovnice (3.22).

Věta 3.72. Nechť p_1 je řešením Riccatiho rovnice (3.33). Definujme y a h jako v (3.35) a nechť y je řešení logistické rovnice (3.36). Pak $p = p_1 + y$ je také řešení Riccatiho rovnice (3.33).

Důsledek 3.73. Předpokládejme, že p_1 je řešením Riccatiho rovnice (3.33). Definujme y a h jako v (3.35). Pak řešení p rovnice (3.33) s počáteční podmínkou $p(x_0) = p_0$ je ve tvaru

$$p(x) = p_1(x) + \frac{e_q(x_0, x)}{\frac{1}{p_0 - f_1(x_0)} + \int_{x_0}^{x} e_q(x_0, \sigma(r))y(r)\Delta r},$$

za podmínky, že žádný ze jmenovatelů není nulový.

3.5.8 Clairautova rovnice

Clairautova dynamická rovnice je rovnice tvaru:

$$y = xy^{\Delta} + g\left(y^{\Delta}\right), \tag{3.37}$$

kde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a diferencovatelná funkce. Pokračujme úpravou rovnice (3.37) na její analogii ve spojitém mdelu $y = xy' + g(y')$ a zaveďme substituci $v = y^{\Delta}$. Potom

$$y(x) = xv(x) + g(v(x)). \tag{3.38}$$

Zderivujme tuto rovnici, vyvodíme tak:

$$\begin{aligned} v(x) &= y^{\Delta}(x) \\ &= \sigma(x)v^{\Delta}(x) + v(x) + v^{\Delta}(x)\int_0^1 g'\left(v(x) + h\mu(x)v^{\Delta}(x)\right)\mathrm{d}h, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(x)v^{\Delta}(x) + v^{\Delta}(x)\int_0^1 g'\left(v(x) + h\mu(x)v^{\Delta}(x)\right)\mathrm{d}h \\ &= v^{\Delta}(x)\left\{\sigma(x) + \int_0^1 g'\left(v(x) + h\mu(x)v^{\Delta}(x)\right)\mathrm{d}h\right\}. \end{aligned}$$

Obdržíme tak následující výsledek.

Věta 3.74. Pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$ platí, že rovnice

$$y(x) = cx + g(c) \tag{3.39}$$

je řešení rovnice (3.37). Další řešení y této rovnice bychom mohli obdržet vyřešením

$$\int_0^1 g'\left(v(x) + h\mu(x)v^{\Delta}(x)\right)\mathrm{d}h = -\sigma(x), \quad y^{\Delta} = v. \tag{3.40}$$

V diferenčních rovnicích je řešením Clairautových rovnic (1.14)

$$y = y'x + g\left(y'\right)$$

takovéto:

Pro $p' = 0$, je $p = a, a \in \mathbb{R}$ a obecným řešením jsou tak lineární funkce

$$y = cx + g(c).$$

Je-li $x + g'(p) = 0$, je tzv. singulární řešení parametricky zadané rovnicemi

$$x = -g'(p), \quad y = -pg'(p) + g(p).$$

pro $p = y'$.

Příklad 3.75. Uvažujme rovnici

$$y = xy^{\Delta} + \left(y^{\Delta}\right)^2, \tag{3.41}$$

což je obdobou rovnice (3.37), kde $g(z) = z^2$. Pomocí Věty 3.74 zjistíme, že

$$y(x) = cx + c^2$$

je řešení rovnice (3.41), kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Víme, že $v = y^{\Delta}$, levá strana rovnice (3.40) pak lze upravit

$$\begin{aligned} \int_0^1 g'\left(v(x) + h\mu(x)v^{\Delta}(x)\right) \mathrm{d}h &= 2\int_0^1 \left(v(x) + h\mu(x)v^{\Delta}(x)\right) \mathrm{d}h \\ &= 2v(x) + \mu(t)v^{\Delta}(x) \\ &= v(x) + v^{\sigma}(x) \end{aligned}$$

Vyřešme tedy rovnici

$$v + v^{\sigma} = -\sigma(x), \quad \text{to jest} \;\; 2v^{\sigma} - \mu(t)v^{\Delta} = -\sigma(x). \tag{3.42}$$

Pro $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ má pak tato rovnice tvar:

$$2v(x) = -x.$$

Proto

$$y(x) = -\frac{x^2}{4} + c$$

může být řešením rovnice (3.41), kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Kontrolou zjistíme, že $c = 0$ a tudíž další řešení rovnice (3.41) je

$$y(x) = -\frac{x^2}{4}.$$

Nyní předpokládejme, že

$$\mathbb{T} = \{x_k : k \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{pro} \;\; x_0 < x_1 < x_2 < \dots \tag{3.43}$$

Pak můžeme vydělit rovnici (3.42) číslem $\mu(x)$ a obdržíme tak

$$v^{\Delta} = \frac{2}{\mu(x)}v^{\sigma} + \frac{\sigma(x)}{\mu(x)},$$

což je tvar rovnice z Věty 3.39 pro $f = -\frac{2}{\mu}$ a $g = \frac{\sigma}{\mu}$. Podle této věty je řešení dáno jako:

$$v(x_m) = (-1)^m v_0 + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} x_{k+1} = (-1)^m c - (-1)^m \left[a + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k x_k\right],$$

kde jsme za v_0 dosadili $c-a$. Hodnota sumy

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^k x_k$$

závisí na časové škále $\mathbb{T}$ a my zde ukážeme výpočet pro několik časových škál $\mathbb{T}$, které vyhovují rovnici (3.43). Nejdříve uvažujme, že $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$. Pak

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} (-1)^k x_k &= \sum_{k=1}^{m} \left\{ \Delta \left[\frac{(-1)^k}{-2} k \right] - \frac{(-1)^{k+1}}{-2} (\Delta k) \right\} = \frac{(-1)^m (m+1)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \\ &= \frac{(-1)^m (m+1)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^m - 1}{-2} = (-1)^m \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Volíme tedy $a = \frac{1}{4}$ a dostáváme tak

$$v(x) = (-1)^x c - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Integrací (tj. sumací) obdržíme více možností řešení rovnice (3.41)

$$y(x) = \frac{(-1)^x}{2} c - \frac{x(x-1)}{4} - \frac{x}{4} + \tilde{c} = \frac{(-1)^x}{2} c - \frac{x^2}{4} + \tilde{c}.$$

Dosaďme do původní rovnice (3.41):

$$\begin{aligned}x \Delta y(x) + (\Delta y(x))^2 &= x v(x) + (x v(x))^2 \\ &= x (-1)^x c - \frac{(2x+1)x}{4} + c^2 - \frac{2x+1}{2} (-1)^x c + \left(\frac{2x+1}{4} \right)^2 \\ &= \frac{(-1)^x}{-2} c - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{16} + c^2,\end{aligned}$$

$\tilde{c} = \frac{1}{16} + c^2$. Proto

$$y(x) = \frac{(-1)^x}{2} c - \frac{x(x-1)}{4} - \frac{x}{4} + \left(\frac{1}{16} + c^2 \right) = \left(c (-1)^x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

je také řešení rovnice (3.41) pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

Dále můžeme použít podobnou metodu k nalezení dalších řešení rovnice (3.41) pro časovou škálu $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$. Ukážeme pouze základní kroky výpočtu a jejich ověření nechme čtenářovi. Snadným výpočtem ověříme

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^k x_k = (-1)^m \frac{q^{m+1}}{q+1} - \frac{q}{q+1}.$$

Položme tedy $a = \frac{q}{q+1}$ a derivací zjistíme, že

$$y(x) = \frac{1-q}{1+q} cx \, (-1)^{\log_q x} - \frac{qx^2}{(q+1)^2} + c^2 = \left(c \, (-1)^{\log_q x} - \frac{(q-1)x}{2(q+1)} \right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

je také řešení rovnice (3.41) pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

A konečně pro $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2$, počítejme

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^k \, x_k = (-1)^m \, \frac{m(m+1)}{2}.$$

Zvolíme proto $a = 0$ a dostaneme tak

$$y(x) = -c\sqrt{x} \, (-1)^{\sqrt{x}} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + c^2 = \left(c \, (-1)^{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

je také řešení rovnice (3.41) pro libovolné $c \in \mathbb{R}$.

Literatura

[1] Půža B., *Text k přednášce Matematická analýza III*. Brno 2006.

[2] Plch R., *Příklady z matematické analýzy : diferenciální rovnice*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. ISBN 8021028068

[3] Kelley, Walter G. - Peterson, Allan C., *Difference Equations : An Introduction with Applications*. 2nd ed. San Diego : Academic press, 2001. ISBN 0-12-403330

[4] Elaydi S., *An Introduction to Difference Equations*. 3rd ed. New York: Springer 2005. ISBN 0387230599

[5] Bohner, Martin - Peterson, Allan., *Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications*. Boston, MA : Birkhauser, 2001. ISBN 0-8176-4225-0.

[6] Bohner, Martin - Peterson, Allan., *Advances in Dynamic Equations on Time Scales.* Boston, MA : Birkhauser, 2003. ISBN 0-8176-4293-5.

[7] Kunovská A., *Sbírka úloh zaměřená na obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů* Masarykova univerzita. Přírodovědecká fakulta, 2007.

[8] Ráb Miloš, *Metody řešení diferenciálních rovnic* Univerzita J. E. Purkyně v Brně, Státní pedagogické nakladatelství,n. p., Praha 1, 1989.