

**MASARYKOVA UNIVERZITA**  
**PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA**  
**ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY**

# **Diplomová práce**

**BRNO 2018**

**MARKÉTA VAŇKOVÁ**



**MASARYKOVA UNIVERZITA**  
**PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA**  
**ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY**

---



# **Aplikace vícerozměrných integrálů**

Diplomová práce

**Markéta Vaňková**

**Vedoucí práce: doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.      Brno 2018**

# Bibliografický záznam

<b>Autor:</b>	Bc. Markéta Vaňková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav Matematiky a Statistiky
<b>Název práce:</b>	Aplikace vícerozměrných integrálů
<b>Studijní program:</b>	PřF N-MA Matematika
<b>Studijní obor:</b>	Učitelství matematiky, deskriptivní geometrie, geografie a kartografie pro střední školy
<b>Vedoucí práce:</b>	doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.
<b>Akademický rok:</b>	2017/2018
<b>Počet stran:</b>	viii + 95
<b>Klíčová slova:</b>	Dvojný integrál; Trojný integrál; Fubiniova věta; Vícerozměrný integrál; Aplikace dvojného integrálu; Aplikace trojného integrálu; Aplikace vícerozměrného integrálu

# Bibliographic Entry

**Author:** Bc. Markéta Vaňková  
Faculty of Science, Masaryk University  
Department of Mathematics and Statistics

**Title of Thesis:** Application of multiple integrals

**Degree Programme:** Faculty of Science N-MA Mathematics

**Field of Study:** Upper Secondary School Teacher Training in Mathematics,  
Descriptive Geometry, Geography and Cartography

**Supervisor:** doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.

**Academic Year:** 2017/2018

**Number of Pages:** viii + 95

**Keywords:** Double integral; Triple integral; Fubini's theorem; Multiple integral; Applications of double integral; Applications of triple integral; Applications of multiple integral

# Abstrakt

Obsahem diplomové práce jsou aplikace vícerozměrného integrálu. Práce je rozdělena do čtyř kapitol, první se věnuje jednorozměrnému integrálu, druhá kapitola dvojnému integrálu, třetí trojnému integrálu a čtvrtá vícerozměrnému integrálu. Každá z kapitol o vícerozměrných integrálech je strukturována na výpočet, transformace a aplikace. Podkapitoly o aplikacích obsahují kromě vzorového řešeného příkladu řadu dalších příkladů k samostatnému řešení, které je spolu s ilustrací zadání k nahlédnutí v příloze.

# Abstract

The content of this diploma thesis are the applications of a multiple integral. The thesis is divided into four chapters, the first chapter deals with a one-dimensional integral, the second chapter is concerned with a two-dimensional integral, the third with a three-dimensional integral and the fourth deals with a multiple integral. Each of the chapters on the multi-dimensional integrals is structured into the calculation, transformations and applications parts. The subchapters concerned with applications contain, apart from the sample examples, also many other examples to be solved independently. The solution with illustration of the assignment for the control of results is presented in the annex.



MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2016/2017

**Ústav:** Ústav matematiky a statistiky  
**Studentka:** Bc. Markéta Vaňková  
**Program:** Matematika  
**Obor:** Učitelství matematiky pro střední školy  
Učitelství deskriptivní geometrie pro střední školy  
Učitelství geografie a kartografie pro střední školy

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s názvem:

**Název práce:** Aplikace vícerozměrných integrálů

**Název práce anglicky:** Application of multiple integrals

### Oficiální zadání:

Pojednejte o základech teorie vícerozměrného Riemannova integrálu. Uvedte metody jeho výpočtu a možnosti aplikací. Zařaďte vhodné řešení příklady. Doplňte sbírkou úloh k samostatnému řešení.

### Literatura:

NAGY, Josef, Eva NOVÁKOVÁ a Milan VACEK. *Integrální počet*. 1. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1984. 312 s. Matematika pro vysoké školy technické VI.

KALAS, Josef a Jaromír KUBEN. *Integrální počet funkcí více proměnných*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2009. vi, 272. ISBN 9788021049758.

KLUVÁNEK, Igor, Ladislav MIŠÍK a Marko ŠVEC. *Matematika pre štúdium technických vied. II. diel*. Vyd. 1. Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1961. 855 s.

RÁB, Miloš. *Zobrazení a Riemannův integrál v En*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. 97 s.

### Jazyk závěrečné práce:

**Vedoucí práce:** doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.

**Datum zadání práce:** 27. 9. 2016

**V Brně dne:** 2. 11. 2016

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

15.11.2016

Bc. Markéta Vaňková  
studentka

doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.  
vedoucí práce

prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.  
ředitel Ústavu matematiky a  
statistiky

# Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala doc. RNDr. Josefu Kalasovi, CSc. za jeho čas, ochotu, trpělivost a cenné rady, se kterými vedl mou diplomovou práci.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 21. dubna 2018

.....  
Markéta Vaňková

# Obsah

<b>Úvod</b> .....	<b>viii</b>
<b>Kapitola 1. Pojem integrál</b> .....	<b>1</b>
1.1 Riemannův integrál .....	1
1.2 Výpočet učitého integrálu .....	5
<b>Kapitola 2. Dvojný integrál</b> .....	<b>7</b>
2.1 Transformace dvojného integrálu .....	14
2.2 Aplikace dvojného integrálu .....	17
<b>Kapitola 3. Trojný integrál</b> .....	<b>28</b>
3.1 Transformace trojného integrálu .....	31
3.2 Aplikace trojného integrálu .....	34
<b>Kapitola 4. Vícerozměrný integrál</b> .....	<b>44</b>
4.1 Transformace $n$ -rozměrného integrálu .....	45
4.2 Aplikace $n$ -rozměrného integrálu .....	48
<b>Závěr</b> .....	<b>52</b>
<b>Příloha</b> .....	<b>53</b>
<b>Seznam použité literatury</b> .....	<b>94</b>



# Úvod

Cílem práce je formulovat poznatky z teorie vícerozměrného integrálu, uvést metody jeho výpočtu a některé možnosti aplikací. Důležitou částí diplomové práce jsou názorné příklady a cvičení. Každý příklad je vyřešen a většina z nich, převážně náročnějších na představivost, je doplněna o ilustraci zadání. Cvičení jsou v textu zadána čtenáři k samostatnému řešení a pro případ potřeby v příloze vyřešena podobným způsobem, jako příklady uvnitř práce. Text je psán tak, aby byl srozumitelný pro studenty vysoké, ale i střední školy a posloužit by měl nejen k utřebením znalostí, ale i k jejich rozšíření a procvičení.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole jsou uvedeny základní pojmy z teorie integrálního počtu, na které se dále navazuje. V Kapitolách 2, 3 a 4 jsou s rostoucím rozměrem integrálu postupně uváděny další užívané transformace a aplikace integrálů. Řada aplikací uvedených v druhé kapitole o dvojrozměrném integrálu, jako je hmotnost, těžiště, moment setrvačnosti a elektrický náboj množiny, je využita v třetí kapitole u trojrozměrného integrálu. Výjimkou je pouze hydrostatická tlaková síla, se kterou je čtenář seznámen na konci druhé kapitoly a obsah plochy v trojrozměrném prostoru, jehož metoda výpočtu je uvedena ve třetí kapitole. Samozřejmostí je sbírka příkladů i cvičení na výpočet obsahu a objemu ploch a těles. Poslední kapitola o vícerozměrných integrálech navazuje na již využitě aplikace a nabízí ukázkou výpočtu míry měřitelné množiny v  $n$ -rozměrném prostoru a obsah  $(n - 1)$ -rozměrné plochy v  $n$ -rozměrném prostoru.

Grafické podpory vytvořené v programu Geogebra je využito především v příloze, a to v celé její části. Vynechány jsou grafy pouze u cvičení, která navazují na zadání některého z předchozích. V části věnované řešení cvičení s trojrozměrnými tělesy je pak většinou vzhledem k lepší orientaci v grafu využito křivkových modelů namísto plošných, se kterými se čtenář může setkat pouze u jednoduchých těles, při výpočtech hmotnosti a momentů setrvačnosti těles. Je kladen důraz, aby všechny obrázky trojrozměrných těles byly znázorněny v perspektivním promítání a celková práce tak působila jednotně. V celé práci se využívá levotočivého souřadnicového systému, který čtenáři známému deskriptivní geometrie, konkrétně mongeova promítání, ulehčuje představu přechodu z trojrozměrného prostoru do roviny.

Pro zavedení teoretických souvislostí a čtvrté kapitoly využívá práce literatury [3], [2], [10] a internetových zdrojů. Na uvážení, či přímo zařazení vhodných příkladů se pak podílí kromě již uvedených zdrojů [5], [7] a [9].

# Kapitola 1

## Pojem integrál

V knize *Malý průvodce historií integrálu* [13] je zmíněno, jaké problémy způsobil pojem integrálu v tehdejší společnosti. Již není potřeba znovu opakovat situaci, ve kterou výustil spor o prvenství v objevení integrálního počtu. Spor se nevedl pouze mezi autory, I. Newtonem a G. W. Leibnitzem, ale i v široké, nejen matematické, společnosti.

Dnes se integrál využívá k řešení problémů v geometrii, fyzice či kartografii. Tímto tématem se zabývá i diplomová práce, která v jednotlivých částech seznámí čtenáře s těmi nejznámějšími aplikacemi vícerozměrného integrálu. Než budou uvedeny aplikace, je však třeba zmínit základní pojmy týkající se integrálního počtu.

### 1.1 Riemannův integrál

Nejprve zavedeme několik potřebných pojmů a označení, abychom mohli definovat určitý integrál. Uvažujme funkci  $f(x)$ , která je definována na ohraničeném uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$  a která je na tomto intervalu ohraničená. Existují tak konstanty  $m$  a  $M$  takové, že pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$  platí  $m \leq f(x) \leq M$ . Z toho plyne, že graf funkce je ohraničen a je uzavřen v obdélníku omezeném přímkami  $x = a, x = b, y = m$  a  $y = M$ .

*Dělením*  $D$  intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pro  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , nazveme množinu  $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , takovou, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Čísla  $x_0, x_1, \dots, x_n$  se nazývají *dělicí body*. Interval  $\langle a, b \rangle$  tedy bude dělením  $D$  rozdělen na  $n$  *dělicích intervalů* dělení  $D$ ,  $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$ .

Je-li zavedeno dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$ , můžeme zavést i pojem *norma dělení*. *Normou* dělení  $D$  nazveme číslo  $\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} > 0$ , které budeme značit  $v(D)$ . Číslo  $v(D)$  tedy udává délku nejdelšího z dělicích intervalů dělení  $D$ . Pomocí normy dělení lze zjistit, jak jemné dělení je využito. *Množinu všech dělení*  $D$  intervalu  $\langle a, b \rangle$  označíme  $\mathcal{D}$ .

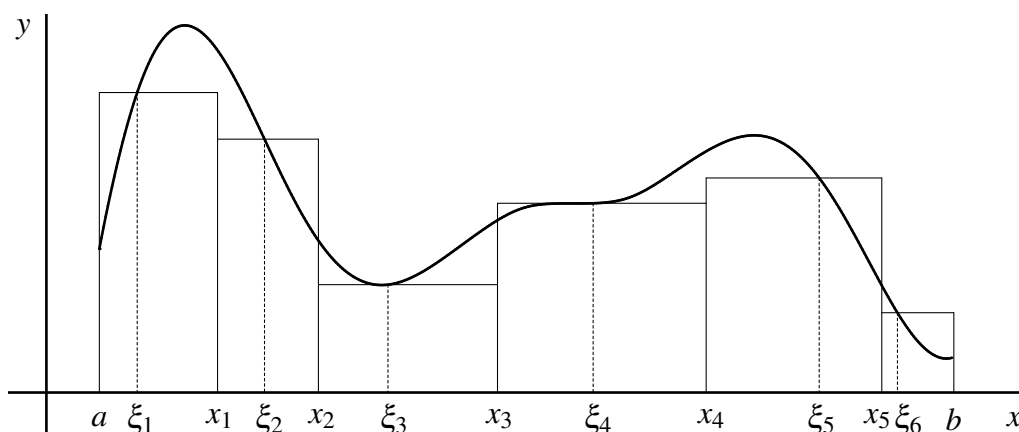
V každém intervalu dělení  $D$  lze vybrat libovolný bod  $v$   $i$ -tém intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ . Označíme jej písmenem  $\xi_i$ . Jistě platí, že

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n.$$

Množinu  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  těchto bodů nazveme výběrem reprezentantů dělení  $D$ . Schází zavést poslední pojem předcházející integrálu, kterým je integrální součet. Je-li tedy  $\Xi$  výběr reprezentantů dělení  $D$  intervalu  $\langle a, b \rangle$ , definujeme integrální součet  $S(f, D, \Xi)$  odpovídající funkci  $f$ , dělení  $D$  a výběru reprezentantů  $\Xi$  vztahem

$$S(f, D, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Jedná se tedy o součet ploch obdélníků o základnách délky  $x_i - x_{i-1}$  a výškách  $f(\xi_i)$ , kde  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pro  $f(\xi_i) < 0$  je příspěvek daného obdélníku záporný, jelikož dochází k součinu základny, jejíž délka je vždy kladná hodnota, a výšky, která je zde vyjádřena jako funkční hodnota libovolného bodu základny a může tedy nabývat záporných hodnot.



Obrázek 1.1: Výpočet integrálu výběrem reprezentantů

Pojmy potřebné pro definování určitého integrálu jsou tedy již zmíněné a můžeme tak vyslovit definici určitého integrálu.

Nechť  $f(x)$  je funkce, která je definovaná a ohraničená na ohraničeném a uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,  $a < b$ .

Řekneme, že funkce  $f(x)$  je *integrovatelná*, neboli, že má určitý integrál na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , jestliže existuje číslo  $I \in \mathbb{R}$  s následující vlastností:

K libovolnému číslu  $\varepsilon > 0$  lze nalézt číslo  $\delta > 0$  tak, že pro libovolné dělení  $D$  intervalu  $\langle a, b \rangle$  takové, že  $v(D) < \delta$ , a pro libovolný výběr reprezentantů  $\Xi$  tohoto dělení platí  $|S(f, D, \Xi) - I| < \varepsilon$ .

Číslo  $I$  pak nazýváme hodnotou určitého integrálu a píšeme

$$\int_a^b f(x) dx = I. \tag{1.1}$$

Číslo  $a$  nazýváme *dolní mez*, číslo  $b$  *horní mez*, interval  $\langle a, b \rangle$  *integrační obor* a funkci  $f$  *integrand*. Horní a dolní mez nazýváme společně *integrační meze*.

Integrál z právě uvedené definice se nazývá **Riemannův**. Často je však tento integrál zaveden jiným způsobem, kdy místo integračních součtů je využito horních a dolních součtů. Ukážeme si i tento způsob.

Pro zavedení Riemannova integrálu pomocí horního a dolního integračního součtu využijeme zmíněných pojmů – dělení intervalu a norma dělení.

V každém intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  určíme největší dolní závorku, infimum,  $m_i$  hodnot funkce  $f$ . Číslo  $m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$  vyjadřuje obsah obdélníku sestaveného nad, nebo pod intervalem  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  o výšce  $m_i$ . Navíc  $\sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$  představuje obsah mnohoúhelníku, který je sjednocením všech těchto obdélníků.

Pro obecnou funkci, která může nabývat záporných i kladných hodnot, je Riemannův integrál roven matematickému obsahu oblastí mezi grafem  $f$  a osou  $x$ . To je totéž jako geometrický obsah částí nad osou  $x$ , minus geometrický obsah částí pod osou  $x$ . Uvažujme nyní pouze funkce s oborem hodnot v kladných reálných číslech. Podobně, je-li  $M_i$  nejmenší horní závorka, supremum, hodnot funkce  $f$  na  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ , je  $M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$  obsah obdélníku o základně  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  a výšce  $M_i$ ,  $\sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$  vyjadřuje obsah mnohoúhelníku, který je sjednocením všech těchto obdélníků. Pomocí těchto pojmů lze zavést dolní a horní integrační součet.

Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  a nechť  $f$  je omezená funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Nechť množina dělení  $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathfrak{D}$ . Označme

$$m_i = \inf\{f(x), x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\}, \quad M_i = \sup\{f(x), x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\},$$

pro  $i = 1, 2, \dots, n$  a položíme

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad S(D, f) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Číslo  $s(D, f)$  nazýváme *dolní (integrační) součet*, číslo  $S(D, f)$  *horní (integrační) součet* funkce  $f$  při dělení  $D$ .

**Definice 1.** Nechť je dáno dělení  $D_1, D_2$  intervalu  $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ . Jestliže je množina dělicích bodů dělení  $D_1$  podmnožinou množiny dělicích bodů dělení  $D_2$ , nazývá se dělení  $D_2$  zjemnění dělení  $D_1$ .

**Věta 1.** Pro každou ohraničenou funkci  $f$  platí:

1.  $s(D, f) \leq S(D, f)$  pro každé  $D \in \mathfrak{D}$ ,
2. jsou-li  $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$ ,  $D_2$  je zjemnění  $D_1$ , pak je  $s(D_1, f) \leq s(D_2, f)$ ,  $S(D_1, f) \geq S(D_2, f)$ ,
3. jsou-li  $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$  libovolná, pak  $s(D_1, f) \leq S(D_2, f)$ .

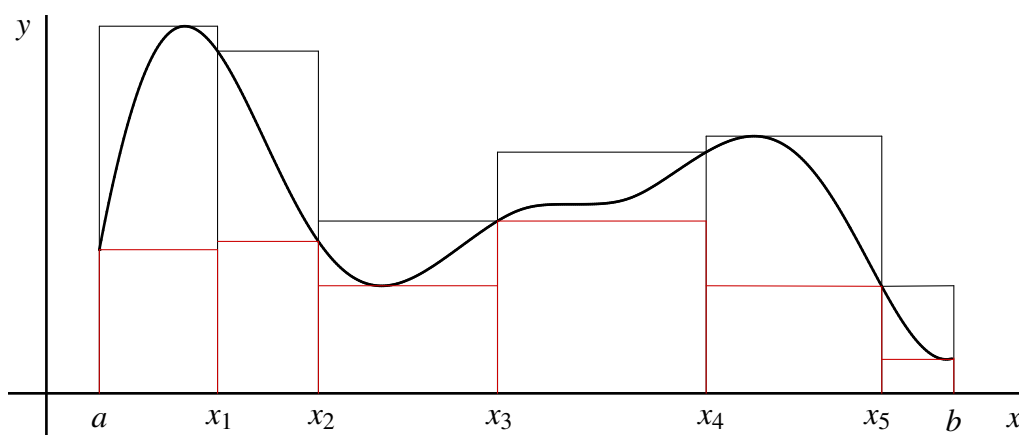
Podle předchozí věty, pro každé pevně zvolené dělení  $D_0 \in \mathfrak{D}$  platí  $s(D, f) \leq S(D_0, f)$  pro každé  $D \in \mathfrak{D}$ . Proto množina  $\{s(D, f), D \in \mathfrak{D}\}$  je neprázdná a shora omezená (libovolným horním součtem). Proto existuje její supremum  $\sup\{s(D, f) : D \in \mathfrak{D}\}$ , které značíme

$$\int_a^b f(x) dx$$

Z předchozího tvrzení plyne:

$$\int_a^b f(x) dx \leq S(D_0, f),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{s(D, f), D \in \mathfrak{D}\}.$$



Obrázek 1.2: Výpočet integrálu pomocí horních (černých) a dolních (červených) součtů

Protože  $D_0 \in \mathfrak{D}$  bylo voleno libovolně, je množina  $\{S(D, f) : D \in \mathfrak{D}\}$  zdola omezená číslem  $\int_a^b f(x) dx$ . Existuje tedy  $\inf\{S(D, f) : D \in \mathfrak{D}\}$ , které označíme  $\int_a^b f(x) dx$ . Přitom platí

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Čísla  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $\int_a^b f(x) dx$  nazveme po řadě dolním, horním integrálem funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Platí-li rovnost

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

říkáme, že  $f$  je *riemannovsky integrovatelná*, a tato hodnota se nazývá určitý integrál na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Pro určitý integrál se užívá označení:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Uveďme ještě postačující podmínky existence určitého Riemannova integrálu.

**Věta 2.** Funkce  $f$  je integrovatelná na  $\langle a, b \rangle$ , je-li splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1.  $f$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$ ;
2.  $f$  je monotónní na  $\langle a, b \rangle$ ;
3.  $f$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$  s výjimkou konečného počtu bodů nespojitosti.

S předchozí větou o integrovatelnosti funkce a existencí určitého integrálu souvisí rovněž následující věta.

**Věta 3.** Nechť funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  jsou definované na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a nechť se tyto funkce liší nejvýše v konečně mnoha bodech. Jestliže je funkce  $f(x)$  integrovatelná na  $\langle a, b \rangle$ , je zde integrovatelná i funkce  $g(x)$  a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Příkladem funkce, která však není Riemannovsky integrovatelná je Dirichletova funkce, která je nespojitá v každém bodě integračního oboru  $\langle 0, 1 \rangle$ . Jelikož uvažujeme obor z intervalu  $\mathbb{R}$ , obsahuje interval  $\langle 0, 1 \rangle$  nekonečně mnoho čísel, tedy nekonečně mnoho bodů nespojitosti. Lze ukázat, že Dirichletova funkce není Riemannovsky integrovatelná, jelikož pro libovolně zvolené dělení  $D \in \mathfrak{D}$  se dolní a horní integrál z Dirichletovy funkce nerovnjí.

## 1.2 Výpočet učitého integrálu

Než bude uveden dvojný integrál, je nutné ještě zmínit pravidla počítání s určitými jednorozměrnými integrály. Jako první zavádíme Newton - Leibnizovu formuli, která uvádí vztah mezi neurčitým a určitým integrálem.

**Věta 4.** (Newtonova-Leibnizova formule). Nechť funkce  $f(x)$  je integrovatelná na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a nechť  $F(x)$  je její primitivní funkce. Pak platí, že

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \tag{1.2}$$

Rozdíl  $F(b) - F(a)$  označujeme  $[F(x)]_a^b$ , tedy

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

Že nemusíme uvažovat konstantu  $c$ , jinak řečeno, že výraz (1.2) dává stejný výsledek, lze jednoduše ukázat. Je-li  $G(x)$  další primitivní funkce k  $f(x)$ , existuje konstanta  $c$  taková, že  $G(x) = F(x) + c$ . Určitý integrál  $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a)$ .

## Metoda per partes pro určitý integrál

**Věta 5.** Nechť funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  mají na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , derivace  $u'(x)$  a  $v'(x)$ , které jsou na tomto intervalu integrovatelné. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx. \quad (1.3)$$

## Substituční metoda pro určitý integrál

Nechť funkce  $f(t)$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Nechť funkce  $\varphi(x)$  má derivaci  $\varphi'(x)$  na intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , která je na tomto intervalu integrovatelná. Dále nechť platí  $a \leq \varphi(x) \leq b$  pro  $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$  (tedy  $\varphi$  zobrazuje interval  $\langle \alpha, \beta \rangle$  do intervalu  $\langle a, b \rangle$ ). Pak platí, že

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt. \quad (1.4)$$

Po zavedení substituce  $\varphi(x) = t$  se vypočítá diferenciál  $\varphi'(x) dx = dt$  a změní se meze  $\alpha \rightarrow \varphi(\alpha)$  a  $\beta \rightarrow \varphi(\beta)$ .

Po tomto kroku se může u některých funkcí stát, že  $\varphi(\alpha) \geq \varphi(\beta)$ , proto je ještě vhodné zbavit se předpokladu, že integrační obor je interval  $\langle a, b \rangle$ , tedy že  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $a < b$  a připustit, že může být i  $a \geq b$ . Přitom klademe  $\int_a^a f(x) dx = 0$ . Pro  $a > b$  definujeme:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Nyní již nebrání nic zavedení dvourozměrných integrálů, jejich aplikací a následnému pojednání o vícerozměrných integrálech a aplikacích.

# Kapitola 2

## Dvojný integrál

V předchozí kapitole byl zaveden pojem Riemannova určitého integrálu funkce jedné proměnné. Nyní se budeme zabývat jeho zobecněním. V následující části bude práce seznamovat čtenáře s Riemannovým integrálem funkce  $n$  proměnných na obecných množinách  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Důležité budou především případy, kdy  $n = 1, 2, 3$ . Pro  $n = 1$  nazýváme integrál jednoduchým, pro  $n = 2$  dvojným a pro  $n = 3$  hovoříme o integrálu trojném.

Nejprve definujeme dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu.

Nechť existují dva intervaly  $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$ . Jejich kartézským součinem  $J = J_1 \times J_2$  budeme nazývat dvojrozměrný interval nebo také interval v rovině.

O těchto intervalech budeme předpokládat, že jsou omezené a uzavřené. Útvar v rovině  $M = J_1 \times J_2$ , tvořený omezenými a uzavřenými intervaly  $J_1$  a  $J_2$  je omezený a uzavřený obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Je-li  $J_1 = \langle a, b \rangle$ ,  $J_2 = \langle c, d \rangle$ , lze zmiňovaný obdélník  $M$  zapsat jako množinu bodů roviny, jejichž souřadnice  $x$  a  $y$  leží postupně uvnitř intervalů  $J_1, J_2$ . Neboli, že  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ . Na obdélníku  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle c, d \rangle\}$  definujeme dělení obdélníku  $M$  a normu dělení  $v(D)$  podobně, jako v předchozí kapitole, s tím rozdílem, že nyní norma dělení bude definována pro dvojrozměrný prostor, a proto bude rovna namísto největšího intervalu dělení nejdelší z úhlopříček všech intervalů dělení. Zavedeno bude dělení obou intervalů  $J_1, J_2$ ,

$$D_x: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b,$$

$$D_y: c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d.$$

Každý obdélník, vytvořený z intervalů dělení označíme  $M_{ik} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{k-1}, y_k \rangle$ , kde  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Množinu všech dílků dělení  $M_{ik}$  sestrojených nad dílky dělení intervalů  $J_1, J_2$  nazýváme dělením obdélníku  $M$  a značíme  $D = D_x \times D_y$ . A konečně normou dělení budeme rozumět, jak již bylo uvedeno, nejdelší z úhlopříček všech dílků dělení,  $v(D) = \max\{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} : i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n\}$ . Množinu všech dělení obdélníku  $M$  označíme symbolem  $\mathfrak{D}(M)$ .



Podobně jako v předchozí kapitole zavedeme pomocí ohraničené funkce  $f$  na obdélníku  $M$  dolní a horní součet funkce  $f$  při dělení  $D$ . Označíme je totožně jako při výpočtu Riemannova integrálu jedné proměnné, tedy  $s(D, f)$  a  $S(D, f)$  přičemž

$$\begin{aligned} v_{ik} &= \inf\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}, \\ V_{ik} &= \sup\{f(x, y) : [x, y] \in M_{ik}\}, \\ s(D, f) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n v_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}), \\ S(D, f) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n V_{ik}(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}). \end{aligned}$$

Při zamyšlení se nad uvedeným vzorcem pro výpočet horního a dolního součtu je patrné, že  $(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})$  značí obsah obdélníku  $M_{ik}$ . Při zavedení pojmu míra (obsah) obdélníku  $R$ ,  $R = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{k-1}, y_k \rangle$ , kde  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ , můžeme stručněji psát

$$\begin{aligned} s(D, f) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n v_{ik} m(M_{ik}), \\ S(D, f) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n V_{ik} m(M_{ik}). \end{aligned}$$

Stejně jako v případě jednorozměrného integrálu, tak i u dvojrozměrného integrálu pro každou ohraničenou funkci  $f$  platí:

1.  $s(D, f) \leq S(D, f)$  pro každé  $D \in \mathfrak{D}$ .
2. Jsou-li  $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$ ,  $D_2$  je zjemnění  $D_1$ , pak  $s(D_1, f) \leq s(D_2, f)$ ,  $S(D_1, f) \geq S(D_2, f)$ .
3. Jsou-li  $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$  libovolná, pak  $s(D_1, f) \leq S(D_2, f)$ .

Důkaz lze nalézt v [3, strana 4].

Podle výše uvedených vztahů pro libovolně pevně zvolené dělení  $D_0 \in \mathfrak{D}$  dvojrozměrného intervalu  $M: \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$  platí  $s(D, f) \leq S(D_0, f)$  pro každé  $D \in \mathfrak{D}$ . Množina všech dolních součtů funkce  $f$  při dělení  $D$   $\{s(D, f) : D \in \mathfrak{D}\}$  je tedy neprázdná a shora omezená. Proto existuje  $\sup\{s(D, f) : D \in \mathfrak{D}\}$ , které značíme

$$\iint_M f(x, y) dx dy. \quad (2.1)$$

Z předchozích úvah plyne

$$\iint_M f(x, y) dx dy \leq S(D_0, f). \quad (2.2)$$

Z toho vychází, že pro libovolně zvolené dělení dvojrozměrného intervalu  $M$  je množina všech horních součtů funkce  $f$ ,  $S(D, f)$  zdola omezená číslem  $\iint_{\overline{M}} f(x, y) dx dy$  a neprázdná.

Proto existuje  $\inf\{S(D, f) : D \in \mathfrak{D}\}$ , které značíme

$$\iint_{\overline{M}} f(x, y) dx dy.$$

Přitom platí, že

$$\iint_{\underline{M}} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\overline{M}} f(x, y) dx dy.$$

Čísla  $\iint_{\underline{M}} f(x, y) dx dy$ ,  $\iint_{\overline{M}} f(x, y) dx dy$  nazveme po řadě dolním, horním integrálem funkce  $f$  na množině  $M$ .

Využitím zavedených pojmů a vztahů lze definovat dvojný integrál funkce na množině. Platí-li totiž rovnost

$$\iint_{\underline{M}} f(x, y) dx dy = \iint_{\overline{M}} f(x, y) dx dy,$$

říkáme, že funkce  $f$  je integrovatelná na množině  $M$  a dvojný integrál  $\iint_M f(x, y) dx dy$  funkce  $f$  na množině  $M$  definujeme vztahem

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \iint_{\underline{M}} f(x, y) dx dy = \iint_{\overline{M}} f(x, y) dx dy.$$

Funkce  $f$  se nazývá integrand, množina  $M$  integrační obor.

Fubiniova věta říká, že, je-li funkce  $f$  integrovatelná na obdélníku  $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ , pak platí

$$\begin{aligned} \iint_M f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \end{aligned}$$

Pro spojitou funkci  $f$  na obdélníku  $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ , pak platí

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Pro dvojný integrály dále platí.

**Věta 6.** Nechť  $f, g$  jsou funkce integrovatelné na obdélníku  $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$  a necht'  $k$  je konstanta. Pak

1. funkce  $kf$  je integrovatelná na  $M$  a

$$\iint_M kf(x, y) \, dx dy = k \iint_M f(x, y) \, dx dy,$$

2. funkce  $|f|$  je integrovatelná na  $M$  a

$$\left| \iint_M f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_M |f(x, y)| \, dx dy,$$

3. funkce  $f + g$  je integrovatelná na  $M$  a

$$\iint_M [f(x, y) + g(x, y)] \, dx dy = \iint_M f(x, y) \, dx dy + \iint_M g(x, y) \, dx dy.$$

Zda je funkce integrovatelná na daném obdélníku můžeme také zjistit postupně, a to tak, že vyšetříme integrovatelnost na každém obdélníku dělení  $D$ .

Nechť funkce  $f$  je ohraničená na obdélníku  $M$ . Buď  $D$  dělení obdélníku  $M$  s dílky dělení  $M_{ij}, [i, j] \in J$ , kde  $J = \{[i, j] : i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s\}$ .

Pak funkce  $f$  je integrovatelná na obdélníku  $M$  právě tehdy, když je integrovatelná na všech obdélnících  $M_{ij}, [i, j] \in J$ . V tom případě platí

$$\iint_M f(x, y) \, dx dy = \sum_{[i, j] \in J} \iint_{M_{ij}} f(x, y) \, dx dy.$$

Myšlenka zavádět integrál pomocí horních a dolních součtů pochází od Darboux. Rozdíl mezi Riemannovým přístupem a přístupem Darboux spočívá především v tom, že Riemann vybírá v každém dílku  $M_{ik}$  dělení  $D$  libovolný bod, náležící dílku  $M_{ik}$ . Množina všech takovýchto bodů z jednotlivých dílků dělení se nazývá výběrem reprezentantů dílků dělení  $D$ . Tento způsob je popsán již v předešlé kapitole a proto nebude znovu uváděn.

Aby mohl být dvojný integrál definován při jiném integračním oboru než obdélníku a aplikován při výpočtech povrchů a objemů těles, je třeba zavést zobecnění pojmu obsah množiny, a uvést vlastnosti.

Buď  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  množina. Funkce  $\chi_M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  daná předpisem:

$$\chi_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y] \in M \\ 0 & \text{pro } [x, y] \notin M \end{cases}$$

se nazývá *charakteristická funkce* množiny  $M$ .

Řekneme, že omezená množina  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  je (jordanovsky) měřitelná, jestliže pro nějaký obdélník  $R \supseteq M$  je charakteristická funkce  $\chi_M$  množiny  $M$  integrovatelná na obdélníku  $R$ . Přitom klademe

$$m(M) = \iint_R \chi_M(x, y) \, dx dy$$

a číslo  $m(M)$  nazýváme (Jordanovu) mírou množiny  $M$ .

Lze ukázat, že existence ani hodnota výše uvedeného integrálu nezávisí na volbě obdélníku  $R$ , který vybranou množinu  $M$  obsahuje. Nechť  $R$  je takový obdélník, že pro libovolné dva obdélníky  $R_1, R_2$  splňující  $M \subseteq R_1, M \subseteq R_2$  platí  $R_1 \cup R_2 \subseteq R$  a nechť  $\chi_M$  je integrovatelná na  $R_1$ . Pak je funkce integrovatelná i na obdélníku  $R$  a také na  $R_2$  a jejich integrály z funkce  $\chi_M$  na těchto obdélnících se rovnají.

Pro obdélník  $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ , lze říci, že se může jednat o obdélník  $R$ , tedy  $M = R$ . Pak pro míru množiny platí

$$m(M) = \iint_R \chi_M(x, y) \, dx dy = \iint_R 1 \, dx dy = (b - a)(d - c).$$

Což je vzorec pro výpočet obsahu obdélníku, tak jak je znám v geometrii.

Je-li  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  omezená množina a  $m(h(M)) = 0$ , pak je  $M$  měřitelná.

**Věta 7.** Pro Jordanovu míru platí následující tvrzení:

1.  $m(\emptyset) = 0$ .
2. Jsou-li  $M_1, M_2$  měřitelné množiny,  $M_1 \subseteq M_2$ , pak  $m(M_1) \leq m(M_2)$ .
3.  $m(M) \geq 0$  pro libovolnou měřitelnou množinu  $M$ .
4. Jsou-li množiny  $M_1, M_2$  měřitelné, pak také množiny  $M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2, M_1 \setminus M_2$  jsou měřitelné.
5. Je-li  $y = g(x)$ ,  $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , spojitá funkce, pak graf funkce  $g$ , tj. množina  $G = \{[x, g(x)] : x \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$ , je měřitelná množina a má míru rovnou nule.
6. Je-li  $x = h(y)$ ,  $y \in \langle \gamma, \delta \rangle$ , spojitá funkce, pak graf funkce  $h$ , tj. množina  $H = \{[h(y), y] : y \in \langle \gamma, \delta \rangle\}$ , je měřitelná množina a má míru rovnou nule.
7. Je-li  $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  a je-li  $M_2$  měřitelná a  $m(M_2) = 0$ , pak rovněž  $M_1$  je měřitelná a  $m(M_1) = 0$ .

Jsou-li  $M_1, M_2$  měřitelné množiny, pak platí:

1.  $m(M_1 \cup M_2) = m(M_1) + m(M_2) - m(M_1 \cap M_2)$
2.  $m(M_1 \cup M_2) \leq m(M_1) + m(M_2)$
3. Je-li navíc  $m(M_1 \cap M_2) = 0$ , pak  $m(M_1 \cup M_2) = m(M_1) + m(M_2)$ .
4.  $m(M_1 \setminus M_2) = m(M_1) - m(M_1 \cap M_2)$
5. Je-li navíc  $M_1 \supseteq M_2$ , pak  $m(M_1 \setminus M_2) = m(M_1) - m(M_2)$ .

Je-li množina  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  měřitelná, pak i její hranice  $h(M)$  je měřitelná a platí  $m(h(M)) = 0$ . Pro jednoduchost výpočtů zavedme pojem elementární množina.

Nechť  $\phi, \psi$  jsou spojité funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$  takové, že  $\phi(x) \leq \psi(x)$  pro  $x \in \langle a, b \rangle$ . Označme  $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \in \langle a, b \rangle, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ . Říkáme, že  $A$  je elementární množina vzhledem k ose  $x$ .

Podobně, jsou-li  $\phi, \psi$  spojité funkce na intervalu  $\langle c, d \rangle$  takové, že  $\phi(y) \leq \psi(y)$  pro  $y \in \langle c, d \rangle$  a je-li  $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: y \in \langle c, d \rangle, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ , řekneme, že  $A$  je elementární množina vzhledem k ose  $y$ .

Množina  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  se nazývá elementární, je-li elementární vzhledem k ose  $x$ , nebo vzhledem k ose  $y$ .

Máme-li elementární množinu  $A$  vzhledem k ose  $x$ , pak dvě strany množiny tvoří úsečky, jež jsou grafy konstantních funkcí proměnné  $y$  spojité na kompaktním intervalu. Označme je  $U_1, U_2$ . Další dvě hrany označme  $G_1, G_2$  a budeme jimi chápat grafy spojitých funkcí proměnné  $x$  na kompaktním intervalu. Pak hranice množiny  $A$  je množina takových bodů, pro které platí  $h(A) = U_1 \cup U_2 \cup G_1 \cup G_2$ . Podle předchozích vět je míra každé uvedené úsečky či spojité funkce jedné proměnné rovna nule. Aby byla  $A$  měřitelná, stačí ukázat, že  $m(h(A)) = 0$ . To však plyne z předchozích vět, tedy:

$$0 \leq m(h(A)) = m(U_1 \cup U_2 \cup G_1 \cup G_2) \leq m(U_1) + m(U_2) + m(G_1) + m(G_2) = 0.$$

Nechť  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  je měřitelná množina a nechť  $f$  je ohraničená funkce na  $M$ . Funkci  $f$  nazveme integrovatelnou (integrace schopnou) na množině  $M$ , jestliže funkce  $\chi_M f$  určená předpisem

$$\chi_M f(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pro } [x, y] \in M \\ 0 & \text{pro } [x, y] \notin M \end{cases}$$

je integrovatelná na nějakém obdélníku  $R \supseteq M$ . Dvojný integrál funkce  $f$  na množině  $M$  pak definujeme vztahem

$$\iint_M f(x, y) \, dx dy = \iint_R \chi_M f(x, y) \, dx dy.$$

Funkce  $f$  spojitá a ohraničená na měřitelné množině  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  je na množině  $M$  integrovatelná.

Pro integrály přes měřitelnou množinu platí stejné vlastnosti uvedené na str. 10 pro dvojně integrály přes daný obdélník.

Navíc zbývá říci, že jestliže  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  značí měřitelnou množinu namísto obdélníku a platí všechny uvedené podmínky pro dvojný integrál přes danou množinu spolu s vlastností:

Je-li  $f(x, y) \leq g(x, y)$  pro každé  $[x, y] \in M$ , pak

$$\iint_M f(x, y) \, dx dy \leq \iint_M g(x, y) \, dx dy$$

1. Je-li  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  měřitelná a je-li  $k \in \mathbb{R}$  konstanta, pak

$$\iint_M k \, dx dy = km(M).$$

2. Nechť  $f$  je funkce ohraničená na množině  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  míry nula. Pak je  $f$  na  $M$  integrovatelná a platí

$$\iint_M f(x, y) \, dx dy = 0.$$

3. Je-li funkce  $f$  integrovatelná na měřitelné množině  $M_1 \subseteq \mathbb{R}^2$  i na měřitelné množině  $M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  a je-li  $m(M_1 \cap M_2) = 0$ , pak je  $f$  integrovatelná na  $M_1 \cup M_2$  a platí

$$\iint_{M_1 \cup M_2} f(x, y) \, dx dy = \iint_{M_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{M_2} f(x, y) \, dx dy$$

Jsou-li funkce  $f$  a  $g$  integrovatelné na měřitelné množině  $M \subseteq \mathbb{R}^2$ , pak i jejich součin  $f \cdot g$  je integrovatelný na  $M$ .

Je-li funkce  $f$  integrovatelná na měřitelné množině  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  a  $N \subseteq M$  je její měřitelná podmnožina, pak je funkce  $f$  integrovatelná i na  $N$ .

Jsou-li funkce  $f$  a  $g$  definované na měřitelné množině  $M$ , přičemž  $f$  je integrovatelná a  $g$  je ohraničená,  $m(M_1) = 0$ , kde  $M_1 = \{[x, y] \in M : f(x, y) \neq g(x, y)\}$ , pak funkce  $g$  je na množině  $M$  integrovatelná a platí

$$\iint_M f(x, y) \, dx dy = \iint_M g(x, y) \, dx dy.$$

A podstatnou větou pro výpočty dvojných integrálů přes elementární množinu pomocí dvojnásobného integrálu je Fubiniova věta, která zní:

**Věta 8.** Nechť  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  je elementární množina vzhledem k ose  $x$ , tj.

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b \rangle, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

kde  $\phi, \psi$  jsou spojitě funkce na  $\langle a, b \rangle$  takové, že  $\phi(x) \leq \psi(x)$  pro každé  $x \in \langle a, b \rangle$ . Je-li funkce  $f$  spojitá na  $M$ , pak platí

$$\iint_M f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right] dx.$$

## 2.1 Transformace dvojného integrálu

V předchozím textu byly uvedeny základní metody výpočtu dvojrozměrného integrálu. Užitečnou metodou výpočtu určitého Riemannova integrálu je substituční metoda. Tato metoda je užívána především pro zjednodušení integrandu. U dvojrozměrných integrálů často namísto o substituční metodě mluví o záměně proměnných v integrálu, nebo o transformaci integrálu. Následující věta popisuje tzv. substituční metodu pro výpočet určitého integrálu.

**Věta 9.** Nechť funkce  $f(t)$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Nechť funkce  $\varphi(x)$  má derivaci  $\varphi'(x)$  v každém bodě intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , která je na tomto intervalu integrovatelná. Dále nechť platí  $a \leq \varphi(x) \leq b$  pro  $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$  (tedy  $\varphi$  zobrazuje interval  $\langle \alpha, \beta \rangle$  do intervalu  $\langle a, b \rangle$ ). Pak platí, že

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt. \quad (2.3)$$

Po zavedení substituce  $\varphi(x) = t$  se vypočítá diferenciál  $\varphi'(x) dx = dt$  a změní se meze  $\alpha \rightarrow \varphi(\alpha)$  a  $\beta \rightarrow \varphi(\beta)$ .

Pro zavedení transformace dvojného integrálu je třeba zavést pojem spojitě diferencovatelného zobrazení.

**Definice 2.** Nechť  $g, h$  jsou funkce definované na dané množině  $B \subseteq \mathbb{R}^2$ . Nechť  $B \rightarrow \mathbb{R}^2$  je zobrazení přiřazující každému bodu  $[u, v] \in B$  bod  $F(u, v) = [g(u, v), h(u, v)]$ . Zobrazení  $F$  se nazývá *spojitě diferencovatelné* v  $B$ , jestliže existuje otevřená množina  $\Omega, B \subseteq \Omega$  taková, že funkce  $g, h$  lze rozšířit na  $\Omega$  takovým způsobem, že obě funkce mají v  $\Omega$  spojitě parciální derivace prvního řádu podle obou proměnných  $u, v$ .

Je-li  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^2$  spojitě diferencovatelné zobrazení v  $B$ , nazývá se determinant

$$J = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix}$$

*jakobián* zobrazení  $F$ .

**Definice 3.** Spojitě diferencovatelné zobrazení  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^2$  na otevřené množině  $B$  se nazývá *regulární*, je-li jeho jakobián  $J$  nenulový v každém bodě množiny  $B$ .

A následuje věta o transformaci dvojného integrálu.

**Věta 10.** Nechť  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  je uzavřená měřitelná množina,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  je otevřená množina a navíc  $B \subseteq \Omega$ . Nechť  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  je prosté regulární zobrazení takové, že  $F(u, v) = [g(u, v), h(u, v)]$  pro každé  $[u, v] \in B$ . Nechť funkce  $f$  proměnných  $x$  a  $y$  je spojitá v množině  $A = F(B)$ . Pak platí vztah

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (2.4)$$

V předchozí větě 10 musí být integrand spojitá funkce a integrační obor uzavřená množina. Což omezuje univerzálnost užití této věty při mnoha příkladech, jelikož rozšíření transformací na otevřenou nadmnožinu integračního oboru při zachování regularity často není možné. Věta o transformaci dvojného integrálu za obecnějších předpokladů zní následovně.

**Věta 11.** Nechť  $B_1 \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$ , kde  $B_1$  je otevřená množina,  $B$  je měřitelná množina a platí  $m(B \setminus B_1) = 0$ .

Nechť  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^2$  je spojitě diferencovatelné zobrazení s jakobiánem  $J$ , které je regulární a prosté v  $B_1$ . Označme  $A = F(B)$ ,  $A_1 = F(B_1)$ . Předpokládejme, že množina  $A$  je měřitelná a platí  $m(A \setminus A_1) = 0$ .

Nechť funkce  $f$  je ohraničená na množině  $A$  a spojitá na množině  $A_1$ , nechť je funkce  $f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|$  ohraničená na množině  $B$ . Pak platí:

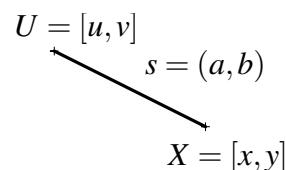
$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \iint_B f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| \, du dv.$$

Transformace se využívají pro zjednodušení výpočtů některých určitých integrálů pomocí změny integrandu a integračního oboru. Mezi nejběžnější transformace dvojného integrálu patří posunutí, dilatace, transformace do polárních souřadnic, či transformace do eliptických souřadnic. Nyní budou postupně tyto transformace zavedeny a následně využity při řešení příkladů.

### Posunutí

*Posunutí*, nebo-li *translace* je transformace dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= u + a, \\ y &= v + b, \end{aligned}$$



kde  $a, b$  jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Obrázek 2.1: ilustrace posunutí o vektor  $s$

### Dilatace

*Dilatace*, speciálně pro  $a > 0$ ,  $b > 0$  změna měřítek na souřadnicových osách, je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= au, \\ y &= bv, \end{aligned}$$

kde  $a \neq 0, b \neq 0$  jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab.$$



## Transformace do polárních souřadnic

Transformace do polárních souřadnic je dána rovnicemi

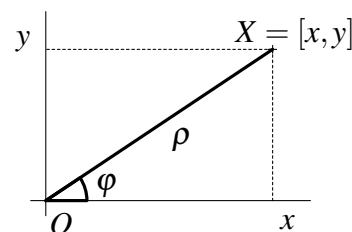
$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi,$$

přičemž proměnné  $\rho$ ,  $\varphi$  (jež se užívají namísto  $u$ ,  $v$ ) nazýváme *polární souřadnice bodu*  $[x, y]$ .

Jakobián zobrazení je roven

$$\begin{aligned} J(\rho, \varphi) &= \begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi \\ h_\rho & h_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho. \end{aligned}$$



Obrázek 2.2: ilustrace transformace do polárních souřadnic

Uveďme význam polárních souřadnic v rovině spolu s ilustrací na obr. 2.2. Zvolme bod  $X = [x, y]$  libovolně, pak vzdálenost bodu  $X$  od počátku  $O$  kartézské souřadnicové soustavy se značí  $\rho$  a úhel který svírá vektor  $\overrightarrow{OX}$  s kladnou poloosou  $x$  se značí  $\varphi$ . Je patrné, že proměnná  $\rho$  nabývá nezáporných hodnot, jelikož vzdálenost nemůže být záporná a  $\varphi$  nabývá obvykle hodnot z intervalu délky  $2\pi$ .

Transformace do polárních souřadnic se používá zvláště v příkladech, kdy popis množiny  $A$  v polárních souřadnicích je tvaru

$$B: \begin{aligned} \alpha &\leq \varphi \leq \beta, \\ r(\varphi) &\leq \rho \leq R(\varphi), \end{aligned}$$

kde  $\alpha$ ,  $\beta$  jsou konstanty a  $r$ ,  $R$  jsou spojité funkce na intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Označíme-li  $F$  zobrazení dané rovnicemi pro transformaci do polárních souřadnic, platí  $F(B) = A$ .

## Transformace do eliptických souřadnic

Transformace do eliptických souřadnic  $\rho$ ,  $\varphi$  je dána rovnicemi

$$x = a\rho \cos \varphi,$$

$$y = b\rho \sin \varphi,$$

kde  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi \\ h_\rho & h_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\rho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\rho \cos \varphi \end{vmatrix} = ab\rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = ab\rho.$$

## Transformace do zobecněných eliptických souřadnic

Transformace do zobecněných eliptických souřadnic  $\rho$ ,  $\varphi$  je dána rovnicemi

$$x = a\rho \cos^n \varphi,$$

$$y = b\rho \sin^n \varphi,$$

kde  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$\begin{aligned} J(\rho, \varphi) &= \begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi \\ h_\rho & h_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos^n \varphi & -na\rho \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi \\ b \sin^n \varphi & nb\rho \sin^{n-1} \varphi \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= nab\rho \cos^{n-1} \varphi \sin^{n-1} \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = nab\rho \cos^{n-1} \varphi \sin^{n-1} \varphi. \end{aligned}$$

## 2.2 Aplikace dvojného integrálu

Pomocí integrálního počtu funkcí více proměnných lze řešit jak matematické, tak fyzikální problémy. Následně bude uveden výpočet míry (obsahu) množiny, hmotnosti, těžiště, momentu setrvačnosti, elektrického náboje a hydrostatické tlakové síly na množině  $M$ .

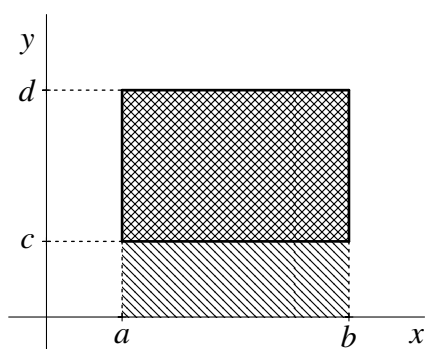
### Obsah množiny

Jako první z nich lze uvést výpočet míry (obsahu) rovinné množiny  $M$  vztahem:

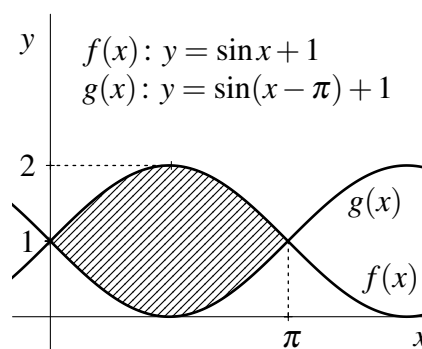
$$S = \iint_M dx dy.$$

Také víme, že omezená množina je měřitelná právě tehdy, když její hranice má míru nula, což platí pro každý rovinný obrazec se kterým se setkáváme v geometrii.

Pro představu lze uvést rozdíl při výpočtu obsahu pomocí jednorozměrného a dvojrozměrného integrálu. Pro ilustraci slouží obr. 2.3



a) Ilustrace množiny  
 $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle c, d \rangle\}$



b) Ilustrace množiny  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 0, \pi \rangle, y \in \langle g(x), f(x) \rangle\}$

Obrázek 2.3: Ilustrace výpočtu obsahů množin  $M$  pomocí dvojrozměrného integrálu

Obsah obou obrazců lze vypočítat pomocí jednoduchého integrálu, v postupu je však třeba zohlednit, že jednorozměrný integrál na dané množině určuje obsah podgrafu funkce. Je tedy nutné vhodně odečíst plochy, které do obrazce nepatří.

U obr. 2.3 a) je tedy zadán obdélník na dvourozměrné množině  $M$ . Nejprve pomocí jednorozměrného integrálu

$$\int_a^b d dx = [dx]_a^b = bd - ad = d(b - a)$$

Vypočteme obsah podgrafu konstantní funkce  $y = d$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Pro míru množiny  $M$  je třeba odečíst tu část, která patří do podgrafu nikoli však do obdélníku  $M$ ,

$$\int_a^b c dx = [cx]_a^b = bc - ac = c(b - a).$$

Po odečtení:

$$S = d(b - a) - c(b - a) = (d - c) \cdot (b - a).$$

Pomocí dvojrozměrného integrálu:

$$\begin{aligned} \iint_M 1 \, dx dy &= \int_a^b \left( \int_c^d 1 \, dy \right) dx = \int_a^b [y]_c^d dx = \int_a^b (d - c) dx = [dx - cx]_a^b \\ &= (d - c)(b - a) = S. \end{aligned}$$

Podobně pro výpočet obsahu vyznačeného v obr. 2.3 b). Nejprve užitím jednorozměrného intervalu.

$$S_1 = \int_0^\pi (\sin x + 1) dx = [-\cos x + x]_0^\pi = 1 + \pi + 1 = 2 + \pi.$$

Znovu je třeba odečíst plochu, která patří do podgrafu funkce, ale ne do zvýrazněné plochy.

$$S_2 = \int_0^\pi (\sin(x - \pi) + 1) dx = \int_0^\pi (-\sin x + 1) dx = [\cos x + x]_0^\pi = \pi - 2.$$

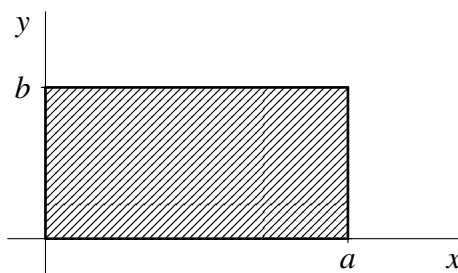
Po odečtení:

$$S = S_1 - S_2 = 2 + \pi + 2 - \pi = 4.$$

Pomocí dvojrozměrného integrálu:

$$\begin{aligned} S &= \iint_M dx dy = \int_0^\pi \left( \int_{\sin(x-\pi)+1}^{\sin x+1} 1 \, dy \right) dx = \int_0^\pi [y]_{\sin(x-\pi)+1}^{\sin x+1} dx \\ &= \int_0^\pi (\sin x + 1 - \sin(x - \pi) - 1) dx = [-\cos x + x - \cos x - x]_0^\pi = 4. \end{aligned}$$

**Příklad 1.** Vypočítejte obsah obdélníku na obr. 2.4 pomocí dvojného integrálu a porovnejte se vzorcem pro výpočet obsahu, známého již z planimetrie, označte jej  $S_p$ .

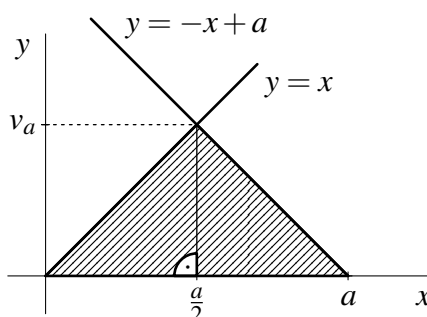


Obrázek 2.4: Ilustrace množiny  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 0, a \rangle, y \in \langle 0, b \rangle\}$

Řešení:

$$\begin{aligned} S &= \iint_M dx dy = \int_0^a \left( \int_0^b 1 \, dy \right) dx = \int_0^a [y]_0^b dx = \int_0^a b dx = [bx]_0^a = ab, \\ S_p &= ab. \end{aligned}$$

**Příklad 2.** Vypočtete obsah rovnoramenného trojúhelníku z obr. 2.5 pomocí dvojného integrálu a porovnejte s výpočtem obsahu z planimetrie, označte  $S_p$ .

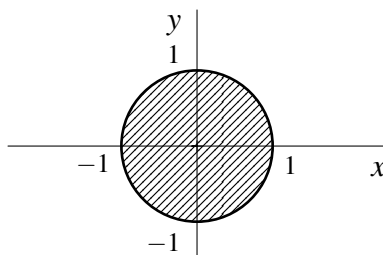


Obrázek 2.5: Ilustrace množiny  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle y, a - y \rangle, y \in \langle 0, \frac{a}{2} \rangle\}$

Řešení:

$$\begin{aligned} S &= \iint_M dx dy = \int_0^{\frac{a}{2}} \left( \int_y^{a-y} 1 dx \right) dy = \int_0^{\frac{a}{2}} [x]_y^{a-y} dy \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} (a - 2y) dy = [ay - y^2]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{a^2}{4}, \\ S_p &= \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

**Příklad 3.** Vypočtete pomocí dvojného integrálu obsah kruhu se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem  $r = 1$ . Výsledek porovnejte s výpočtem obsahu kruhu pomocí vzorce z planimetrie, označte  $S_p$ .



Obrázek 2.6: Ilustrace kruhu z příkladu 3

Řešení: Lze zjednodušit a vyřešit pomocí transformace do polárních souřadnic  $\rho$ ,  $\varphi$ , kde  $\rho \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ , tedy nová množina transformovaných polárních souřadnic je  $N = \{[\rho, \varphi] \in \mathbb{R}^2 : \rho \in \langle 0, 1 \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ , její obsah se vypočte jako

$$\begin{aligned} S &= \iint_M dx dy = \iint_N |J| d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \rho d\rho \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = \left[ \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

A bez použití transformace rozdělme kruh na čtyři shodné části, pomocí souřadnicových os  $x$ ,  $y$  a vyjádřeme jako množinu  $M_{\frac{1}{4}}$  část kružnice v prvním kvadrantu, pak lze zapsat

$$M_{\frac{1}{4}} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

$$\begin{aligned} S_{\frac{1}{4}} &= \iint_{M_{\frac{1}{4}}} dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_0^1 [y]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1-x^2} \cdot x + \arcsin x \right) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

$$S = 4 \cdot S_{\frac{1}{4}} = \pi,$$

$$S_p = \pi r^2 = \pi.$$

**Cvičení 1.** Následující příklady na výpočet obsahů množin jsou určeny k samostatné práci, jejich řešení naleznete spolu s ilustrací zadání na str. 53.

- 1.1 Vypočtete obsah rovinného obrazce, který je ohraničen křivkou  $\rho^2 = a^2 \cos(2\varphi)$ ,  $a > 0$ . Jak se křivka nazývá?
- 1.2 Vypočtete obsah rovinného obrazce, který je omezen křivkami  $f: y = x^2 + 2x - 3$ ,  $g: y = 1 - x$ , pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ .
- 1.3 Vypočtete obsah rovinného obrazce, který je omezen křivkou  $f: y = \frac{1}{2}x^2 - 3$  a přímkami  $p: y = 2x + 3$ ,  $q: y = 3$ . Vypočtete obsah té části obrazce ohraničeného těmito křivkami, který se nachází ve všech čtyřech kvadrantech.
- 1.4 Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami  $f: y = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $g: y = \frac{x^2}{2}$ .
- 1.5 Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami  $f: y = 2x^3$ ,  $g: y = \frac{2}{x}$ ,  $h: x - y = 1$ .
- 1.6 Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného jedním obloukem prosté cykloidy a osou  $x$ .
- 1.7 Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami  $f: y = \arccos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ .
- 1.8 Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami  $f: x^2 + y^2 = 2x$ ,  $g: x^2 + y^2 = 4x$  a přímkami  $p: y = \sqrt{3}x$ ,  $q: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ .
- 1.9 Vypočtete obsah rovinného obrazce zadaného množinou  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 4x, y \geq 0\}$

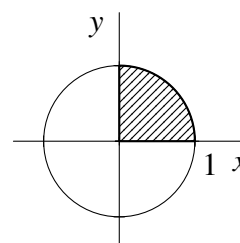
## Hmotnost množiny

Obsah množiny lze využít při dalších aplikacích dvojného integrálu. Jednou z nich je hmotnost množiny. Nechť  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  je uzavřená měřitelná množina. Označme  $\rho(x, y)$  plošnou hustotu v bodě  $X = [x, y] \in M$  a předpokládejme, že  $\rho$  je nezáporná integrovatelná funkce na množině  $M$ . Hmotnost  $m$  množiny  $M$  je dána vztahem

$$m = \iint_M \rho(x, y) dx dy.$$

Je-li hustota  $\rho$  konstantní ve všech bodech množiny  $M$ , pak se jedná o využití vzorce  $m = \rho S$ , kde  $S$  je obsah množiny  $M$ . Využíváme tedy dvojný integrál z konstanty  $\rho$  na množině  $M$ , který je roven násobku konstanty  $\rho$  a dvojného integrálu na množině  $M$ .

**Příklad 4.** Vypočítejte hmotnost tenké desky kruhového stolu v I. kvadrantu o poloměru  $r = 1$  mající v každém bodě desky plošnou hustotu  $\rho(x, y) = xy$ , se středem v počátku soustavy souřadnic.



Řešení:

Určíme množinu  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, \sqrt{-x^2 + 1} \rangle\}$  a spočítáme její hmotnost v závislosti na plošné hustotě  $\rho$ ,

Obrázek 2.7:

Ilustrace příkladu 4

$$\begin{aligned} m &= \iint_M xy dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{-x^2+1}} xy dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{xy^2}{2} \right]_0^{\sqrt{-x^2+1}} dx = \int_0^1 \frac{-x^3 + x}{2} dx \\ &= \left[ -\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

**Cvičení 2.** Následující příklady na výpočet hmotností množin jsou určeny k samostatné práci, jejich řešení naleznete spolu s ilustrací zadání na str. 61.

- 2.1 Vypočítejte hmotnost množiny  $M$  ohraničené křivkami  $4y = x^2$ ,  $x + y = 3$  s konstantní plošnou hustotou v každém bodě plochy.
- 2.2 Vypočítejte hmotnost množiny  $M$  ohraničené křivkami  $y = 2x - 3x^2$ ,  $y = -x$  a s plošnou hustotou  $\rho(x, y) = x$ .
- 2.3 Vypočítejte hmotnost množiny  $M$  ohraničené křivkami  $y = 4 - x^2$  a  $y = 0$  s plošnou hustotou  $\rho(x, y) = |x|$ .

## Těžiště hmotné množiny

Užitím dvojného integrálu lze určit i těžiště rovinné desky. Lze zavést rozdělení na kladnou a zápornou polorovinu pomocí orientované přímky  $r$ .

Nechť  $r$  je orientovaná přímka v rovině. Zvolme normálový vektor  $\vec{n}$  přímky  $r$  který míří do tzv. *kladné poloroviny* určené touto přímkou. Opačné polorovině určené touto přímkou říkáme *záporná polorovina*. Vzdálenost libovolného pevně zvoleného bodu  $X$  od přímky  $r$ , která je vždy nezáporná, značíme  $d(X, r)$ . Pokud bod  $X$  leží v kladné polorovině, opatříme vzdálenost  $d(X, r)$  znaménkem plus, pokud bod  $X$  leží v záporné polorovině, opatříme tuto vzdálenost znaménkem mínus.

Statický moment množiny  $A$  vzhledem k přímce  $r$  je definován vztahem

$$S_r(A) = \iint_A d(X, r) \rho(x, y) dx dy.$$

Uveden byl statický moment pro obecnou přímku  $r$ . Speciálně pak při zvolení některé ze souřadnicových os za přímku  $r$  se získají *statické momenty vzhledem k souřadnicovým osám*

$$S_x(A) = \iint_A d(X, x) \rho(x, y) dx dy = \iint_M y \rho(x, y) dx dy,$$

$$S_y(A) = \iint_A d(X, y) \rho(x, y) dx dy = \iint_M x \rho(x, y) dx dy.$$

Těžiště  $T(M)$  hmotné množiny  $A$  má souřadnice  $[x_T, y_T]$ , kde

$$x_T = \frac{S_y(A)}{m}, \quad y_T = \frac{S_x(A)}{m},$$

po dosazení předchozích vztahů za  $S_x(A)$ ,  $S_y(A)$  dostaneme:

$$x_T = \frac{1}{m} \iint_A x \rho(x, y) dx dy, \quad y_T = \frac{1}{m} \iint_A y \rho(x, y) dx dy.$$

**Příklad 5.** Vypočítejte těžiště tenké desky kruhového stolu v I. kvadrantu o poloměru  $r = 1$ , se středem v počátku soustavy souřadnic a plošnou hustotou  $\rho(x, y) = xy$ .

Řešení:

Z příkladu 4 již známe množinu  $M$  i hmotnost desky, je tedy potřeba dopočítat statické

momenty vzhledem k souřadnicovým osám.

$$\begin{aligned} S_x(M) &= \iint_M xy^2 dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{-x^2+1}} xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{xy^3}{3} \right]_0^{\sqrt{-x^2+1}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x(-x^2+1)^{\frac{3}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = -x^2+1 \\ dt = -2x dx \\ 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0 \end{array} \right| = -\frac{1}{6} \int_1^0 t^{\frac{3}{2}} dt = -\frac{1}{6} \left[ t^{\frac{5}{2}} \frac{2}{5} \right]_1^0 = \frac{1}{15}, \\ S_y(M) &= \iint_M x^2 y dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{-x^2+1}} x^2 y dy \right) dx = \int_0^1 \left[ x^2 \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{-x^2+1}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (-x^2+1) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (-x^4+x^2) dx = \frac{1}{2} \left[ -\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Souřadnice těžiště zjistíme dosazením do vzorce

$$x_T = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{15}, \quad y_T = \frac{8}{15}.$$

Z výsledku je patrné, že těžiště je posunuté mimo střed kruhové desky. Je posunuté ve směru vzrůstající hustoty dané desky.

**Cvičení 3.** Následující příklady na výpočet těžiště hmotné množiny jsou určeny k samostatné práci, jejich řešení naleznete spolu s ilustrací zadání na str. 63.

- 3.1 Vypočtete těžiště množiny  $M$  ohraničené křivkami  $4y = x^2$ ,  $x + y = 3$  s konstantní plošnou hustotou v každém bodě plochy.
- 3.2 Vypočtete těžiště množiny  $M$  ohraničené křivkami  $y = 2x - 3x^2$ ,  $y = -x$  a s plošnou hustotou  $\rho(x, y) = x$ .
- 3.3 Vypočtete těžiště množiny  $M$  ohraničené křivkami  $y = 4 - x^2$  a  $y = 0$  s plošnou hustotou  $\rho(x, y) = |x|$ .

## Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti  $I_r(M)$  vzhledem k přímce  $r$  na měřitelné množině  $M \subseteq \mathbb{R}^2$ , za předpokladu, že plošná hustota  $\rho$  je nezáporná funkce integrovatelná na  $M$ , je roven

$$I_r(M) = \iint_M d^2(X, r) \rho(x, y) dx dy.$$

Když za přímku zvolíme některou ze souřadnicových os, dostáváme

$$\begin{aligned} I_x(M) &= \iint_M y^2 \rho(x, y) dx dy, \\ I_y(M) &= \iint_M x^2 \rho(x, y) dx dy. \end{aligned}$$



**Příklad 6.** Vypočtete momenty setrvačnosti vzhledem k souřadnicovým osám tenké rovinné homogenní obdélníkové desky  $M$ , je-li její plošná hustota  $\rho(x,y) = 1$ , a přitom  $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 5\}$ .

Řešení:

Výpočet momentu setrvačnosti vzhledem k ose  $x$ ,  $y$  provedeme následovně,

$$I_x(M) = \iint_M y^2 \, dx dy = \int_2^3 \left( \int_1^5 y^2 \, dy \right) dx = \int_2^3 \left[ \frac{y^3}{3} \right]_1^5 dx = \int_2^3 \frac{124}{3} dx = \left[ \frac{124}{3} x \right]_2^3 = \frac{124}{3},$$

$$I_y(M) = \iint_M x^2 \, dx dy = \int_2^3 \left( \int_1^5 x^2 \, dy \right) dx = \int_2^3 [x^2 y]_1^5 dx = \int_2^3 4x^2 dx = \left[ \frac{4x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{76}{3}.$$

**Cvičení 4.** Následující příklady na výpočet momentu setrvačnosti jsou určeny k samostatné práci, jejich řešení naleznete spolu s ilustrací zadání na str. 65.

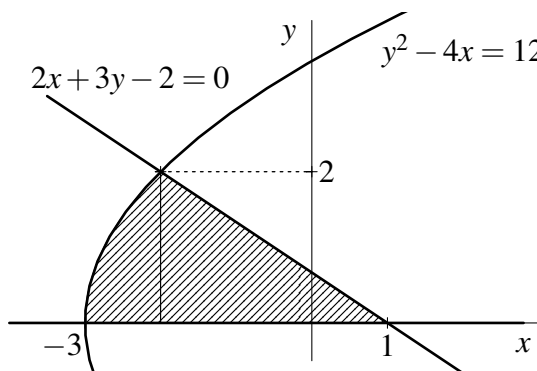
- 4.1 Vypočtete moment setrvačnosti množiny  $M$  ohraničené křivkami  $4y = x^2$ ,  $x + y = 3$  vzhledem k ose  $y$ , plošná hustota je konstantní.
- 4.2 Vypočtete moment setrvačnosti množiny  $M$  vzhledem k ose  $x$ , je-li množina  $M$  ohraničená křivkami  $y = 2x - 3x^2$ ,  $y = -x$  a její plošná hustota je  $\rho(x,y) = x$ .
- 4.3 Vypočtete moment setrvačnosti množiny  $M$  ohraničené křivkami  $y = 4 - x^2$  a  $y = 0$  vzhledem k ose  $y$ , má-li množina  $M$  plošnou hustotou  $\rho(x,y) = |x|$ .

## Elektrický náboj

Na uzavřené měřitelné množině  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  označme  $\omega(x,y)$  plošnou hustotu elektrického náboje v bodě  $X = [x,y] \in M$ . Za předpokladu, že  $\omega$  je integrovatelná funkce na  $M$ , je celkový elektrický náboj  $Q(M)$  rozložený na desce  $M$  definován vztahem

$$Q(M) = \iint_M \omega(x,y) \, dx dy.$$

**Příklad 7.** Vypočtete elektrický náboj rozložený na tenké desce  $M$  ohraničené zleva parabolou o rovnici  $y^2 - 4x = 12$ , zprava přímkou  $2x + 3y - 2 = 0$  a zdola konstantní funkcí  $y = 0$ . Plošná hustota elektrického náboje je  $\omega(x,y) = x^3 y - xy^3$ .



Obrázek 2.8: Ilustrace příkladu 7

Řešení:

Z obr. 2.8 lze zapsat množinu  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle -3 + \frac{y^2}{4}, 1 - \frac{3y}{2} \rangle, y \in \langle 0, 2 \rangle\}$ . Elektrický náboj množiny  $M$  je

$$\begin{aligned} Q(M) &= \iint_M (x^3y - xy^3) \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 \left( \int_{-3 + \frac{y^2}{4}}^{1 - \frac{3y}{2}} (x^3y - xy^3) \, dx \right) dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^4}{4}y - \frac{x^2}{2}y^3 \right]_{-3 + \frac{y^2}{4}}^{1 - \frac{3y}{2}} dy \\ &= \int_0^2 \left( \frac{-y^9}{256} + \frac{5y^7}{16} - \frac{93y^5}{16} - \frac{15y^4}{2} + \frac{113y^3}{2} - 6y^2 - 80y \right) dy \\ &= \left[ -\frac{y^{10}}{2560} + \frac{5y^8}{128} - \frac{93y^6}{96} - \frac{15y^5}{10} + \frac{113y^4}{8} - \frac{6y^3}{3} + \frac{80y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1348}{5}. \end{aligned}$$

**Cvičení 5.** Následující příklady na výpočet elektrického náboje jsou určeny k samostatné práci, jejich řešení naleznete spolu s ilustrací zadání na str. 66.

- 5.1 Vypočtete elektrický náboj množiny  $M$ , kde  $1 \leq x \leq 3$ ,  $-1 \leq y \leq 2$  a hustota elektrického náboje je  $\omega(x, y) = x^2 + y^2$ .
- 5.2 Vypočtete elektrický náboj množiny  $M$  ohraničené dvěma křivkami  $x^2 - y - 1 = 0$ ,  $x - y + 1 = 0$  s hustotou elektrického náboje  $\omega(x, y) = |x - 1|$ .
- 5.3 Vypočtete elektrický náboj části množiny  $M$  nacházející se v prvním kvadrantu, kde  $x^2 + y^2 - 2x \geq 0$  a  $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$  a hustota elektrického náboje je  $\omega(x, y) = y$ .

## Hydrostatická tlaková síla

Sílu, kterou působí kapalina na plochu  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  tělesa, označíme  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ . Předpokládejme, že spojitá funkce  $\rho = \rho(x, y, z) > 0$  je hustota kapaliny v bodě  $[x, y, z]$  a že hladina kapaliny je ve výšce  $h > 0$ .

Vezmeme v úvahu tři zjednodušené případy<sup>1</sup>:

1.  $S: z = f(x, y), [x, y] \in M \subseteq \mathbb{R}^2$ , kde  $f$  má spojitě parciální derivace prvního řádu. V tomto případě pro sílu  $\vec{F}$  platí vzorec

$$\vec{F} = g \iint_M \rho(x, y, f(x, y))(h - f(x, y)) \vec{n}(S) \, dx \, dy,$$

kde  $\vec{n}(S) = \pm(-f'_x(x, y), -f'_y(x, y), 1)$  je orientovaná normála k ploše  $S$  (znaménko  $\pm$  volíme tak, aby normála měla směr tlakové síly) a  $g$  je tíhové zrychlení.

---

<sup>1</sup>Integrálem vektorové funkce,  $\iint_M (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) \, dx \, dy$ , budeme v textu nadále rozumět vektor  $\left( \iint_M f_1(x, y) \, dx \, dy, \iint_M f_2(x, y) \, dx \, dy, \iint_M f_3(x, y) \, dx \, dy \right)$ .

2.  $S: x = f(y, z), [y, z] \in M \subset \mathbb{R}^2$ , kde  $f$  má spojité parciální derivace prvního řádu. V tomto případě pro sílu  $\vec{F}$  platí vzorec

$$\vec{F} = g \iint_M \rho(f(y, z), y, z)(h - z) \vec{n}(S) \, dydz,$$

kde  $\vec{n}(S) = \pm(1, -f'_y(y, z), -f'_z(y, z))$  je orientovaná normála k ploše  $S$  (znaménko  $\pm$  volíme tak, aby normála měla směr tlakové síly) a  $g$  je tíhové zrychlení.

3.  $S: y = f(x, z), [x, z] \in M \subset \mathbb{R}^2$ , kde  $f$  má spojité parciální derivace prvního řádu. V tomto případě pro sílu  $\vec{F}$  platí vzorec

$$\vec{F} = g \iint_M \rho(x, f(x, z), z)(h - z) \vec{n}(S) \, dx dz,$$

kde  $\vec{n}(S) = \pm(-f'_x(x, z), 1, -f'_z(x, z))$  je orientovaná normála k ploše  $S$  (znaménko  $\pm$  volíme tak, aby normála měla směr tlakové síly) a  $g$  je tíhové zrychlení.

**Příklad 8.** Vypočítejte sílu, kterou působí voda na stavidlo tvaru obdélníku šířky  $a = 1,8 \text{ m}$ , je-li výška stavidla (hloubka vody)  $h = 0,5 \text{ m}$ .

Řešení:

Nejprve se určí množina  $M$ , přes kterou se bude integrovat, přičemž hustota vody je  $\rho(y, z) = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,

$$\begin{aligned} M: 0 &\leq y \leq a, \\ 0 &\leq z \leq h, \\ x &= 0 = f(y, z). \end{aligned}$$

Následně se vypočítají derivace a normála k ploše, podstatné je, že se předpokládá, že je kapalina v poloprostoru  $x \geq 0$ , tlaková síla kapaliny pak působí proti kladnému směru, tedy

$$f'_y(y, z) = 0, \quad f'_z(y, z) = 0, \quad \vec{n}(S) = -(1, 0, 0).$$

Za použití vzorců uvedených v podkapitole je tlaková síla působící na hráz rovna

$$\begin{aligned} \vec{F} &= g \iint_M \rho(y, z)(h - z) \vec{n}(S) \, dydz \\ &= -1000g \iint_M (h - z)(1, 0, 0) \, dydz \\ &= -1000g \left( \int_0^h [(h - z)y]_0^a \, dz, 0, 0 \right) = -1000ag \left( \left[ hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^h, 0, 0 \right) = (-500agh^2, 0, 0) \\ &= (-225g, 0, 0). \end{aligned}$$

Záporná hodnota značí, že tlaková síla působí proti směru kladné poloosy  $x$ . Její hodnota je po dosazení gravitační konstanty a zavedení absolutní hodnoty rovna  $2207 \text{ N}$ .

**Cvičení 6.** Následující příklady na výpočet tlakové síly jsou určeny k samostatné práci, jejich řešení naleznete spolu s ilustrací zadání na str. 68.

- 6.1 Vypočtěte jakou výslednou silou  $\vec{F}$  působí voda na stěnu říční přehrady tvaru lichoběžníka, je-li horní základna  $c = 15\text{ m}$ , dolní základna  $d = 10\text{ m}$  a výška  $h = 5\text{ m}$ .
- 6.2 Určete tlakovou sílu kapaliny o hustotě  $\rho(x, y, z) = \delta > 0$ , kde  $\delta$  je konstanta, na boční stěnu  $x \geq 0$  válcové nádoby  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ , kde  $a > 0$  je konstanta a výška hladiny vody je  $h > 0$ .
- 6.3 Určete tlakovou sílu kapaliny působící na horní a dolní polokouli koule o poloměru  $a > 0$ , která je ponořena do kapaliny konstantní hustoty  $\delta > 0$  v hloubce  $h \geq a$  (hloubka je měřena od hladiny ke středu koule).
- 6.4 Je dán válec s podstavou o poloměru  $a > 0$  a výškou  $b > 0$ , celý ponořen do kapaliny hustoty  $\delta > 0$  tak, že střed válce se nachází v hloubce  $h$  pod hladinou kapaliny a jeho osa svírá úhel  $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  s normálou k hladině povrchu. Určete tlakovou sílu kapaliny na horní a dolní podstavu válce.

# Kapitola 3

## Trojný integrál

Tato kapitola přináší rozšíření kapitoly 2 o další dimenzi. Trojný integrál se zavádí analogicky jako dvojný, proto se již v kapitole nebude uvádět vše znovu, ale čtenář bude případně odkázán na předešlou kapitolu. Společně s pozměněním definice budou doplněny i věty uvedené v předchozí kapitole, transformace a na závěr kapitoly budou předvedeny některé užívané aplikace trojného integrálu.

Nejprve definujeme trojný integrál funkce  $f$  ohraničené na trojrozměrném, uzavřeném omezeném intervalu  $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle q, r \rangle$ . Dělení  $D$  intervalu  $M$  označujeme  $D = D_x \times D_y \times D_z$ , přičemž,

dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  označujeme  $D_x: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ ,

dělení intervalu  $\langle c, d \rangle$  označujeme  $D_y: c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$ ,

dělení intervalu  $\langle q, r \rangle$  označujeme  $D_z: q = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_p = r$ .

Roviny  $x = x_i, y = y_j, z = z_k$ , kde  $i = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, n-1, k = 1, \dots, p-1$ , dělí interval  $M$  na menší *dílky*, které se značí  $M_{ijk}$ . Přičemž  $M_{ijk} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle \times \langle z_{k-1}, z_k \rangle$ . Označme

$$V_{ijk} = \sup\{f(x, y, z) : [x, y, z] \in M_{ijk}\}, \quad v_{ijk} = \inf\{f(x, y, z) : [x, y, z] \in M_{ijk}\},$$
$$m(M_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

*Horní a dolní součty* dané funkce  $f$  jsou tvaru

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p V_{ijk} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}),$$
$$s(D, f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p v_{ijk} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

Neboli

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p V_{ijk} m(M_{ijk}),$$
$$s(D, f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p v_{ijk} m(M_{ijk}).$$

Veličinu  $m(M_{ijk})$  budeme nazývat *mírou (objemem)* intervalu  $M_{ijk}$ . Podobně jako u jedno-  
douchého a dvojného integrálu se zavádí věta o nerovnostech horních a dolních součtů pro  
různá dělení trojrozměrného intervalu  $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle q, r \rangle$ .

Podobně jako u dvojného integrálu se odvozuje ze vztahů pro horní a dolní součty, že pro  
libovolné pevně zvolené dělení  $D_0 \in \mathfrak{D}$  trojrozměrného intervalu  $M$   $s(D, f) \leq S(D_0, f)$   
pro každé  $D \in \mathfrak{D}$ . Množina  $\{s(D, f) : D \in \mathfrak{D}\}$  je tedy neprázdná a shora omezená.

Proto existuje  $\sup\{s(D, f) : D \in \mathfrak{D}\}$ , které značíme  $\iiint_M f(x, y, z) \, dx dy dz$ . Z tvrzení plyne

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx dy dz \leq S(D_0, f). \text{ Analogicky i pro množinu všech horních součtů funkce } f,$$

platí, že existuje  $\inf\{S(D, f) : D \in \mathfrak{D}\}$ , které značíme  $\overline{\iiint_M f(x, y, z) \, dx dy dz}$ . Platí, že

$$\frac{\iiint_M f(x, y, z) \, dx dy dz}{M} \leq \overline{\iiint_M f(x, y, z) \, dx dy dz}.$$

Čísla  $\frac{\iiint_M f(x, y, z) \, dx dy dz}{M}$ ,  $\overline{\iiint_M f(x, y, z) \, dx dy dz}$  nazýváme po řadě dolním, horním inte-  
grálem funkce  $f$  na množině  $M$ . Platí-li mezi nimi rovnost, pak říkáme, že funkce  $f$  je  
integrovatelná na množině  $M$  a *trojný integrál* značíme

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Podle Fubiniovy věty pro trojný integrál funkce  $f$  na intervalu  $M$  mají pro různá pořadí  
proměnných integrace tvar

$$\begin{aligned} \iiint_M f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iint_{\langle c, d \rangle \times \langle q, r \rangle} \left( \int_a^{\bar{b}} f(x, y, z) \, dx \right) dy dz = \iint_{\langle a, b \rangle \times \langle q, r \rangle} \left( \int_c^{\bar{d}} f(x, y, z) \, dy \right) dx dz \\ &= \iint_{\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle} \left( \int_q^{\bar{r}} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy = \iint_{\langle c, d \rangle \times \langle q, r \rangle} \left( \int_a^{\bar{b}} f(x, y, z) \, dx \right) dy dz \\ &= \iint_{\langle a, b \rangle \times \langle q, r \rangle} \left( \int_c^{\bar{d}} f(x, y, z) \, dy \right) dx dz = \iint_{\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle} \left( \int_q^{\bar{r}} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_M f(x, y, z) \, dx dy dz &= \int_q^{\bar{r}} \left( \iint_{\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle} f(x, y, z) \, dx dy \right) dz = \int_c^{\bar{d}} \left( \iint_{\langle a, b \rangle \times \langle q, r \rangle} f(x, y, z) \, dx dz \right) dy \\ &= \int_a^{\bar{b}} \left( \iint_{\langle c, d \rangle \times \langle q, r \rangle} f(x, y, z) \, dy dz \right) dx = \int_q^{\bar{r}} \left( \iint_{\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle} f(x, y, z) \, dx dy \right) dz \\ &= \int_c^{\bar{d}} \left( \iint_{\langle a, b \rangle \times \langle q, r \rangle} f(x, y, z) \, dx dz \right) dy = \int_a^{\bar{b}} \left( \iint_{\langle c, d \rangle \times \langle q, r \rangle} f(x, y, z) \, dy dz \right) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_q^r \left[ \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y,z) dx \right) dy \right] dz = \int_q^r \left[ \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y,z) dy \right) dx \right] dz \\
&= \int_c^d \left[ \int_q^r \left( \int_a^b f(x,y,z) dx \right) dz \right] dy = \int_c^d \left[ \int_a^b \left( \int_q^r f(x,y,z) dz \right) dx \right] dy \\
&= \int_a^b \left[ \int_q^r \left( \int_c^d f(x,y,z) dy \right) dz \right] dx = \int_a^b \left[ \int_c^d \left( \int_q^r f(x,y,z) dz \right) dy \right] dx.
\end{aligned}$$

Zatímco integrál  $\iiint_M f(x,y,z) dx dy dz$  označujeme jako trojný, tak *trojnásobným* integrálem nazýváme  $\int_q^r \left[ \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y,z) dx \right) dy \right] dz$  v různých permutacích proměnných  $x, y, z$ .

Podobně jako u dvojného integrálu je také definována charakteristická funkce množiny  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  a její měřitelnost pro integrál trojný. Vzorec pro Jordanovu míru omezené množiny  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  je tvaru

$$m(M) = \iiint_R \chi_M(x,y,z) dx dy dz,$$

kde  $R$  je takový trojrozměrný interval, že  $M \subseteq R$  a

$$\chi_M(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x,y,z] \in M \\ 0 & \text{pro } [x,y,z] \notin M, \end{cases}$$

je charakteristická funkce množiny  $M$ . Míra v  $\mathbb{R}^3$  má stejné vlastnosti jako míra v  $\mathbb{R}^2$ . Trojný integrál funkce  $f$  na množině  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  definujeme vztahem

$$\iiint_M f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_R \chi_M f(x,y,z) dx dy dz,$$

kde  $R \supseteq M$  je libovolný trojrozměrný interval a funkce  $\chi_M f$  je dána vztahem

$$\chi_M f(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{pro } [x,y,z] \in M \\ 0 & \text{pro } [x,y,z] \notin M. \end{cases}$$

Navíc trojný integrál má stejné vlastnosti jako dvojný integrál. A stejně jako u dvojného integrálu následuje zavedení elementární množiny.

Nechť  $M$  je elementární množina v  $\mathbb{R}^2$  (vzhledem k ose  $x$  nebo vzhledem k ose  $y$ ) a necht'  $\varphi(x,y)$ ,  $\psi(x,y)$  jsou spojité funkce na  $M$  takové, že  $\varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$  pro každé  $[x,y] \in M$ . Množinu

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : [x,y] \in M, \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$$

nazýváme elementární množinou vzhledem k rovině  $xy$  v  $\mathbb{R}^3$ . Analogicky je definována elementární množina vzhledem k rovině  $xz$ ,  $yz$  v  $\mathbb{R}^3$ .

Elementární množinou v  $\mathbb{R}^3$  rozumíme elementární množinu vzhledem k některé z rovin  $xy$ ,  $xz$  nebo  $yz$ .

A platí, že elementární množina v  $\mathbb{R}^3$  je měřitelná, že funkce spojitá na elementární množině v  $\mathbb{R}^3$  je integrovatelná a pro  $M, \Omega$  s právě uvedenými vlastnostmi platí

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iint_M \left( \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy.$$

### 3.1 Transformace trojného integrálu

Jako u podkapitoly o transformaci dvojného integrálu i zde je třeba zavést stejným způsobem spojitě diferencovatelné zobrazení, jakobián a následně transformace.

**Definice 4.** Nechť  $B \subseteq \mathbb{R}^3$ , buď  $g, h, k$  funkce definované na množině  $B$ . Nechť  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  je zobrazení přiřazující každému bodu  $[u, v, w] \in B$  bod

$$F(u, v, w) = [g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)].$$

Řekneme, že zobrazení  $F$  je *spojitě diferencovatelné* v  $B$ , jestliže existuje otevřená množina  $\Omega \supseteq B$  taková, že funkce  $g, h, k$  lze rozšířit na  $\Omega$  takovým způsobem, aby měly v  $\Omega$  spojitě parciální derivace prvního řádu podle všech tří proměnných  $u, v, w$ .

Je-li  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  spojitě diferencovatelné zobrazení v  $B$ , determinant

$$J = \begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix}$$

se nazývá *jakobián* zobrazení  $F$ . Jakobián  $J: B \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcí proměnných  $u, v$  a  $w$ .

**Definice 5.** Spojitě diferencovatelné zobrazení  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  na otevřené množině  $B$  se nazývá *regulární*, je-li jeho jakobián  $J$  různý od nuly v každém bodě množiny  $B$ .

A následuje věta o transformaci trojného integrálu.

**Věta 12.** Nechť  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  je uzavřená měřitelná množina a  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  je otevřená množina a  $B \subseteq \Omega$ . Buď  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  prosté regulární zobrazení pro každé  $[u, v, w] \in B$  takové, že  $F(u, v, w) = [g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)]$ . Nechť funkce  $f$  proměnných  $x, y, z$  je spojitá na množině  $A = F(B)$ , pak platí

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_B f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) |J(u, v, w)| \, du dv dw.$$

Podobně jako u dvojného integrálu musí být integrand v předchozí větě spojitá funkce a integrační obor uzavřená množina. Což omezuje univerzálnost této věty při mnoha příkladech, jelikož rozšíření transformací na otevřenou nadmnožinu integračního oboru při zachování regularity často není možné. Věta o transformaci trojného integrálu za obecnějších podmínek zní:

**Věta 13.** Nechť  $B_1 \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^3$ , kde  $B_1$  je otevřená množina,  $B$  je měřitelná množina a platí  $m(B \setminus B_1) = 0$ .

Nechť  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  je spojitě diferencovatelné zobrazení s jakobiánem  $J$ , které je regulární a prosté v  $B_1$ . Označme  $A = F(B)$ ,  $A_1 = F(B_1)$ . Předpokládejme, že množina  $A$  je měřitelná a platí  $m(A \setminus A_1) = 0$ .

Nechť funkce  $f$  je ohraničená na množině  $A$  a spojitá na množině  $A_1$ , nechť je funkce  $f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) |J(u, v, w)|$  ohraničená na množině  $B$ . Pak platí:

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_B f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) |J(u, v, w)| \, du dv dw.$$



Následně budou uvedeny běžně užívané transformace, z nichž první dvě jsou pouze rozšířením transformací dvojného integrálu o třetí rozměr.

## Posunutí

*Posunutí*, neboli *translace* je transformace daná rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= u + a, \\y &= v + b, \\z &= w + c,\end{aligned}$$

kde  $a, b, c$  jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

## Dilatace

*Dilatace*, speciálně pro  $a > 0, b > 0, c > 0$  změna měřítek na souřadnicových osách, je dána rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= au, \\y &= bv, \\z &= cw,\end{aligned}$$

kde  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$  jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

## Transformace do válcových (cylindrických) souřadnic

*Transformace do válcových souřadnic* je dána rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \\y &= \rho \sin \varphi, \\z &= z.\end{aligned}$$

Jakobián zobrazení je roven

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi & g_z \\ h_\rho & h_\varphi & h_z \\ k_\rho & k_\varphi & k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho.$$

Z nákresu cylindrických (válcových) souřadnic na obr.3.1 lze vyčíst, že libovolný bod  $T$  má cylindrické souřadnice  $[\rho, \varphi, z]$ , kde  $\rho$  je nezáporná vzdálenost  $|T_1O|$ ,  $\varphi$  značí úhel

z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$ , který svírá polopřímka daná počátkem soustavy souřadnic a kolmým průmětem bodu  $T$  do půdorysny s kladnou částí osy  $x$ . Souřadnice  $z$  udává výšku bodu  $T$  nad půdorysnou. Transformace do válcových (cylindrických) souřadnic je využívána zejména pro rotační tělesa s osou rotace v ose  $z$ . Případně pro rotační tělesa s osou rotace v ose  $x$  či  $y$  se využívá modifikované transformace do válcových souřadnic.

## Transformace do sférických (kulových) souřadnic

Transformace do sférických souřadnic je dána rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \sin \vartheta, \\y &= \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \\z &= \rho \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Jakobián zobrazení je roven

$$\begin{aligned}J(\rho, \varphi, \vartheta) &= \begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi & g_\vartheta \\ h_\rho & h_\varphi & h_\vartheta \\ k_\rho & k_\varphi & k_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -\rho \sin \varphi \sin \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \rho \cos \varphi \sin \vartheta & \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -\rho \sin \vartheta \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \vartheta - \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \rho^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \\ &\quad - \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \vartheta = -\rho^2 \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Z obr. 3.2 lze vyčíst, že libovolný bod  $T$  má sférické souřadnice  $[\rho, \varphi, \vartheta]$ , kde  $\rho$  je nezáporná vzdálenost bodu  $T$  od počátku soustavy souřadnic,  $\varphi$  značí úhel z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$ , který svírá polopřímka tvořená počátkem soustavy souřadnic  $0$  a kolmým průmětem bodu  $T$  do půdorysny s kladnou částí osy  $x$ . Souřadnice  $\vartheta$  značí úhel z intervalu  $\langle 0; \pi \rangle$ , který svírá polopřímka  $\overrightarrow{OT}$  s kladnou částí osy  $z$ . Transformace do sférických souřadnic se využívá především v případě, kdy integračním oborem je koule nebo její vhodná část.

## Transformace do zobecněných válcových (cylindrických) souřadnic

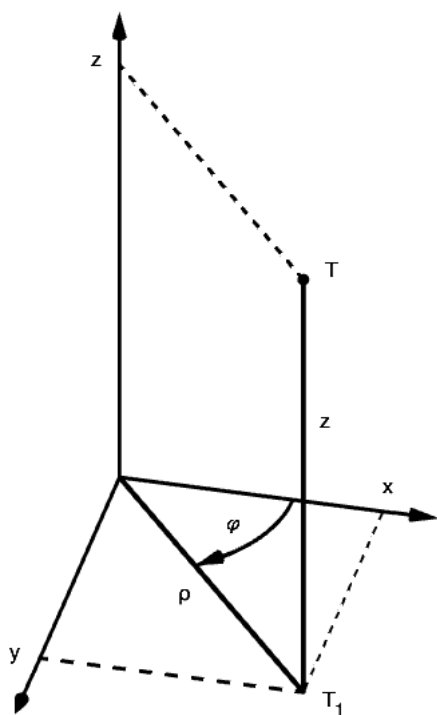
Transformace do zobecněných válcových souřadnic je dána rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= a\rho \cos \varphi, \\y &= b\rho \sin \varphi, \\z &= z,\end{aligned}$$

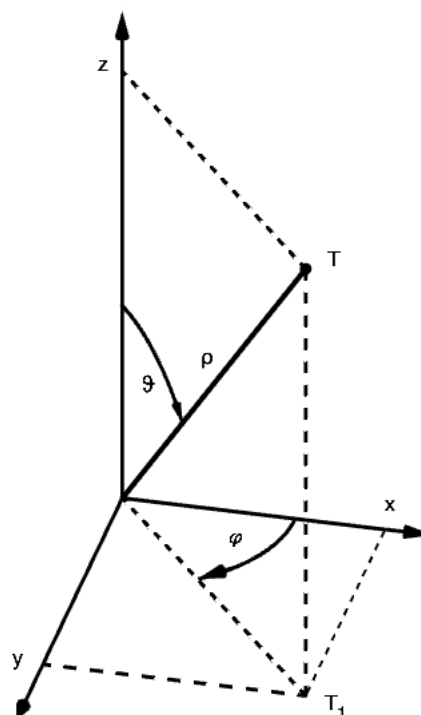
kde  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  jsou konstanty. Jakobián zobrazení je roven

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi & g_z \\ h_\rho & h_\varphi & h_z \\ k_\rho & k_\varphi & k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\rho \sin \varphi & 0 \\ b \sin \varphi & b\rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ab\rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = ab\rho.$$

Transformace do zobecněných cylindrických souřadnic se využívá především, je-li integračním oborem eliptický válec, nebo jeho část.



Obrázek 3.1: cylindrické souřadnice



Obrázek 3.2: sférické souřadnice

### Transformace do zobecněných sférických (kulových) souřadnic

Transformace do zobecněných sférických souřadnic je dána rovnicemi

$$x = a\rho \cos \varphi \sin \vartheta,$$

$$y = b\rho \sin \varphi \sin \vartheta,$$

$$z = c\rho \cos \vartheta,$$

kde  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$  jsou konstanty. Jakobián zobrazení je roven

$$\begin{aligned} J(\rho, \varphi, \vartheta) &= \begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi & g_\vartheta \\ h_\rho & h_\varphi & h_\vartheta \\ k_\rho & k_\varphi & k_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi \sin \vartheta & -a\rho \sin \varphi \sin \vartheta & a\rho \cos \varphi \cos \vartheta \\ b \sin \varphi \sin \vartheta & b\rho \cos \varphi \sin \vartheta & b\rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ c \cos \vartheta & 0 & -c\rho \sin \vartheta \end{vmatrix} \\ &= -abc\rho^2 \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Transformace do zobecněných sférických souřadnic se využívá především, je-li integračním oborem elipsoid, nebo jeho vhodná část.

## 3.2 Aplikace trojného integrálu

V podkapitole 2.2 byly uvedeny aplikace dvojného integrálu, s dalším rozměrem integrálu se rozšiřuje možnost využití již uvedených aplikací.

## Objem množiny

Na prvním místě bude uveden výpočet objemu (míry) měřitelné množiny v trojrozměrném prostoru.

Nechť  $A$  je měřitelná množina v trojrozměrném prostoru. Z definice míry v  $\mathbb{R}^3$  a trojného integrálu plyne, že pro objem  $V(A)$  této množiny platí

$$V(A) = \iiint_A dx dy dz.$$

Podobně jako se některé dvojné integrály nechaly upravit na jednoduché integrály, tak i trojný integrál lze upravit na dvojný v případě, kdy těleso  $A$  jehož objem počítáme, je elementární množina vzhledem k rovině  $xy$ , tzn.

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\},$$

kde  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  je uzavřená množina,  $f, g$  jsou spojité funkce na  $M$  a pro každý bod  $[x, y]$  množiny  $M$  je  $f(x, y) \leq g(x, y)$ . Pak je možné vzorec pro výpočet objemu přepsat pomocí Fubiniovy věty na dvojný integrál:

$$V(A) = \iint_M (g(x, y) - f(x, y)) dx dy.$$

Navíc, vznikne-li těleso rotací kolem některé ze souřadnicových os  $x, y, z$ , lze jejich objem spočítat podle následující věty.

**Věta 14.** Nechť je dána spojitá nezáporná funkce  $f(x)$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a nechť  $T$  je těleso v  $\mathbb{R}^3$ , které vznikne rotací podgrafu funkce  $f(x)$  kolem osy  $x$ . Potom objem tělesa  $T$  je dán vzorcem

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Obdobně platí vzorec pro rotaci kolem os  $y, z$ .

**Příklad 9.** Vypočítejte objem kužele s rotační osou  $z$ , podstavou v rovině  $xy$  a poloměrem podstavy  $r = 3 \text{ cm}$  a výškou  $v = 6 \text{ cm}$ .

Řešení:

Je zřejmé, že plášť kužele vznikne rotací přímky  $z = -2x + 6$  kolem osy  $z$ , pro jednodušší výpočet využijeme transformace do cylindrických souřadnic,

$$B: \begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \rho \leq 3, \\ 0 &\leq z \leq -2\rho + 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_A dx dy dz = \iiint_B \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^3 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{-2\rho+6} \rho dz \right) d\varphi \right) d\rho \\ &= \int_0^3 \left( \int_0^{2\pi} -2\rho^2 + 6\rho d\varphi \right) d\rho = \int_0^3 (-4\pi\rho^2 + 12\pi\rho) d\rho = \left[ -\frac{4}{3}\pi\rho^3 + 6\pi\rho^2 \right]_0^3 \\ &= -36\pi + 54\pi = 18\pi. \end{aligned}$$

**Cvičení 7.** Následující příklady na výpočet objemů množin jsou určeny k samostatné práci, jejich řešení naleznete spolu s ilustrací zadání na str. 74.

- 7.1 Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami  $y = x^2$  a  $y = x$  kolem osy  $x$ .
- 7.2 Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného dvěma křivkami  $f: y = -x^2 + 1$  a  $g: y = -2x^2 + 2$  kolem osy  $x$ .
- 7.3 Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami  $y = 2^x$ ,  $3x - 4y + 5 = 0$  kolem osy  $x$ .
- 7.4 Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami  $y = x^2$ ,  $x = y^2$  kolem osy  $y$ .
- 7.5 Vypočtete objem komolého rotačního kužele s poloměry podstav  $r_1 = 3\text{ cm}$ ,  $r_2 = 5\text{ cm}$  a výškou  $v = 4\text{ cm}$ .
- 7.6 Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^2$  kolem osy  $x$ .
- 7.7 Vypočtete objem rotačního anuloidu vytvořeného rotací kružnice  $x^2 + (y - 3)^2 = 4$  kolem osy  $x$ .
- 7.8 Vypočtete objem tělesa určeného množinou  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq x\}$ .
- 7.9 Vypočtete objem tělesa určeného množinou  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 4z \leq 0, x^2 + y^2 - z^2 \leq 0\}$ .

## Obsah plochy v trojrozměrném prostoru

Uvažujme jednodušší případ, kdy plocha je grafem funkce dvou proměnných. Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  je omezená oblast, jejíž hranice je sjednocením konečně mnoha po částech hladkých křivek<sup>1</sup>. Předpokládejme, že funkce  $f$  má spojité a ohraničené první parciální derivace na  $\Omega$  a je spojitá na uzávěru  $\overline{\Omega}$ . Označme její graf

$$M = \{[x, y, f(x, y)] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \overline{\Omega}\}.$$

Pak lze dokázat, že pro obsah tohoto grafu platí:

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} \, dx dy. \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>Po částech hladká křivka je křivka  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in \langle a, b \rangle$  taková, že existuje dělení  $D$  intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,  $D: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  takové, že pro každé  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  mají funkce  $\varphi$ ,  $\psi$  spojité derivace na intervalu  $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$  a pro každé  $t \in \langle t_{k-1}, t_k \rangle$  platí  $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$ .

**Příklad 10.** Vypočtete obsah grafu  $M$  funkce  $f$ , která je definovaná na ohraničené množině  $\bar{\Omega}: x^2 + y^2 \leq 9$ , je-li  $f(x, y) = -x^2 - y^2$ .

Řešení:

Množina  $\bar{\Omega}: x^2 + y^2 \leq 9$  je kružnice se středem v počátku a poloměrem 3. Využijeme proto transformace do polárních souřadnic.

$$B: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \rho \leq 3, \end{cases}$$

$$f'_x(x, y) = -2x, \quad f'_y(x, y) = -2y,$$

Obsah množiny  $M$  na ohraničené množině  $\bar{\Omega}$  je

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\bar{\Omega}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx dy = \iint_B \sqrt{1 + 4\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho^2 \sin^2 \varphi} \, \rho \, d\rho d\varphi \\ &= \iint_B \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho d\varphi = \left. \begin{array}{l} 1 + 4\rho^2 = t \\ 8\rho \, d\rho = dt \\ \rho \, d\rho = \frac{1}{8} dt \\ 0 \rightarrow 1, \quad 3 \rightarrow 37 \end{array} \right\} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{37} \frac{1}{8} \sqrt{t} \, dt d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^{37} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} 37^{\frac{3}{2}} d\varphi = \left[ \frac{37\sqrt{37}}{12} \varphi \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{37\sqrt{37}}{6} \pi. \end{aligned}$$

**Cvičení 8.** Následující příklady na výpočet obsahu plochy v trojrozměrném prostoru jsou určeny k samostatné práci, jejich řešení naleznete na str. 81.

- 8.1 Vypočtete obsah plochy  $z^2 = (x - 1)^2 + y^2$  ohraničené plochou  $x^2 + y^2 = 4$ .
- 8.2 Vypočtete pomocí integrálu obsah pláště kužele o poloměru podstavy 2 cm a výšce 3 cm.
- 8.3 Vypočtete pomocí integrálu obsah plochy  $x + y + z = 2$  v I. oktantu.

### Hmotnost množiny

Nechť  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  je uzavřená měřitelná množina. Označme  $\rho(x, y, z)$  objemovou hustotu v bodě  $X = [x, y, z] \in M$  a předpokládejme, že  $\rho$  je nezáporná integrovatelná funkce na množině  $M$ . Hmotnost  $m$  množiny  $M$  je dána vztahem

$$m = \iiint_M \rho(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Je-li hustota  $\rho$  konstantní ve všech bodech množiny  $M$ , pak se jedná o využití vzorce  $m = \rho V$ , kde  $V$  je objem množiny  $M$ .

**Příklad 11.** Vypočítejte hmotnost koule zadané vztahem  $M: x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$ , která má v každém bodě hustotu  $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Řešení:

Určíme množinu  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}\}$  a spočítáme její hmotnost v závislosti na objemové hustotě  $\rho$ . Nejprve upravíme rovnici koule:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 &= \frac{1}{4}, \\x^2 + y^2 + z^2 &= z.\end{aligned}$$

Před výpočtem hustoty je vhodné provést transformaci do sférických souřadnic, kde

$$\begin{aligned}\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta &= \rho \cos \vartheta, \\ \rho^2 \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta &= \rho \cos \vartheta, \\ \rho(\rho - \cos \vartheta) &= 0.\end{aligned}$$

Získáváme tedy meze sférických souřadnic:

$$\begin{aligned}0 &\leq \rho \leq \cos \vartheta, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Pomocí Fubiniovy věty vypočteme hmotnost

$$\begin{aligned}m &= \iiint_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\cos \vartheta} \rho^2 \rho \sin \vartheta \, d\rho \right) d\varphi \right] d\vartheta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cos^4 \vartheta \sin \vartheta \, d\varphi \right) d\vartheta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \left| \begin{array}{l} \cos \vartheta = t \\ -\sin \vartheta \, d\vartheta = dt \\ \sin \vartheta \, d\vartheta = -dt \\ 0 \rightarrow 1, \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \end{array} \right| \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_1^0 t^4 \, dt = \frac{\pi}{10}.\end{aligned}$$

**Cvičení 9.** Následující příklady na výpočet hmotnosti těles jsou určeny k samostatné práci, jejich řešení naleznete na str. 83.

- 9.1 Vypočítejte hmotnost tělesa  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in \langle 0, 2 \rangle, y \in \langle 0, 4 \rangle, z \in \langle 2, 3 \rangle\}$ , jenž má v každém bodě hustotu  $\rho(x, y, z) = x + 3$ .
- 9.2 Vypočítejte hmotnost válce  $M$  s podstavou v rovině  $z = 0$ , středem v počátku soustavy souřadnic, poloměrem podstavy 3 a výškou 4, jestliže má v každém bodě hustotu  $\rho(x, y, z) = x^2 + 4 + y^2$ .
- 9.3 Vypočítejte hmotnost tělesa, které je omezené plochou  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  a rovinou  $z = 3$ . Jeho hustota je v každém bodě  $\rho(x, y, z) = z$ .

## Těžiště hmotné množiny

Z rozměrů a hmotnosti tělesa lze určit i jeho těžiště. Podobně jako pro těžiště desky je potřeba zavést pojem statický moment množiny  $M$ . Nechť  $\tau$  je orientovaná rovina v prostoru. Zvolíme-li normálový vektor roviny  $\tau$  mířící do kladného poloprostoru určeného touto rovinou, pak  $\text{dist}(X, \tau)$ , neboli *orientovanou vzdálenost* bodu  $X$  od roviny  $\tau$ , opatříme znaménkem plus. Pokud zvolíme normálový vektor roviny  $\tau$  mířící do záporného poloprostoru určeného touto rovinou, pak  $\text{dist}(X, \tau)$  opatříme znaménkem mínus. *Statický moment množiny  $M$  vzhledem k rovině  $\tau$*  je definován vztahem

$$S_{\tau}(M) = \iiint_M \text{dist}(X, \tau) \rho(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Uveden byl statický moment množiny  $M$  vzhledem k obecné rovině  $\tau$ . Speciálně pak při zvolení některé ze souřadnicových rovin orientovaných standardním způsobem, kde normálový vektor bude směrový vektor odpovídající kladné souřadnicové poloose kolmé ke zvolené souřadnicové rovině, se získají *statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám*

$$\begin{aligned} S_{xy}(M) &= \iiint_M \text{dist}(X, \text{rovina } xy) \rho(x, y, z) \, dx dy dz &= \iiint_M z \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \\ S_{xz}(M) &= \iiint_M \text{dist}(X, \text{rovina } xz) \rho(x, y, z) \, dx dy dz &= \iiint_M y \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \\ S_{yz}(M) &= \iiint_M \text{dist}(X, \text{rovina } yz) \rho(x, y, z) \, dx dy dz &= \iiint_M x \rho(x, y, z) \, dx dy dz. \end{aligned}$$

Těžiště trojrozměrného tělesa  $M$ ,  $T(M)$ , má souřadnice  $[x_{\tau}, y_{\tau}, z_{\tau}]$ , kde

$$\begin{aligned} x_{\tau} &= \frac{S_{yz}(M)}{m} = \frac{1}{m} \iiint_M x \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \\ y_{\tau} &= \frac{S_{xz}(M)}{m} = \frac{1}{m} \iiint_M y \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \\ z_{\tau} &= \frac{S_{xy}(M)}{m} = \frac{1}{m} \iiint_M z \rho(x, y, z) \, dx dy dz. \end{aligned}$$

**Příklad 12.** V příkladu 11 se počítala hmotnost koule zadané ohraničenou množinou  $M: x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$ , které má v každém bodě hustotu  $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Využijte již získaných veličin a určete těžiště  $T(M) = [x_{\tau}, y_{\tau}, z_{\tau}]$  tělesa  $M$ .

**Řešení:**

Z předchozího příkladu již známe hmotnost tělesa  $m = \frac{\pi}{10}$ , vypočítáme souřadnice těžiště,



$$\begin{aligned}
x_\tau &= \frac{S_{yz}(M)}{m} = \frac{10}{\pi} \iiint_M x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz \\
&= \frac{10}{\pi} \iiint_{M^*} (\rho^3 \sin \vartheta)(\rho \cos \varphi \sin \vartheta) \, d\varphi d\rho d\vartheta \\
&= \frac{10}{\pi} \iiint_{M^*} \rho^4 \cos \varphi \sin^2 \vartheta \, d\rho d\varphi d\vartheta = \frac{10}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\cos \vartheta} \rho^4 \cos \varphi \sin^2 \vartheta \, d\rho \right) d\varphi \right] d\vartheta \\
&= \frac{10}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^5 \vartheta}{5} \cos \varphi \sin^2 \vartheta \, d\varphi \right] d\vartheta \\
&= \frac{10}{5\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \cos^5 \vartheta - \cos \varphi \cos^7 \vartheta) \, d\varphi \right] d\vartheta \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sin \varphi \cos^5 \vartheta + \sin \varphi \cos^7 \vartheta \right]_0^{2\pi} d\vartheta = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_\tau &= \frac{S_{xz}(M)}{m} = \frac{10}{\pi} \iiint_M y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz \\
&= \frac{10}{\pi} \iiint_{M^*} (\rho^3 \sin \vartheta)(\rho \sin \varphi \sin \vartheta) \, d\varphi d\rho d\vartheta \\
&= \frac{10}{\pi} \iiint_{M^*} \rho^4 \sin \varphi \sin^2 \vartheta \, d\rho d\varphi d\vartheta = \frac{10}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\cos \vartheta} \rho^4 \sin \varphi \sin^2 \vartheta \, d\rho \right) d\varphi \right] d\vartheta \\
&= \frac{10}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^5 \vartheta}{5} \sin \varphi \sin^2 \vartheta \, d\varphi \right] d\vartheta \\
&= \frac{10}{5\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2\pi} (\sin \varphi \cos^5 \vartheta - \sin \varphi \cos^7 \vartheta) \, d\varphi \right] d\vartheta \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\cos \varphi \cos^5 \vartheta + \cos \varphi \cos^7 \vartheta \right]_0^{2\pi} d\vartheta = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_\tau &= \frac{S_{xy}(M)}{m} = \frac{10}{\pi} \iiint_M z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz \\
&= \frac{10}{\pi} \iiint_{M^*} (\rho^3 \sin \vartheta)(\rho \cos \vartheta) \, d\varphi d\rho d\vartheta = \frac{10}{\pi} \iiint_{M^*} \frac{1}{2} \rho^4 \sin 2\vartheta \, d\rho d\varphi d\vartheta \\
&= \frac{10}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\cos \vartheta} \rho^4 \sin 2\vartheta \, d\rho \right) d\varphi \right] d\vartheta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \vartheta \sin 2\vartheta \, d\vartheta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \vartheta \cos^6 \vartheta \, d\vartheta = \left. \begin{array}{l} u = \cos \vartheta \\ du = -\sin \vartheta \, d\vartheta \\ 0 \rightarrow 1, \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \end{array} \right| = -4 \int_1^0 u^6 \, du = -4 \left[ \frac{u^7}{7} \right]_1^0 = \frac{4}{7}.
\end{aligned}$$

Těžiště  $T(M)$  má souřadnice  $\left[0, 0, \frac{4}{7}\right]$ .

**Cvičení 10.** Následující příklady na výpočet těžiště těles jsou určeny k samostatné práci, k jejich řešení využijte výsledků ze cvičení 9, kompletní řešení naleznete na str. 86.

- 10.1 Vypočtete těžiště tělesa  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in \langle 0, 2 \rangle, y \in \langle 0, 4 \rangle, z \in \langle 2, 3 \rangle\}$ , s hustotou  $\rho(x, y, z) = x + 3$  v každém bodě tělesa  $M$ .
- 10.2 Vypočtete těžiště válce  $M$  s podstavou v rovině  $z = 0$ , středem v počátku soustavy souřadnic, poloměrem podstavy 3 a výškou 4, jestliže má v každém bodě hustotu  $\rho(x, y, z) = x^2 + 4 + y^2$ .
- 10.3 Vypočtete těžiště tělesa, které je omezené plochou  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  a rovinou  $z = 3$ . Jeho hustota je v každém bodě  $\rho(x, y, z) = z$ .

### Moment setrvačnosti trojrozměrného tělesa

Moment setrvačnosti  $I_p(M)$  vzhledem k přímce  $p$  na měřitelné množině  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ , za předpokladu, že  $\rho$  je nezáporná funkce integrovatelná na  $M$  je roven

$$I_p(M) = \iiint_M d^2(X, p) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Když za přímku zvolíme některou ze souřadnicových os, dostáváme

$$I_x(M) = \iiint_M (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y(M) = \iiint_M (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z(M) = \iiint_M (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

**Příklad 13.** V příkladech 11 a 12 byla postupně vypočtena hmotnost a souřadnice těžiště koule zadané vztahem  $M: x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$ , která má v každém bodě objemovou hustotu  $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Pro jednoduchost bude v tomto případě uvažována stejná koule, ale s hustotou  $\rho(x, y, z) = 1$ . Vypočtete moment setrvačnosti koule vzhledem k ose  $z$ .

Řešení:

Moment setrvačnosti koule vzhledem k ose  $z$  označíme  $I_z(M)$  a vypočteme.

$$\begin{aligned}
I_z(M) &= \iiint_M (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz \\
&= \iiint_A (\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta) \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\cos \vartheta} \rho^4 \sin^3 \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 \vartheta}{5} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \right] d\varphi \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \vartheta)(1 - \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \right] d\varphi = \left. \begin{array}{l} \sin \vartheta = t \\ \cos \vartheta \, d\vartheta = dt \\ 0 \rightarrow 0, \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 (1 - t^2)(1 - t^2)t^3 \, dt \right] d\varphi = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \right) d\varphi = \frac{1}{60} \pi.
\end{aligned}$$

Stejný výsledek bychom získali i pro libovolnou jinou přímku procházející středem proto, že je koule symetrická a má jednotkovou hustotu stejnou v každém bodě.

**Cvičení 11.** Následující příklady na výpočet momentu setrvačnosti těles jsou určeny k samostatné práci, k jejich řešení lze částečně využít řešení ze cvičení 9, kompletní řešení naleznete na str. 89.

- 11.1 Vypočtete momenty setrvačnosti vejčitého elipsoidu, jehož délky poloos jsou postupně 4, 2, 2. homogenního tělesa tvaru elipsoidu vzhledem k jeho osám. Hustota elipsoidu je konstantní.
- 11.2 Vypočtete moment setrvačnosti válce  $M$  s podstavou umístěnou v rovině  $z = 0$ , středem v počátku soustavy souřadnic, poloměrem podstavy 3 a výškou 4, vzhledem k ose rotace, jestliže má v každém bodě hustotu  $\rho(x, y, z) = 1$ .
- 11.3 Vypočtete moment setrvačnosti tělesa, které je omezené plochou  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  a rovinou  $z = 3$  vzhledem k ose rotace. Jeho hustota je v každém bodě  $\rho(x, y, z) = z$ .

## Elektrický náboj

Na uzavřené měřitelné množině  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ , chápeme jako trojrozměrné těleso, označme  $\omega(x, y, z)$  objemovou hustotu náboje v bodě  $X = [x, y, z] \in M$ . Za předpokladu, že  $\omega$  je integrovatelná funkce na  $M$ , je celkový elektrický náboj  $Q(M)$  rozložený v tělese  $M$  definován vztahem

$$Q(M) = \iiint_M \omega(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

**Příklad 14.** Vypočtete celkový elektrický náboj rozložený v trojrozměrném tělese  $M$ , které je ohraničené plochami  $z = x + y$ ,  $z = x^2 + y^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$  a hustotu elektrického náboje  $\omega(x, y, z) = x + y$ .

Řešení:

Elektrický náboj množiny  $M$  je

$$\begin{aligned}
 Q(M) &= \iiint_M \omega(x, y, z) \, dx dy dz = \int_0^1 \left[ \int_0^1 \left( \int_{x^2+y^2}^{x+y} (x+y) \, dz \right) dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 \left( (x+y)(x+y) - (x+y)(x^2+y^2) \right) dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 \left( x^2 + 2xy + y^2 - x^3 - xy^2 - x^2y - y^3 \right) dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left( x^2 + x + \frac{1}{3} - x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left( -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} \right) dx = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

**Cvičení 12.** Následující příklady na výpočet elektrického náboje těles jsou určeny k samostatné práci, kompletní řešení naleznete na str. 92.

- 12.1 Vypočítejte el. náboj tělesa  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in \langle 0, 2 \rangle, y \in \langle 0, 4 \rangle, z \in \langle 2, 3 \rangle\}$ , které má v každém bodě hustotu elektrického náboje  $\omega(x, y, z) = 2x + 3y$ .
- 12.2 Vypočítejte elektrický náboj části válce nacházející se v prvním oktantu, válec  $M$  má podstavu v rovině  $z = 0$ , střed v počátku soustavy souřadnic, poloměr podstavy 3 a výšku 4. V každém bodě má hustotu elektrického náboje  $\omega(x, y, z) = x^2 + y^2$ .
- 12.3 Vypočítejte elektrický náboj části tělesa nacházející se v prvním oktantu, které je omezené plochou  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  a rovinou  $z = 3$  vzhledem k ose rotace. Jeho hustota elektrického náboje je v každém bodě  $\rho(x, y, z) = xy$ .

# Kapitola 4

## Vícerozměrný integrál

Kapitola o vícerozměrném či  $n$ -rozměrném integrálu je rozšířením předchozích dvou kapitol, 2 a 3 o další dimenze. Struktura kapitoly bude totožná s předcházejícími, nejprve bude uveden vícerozměrný integrál a jeho vlastnosti, následně transformace a na závěr kapitoly užívané aplikace vícerozměrného integrálu.

Nejprve uvedeme označení  *$n$ -rozměrného integrálu* funkce  $f$  integrovatelné na měřitelné množině  $M \subset \mathbb{R}^n$ , kde  $M = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$ ,  $n \geq 2$ ,  $-\infty < a_i < b_i < \infty$  pro každé  $i = 1, 2, \dots, n$ , předpisem

$$\int \cdots \int_M f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Při označení  $x' = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ,  $dx' = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ , lze  $n$ -rozměrný integrál psát ve tvaru

$$\int \cdots \int_M f(x') dx'.$$

Horní a dolní integrál se zavádí analogicky jako v druhé a třetí kapitole, přes horní a dolní součty funkce  $f$  na  $n$ -rozměrné množině  $M$ .

**Věta 15.** Je-li funkce  $f$  integrace schopna na  $n$ -rozměrném intervalu  $M = M_1 \times M_2$ , kde  $M_1$  je uzavřený omezený interval v  $\mathbb{R}^m$ , přičemž  $m < n$ , a  $M_2$  je uzavřený omezený interval v  $\mathbb{R}^{n-m}$ , pak obě funkce

$$\int_{M_2} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \cdots dx_n,$$
$$\int_{M_1} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \cdots dx_n$$

jsou integrovatelné na  $M_1$  a platí

$$\begin{aligned} \int_M \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n &= \\ &= \int_{M_1} \cdots \int \left( \int_{M_2} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \cdots dx_n \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_m \\ &= \int_{M_1} \cdots \int \left( \overline{\int_{M_2} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \cdots dx_n} \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_m. \end{aligned}$$

Platí rovněž, že obě funkce

$$\begin{aligned} \int_{M_1} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_m, \\ \int_{M_1} \overline{\int_{M_2} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \cdots dx_n} \end{aligned}$$

jsou integrovatelné na  $M_2$  a platí

$$\begin{aligned} \int_M \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n &= \\ &= \int_{M_2} \cdots \int \left( \int_{M_1} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_m \right) dx_{m+1} dx_{m+2} \cdots dx_n \\ &= \int_{M_2} \cdots \int \left( \overline{\int_{M_1} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_m} \right) dx_{m+1} dx_{m+2} \cdots dx_n. \end{aligned}$$

Pro funkci  $f$  spojitou na  $n$ -rozměrném intervalu  $M$  dostáváme

$$\begin{aligned} \int_M \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n &= \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \cdots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \cdots \right) dx_2 \right) dx_1. \end{aligned}$$

Integrál na pravé straně rovnosti se nazývá  $n$ -násobný integrál. Podobně jako v předchozích kapitolách lze analogické vzorce obdržet záměnou pořadí proměnných.

## 4.1 Transformace $n$ -rozměrného integrálu

Jako u podkapitol o transformaci dvojného a trojného integrálu i zde je třeba zavést stejným způsobem spojitě diferencovatelné zobrazení, jakobián a následně transformace.

**Definice 6.** Nechť  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  a nechť  $g_j, j = 1, 2, \dots, n$ , jsou funkce definované na množině  $B$ . Nechť  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^n$  je zobrazení přiřazující každému bodu  $[u_1, u_2, \dots, u_n] \in B$  bod  $F(u_1, u_2, \dots, u_n) = [g_1(u_1, u_2, \dots, u_n), g_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots, g_n(u_1, u_2, \dots, u_n)]$ .

Řekneme, že zobrazení  $F$  je *spojitě diferencovatelné* v  $B$ , jestliže existuje otevřená množina  $\Omega \supseteq B$  taková, že funkce  $g_j, j = 1, 2, \dots, n$ , lze rozšířit na  $\Omega$  takovým způsobem, aby měly v  $\Omega$  spojitě parciální derivace prvního řádu podle všech svých proměnných  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

Je-li  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojitě diferencovatelné zobrazení v  $B$ , determinant

$$J = \begin{vmatrix} g_{1|u_1} & g_{1|u_2} & \cdots & g_{1|u_n} \\ g_{2|u_1} & g_{2|u_2} & \cdots & g_{2|u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n|u_1} & g_{n|u_2} & \cdots & g_{n|u_n} \end{vmatrix},$$

kde  $g_{i|u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} g_i$ , se nazývá *jakobián* zobrazení  $F$ . Jakobián  $J: B \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcí proměnných  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

**Definice 7.** Spojitě diferencovatelné zobrazení  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^n$  na otevřené množině  $B$  se nazývá *regulární*, je-li jeho jakobián  $J$  různý od nuly v každém bodě množiny  $B$ .

A následuje věta o transformaci  $n$ -rozměrného integrálu.

**Věta 16.** Nechť  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  je uzavřená měřitelná množina a  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $B \subseteq \Omega$ . Buď  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  prosté regulární zobrazení pro každé  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n] \in B$  takové, že  $F(u_1, u_2, \dots, u_n) = [g_1(u_1, u_2, \dots, u_n), g_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots, g_n(u_1, u_2, \dots, u_n)]$ . Nechť funkce  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá na množině  $A = F(B)$ , pak platí

$$\int_A \cdots \int f(x) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_B \cdots \int f(g_1(u), g_2(u), \dots, g_n(u)) |J(u)| du_1 du_2 \cdots du_n.$$

Podobně jako u dvojného integrálu musí být integrand ve větě 16 spojitá funkce a integrační obor uzavřená množina. Což omezuje univerzálnost této věty při mnoha příkladech, jelikož rozšíření transformací na otevřenou nadmnožinu integračního oboru při zachování regularity často není možné. Věta o transformaci  $n$ -rozměrného integrálu za obecnějších podmínek zní:

**Věta 17.** Nechť  $B_1 \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ , kde  $B_1$  je otevřená množina,  $B$  je měřitelná množina a platí  $m(B \setminus B_1) = 0$ .

Nechť  $F: B \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitě diferencovatelné zobrazení s jakobiánem  $J$ , které je regulární a prosté v  $B_1$ . Označme  $A = F(B), A_1 = F(B_1)$ . Předpokládejme, že množina  $A$  je měřitelná a platí  $m(A \setminus A_1) = 0$ .

Nechť funkce  $f$  je ohraničená na množině  $A$  a spojitá na množině  $A_1$ , nechť je funkce  $f(g_1(u), g_2(u), \dots, g_n(u)) |J(u)|$  ohraničená na množině  $B$ . Pak platí:

$$\int_A \cdots \int f(x) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_B \cdots \int f(g_1(u), g_2(u), \dots, g_n(u)) |J(u)| du_1 du_2 \cdots du_n.$$

Nejběžnější transformace  $n$ -rozměrného integrálu jsou následně uvedeny za využití transformačních rovnic  $n$ -rozměrného integrálu.

## Posunutí

*Posunutí*, nebo-li *translace* je transformace dána rovnicemi

$$\begin{aligned}x_1 &= u_1 + a_1, \\x_2 &= u_2 + a_2, \\&\vdots \\x_n &= u_n + a_n,\end{aligned}$$

kde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jsou konstanty. Jakobián této transformace je

$$J(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} g_{1|u_1} & g_{1|u_2} & \cdots & g_{1|u_n} \\ g_{2|u_1} & g_{2|u_2} & \cdots & g_{2|u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n|u_1} & g_{n|u_2} & \cdots & g_{n|u_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

## Dilatace

*Dilatace*, speciálně pro  $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$  změna měřítek na souřadnicových osách, je dána rovnicemi

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 u_1, \\x_2 &= a_2 u_2, \\&\vdots \\x_n &= a_n u_n,\end{aligned}$$

kde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jsou nenulové konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} g_{1|u_1} & g_{1|u_2} & \cdots & g_{1|u_n} \\ g_{2|u_1} & g_{2|u_2} & \cdots & g_{2|u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n|u_1} & g_{n|u_2} & \cdots & g_{n|u_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

## Transformace do sférických (kulových) souřadnic

*Transformace do sférických souřadnic*  $\varphi, \rho, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-2}$ , kde  $n \geq 2$  je dána rovnicemi

$$\begin{aligned}x_1 &= \rho \cos \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-4} \sin \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2}, \\x_2 &= \rho \sin \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-4} \sin \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2}, \\x_3 &= \rho \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{n-4} \sin \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2}, \\&\vdots \\x_{n-2} &= \rho \cos \vartheta_{n-4} \sin \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2}, \\x_{n-1} &= \rho \cos \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2}, \\x_n &= \rho \cos \vartheta_{n-2}.\end{aligned}$$



Jakobián zobrazení je

$$J_n = J_n(\rho, \varphi, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-2}) = (-1)^n \rho^{n-1} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \cdots \sin^{n-2} \vartheta_{n-2}.$$

Podobně jako v předchozích kapitolách i zde mají proměnné podobný význam, libovolný bod  $T$  má sférické souřadnice  $[\rho, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}]$ , kde  $\rho$  je nezáporná vzdálenost bodu  $T$  od počátku soustavy souřadnic, tedy  $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ . Další souřadnice  $\varphi$  značí úhel z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  a  $\vartheta_i, i = 1, 2, \dots, n-2$ , značí úhel z intervalu  $\langle 0; \pi \rangle$ . Pro kolmý průmět bodu  $T$  na souřadnicovou osu  $x_n$  platí  $x_n = \rho \cos \vartheta_{n-2}$ , kde  $\vartheta_{n-2}$  je úhel který svírá průvodič bodu  $T$ , neboli vektor určený počátkem a bodem  $T$ , s kladným směrem osy  $x_n$ . Transformace do sférických souřadnic se v  $n$ -rozměrném prostoru využívá především v případě, kdy integračním oborem je  $n$ -rozměrná koule nebo její vhodná část.

## 4.2 Aplikace $n$ -rozměrného integrálu

### Míra měřitelné množiny v $n$ -rozměrném prostoru

Z definice míry a integrálu pro míru měřitelné množiny  $M \in \mathbb{R}^n$  plyne vzorec

$$m_n(M) = \int \cdots \int_M dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Následující příklad je uveden ve skriptech doc. Kalase [3].

**Příklad 15.** Vypočtěte míru  $T_n$   $n$ -rozměrného jehlanu

$$M_n = \{[x_1, x_2, \dots, x_n] : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq h\},$$

kde  $h > 0$  je konstanta.

Řešení:

Nejprve provedeme dilataci  $x_1 = hu_1, x_2 = hu_2, \dots, x_n = hu_n$ . Pro jakobián této transformace platí  $J = h^n$ . Množina  $M_n$  přejde po této dilataci v množinu

$$M_n^* = \{[u_1, u_2, \dots, u_n] : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_n \geq 0, u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq 1\}.$$

Elementární množinu  $M_n^*$  lze vymežit pomocí nerovností:

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_n &\leq 1, \\ 0 &\leq u_{n-1} &\leq 1 - u_n, \\ M_n^*: 0 &\leq u_{n-2} &\leq 1 - u_n - u_{n-1}, \\ &\vdots \\ 0 &\leq u_1 &\leq 1 - u_n - \cdots - u_2. \end{aligned}$$

Dostáváme pak

$$T_n = \int \cdots \int_{M_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{M_n^*} h^n du_1 du_2 \cdots du_n = h^n \int \cdots \int_{M_n^*} du_1 du_2 \cdots du_n.$$

Označíme-li při pevném  $u_n \in (0, 1)$

$$M_{n-1}^* = \{[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}] : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_{n-1} \geq 0, u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} \leq 1 - u_n\},$$

tak míra  $T_n$  je

$$T_n = \int_0^1 \left( \int \dots \int_{M_{n-1}^*} h^n du_1 du_2 \dots du_{n-1} \right) du_n.$$

Ve vnitřním integrálu na množině  $M_{n-1}^*$  provedeme v pořadí druhou dilataci souřadnic  $u_1 = (1 - u_n)v_1, u_2 = (1 - u_n)v_2, \dots, u_{n-1} = (1 - u_n)v_{n-1}$  s jakobiánem  $J_{n-1} = (1 - u_n)^{n-1}$ . Množina  $M_{n-1}^*$  přejde po transformaci v množinu

$$M_{n-1}^{**} = \{[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}] : v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, \dots, v_{n-1} \geq 0, v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} \leq 1\}.$$

Pro míru množiny  $M_n$  ze zadání příkladu platí

$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^1 \left( \int \dots \int_{M_{n-1}^{**}} h^n (1 - u_n)^{n-1} dv_1 dv_2 \dots dv_{n-1} \right) du_n \\ &= \int_0^1 (1 - u_n)^{n-1} du_n \left( \int \dots \int_{M_{n-1}^{**}} h^n dv_1 dv_2 \dots dv_{n-1} \right) = \left| \begin{array}{l} 1 - u_n = t \\ -du_n = dt \\ 0 \rightarrow 1, \quad 1 \rightarrow 0 \end{array} \right| \\ &= - \int_1^0 t^{n-1} dt \left( \int \dots \int_{M_{n-1}^{**}} h^n dv_1 dv_2 \dots dv_{n-1} \right) = \frac{1}{n} \left( \int \dots \int_{M_{n-1}^{**}} h^n dv_1 dv_2 \dots dv_{n-1} \right). \end{aligned}$$

Protože  $T_n = T_{n-1} \int_0^1 du_n = \frac{1}{n} T_{n-1}$ , snadno se zjistí, že  $\int \dots \int_{M_n^*} du_1 du_2 \dots du_n = \frac{1}{n!}$  pro

každé  $n \geq 1$ . Doplněním do rovnice

$$T_n = h^n \int \dots \int_{M_n^*} du_1 du_2 \dots du_n.$$

vyjde  $T_n = \frac{h^n}{n!}$ .

### Obsah $(n - 1)$ -rozměrné plochy v $n$ -rozměrném prostoru

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$  je omezená oblast, funkce  $f$  je spojitá na  $\overline{\Omega}$  a má spojitě a ohraničené parciální derivace na oblasti  $\Omega$ , jejíž hranice je po částech hladká<sup>1</sup>.

Podobně jako v trojrozměrném prostoru je zaveden vzorec pro  $(n - 1)$ -rozměrnou míru (obsah) v  $n$ -rozměrném prostoru grafu

$$M = \{[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})] \in \mathbb{R}^n : [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \in \overline{\Omega}\}$$

<sup>1</sup>„Že hranice množiny je po částech hladká znamená, že je sjednocením konečně mnoha grafů diferencovatelných funkcí  $n - 2$  proměnných  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-2}}$ ,  $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{n-2} \leq n - 1$ , definovaných na kompaktních množinách, přičemž různé grafy mají společné nejvýše body svých „okrajů“.“[3]

funkce  $f$  o  $n - 1$  proměnných je analogický vzorci pro výpočet obsahu v trojrozměrném prostoru

$$S_{n-1} = \int \cdots \int_{\Omega} \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} f'_{x_j}{}^2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

Následující příklad je uveden v KALAS [3].

**Příklad 16.** Vypočítejte obsah  $S_{n-1}$  povrchu  $n$ -rozměrné koule  $M_n$  v  $n$ -rozměrném prostoru, která má daný poloměr  $r > 0$ .

Řešení:

Nejdříve bude proveden výpočet pro  $n \geq 4$ . Obsah horní poloviny povrchu koule  $M_n$  označíme  $\frac{1}{2} S_{n-1}$ , platí

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = \int \cdots \int_{M_{n-1}} \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} f'_{x_j}{}^2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

Z rovnice  $n$ -rozměrné koule  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2$  vyjádříme  $x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ , proto  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n-1}^2}$  a množinu  $M_{n-1}$  lze zapsat

$$M_{n-1} = \{[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 < r^2\}.$$

Lze vypočítat  $f'_{x_j}$  pro libovolné  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  a platí

$$f'_{x_j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \frac{-x_j}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n-1}^2}}.$$

Dosazením do vzorce z úvodu řešení dostáváme

$$\frac{1}{2} S_{n-1} = \int \cdots \int_{M_{n-1}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n-1}^2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

Použitím transformace do sférických souřadnic uvedené na str. 48 přejde množina  $M_{n-1}$  v množinu,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho < r, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ M_{n-1}^* : 0 &\leq \vartheta_1 \leq \pi, \\ &\vdots \\ 0 &\leq \vartheta_{n-3} \leq \pi. \end{aligned}$$

Užitím vztahu  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 = \rho^2$  dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_{n-1} &= r \int \dots \int_{M_{n-1}^*} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho^{n-2} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \dots \sin^{n-3} \vartheta_{n-3} d\rho d\varphi d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_{n-3} \\ &= r \int_0^r \left[ \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \dots \left( \int_0^\pi \frac{\rho^{n-2} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \dots \sin^{n-3} \vartheta_{n-3}}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\vartheta_1 \right) \dots d\vartheta_{n-3} \right) d\varphi \right] d\rho \\ &= r \int_0^r \frac{\rho^{n-2}}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \dots \int_0^\pi \sin^{n-3} \vartheta_{n-3} d\vartheta_{n-3}. \end{aligned}$$

Zavedeme substituci

$$\begin{aligned} \rho &= r \sin t \\ d\rho &= r \cos t dt \\ 0 &\rightarrow 0, \quad r \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

a vypočítáme obsah

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_{n-1} &= r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^{n-2} \sin^{n-2} t}{r \cos t} r \cos t dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \dots \int_0^\pi \sin^{n-3} \vartheta_{n-3} d\vartheta_{n-3} \\ &= r^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \dots \int_0^\pi \sin^{n-3} \vartheta_{n-3} d\vartheta_{n-3}. \end{aligned}$$

Podle rekurentních vzorců

$$\int_0^\pi \sin^k \vartheta d\vartheta = \frac{k-1}{k} \int_0^\pi \sin^{k-2} \vartheta d\vartheta, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \vartheta d\vartheta = \frac{k-1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2} \vartheta d\vartheta,$$

získáme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_{n-1} &= 2\pi r^{n-1} \frac{n-3}{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-4} \vartheta d\vartheta (-\cos \pi + \cos 0) \dots \frac{n-4}{n-3} \int_0^\pi \sin^{n-7} \vartheta_{n-3} d\vartheta_{n-3} \\ &= 2\pi r^{n-1} \frac{1}{(n-2)!!} 2^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} = \frac{r^{n-1}}{(n-2)!!} 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \end{aligned}$$

kde

$$(n-2)!! = \begin{cases} (n-2)(n-4)(n-6)\dots 3 \cdot 1, & \text{je-li } n \text{ liché} \\ (n-2)(n-4)(n-6)\dots 2, & \text{je-li } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Obsah povrchu celé koule je

$$S_{n-1} = \frac{r^{n-1}}{(n-2)!!} 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

kde  $\lfloor x \rfloor$  značí celou část čísla  $x$ . Výsledek zřejmě platí i pro  $n = 2$  a  $n = 3$ .

# Závěr

Práce je shrnutím základních poznatků z teorie vícerozměrného integrálu včetně jeho transformací a aplikací. Významnou součástí a přínosem jsou příklady v textu a příloha obsahující řadu podrobně řešených cvičení a názorných ilustrací zadání. Jak již bylo zmíněno v úvodu, všechny grafy byly vytvořeny v programu Geogebra, pečlivě byla zvážena vhodnost ilustrací a výsledné grafické vyjádření zadání trojrozměrných těles bylo dopraveno ve volně přístupném vektorovém programu Inkscape.

S ohledem na čtenáře neznalého tématu jsou zařazeny nejprve jednodušší příklady pro pochopení látky a složitější jsou často vloženy do cvičení sloužících k samostatnému řešení, která jsou k nalezení v příloze. Práce obsahuje jak nejzákladnější aplikace vícerozměrného integrálu, tak ty méně známé.

Zajímavé by bylo i obohacení práce o využití vícerozměrného integrálu v kartografii při projekci zakřiveného Zemského povrchu do roviny, mapy. V průběhu práce však bylo zjištěno, že nejznámější kartografická zobrazení využívají k transformaci souřadnic pouze jednorozměrného integrálu, jež není tématem diplomové práce.

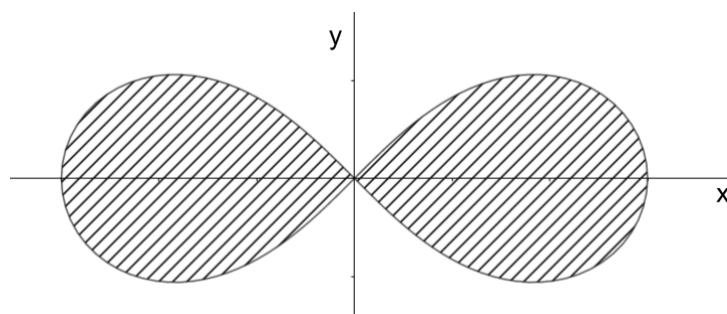
Práce by dále mohla být rozšířena právě o aplikaci jednorozměrného integrálu, či o další aplikace vícerozměrných integrálů, jako je například pravděpodobnost a ekonomické aplikace.

# Příloha

Cvičení, která byla v kapitole 2 a 3 zadány čtenáři k samostatnému řešení, jsou v této kapitole vyřešena a mohou tak sloužit ke kontrole nebo jako nápověda v případě potíží při řešení. Všechna cvičení jsou zároveň doplněna pro lepší představivost ilustrací množin ze zadání jednotlivých cvičení.

## Cvičení 1.1:

Vypočtete obsah rovinného obrazce, který je ohraničen křivkou  $\rho^2 = a^2 \cos(2\varphi)$ ,  $a > 0$ . Jak se křivka nazývá?



Obrázek 4.1: Ilustrace cvičení 1.1

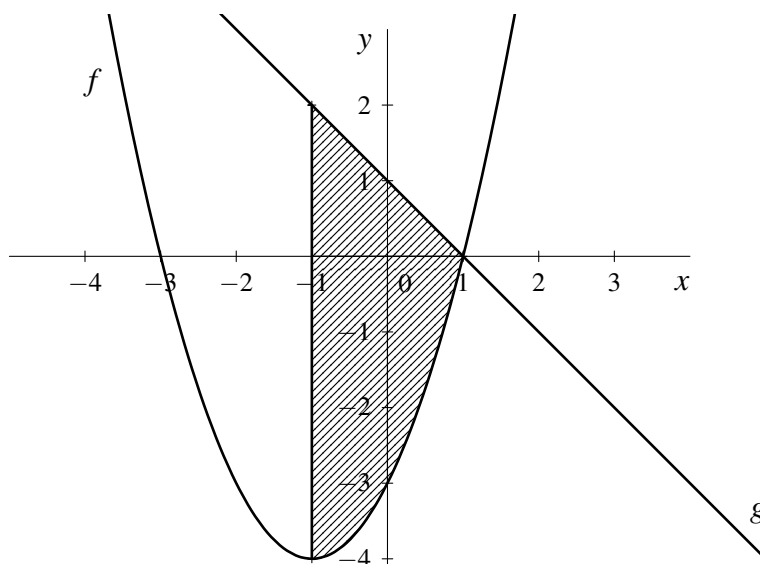
Křivka určená předpisem v zadání tohoto cvičení se nazývá Bernoulliho lemniskáta. Z obr. 4.1 je zřejmé, že Bernoulliho lemniskáta má dvě osy souměrnosti, osy  $x$  a  $y$ , které ji dělí na čtyři shodné části, jednu z nich označme  $S_{\frac{1}{4}}$ . Celkový obsah je tedy roven čtyřnásobku obsahu jedné z těchto částí. Množinu ohraničenou Bernoulliho lemniskátou v souřadnicích  $x, y$  označme  $M$ .

Určíme množinu  $M^* = \{[\rho, \varphi] \in \mathbb{R}^2 : \rho \in \langle 0, \sqrt{a^2 \cos(2\varphi)} \rangle, \varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle\}$  a spočítáme obsah

$$\begin{aligned} S_{\frac{1}{4}} &= \iint_M dx dy = \iint_{M^*} \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{\sqrt{a^2 \cos(2\varphi)}} \rho \, d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a^2 \cos(2\varphi)}} d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2 \cos(2\varphi)}{2} d\varphi = \left[ \frac{a^2}{2} \sin(2\varphi) \frac{1}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4} 1 - \frac{a^2}{4} 0 = \frac{a^2}{4}, \\ S &= 4S_{\frac{1}{4}} = 4 \frac{a^2}{4} = a^2. \end{aligned}$$

**Cvičení 1.2:**

Vypočtete obsah rovinného obrazce, který je omezen křivkami  $f: y = x^2 + 2x - 3$  a  $g: y = 1 - x$ , pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ .



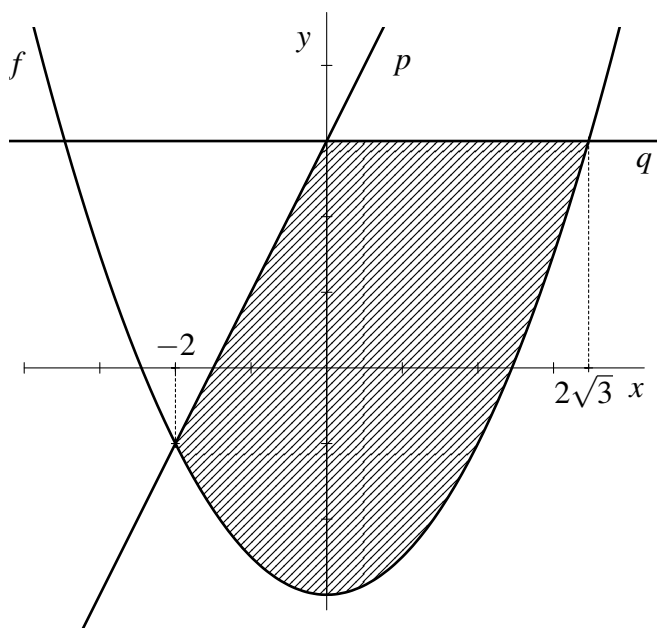
Obrázek 4.2: Ilustrace cvičení 1.2

Dle obr. 4.2 určíme množinu  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \in \langle -1, 1 \rangle, y \in \langle x^2 + 2x - 3, 1 - x \rangle\}$  a spočítáme obsah

$$\begin{aligned} S &= \iint_M dx dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2+2x-3}^{1-x} 1 dy \right) dx = \int_{-1}^1 [y]_{x^2+2x-3}^{1-x} dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x-x^2-2x+3) dx = \int_{-1}^1 (-x^2-3x+4) dx = \left[ \frac{-x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{44}{6} = 7\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Cvičení 1.3:**

Vypočtete obsah rovinného obrazce, který je omezen křivkou  $f: y = \frac{1}{2}x^2 - 3$  a přímkami  $p: y = 2x + 3$ ,  $q: y = 3$ . Vypočtete obsah té části obrazce ohraničeného těmito křivkami, který se nachází ve všech čtyřech kvadrantech.



Obrázek 4.3: Ilustrace cvičení 1.3

Množinu  $M$  ze zadání cvičení rozdělíme na dvě disjunktní podmnožiny  $M_1$  a  $M_2$  podle osy  $y$ . K určení rozsahu hodnot na osách je zapotřebí vypočítat souřadnice průsečíků křivek,

$$\begin{aligned} f \cap p: \quad \frac{1}{2}x^2 - 3 &= 2x + 3, & f \cap q: \quad \frac{1}{2}x^2 - 3 &= 3, \\ 0 &= x^2 - 4x - 12, & x^2 &= 12, \\ x_1 &= -2, \quad x_2 = 6, & x_{1,2} &= \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Z vypočítaných průsečíků využijeme pouze ty, jež leží na hranici množiny určené v zadání, tedy  $x = -2$  a  $x = 2\sqrt{3}$ . Získáváme  $M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle -2, 0 \rangle, y \in \langle \frac{1}{2}x^2 - 3, 2x + 3 \rangle\}$  a  $M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 0, 2\sqrt{3} \rangle, y \in \langle \frac{1}{2}x^2 - 3, 3 \rangle\}$ . Jejich obsah je

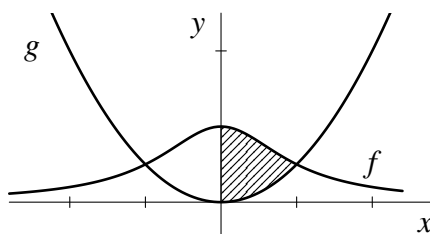
$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_M dx dy = \int_{-2}^0 \left( \int_{\frac{1}{2}x^2 - 3}^{2x+3} 1 dy \right) dx = \int_{-2}^0 [y]_{\frac{1}{2}x^2 - 3}^{2x+3} dx = \int_{-2}^0 \left( 2x + 3 - \frac{1}{2}x^2 + 3 \right) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{3} x^3 + 2x^2 \frac{1}{2} + 6x \right]_{-2}^0 = \frac{20}{3}, \\ S_2 &= \iint_M dx dy = \int_0^{2\sqrt{3}} \left( \int_{\frac{1}{2}x^2 - 3}^3 1 dy \right) dx = \int_0^{2\sqrt{3}} [y]_{\frac{1}{2}x^2 - 3}^3 dx \\ &= \int_0^{2\sqrt{3}} \left( 3 - \frac{1}{2}x^2 + 3 \right) dx = \left[ -\frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + 6x \right]_0^{2\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}, \\ S &= S_1 + S_2 = \frac{20}{3} + 8\sqrt{3} = \frac{20 + 24\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$



**Cvičení 1.4:**

Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

$$f: y = \frac{1}{1+x^2}, g: y = \frac{x^2}{2}.$$



Obrázek 4.4: Ilustrace cvičení 1.4

Nejprve je třeba zjistit průsečík křivek  $f$  a  $g$ ,

$$f \cap g: \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2},$$

$$0 = x^4 + x^2 - 2.$$

Pomocí substituce  $y = x^2$  upravíme na

$$0 = y^2 + y - 2.$$

Získáme dva reálné kořeny  $x = \pm 1$ . Určíme množinu  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \in \langle -1, 1 \rangle, y \in \langle \frac{x^2}{2}, \frac{1}{1+x^2} \rangle\}$  a spočítáme obsah.

Stejně jako u některých předchozích cvičení i zde lze najít osu souměrnosti útvaru ohraničeného křivkami  $f$ ,  $g$ . Je jí osa  $y$ , lze tedy počítat pouze s polovinou obsahu, tedy množinou  $M_{\frac{1}{2}} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle \frac{x^2}{2}, \frac{1}{1+x^2} \rangle\}$ ,

$$S_{\frac{1}{2}} = \iint_{M_{\frac{1}{2}}} dx dy = \int_0^1 \left( \int_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{1}{1+x^2}} 1 dy \right) dx = \int_0^1 [y]_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{1}{1+x^2}} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

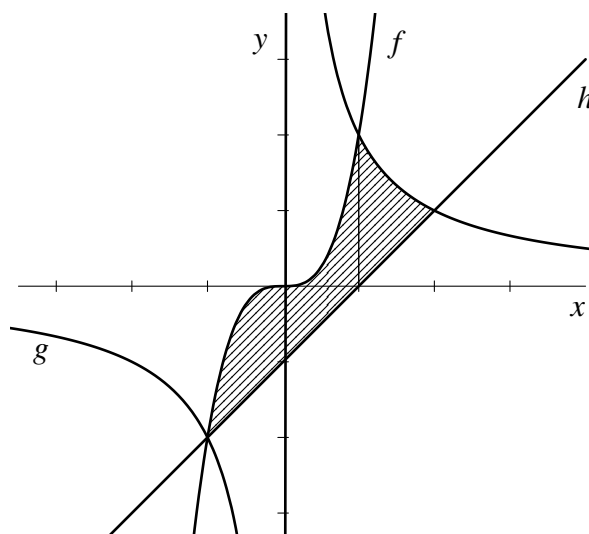
$$= \left[ \arctg x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6},$$

$$S = 2S_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

**Cvičení 1.5:**

Vypočtete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

$$f: y = 2x^3, g: y = \frac{2}{x}, h: x - y = 1.$$



Obrázek 4.5: Ilustrace cvičení 1.5

Dle obr. 4.5 určíme množinu  $M$ . Pro výpočet však bude vhodnější množinu rozdělit na dvě shodné části, pro něž je potřebné předem spočítat průsečíky jednoduchých křivek  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , pak např.  $M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle -1, 1 \rangle, y \in \langle x - 1, 2x^3 \rangle\}$  a  $M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 1, 2 \rangle, y \in \langle x - 1, \frac{2}{x} \rangle\}$ ,  $M_1 \cup M_2 = M$  a protože  $m(M_1 \cap M_2) = 0$ , tak  $m(M) = m(M_1 \cup M_2) = m(M_1) + m(M_2)$ . Obsah množin je vypočten obvyklým způsobem,

$$S_1 = \iint_{M_1} dx dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{x-1}^{2x^3} 1 dy \right) dx = \int_{-1}^1 (2x^3 - x + 1) dx = \left[ \frac{1}{2}x^4 - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = 2,$$

$$S_2 = \iint_{M_2} dx dy = \int_1^2 \left( \int_{x-1}^{\frac{2}{x}} 1 dy \right) dx = \int_1^2 \left( \frac{2}{x} - x + 1 \right) dx = \left[ 2 \ln x - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2},$$

$$S = S_1 + S_2 = 2 \ln 2 + \frac{3}{2}.$$

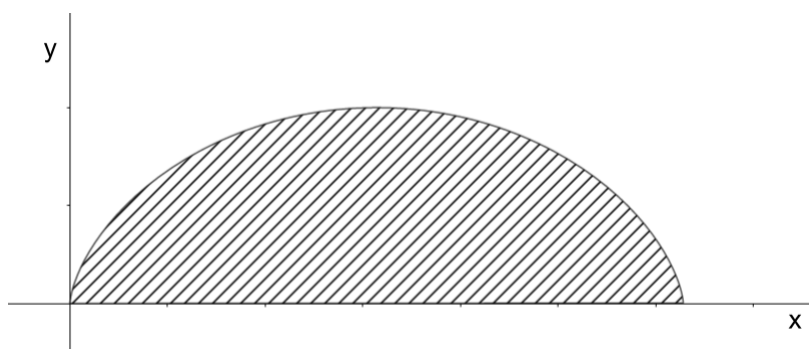
**Cvičení 1.6:**

Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného jedním obloukem prosté cykloidy a osou  $x$ .

Prostá cykloida je definována vztahy  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  pro  $t \in \mathbb{R}$ , jednoduše zjistíme, že  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

Z obr. 4.6 množina  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 0, 2\pi a \rangle, y \in \langle 0, f(x) \rangle\}$ , její obsah je

$$S = \iint_M dx dy = \int_0^{2\pi a} \left( \int_0^{f(x)} 1 dy \right) dx = \int_0^{2\pi a} f(x) dx$$



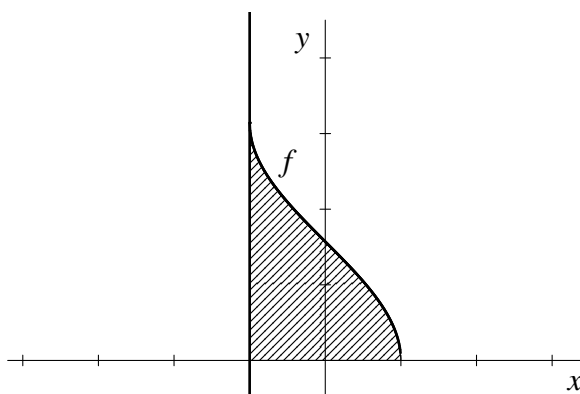
Obrázek 4.6: Ilustrace cvičení 1.6

Vztahy  $x = a(t - \sin t) = \varphi(t)$ ,  $y = a(1 - \cos t) = \psi(t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  je dána jistá nezáporná funkce  $f$  definovaná na  $\langle 0, 2\pi a \rangle$ . Platí  $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ ,  $x \in \langle 0, 2\pi a \rangle$ . Po substituci  $x = a(t - \sin t)$  bude  $f(x) = \psi(t) = a(1 - \cos t)$ ,  $dx = a(1 - \cos t) dt$  a obsah je

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt \\ &= a^2 \left[ t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

**Cvičení 1.7:**

Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami  $f: y = \arccos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ .



Obrázek 4.7: Ilustrace cvičení 1.7

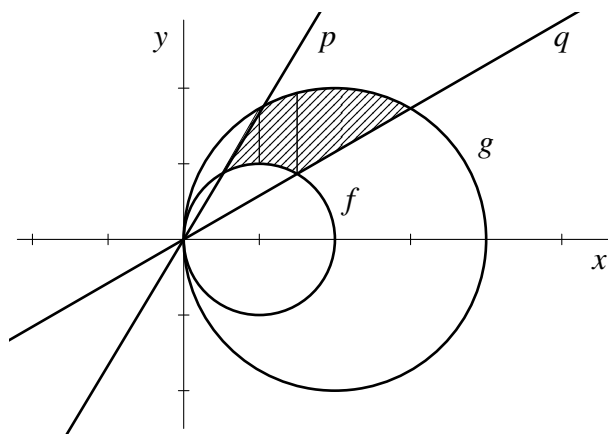
Dle obr. 4.7 určíme množinu  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle -1, 1 \rangle, y \in \langle 0, \arccos x \rangle\}$  a spočítáme obsah

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_M dx dy = \int_{-1}^1 \left( \int_0^{\arccos x} 1 dy \right) dx = \int_{-1}^1 \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos x \quad u' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} \right| \\
 &= [x \arccos x]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = [x \arccos x]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx \\
 &= [x \arccos x - \sqrt{1-x^2}]_{-1}^1 = \pi.
 \end{aligned}$$

**Cvičení 1.8:**

Vypočítejte obsah rovinného obrazce  $M$  ohraničeného křivkami

$f: x^2 + y^2 = 2x$ ,  $g: x^2 + y^2 = 4x$  a přímkami  $p: y = \sqrt{3}x$ ,  $q: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ .



Obrázek 4.8: Ilustrace cvičení 1.8

Z obr. 4.8 lze poznat, že jednodušší, než dělit množinu na několik částí vyznačených na obrázku, ze kterých se spočítá plocha celé množiny v souřadnicích  $x, y$ , je využít transformace do polárních souřadnic.

$$f: x^2 + y^2 = 2x$$

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \cos \varphi$$

$$\rho^2 = 2\rho \cos \varphi$$

$$\rho = 2 \cos \varphi$$

$$p: y = \sqrt{3}x$$

$$\rho \sin \varphi = \sqrt{3} \rho \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$g: x^2 + y^2 = 4x$$

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4\rho \cos \varphi$$

$$\rho^2 = 4\rho \cos \varphi$$

$$\rho = 4 \cos \varphi$$

$$q: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$\rho \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \rho \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

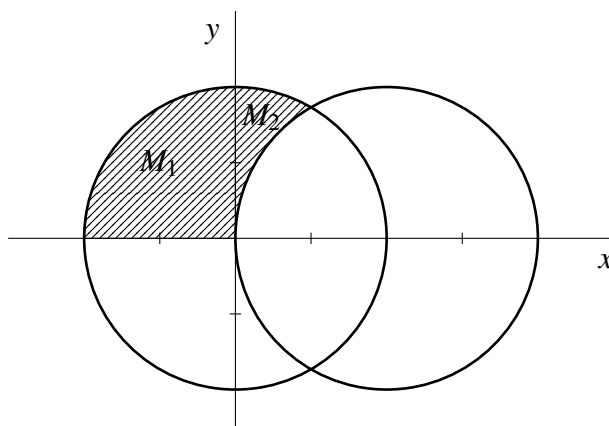
Máme množinu  $M^* = \{[\rho, \varphi] \in \mathbb{R}^2: \rho \in \langle 2 \cos \varphi, 4 \cos \varphi \rangle, \varphi \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \rangle\}$ . Obsah množiny  $M$  je

$$\begin{aligned} S &= \iint_M dx dy = \iint_{M^*} \rho d\varphi d\rho = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} \rho d\rho \right) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (8 \cos^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi) d\varphi = 6 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 6 \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \\ &= 3 \left[ \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Cvičení 1.9:**

Vypočítejte obsah rovinného obrazce zadaného množinou

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 4x, y \geq 0\}.$$



Obrázek 4.9: Ilustrace cvičení 1.9

Dle obr. 4.9 určíme množinu  $M$ . Pro výpočet však bude vhodnější množinu rozdělit na dvě části  $M_1$  a  $M_2$ , přičemž obsah množiny  $M_1$  spočítáme jednoduše jako čtvrtinu z obsahu  $S_k$  kruhu  $k$  o poloměru dva se středem v počátku soustavy souřadnic,

$$S_1 = \frac{1}{4} S_k = \frac{4\pi}{4} = \pi.$$

Pro výpočet obsahu množiny  $M_2$  využijeme transformace do polárních souřadnic podobně jako v předchozím cvičení 1.8,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4x, & x^2 + y^2 &= 4, \\ \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi &= 4\rho \cos \varphi, & \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi &= 4, \\ \rho(\rho - 4 \cos \varphi) &= 0, & \rho^2 &= 4, \\ \rho &= 0, \rho = 4 \cos \varphi. & \rho &= 2. \end{aligned}$$

Pro určení rozsahu hodnot proměnné  $\varphi$  je třeba vypočítat průsečík kružnic,

$$\begin{aligned} 4 \cos \varphi &= 2, \\ \cos \varphi &= \frac{1}{2}, \quad \rho = 2. \end{aligned}$$

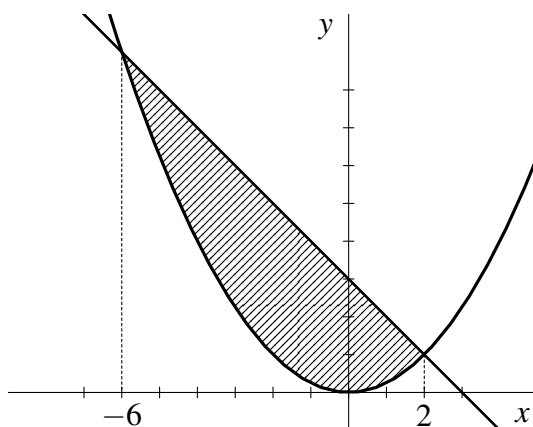
Protože  $\rho$  je vždy kladné, tak  $\cos \varphi > 0$ . Z toho plyne, že  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Druhou krajní hodnotu dostaneme podobně, z obr. 4.9. Lze pozorovat, že krajní hodnotou je osa  $y$ , tedy  $x = 0$ . Provedeme transformaci do polárních souřadnic,  $\cos \varphi = 0$  nastává v prvním kvadrantu pouze pro  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Získáváme  $M_2^* = \{[\rho, \varphi] \in \mathbb{R}^2 : \rho \in \langle 4 \cos \varphi, 2 \rangle, \varphi \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle\}$ . Obsah množiny  $M_2$  je

$$\begin{aligned} S_2 &= \iint_{M_2} dx dy = \iint_{M_2^*} d\varphi d\rho = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{4 \cos \varphi}^2 \rho d\rho \right) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_{4 \cos \varphi}^2 d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - 8 \cos^2 \varphi) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - 4(1 + \cos 2\varphi)) d\varphi = \left[ 2\varphi - 4\varphi - 4 \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}, \\ S &= S_1 + S_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Cvičení 2.1:**

Vypočítejte hmotnost množiny  $M$  ohraničené křivkami  $4y = x^2$ ,  $x + y = 3$  s plošnou hustotou  $\rho(x, y) = 1$  v každém bodě plochy.



Obrázek 4.10: Ilustrace množiny  $M$  ze cvičení 2.1

V prvním kroku je zapotřebí zjistit souřadnice průsečíků křivek,

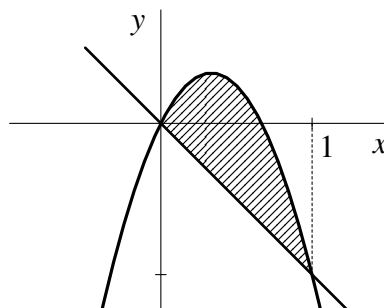
$$\begin{aligned} x^2 &= 4(3 - x), \\ x^2 + 4x - 12 &= 0, \\ x_1 &= 2, \quad x_2 = -6. \end{aligned}$$

A následně lze vypočítat hmotnost množiny  $M$ , konstantní plošnou hustotu označme konstantou  $k$ ,

$$\begin{aligned} m &= \iint_M \rho(x, y) dx dy = \int_{-6}^2 \left[ \int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} k dy \right] dx = k \int_{-6}^2 \left( 3 - x - \frac{x^2}{4} \right) dx = k \left[ 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_{-6}^2 \\ &= \frac{64}{3} k. \end{aligned}$$

**Cvičení 2.2:**

Vypočtěte hmotnost množiny  $M$  ohraničené křivkami  $y = 2x - 3x^2$ ,  $y = -x$  a s plošnou hustotou  $\rho(x, y) = x$ .



Obrázek 4.11: Ilustrace množiny  $M$  ze cvičení 2.2

Souřadnice průsečíků křivek jsou,

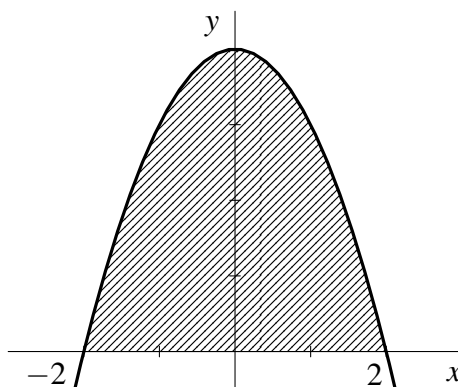
$$\begin{aligned} -x &= 2x - 3x^2, \\ 0 &= 3x^2 - 3x, \\ 0 &= 3x(x - 1), \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 1. \end{aligned}$$

Se získanými souřadnicemi průsečíků lze vypočítat hmotnost množiny  $M$ ,

$$\begin{aligned} m &= \iint_M \rho(x, y) \, dx dy = \int_0^1 \left[ \int_{-x}^{2x-3x^2} x \, dy \right] dx = \int_0^1 [xy]_{-x}^{2x-3x^2} dx \\ &= \int_0^1 (2x^2 - 3x^3 + x^2) dx = \left[ \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Cvičení 2.3:**

Vypočtěte hmotnost množiny  $M$  ohraničené křivkami  $y = 4 - x^2$  a  $y = 0$  s plošnou hustotou  $\rho(x, y) = |x|$ .



Obrázek 4.12: Ilustrace množiny  $M$  ze cvičení 2.3

Vzhledem k umístění množiny v kartézské soustavě souřadnic a zvyšující se hustotou se vzdáleností od osy  $y$  je možnost desku osou  $y$  rozdělit na dvě shodné části o stejné hmotnosti. Stačí tedy vypočítat pouze hmotnost poloviny desky v prvním kvadrantu a následně vynásobit dvěma,

$$\begin{aligned} m_{\frac{1}{2}} &= \iint_M \rho(x, y) \, dx dy = \int_0^2 \left[ \int_0^{4-x^2} |x| \, dy \right] dx = \int_0^2 (4x - x^3) \, dx \\ &= \left[ \frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 8 - 4 = 4, \\ m &= 2m_{\frac{1}{2}} = 8. \end{aligned}$$

### Cvičení 3.1:

Vypočítejte těžiště množiny  $M$  ohraničené křivkami  $4y = x^2$ ,  $x + y = 3$  s konstantní plošnou hustotou v každém bodě plochy.

Z řešení cvičení 2.1 je již známa hmotnost  $m = \frac{64}{3}k$ , kde  $k$  značí konstantní plošnou hustotu. S využitím hmotnosti lze vypočítat souřadnice těžiště množiny  $M$ ,

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{S_y(M)}{m} = \frac{1}{m} \iint_M x \rho(x, y) \, dx dy = \frac{3}{64k} \int_{-6}^2 \left[ \int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} x \, dy \right] dx \\ &= \frac{3}{64k} \int_{-6}^2 \left( 3x - x^2 - \frac{x^3}{4} \right) dx = \frac{3}{64k} \left[ 3 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16} \right]_{-6}^2 = -\frac{2}{k}, \\ y_T &= \frac{S_x(M)}{m} = \frac{1}{m} \iint_M y \rho(x, y) \, dx dy = \frac{3}{64k} \int_{-6}^2 \left[ \int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} y \, dy \right] dx = \frac{3}{64k} \int_{-6}^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} dx \\ &= \frac{3}{64k} \int_{-6}^2 \left( \frac{(3-x)^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{4} \right)^2 \right) dx = \frac{3}{64k} \int_{-6}^2 \left( \frac{9-6x+x^2}{2} - \frac{x^4}{32} \right) dx \\ &= \frac{3}{64k} \int_{-6}^2 \left( -\frac{x^4}{32} + \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2} \right) dx = \frac{3}{64k} \left[ -\frac{x^5}{160} + \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + \frac{9}{2}x \right]_{-6}^2 \\ &= \frac{3}{64k} \left( -\frac{32}{160} + \frac{8}{6} - 6 + 9 - \frac{7776}{160} + 36 + 54 + 27 \right) = \frac{17}{5k}. \end{aligned}$$

Těžiště  $T$  množiny  $M$  má souřadnice  $\left[ -\frac{2}{k}; \frac{17}{5} \right]$ .

### Cvičení 3.2:

Vypočítejte těžiště množiny  $M$  ohraničené křivkami  $y = 2x - 3x^2$ ,  $y = -x$  a s plošnou hustotou  $\rho(x, y) = x$ .



Z řešení cvičení 2.2 je již známa hmotnost  $m = \frac{1}{4}$ . Souřadnice těžiště množiny  $M$  jsou:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{S_y(M)}{m} = \frac{1}{m} \iint_M x\rho(x,y) \, dx dy = 4 \int_0^1 \left[ \int_{-x}^{2x-3x^2} x^2 \, dy \right] dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ x^2 y \right]_{-x}^{2x-3x^2} dx = 4 \int_0^1 (2x^3 - 3x^4 + x^3) dx = 12 \int_0^1 (x^3 - x^4) dx \\ &= 12 \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 12 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5}, \\ y_T &= \frac{S_x(M)}{m} = \frac{1}{m} \iint_M y\rho(x,y) \, dx dy = 4 \int_0^1 \left[ \int_{-x}^{2x-3x^2} xy \, dy \right] dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \right]_{-x}^{2x-3x^2} dx = 4 \int_0^1 \left( x \frac{1}{2} (2x-3x^2)^2 - x \frac{1}{2} x^2 \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \left( \frac{1}{2} (4x^3 - 12x^4 + 9x^5) - \frac{1}{2} x^3 \right) dx = 4 \int_0^1 \left( 2x^3 - 6x^4 + \frac{9}{2} x^5 - \frac{1}{2} x^3 \right) dx \\ &= 4 \left[ \frac{1}{2} x^4 - 6 \frac{x^5}{5} + \frac{9}{2} \frac{x^6}{6} - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 4 \left( \frac{1}{2} - \frac{6}{5} + \frac{9}{12} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Těžištěm množiny  $M$  je bod  $T = \left[ \frac{3}{5}; \frac{3}{10} \right]$ .

### Cvičení 3.3:

Vypočtete těžiště množiny  $M$  ohraničené křivkami  $y = 4 - x^2$  a  $y = 0$  s plošnou hustotou  $\rho(x,y) = |x|$ .

Z řešení cvičení 2.3 je již známa hmotnost  $m = 8$ . Souřadnice těžiště množiny  $M$ :

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{S_y(M)}{m} = \frac{1}{m} \iint_M x\rho(x,y) \, dx dy = \frac{1}{8} \int_{-2}^2 \left[ \int_0^{4-x^2} |x| x \, dy \right] dx \\ &= \frac{1}{8} \int_{-2}^2 \left[ |x| xy \right]_0^{4-x^2} dx = \frac{1}{8} \int_{-2}^2 |x| x (4 - x^2) dx = \frac{1}{8} \int_{-2}^2 (|x| 4x - |x| x^3) dx \\ &= \frac{1}{8} \left[ 4|x| \frac{x^2}{2} - |x| \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^2 = \frac{1}{8} (16 - 8 - 16 + 8) = 0, \\ y_T &= \frac{S_x(M)}{m} = \frac{1}{m} \iint_M y\rho(x,y) \, dx dy = \frac{1}{8} \int_{-2}^2 \left[ \int_0^{4-x^2} y|x| \, dy \right] dx = \frac{1}{8} \int_{-2}^2 \left[ |x| \frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x^2} dx \\ &= \frac{1}{8} \int_{-2}^2 |x| \frac{(4-x^2)^2}{2} dx = \frac{1}{8} \int_{-2}^2 |x| \frac{1}{2} (16 - 8x^2 + x^4) dx \\ &= \frac{1}{16} \int_{-2}^2 (16|x| - 8x^2|x| + x^4|x|) dx = \frac{1}{16} \left[ 16 \frac{x|x|}{2} - 8 \frac{x^3}{3} |x| + \frac{x^5}{5} |x| \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{16} \left( 32 - \frac{128}{3} + \frac{64}{5} + 32 - \frac{128}{3} + \frac{64}{5} \right) = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Těžištěm množiny  $M$  je bod  $T = \left[ 0; \frac{4}{15} \right]$ .

**Cvičení 4.1:**

Vypočtete moment setrvačnosti množiny  $M$  ohraničené křivkami  $4y = x^2$ ,  $x + y = 3$  vzhledem k ose  $y$ , plošná hustota je konstantní.

Ilustraci množiny  $M$  obsahuje obr. 4.10 na str. 61. Konstantní plošnou hustotu jsme již v přechozích cvičeních označili konstantou  $k$ . Následně se spočítá moment setrvačnosti,

$$\begin{aligned} I_y(M) &= \iint x^2 \rho(x, y) \, dx dy = \int_{-6}^2 \left[ \int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} x^2 k \, dy \right] dx = k \int_{-6}^2 \left[ x^2 y \right]_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} dx \\ &= k \int_{-6}^2 \left( 3x^2 - x^3 - \frac{x^4}{4} \right) dx = k \left[ x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{20} \right]_{-6}^2 = \frac{768}{5} k. \end{aligned}$$

**Cvičení 4.2:**

Vypočtete moment setrvačnosti množiny  $M$  ohraničené křivkami  $y = 2x - 3x^2$ ,  $y = -x$  vzhledem k ose  $x$ , má-li množina  $M$  plošnou hustotu  $\rho(x, y) = x$ .

Ilustraci množiny  $M$  obsahuje obr. 4.11 na str. 62. Moment setrvačnosti množiny  $M$  vzhledem k ose  $x$  je

$$\begin{aligned} I_x(M) &= \iint_M y^2 \rho(x, y) \, dx dy = \int_0^1 \left[ \int_{-x}^{2x-3x^2} y^2 x \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \frac{y^3}{3} x \right]_{-x}^{2x-3x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{(2x-3x^2)^3}{3} x + \frac{x^4}{3} \right) dx = \int_0^1 \left( -9x^7 + 18x^6 - 12x^5 + 3x^4 \right) dx \\ &= \left[ -\frac{9}{8} x^8 + \frac{18}{7} x^7 - \frac{12}{6} x^6 + \frac{3}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{13}{280}. \end{aligned}$$

**Cvičení 4.3:**

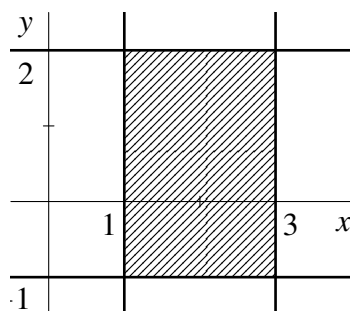
Vypočtete moment setrvačnosti množiny  $M$  ohraničené křivkami  $y = 4 - x^2$  a  $y = 0$  vzhledem k ose  $y$ , má-li množina  $M$  plošnou hustotou  $\rho(x, y) = |x|$ .

Ilustraci množiny  $M$  obsahuje obr. 4.12 na str. 62. Moment setrvačnosti množiny  $M$  vzhledem k ose  $y$  je roven,

$$\begin{aligned} I_y(M) &= \iint_M x^2 \rho(x, y) \, dx dy = \int_0^2 \left[ \int_0^{4-x^2} |x| x^2 \, dy \right] dx = \int_0^2 \left[ |x| x^2 y \right]_0^{4-x^2} dx \\ &= \int_0^2 \left( 4|x| x^2 - |x| x^4 \right) dx = \left[ 4|x| \frac{x^3}{3} - |x| \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{15}. \end{aligned}$$

**Cvičení 5.1:**

Vypočtete elektrický náboj množiny  $M$ , kde  $1 \leq x \leq 3$ ,  $-1 \leq y \leq 2$  a hustota elektrického náboje je  $\omega(x, y) = x^2 + y^2$ .

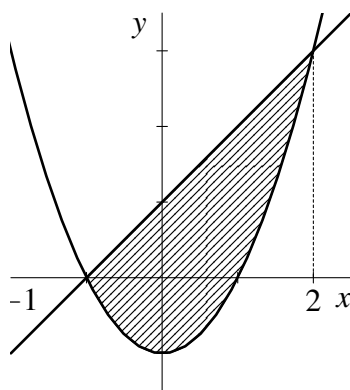
Obrázek 4.13: Ilustrace množiny  $M$  ze cvičení 5.1

Hustota elektrického náboje je

$$\begin{aligned} Q(M) &= \iint_M \omega(x, y) \, dx dy = \int_1^3 \left[ \int_{-1}^2 (x^2 + y^2) \, dy \right] dx = \int_1^3 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 dx \\ &= \int_1^3 \left( 2x^2 + \frac{8}{3} + x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \int_1^3 (3x^2 + 3) \, dx = \left[ x^3 + 3x \right]_1^3 = 32. \end{aligned}$$

Cvičení 5.2:

Vypočtěte elektrický náboj množiny  $M$  ohraničené křivkami  $x^2 - y - 1 = 0$ ,  $x - y + 1 = 0$  a hustota elektrického náboje je  $\omega(x, y) = |x - 1|$ .

Obrázek 4.14: Ilustrace množiny  $M$  ze cvičení 5.2

Nejprve je nutné zjistit souřadnice průsečíků křivek,

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 - 1 &= 0, \\ x^2 - x - 2 &= 0, \\ x_1 &= 2, \quad x_2 = -1. \end{aligned}$$

Vzhledem k hustotě elektrického náboje, která je v absolutní hodnotě, se pro výpočet elektrického náboje rozdělí množina  $M$  na dvě podmnožiny, dle nulového bodu:

$$|x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & x < 1 \\ x - 1 & x \geq 1, \end{cases}$$

Podle nulového bodu  $x = 1$  se množina  $M$  dělí na dvě podmnožiny

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x \leq 1, x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x \leq 2, x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\},$$

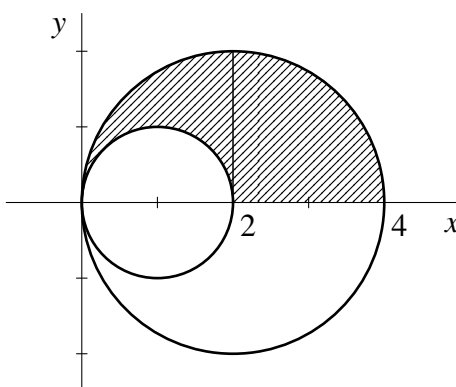
$M = M_1 \cup M_2$ ,  $m(M_1 \cap M_2) = 0$ . Elektrický náboj množiny  $M$  je

$$\begin{aligned} Q(M) &= \iint_M \omega(x, y) \, dx dy = \iint_{M_1} \omega(x, y) \, dx dy + \iint_{M_2} \omega(x, y) \, dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[ \int_{x^2-1}^{x+1} (-x+1) \, dy \right] dx + \int_1^2 \left[ \int_{x^2-1}^{x+1} (x-1) \, dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[ -xy + y \right]_{x^2-1}^{x+1} dx + \int_1^2 \left[ xy - y \right]_{x^2-1}^{x+1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(M) &= \int_{-1}^1 \left( -x(x+1) + x + 1 - \left( -x(x^2-1) + x^2 - 1 \right) \right) dx \\ &\quad + \int_1^2 \left( x(x+1) - x - 1 - \left( x(x^2-1) - x^2 + 1 \right) \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( x^3 - 2x^2 - x + 2 \right) dx + \int_1^2 \left( -x^3 + 2x^2 + x - 2 \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 + \left[ -\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}. \end{aligned}$$

### Cvičení 5.3:

Vypočtete elektrický náboj části množiny  $M$  nacházející se v prvním kvadrantu, kde  $x^2 + y^2 - 2x \geq 0$  a  $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$  a hustota elektrického náboje je  $\omega(x, y) = y$ .



Obrázek 4.15: Ilustrace množiny  $M$  ze cvičení 5.3

Vhodné je využít transformace do polárních souřadnic a získat tak

$$\begin{aligned} \rho^2 - 4\rho \cos \varphi &\leq 0, \\ \rho(\rho - 4 \cos \varphi) &\leq 0. \end{aligned}$$

Protože  $\rho$  je vždy kladné, nastává jediný případ, kde  $\rho \leq 4 \cos \varphi$ . Podobně transformuje do polárních souřadnic druhou kružnici:

$$\begin{aligned}\rho^2 - 2\rho \cos \varphi &\geq 0 \\ \rho(\rho - 2 \cos \varphi) &\geq 0\end{aligned}$$

Protože  $\rho$  je vždy kladné, nastává jediný případ, kde  $\rho \geq 2 \cos \varphi$ . Transformované polární souřadnice nabývají hodnot

$$2 \cos \varphi \leq \rho \leq 4 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Odsud už elektrický náboj,

$$\begin{aligned}Q(M) &= \iint_M \omega(x, y) \, dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \right] d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right]_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{64}{3} \cos^3 \varphi \sin \varphi - \frac{8}{3} \cos^3 \varphi \sin \varphi \right) d\varphi \\ &= \frac{56}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \left. \begin{array}{l} \cos \varphi = t \\ -\sin \varphi \, d\varphi = dt \\ 0 \rightarrow 1, \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \end{array} \right| \\ &= -\frac{56}{3} \int_1^0 t^3 \, dt = -\frac{56}{3} \left[ \frac{t^4}{4} \right]_1^0 = \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

**Cvičení 6.1:**

Vypočítejte jakou výslednou silou  $\vec{F}$  působí voda na stěnu říční přehrady tvaru lichoběžníka, je-li horní základna  $c = 15 \, m$ , dolní základna  $d = 10 \, m$  a výška  $h = 5 \, m$ .

Nejprve se určí množina  $M$ , přes kterou se bude integrovat a hustota vody  $\rho$

$$\begin{aligned}M: \quad 0 &\leq z \leq 5, \\ -\frac{z}{2} - 5 &\leq x \leq \frac{z}{2} + 5, \quad y = 0 = f(x, z), \\ \rho(x, z) &= 1000 \, kg/m^3.\end{aligned}$$

Následně se vypočítají derivace a normála k ploše, podstatné je, že se předpokládá, že je kapalina v poloprostoru  $y \geq 0$ , tlaková síla kapaliny pak působí proti kladnému směru, tedy

$$f'_x(x, z) = 0, \quad f'_z(x, z) = 0, \quad \vec{n}(S) = -(0, 1, 0).$$

Síla kapaliny působící na stěnu říční přehrady je

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= g \iint_M \rho(x, f(x, z), z)(h - z) \vec{n}(S) \, dx dz = -1000g \int_0^5 \left( \int_{-\frac{z}{2}-5}^{\frac{z}{2}+5} (5 - z)(0, 1, 0) \, dx \right) dz \\
 &= -1000g \left( 0, \int_0^5 \left[ 5x - zx \right]_{-\frac{z}{2}-5}^{\frac{z}{2}+5} dz, 0 \right) \\
 &= \left( 0, -1000g \int_0^5 \left( \frac{5z}{2} + 25 - \frac{z^2}{2} - 5z - \left( -\frac{5z}{2} - 25 + \frac{z^2}{2} + 5z \right) \right) dz, 0 \right) \\
 &= \left( 0, -1000g \int_0^5 (-5z + 50 - z^2) dz, 0 \right) = \left( 0, -1000g \left[ -\frac{z^3}{3} - \frac{5}{2}z^2 + 50z \right]_0^5, 0 \right) \\
 &= \left( 0, -1000g \frac{875}{6}, 0 \right) = (0, -1430625, 0).
 \end{aligned}$$

Výsledná síla tedy působí proti kladnému směru osy  $y$  a je přibližně velikosti  $1,43 \cdot 10^6 N$ .

### Cvičení 6.2:

Určete tlakovou sílu kapaliny o hustotě  $\rho(x, y, z) = \delta > 0$ , kde  $\delta$  je konstanta, na boční stěnu  $x \geq 0$  válcové nádoby  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ , kde  $a > 0$  je konstanta a výška hladiny vody je  $h > 0$ .

Nejprve se určí množina  $M$ , která vznikne promítnutím válce  $V$  do roviny  $yz$ , kde  $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$ :

$$\begin{aligned}
 M: \quad & -a \leq y \leq a, \\
 & 0 \leq z \leq h.
 \end{aligned}$$

Pro plochu  $S$  tvořící boční stěnu válce platí  $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{a^2 - y^2}, [y, z] \in M\}$ . Dále máme

$$\begin{aligned}
 x &= f(y, z) = \sqrt{a^2 - y^2}, \\
 \rho &= \delta.
 \end{aligned}$$

Následně se vypočítají derivace a normála k ploše, podstatné je, že se předpokládá, že je kapalina uvnitř válce  $S$ , tlaková síla kapaliny pak bude

$$f'_y(y, z) = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad f'_z(y, z) = 0, \quad \vec{n}(S) = \left( 1, -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, 0 \right),$$

Síla kapaliny působící na boční stěnu válce je

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= g \iint_M \rho(f(y, z), y, z)(h - z) \vec{n}(S) \, dy dz = \delta g \int_{-a}^a \left( \int_0^h (h - z) \left( 1, -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, 0 \right) dz \right) dy \\
 &= g\delta \left( \int_{-a}^a \left[ \int_0^h (h - z) dz \right] dy, \int_{-a}^a -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy \cdot \int_0^h (h - z) dz, 0 \right) = g\delta (ah^2, 0, 0) \\
 &= (ga\delta h^2, 0, 0).
 \end{aligned}$$

**Cvičení 6.3:**

Určete tlakovou sílu kapaliny působící na horní a dolní polokouli koule o poloměru  $a > 0$ , která je ponořena do kapaliny konstantní hustoty  $\delta > 0$  v hloubce  $h \geq a$  (hloubka je měřena od hladiny ke středu koule).

Střed koule umístíme do počátku soustavy souřadnic a označíme jako  $M$  množinu, která vznikne promítnutím koule do roviny  $xy$ . Horní a dolní polokoule tak lze vyjádřit vztahy jako:

$$S_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, [x, y] \in M\},$$

$$S_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, [x, y] \in M\},$$

přičemž množina  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ .

Nejprve zjistíme jaké souřadnice má normálový vektor k horní polovině koule:

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

$$f'_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, f'_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\rho(x, y) = \delta,$$

$$\vec{n}(S_1) = -\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1\right).$$

Tlaková síla působící na horní polovinu koule je

$$\vec{F} = g \iint_M \rho(f(x, y), x, y) (h - f(x, y)) \vec{n}(S_1) \, dx dy$$

$$= g \iint_M \delta (h - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \left( \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, -1 \right) dx dy$$

Transformujeme množinu  $M$  do polárních souřadnic a získáme  $M^*$ ,

$$M^* = \{[\rho, \varphi] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

$$\vec{F} = g\delta \iint_{M^*} (h - \sqrt{a^2 - \rho^2}) \left( \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}, \frac{\rho \sin \varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}, -1 \right) \rho \, d\rho d\varphi$$

$$= g\delta \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^a (h - \sqrt{a^2 - \rho^2}) \left( \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}, \frac{\rho \sin \varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}, -1 \right) \rho \, d\rho \right] d\varphi$$

$$= g\delta \left( \int_0^a (h - \sqrt{a^2 - \rho^2}) \frac{\rho}{a^2 - \rho^2} \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi, \right.$$

$$\left. \int_0^a (h - \sqrt{a^2 - \rho^2}) \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \, d\rho \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi, - \int_0^a (h - \sqrt{a^2 - \rho^2}) \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \right)$$

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -g\delta \left( 0, 0, 2\pi \int_0^a \left( h - \sqrt{a^2 - \rho^2} \right) \rho \, d\rho \right) = \left| \begin{array}{l} a^2 - \rho^2 = t \\ -2\rho \, d\rho = dt \\ 0 \rightarrow a^2, \quad a \rightarrow 0 \end{array} \right| \\
&= -g\delta \left( 0, 0, -\pi \int_{a^2}^0 (h - \sqrt{t}) \, dt \right) = -g\delta \left( 0, 0, -\pi \left[ ht - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_{a^2}^0 \right) \\
&= \left( 0, 0, -\pi a^2 \delta h g + \frac{2}{3} \pi a^3 \delta g \right).
\end{aligned}$$

Tlak působí proti směru kladné poloosy  $z$ . Podobně se vypočítá tlaková síla působící na dolní polokouli, vyjde  $\vec{F} = (0, 0, \pi a^2 \delta g (h + \frac{2}{3}a))$ .

#### Cvičení 6.4:

Je dán válec s podstavou o poloměru  $a > 0$  a výškou  $b > 0$ , celý ponořen do kapaliny hustoty  $\delta > 0$  tak, že střed válce se nachází v hloubce  $h$  pod hladinou kapaliny a jeho osa svírá úhel  $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  s normálou k hladině povrchu. Určete tlakovou sílu kapaliny na horní a dolní podstavu válce.

Střed válce umístíme do počátku soustavy souřadnic a vyjádříme směr osy  $o$  vzhledem k obr. 4.16,  $o = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ .

Celé cvičení bude nejprve vyřešeno pro  $\alpha \neq 0$ . Nejdříve budou vypočteny rovnice rovin podstav válce  $\tau_1, \tau_2$ , rovnice obecné roviny je  $ax + by + cz + d = 0$ , navíc víme, že rovina podstavu je kolmá k ose  $o$ , tedy její rovnice je  $x \sin \alpha + z \cos \alpha + d = 0$ . Dosazením středu  $S_1 = \left[ \frac{b}{2} \sin \alpha, 0, \frac{b}{2} \cos \alpha \right]$  do rovnice roviny získáme:

$$\frac{b}{2} \sin^2 \alpha + \frac{b}{2} \cos^2 \alpha + d = 0.$$

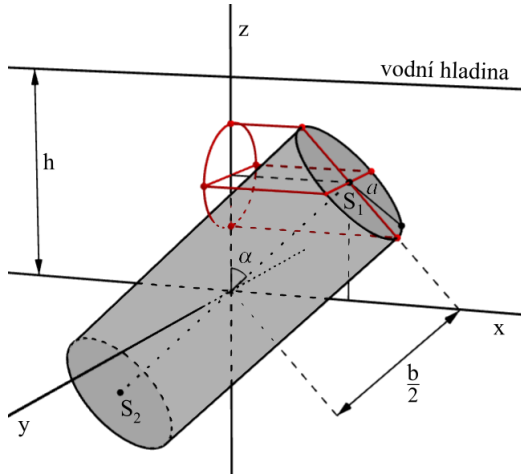
Rovnice rovin podstav válce jsou:

$$\begin{aligned}
\tau_1: x \sin \alpha + z \cos \alpha - \frac{b}{2} &= 0, \\
\tau_2: x \sin \alpha + z \cos \alpha + \frac{b}{2} &= 0.
\end{aligned}$$

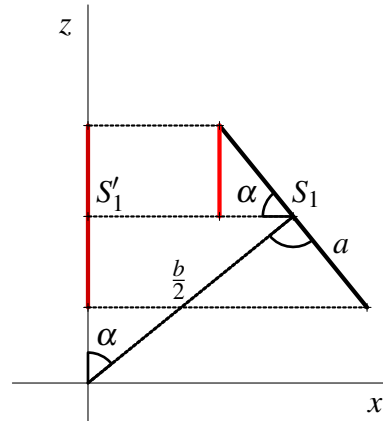
Promítněme horní podstavu do roviny  $yz$ , získáme množinu, elipsu, jejíž nárys je na obr. 4.17 a  $M_1 = \left\{ [y, z] \in \mathbb{R}^2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{(z - \frac{b}{2} \cos \alpha)^2}{a^2 \sin^2 \alpha} \leq 1 \right\}$ . Uvědomme si, jak lze získat  $x = f(y, z)$ , využijme otočení o úhel  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  kolem osy  $y$  a otočme rovinu  $x = \frac{b}{2}$ ,

$$\begin{aligned}
x' &= x \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + z \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right), \\
x' &= x \sin \alpha + z \cos \alpha, \\
x &= \frac{x' - z \cos \alpha}{\sin \alpha}.
\end{aligned}$$





Obrázek 4.16: Ilustrace tělesa ze cvičení 6.4.

Obrázek 4.17: Narys horní podstavy a jejího průmětu do roviny  $xz$ 

Vzdálenost bodu  $S_1$  od počátku je polovina výšky válce,  $x' = \frac{b}{2}$ .

$$x = \frac{\frac{b}{2} - z \cos \alpha}{\sin \alpha} = f(y, z)$$

$$f'_y(y, z) = 0, \quad f'_z(y, z) = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \vec{n} = -\left(1, 0, \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right).$$

Tlaková síla působící na horní podstavu válce je

$$\vec{F} = g \iint_{M_1} \delta(h-z) \vec{n} \, dydz = -g\delta \iint_{M_1} \left(1, 0, \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) (h-z) \, dydz$$

$$= -g\delta \left(1, 0, \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) \iint_{M_1} (h-z) \, dydz.$$

Množinu  $M_1$ , kterou je elipsa zjednodušíme transformací souřadnic na kružnici:

$$y = ay',$$

$$z = \frac{b}{2} \cos \alpha + az' \sin \alpha,$$

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \sin \alpha \end{vmatrix} = a^2 \sin \alpha.$$

Novou množinu, kterou je kruh, označíme  $M_1^*$ ,

$$M_1^* = \{[y', z'] \in \mathbb{R}^2 : y'^2 + z'^2 \leq 1\}.$$

Dostáváme

$$\vec{F} = -g\delta \left(1, 0, \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) \iint_{M_1^*} \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha - az' \sin \alpha\right) a^2 \sin \alpha \, dy' dz'.$$

Pro jednodušší výpočet provedeme transformaci do polárních souřadnic,

$$\begin{aligned}y' &= \rho \cos \varphi, \\z' &= \rho \sin \varphi, \\J &= \rho.\end{aligned}$$

Množina transformovaných polárních souřadnic  $M_1^{**}$  je využita k výpočtu tlakové síly působící na horní podstavu,  $M_1^{**} = \{[\rho, \varphi] \in \mathbb{R}^2: 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -g\delta a^2(\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \iint_{M_1^{**}} \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha - a\rho \sin \alpha \sin \varphi\right) \rho \, d\rho \, d\varphi \\&= -g\delta a^2(\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha - a\rho \sin \alpha \sin \varphi\right) \rho \, d\rho\right] d\varphi \\&= -g\delta a^2(\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \left[\pi \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha\right) - a \sin \alpha \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho\right] \\&= -g\delta a^2(\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \pi \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \\&= \left(-g\delta a^2 \pi \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \sin \alpha, 0, -g\delta a^2 \pi \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \cos \alpha\right).\end{aligned}$$

Tlaková síla působící na horní podstavu válce s podstavou o poloměru  $a > 0$  a výškou  $b > 0$  ponořeného do kapaliny hustoty  $\delta > 0$  tak, že střed válce se nachází v hloubce  $h$  pod hladinou kapaliny a jeho osa svírá úhel  $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  s normálou k hladině povrchu je obecně

$$\left(-g\delta a^2 \pi \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \sin \alpha, 0, -g\delta a^2 \pi \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \cos \alpha\right). \quad (4.1)$$

Obdobně se zjistí i tlaková síla působící na dolní podstavu válce, která je

$$\vec{F} = \left(g\delta a^2 \pi \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \sin \alpha, 0, g\delta a^2 \pi \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \cos \alpha\right). \quad (4.2)$$

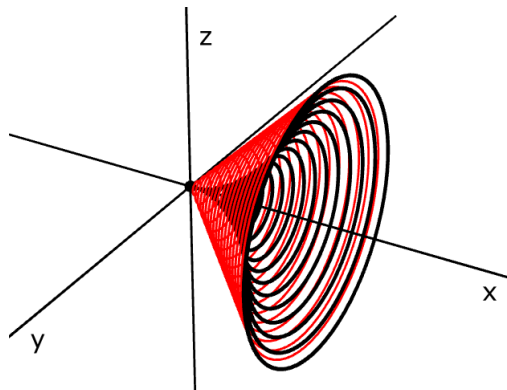
Pro  $\alpha = 0$  je podstava válce v rovině rovnoběžné s rovinou  $xy$ , její střed  $S_1$  je ve výšce  $z = \frac{b}{2}$  a  $(x, y) \in \overline{M}_1$ , kde  $\overline{M}_1$  je kolmý průmět  $S_1$  do roviny  $xy$ , pak průmět podstavy do roviny  $xy$  je množina  $\overline{M}_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq a^2\}$ . Určíme normálový vektor  $\vec{n} = -(0, 0, 1)$  a tlakovou sílu

$$\vec{F} = -g\delta(0, 0, 1) \iint_{\overline{M}_1} \left(h - \frac{b}{2}\right) dx dy = \left(0, 0, -g\delta \pi a^2 \left(h - \frac{b}{2}\right)\right).$$

Což je v souladu s dříve uvedeným výsledkem (4.2). Vztahy (4.2), (4.2) tedy platí pro všechna  $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ .

**Cvičení 7.1:**

Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami  $y = x^2$  a  $y = x$  kolem osy  $x$ .



Obrázek 4.18: Ilustrace množiny ze cvičení 7.1

V zadání je uvedeno, že těleso vznikne rotací kolem osy  $x$ , proto lze využít věty 14 uvedené na straně 35, která popisuje výpočet objemu tělesa vzniklého rotací kolem osy  $x$ . Výpočet pak lze rozdělit do dvou kroků. Nejprve spočítat objem kužele (tělesa vzniklého rotací přímky  $y = x$  kolem osy  $x$  a po té odečíst objem duté části tělesa, která vznikne rotací podgrafu funkce  $y = x^2$  pro  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Nejprve je tedy nutné zjistit, kde se dané křivky protínají a jaký obrazec bude rotovat kolem osy  $x$ .

$$\begin{aligned}x^2 &= x \\x(x-1) &= 0\end{aligned}$$

Útvar rotující kolem osy  $x$  nabývá na ose  $x$  hodnot od nuly do jedné. Rotací paraboly vzniká parabolická plocha, z níž využíváme pouze paraboloid, jehož objem označíme  $V_p$  a rotací přímky kuželová plocha, z níž využíváme pouze kužel  $V_k$ . Potom objem je roven

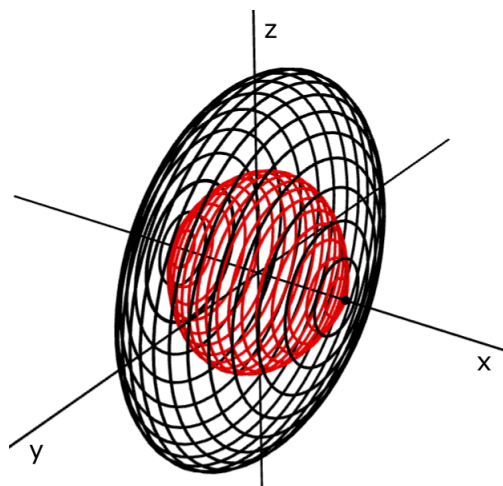
$$\begin{aligned}V_k &= \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \pi, \\V_p &= \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5} \pi, \\V &= V_k - V_p = \frac{2}{15} \pi.\end{aligned}$$

Nebo lze vypočítat objem pomocí jednoho integrálu,

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15} \pi.$$

**Cvičení 7.2:**

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami  $f: y = -x^2 + 1$  a  $g: y = -2x^2 + 2$  kolem osy  $x$ .



Obrázek 4.19: Ilustrace množiny ze cvičení 7.2

Z obr. 4.19 a ze zadání znovu pozorujeme, že těleso vznikne rotací kolem osy  $x$  a zároveň jsme schopni vypočítat průnik křivek  $f$  a  $g$ .

$$\begin{aligned} -x^2 + 1 &= -2x^2 + 2 \\ x^2 &= 1. \end{aligned}$$

Integrovat tedy budeme na intervalu od  $-1$  do  $1$ . Objem se vypočítá jako

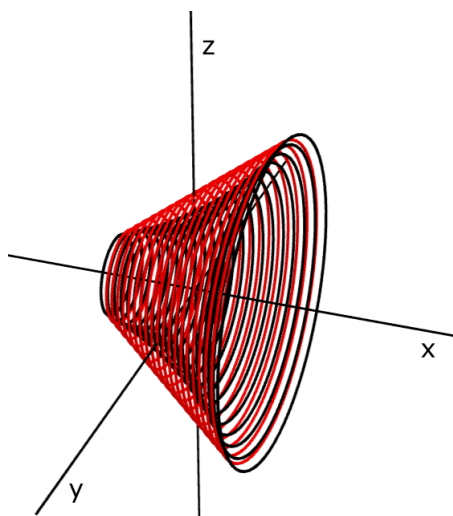
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \left( (-2x^2 + 2)^2 - (-x^2 + 1)^2 \right) dx = \pi \int_{-1}^1 (3x^4 - 6x^2 + 3) dx \\ &= \pi \left[ \frac{3}{5}x^5 - 2x^3 + 3x \right]_{-1}^1 = \frac{16}{5}\pi. \end{aligned}$$

**Cvičení 7.3:**

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru, ohraničeného dvěma křivkami  $y = 2^x$ ,  $3x - 4y + 5 = 0$ , kolem osy  $x$ .

Určíme průnik rostoucí a konvexní křivky  $y = 2^x$  a přímky  $3x - 4y + 5 = 0$ , výsledkem jsou dva body o  $x$ -ových souřadnicích  $x = -1$ ,  $x = 1$ . Objem tělesa je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \left[ \left( \frac{5}{4} + \frac{3}{4}x \right)^2 - (2^{2x}) \right] dx = \pi \int_{-1}^1 \left( \frac{25}{16} + \frac{15}{8}x + \frac{9}{16}x^2 - 2^{2x} \right) dx \\ &= \pi \left[ \frac{25}{16}x + \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}x^3 - \frac{2^{2x-1}}{\ln 2} \right]_{-1}^1 = \frac{\frac{1}{8}\pi(28 \ln 2 - 15)}{\ln 2}. \end{aligned}$$



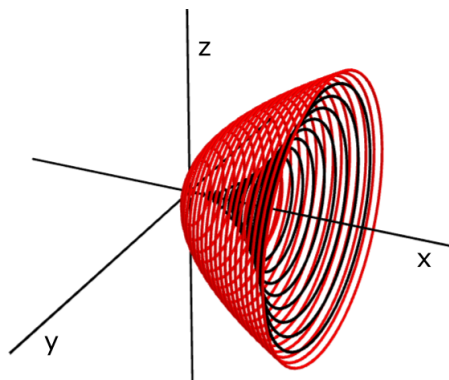
Obrázek 4.20: Ilustrace množiny ze cvičení 7.3

Cvičení 7.4:

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami  $y = x^2$ ,  $x = y^2$  kolem osy  $y$ .

Objem tělesa je

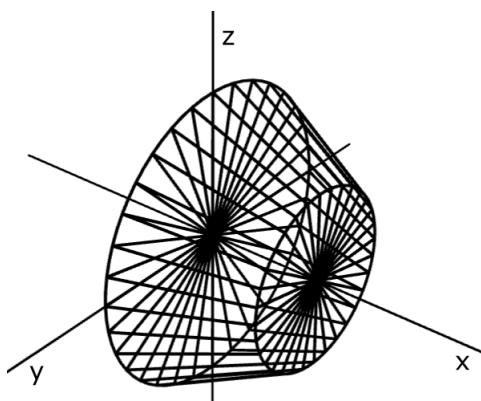
$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right] = \frac{3}{10} \pi.$$



Obrázek 4.21: Ilustrace množiny ze cvičení 7.4

Cvičení 7.5:

Vypočítejte objem komolého rotačního kužele s poloměry podstav  $r_1 = 3\text{cm}$ ,  $r_2 = 5\text{cm}$  a výškou  $v = 4\text{cm}$ .



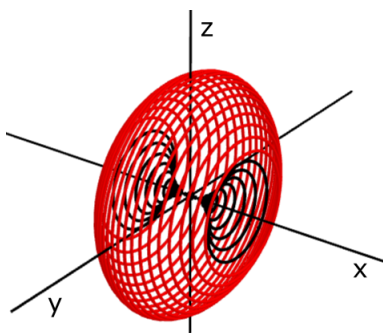
Obrázek 4.22: Ilustrace množiny ze cvičení 7.5

Záleží na vlastním rozhodnutí, jak kužel umístit a okolo které osy nechat přímku rotovat. Výpočet objemu se vztahuje k obr. 4.22,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left( \frac{-1}{2}x + 5 \right)^2 dx = \pi \int_0^4 \left( \frac{1}{4}x^2 - 5x + 25 \right) dx = \pi \left[ \frac{1}{12}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 25x \right]_0^4 \\ &= \pi \left( \frac{1}{3}16 - 40 + 100 \right) = \frac{196}{3} \pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Cvičení 7.6:

Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^2$  kolem osy  $x$ .



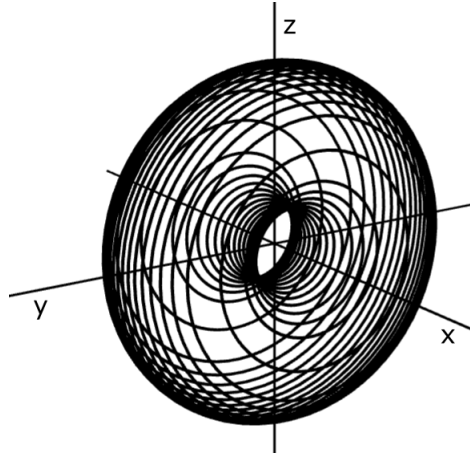
Obrázek 4.23: Ilustrace množiny ze cvičení 7.6

Objem tělesa je

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \left( (2 - x^2)^2 - x^4 \right) dx = \pi \int_{-1}^1 \left( 4 - 4x^2 + x^4 - x^4 \right) dx = \pi \left[ 4x - \frac{4}{3}x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \pi \left( 4 - \frac{4}{3} + 4 - \frac{4}{3} \right) = \frac{16}{3} \pi. \end{aligned}$$

**Cvičení 7.7:**

Vypočítejte objem rotačního anuloidu vytvořeného rotací kružnice  $x^2 + (y - 3)^2 = 4$  kolem osy  $x$ .

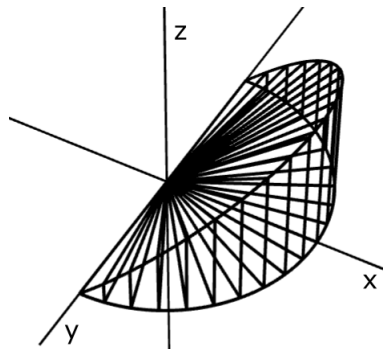


Obrázek 4.24: Ilustrace množiny ze cvičení 7.7

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 \left[ \left(3 + \sqrt{4 - x^2}\right)^2 - \left(3 - \sqrt{4 - x^2}\right)^2 \right] dx \\ &= \pi \int_{-2}^2 12\sqrt{4 - x^2} dx = \pi \left[ 24 \arcsin\left(\frac{1}{2}x\right) + 6x\sqrt{4 - x^2} \right]_{-2}^2 = 24\pi^2. \end{aligned}$$

**Cvičení 7.8:**

Vypočítejte objem tělesa  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, 0 \leq z \leq x\}$ .



Obrázek 4.25: Ilustrace množiny A ze cvičení 7.8

Vzhledem k zadání tělesa  $A$  je vhodné využít transformace do válcových souřadnic,

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi &\leq 4, & 0 \leq \rho \leq 2, \\ \rho \cos \varphi &= 0, & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ z &= \rho \cos \varphi, & 0 \leq z \leq \rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

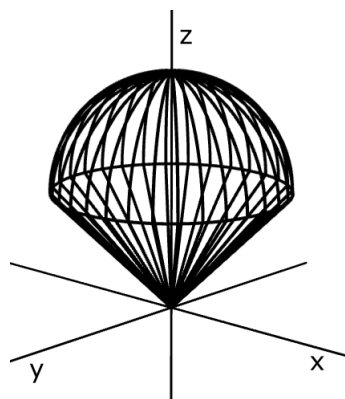
Získáváme  $A^* = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \rho \cos \varphi\}$  a objem množiny  $A$  je

$$\begin{aligned} V &= \iiint_A dx dy dz = \iiint_{A^*} \rho \, d\varphi d\rho dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^2 \left( \int_0^{\rho \cos \varphi} \rho \, dz \right) d\rho \right) d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^2 \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \right) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\rho^3}{3} \cos \varphi \right]_0^2 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \cos \varphi \, d\varphi = \left[ \frac{8}{3} \sin \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

### Cvičení 7.9:

Vypočtete objem tělesa určeného množinou

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 4z \leq 0, x^2 + y^2 - z^2 \leq 0\}.$$



Obrázek 4.26: Ilustrace množiny ze cvičení 7.9

Využijeme transformaci do sférických souřadnic,

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta - 4\rho \cos \vartheta &\leq 0, \\ \rho(\rho - 4 \cos \vartheta) &\leq 0, & 0 \leq \rho \leq 4 \cos \vartheta, \\ \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta - \rho^2 \cos^2 \vartheta &\leq 0, \\ \rho^2 \cos 2\vartheta &\leq 0, & 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}, \\ & & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

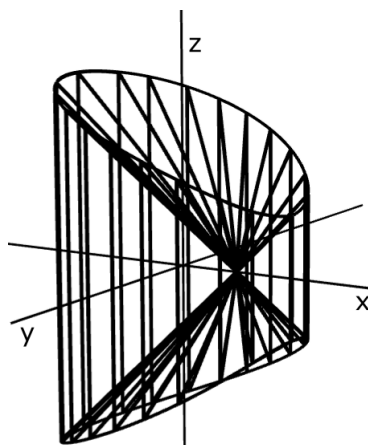


Po té lze vypočítat objem

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_A dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{4\cos\vartheta} \rho^2 \sin\vartheta d\rho \right) d\varphi \right) d\vartheta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \frac{64}{3} \cos^3\vartheta \sin\vartheta d\varphi \right) d\vartheta = \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \cos^3\vartheta \rho \sin\vartheta \right]_0^{2\pi} d\vartheta \\
 &= 2\pi \frac{64}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\vartheta \sin\vartheta d\vartheta = \left. \begin{array}{l} \cos\vartheta = t \\ \sin\vartheta d\vartheta = -dt \\ 0 \rightarrow 1, \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 1 \end{array} \right\} \\
 &= \frac{16}{3} \pi 2^3 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^3 dt = \frac{4}{3} 8\pi [t^4]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \frac{32}{3} \pi - \frac{32}{12} \pi = \frac{96\pi}{12} = 8\pi.
 \end{aligned}$$

**Cvičení 8.1:**

Vypočtete obsah plochy  $z^2 = (x-1)^2 + y^2$  ohraničené plochou  $x^2 + y^2 = 4$ .



Obrázek 4.27: Ilustrace množiny ze cvičení 8.1

Opakujeme postup ze vzorového cvičení a vypočteme derivaci plochy podle  $x$ ,  $y$ . Určíme rozsah hodnot  $\varphi$ ,  $\rho$ , jelikož vzhledem k ploše je vhodné počítat integrál transformací do polárních souřadnic. Následně vypočteme obsah plochy v trojrozměrném prostoru dle uvedeného vzorce. Vyjádříme  $f(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
 z^2 &= (x-1)^2 + y^2, \\
 z_1 &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = f(x, y), \\
 z_2 &= -\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.
 \end{aligned}$$

Pro další výpočty již budeme využívat pouze plochy zadané rovnicí  $z = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ . Obsahy obou ploch jsou shodné, proto výsledný obsah jedné plochy stačí vynásobit dvěma.

Vypočteme první derivace z  $f(x, y)$ :

$$f'_x(x, y) = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}.$$

Pro jednodušší výpočet transformujeme do polárních souřadnic:

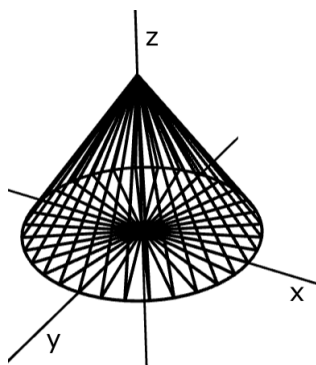
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 4, \\ \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi &\leq 4, \\ \rho^2 &\leq 4, \\ 0 \leq \rho &\leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Dosazením do vzorce zjistíme obsah  $S_1$  plochy zadané rovnicí  $z_1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = f(x, y)$  a ohraničené válcovou plochou  $x^2 + y^2 = 4$ :

$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_{\Omega} \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} \, dx dy = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \frac{x^2 - 2x + 1 + y^2}{x^2 + y^2 - 2x + 1}} \, dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{2} \, dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{2} \rho \, d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[ \sqrt{2} \frac{\rho^2}{2} \right]_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \pi \, d\varphi = 4\sqrt{2}\pi, \\ S &= 2S_1 = 8\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

### Cvičení 8.2:

Vypočtete pomocí integrálu obsah pláště kužele o poloměru podstavy 2cm a výšce 3cm.



Obrázek 4.28: Ilustrace množiny ze cvičení 8.2

Záleží na samotném řešiteli, jak si umístí kužel. Výpočet se postupně bude přibližovat umístění kužele do souřadnicové soustavy tak, jak je vyobrazeno na obr. 4.28.

Nejprve uvažujme kuželovou plochu s vrcholem v počátku, která v rovině  $z = c$  prochází kružnicí  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ . Takto zadaná plocha má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Nejprve je nutné si uvědomit, že rovina  $z = c$ , ve které leží podstava kužele, má být od vrcholu vzdálena o výšku kužele, tedy  $c = 3$ . Dostáváme tak rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{9} = 0.$$

Navíc kružnice, ve které kužel protíná rovinu, má mít poloměr 2, tedy

$$x^2 + y^2 = 4, \text{ neboli } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Původní rovnice tedy dostává tvar

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} &= \frac{z^2}{9}, \\ \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2} &= z. \end{aligned}$$

Aby rovnice vystihovala kužel z obr. 4.28, je nutné ještě změnit orientaci kužele a posunout jeho vrchol o 3 cm nahoru ve směru osy  $z$ . Konečná rovnice kužele je tvaru

$$z = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2} + 3.$$

Je zřejmé, že transformace do polárních souřadnic usnadní výpočet a vzhledem k postupnému vyhledávání rovnice kužele již stačí uvést, že

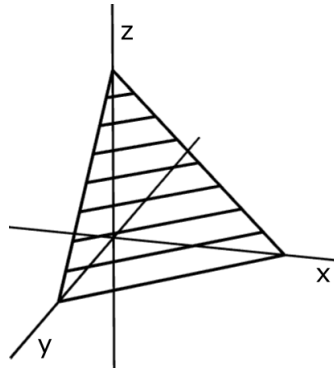
$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho \leq 2, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Obsah pláště kužele z obr. 4.28 je

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Omega} \sqrt{1 + [f'_x(x,y)]^2 + [f'_y(x,y)]^2} \, dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \frac{9x^2}{4(x^2 + y^2)} + \frac{9y^2}{4(x^2 + y^2)}} \, dx dy = \iint_{\Omega} \sqrt{\frac{117}{36}} \, dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{\frac{117}{36}} \rho \, d\rho d\varphi = 2\sqrt{13}\pi. \end{aligned}$$

**Cvičení 8.3:**

Vypočtěte pomocí integrálu obsah plochy  $x + y + z = 2$  v I. oktantu.



Obrázek 4.29: Ilustrace množiny ze cvičení 8.3

Ze zadání je patrné, že se jedná o část roviny náležící do I. oktantu, tedy o trojúhelník, jehož obsah lze pro kontrolu spočítat i bez využití integrálu. Postupně se vypočítají parciální derivace z  $f(x, y)$ :

$$\begin{aligned} z &= 2 - x - y, \\ f'_x(x, y) &= -1, \\ f'_y(x, y) &= -1, \end{aligned}$$

A následně vypočteme obsah plochy

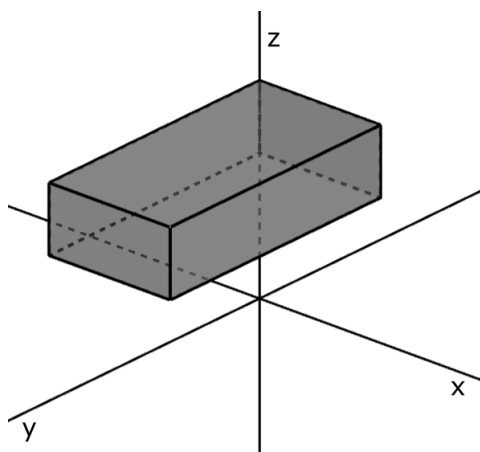
$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Omega} \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} \, dx dy = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + 1 + 1} \, dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{-x+2} \sqrt{3} \, dx dy = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Cvičení 9.1:**

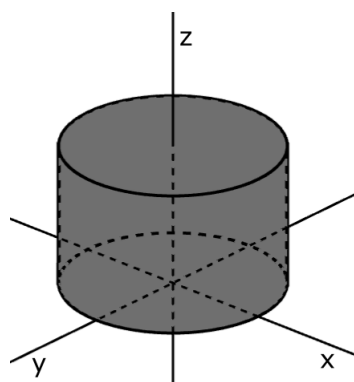
Vypočtěte hmotnost tělesa  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in \langle 0, 2 \rangle, y \in \langle 0, 4 \rangle, z \in \langle 2, 3 \rangle\}$ , které má v každém bodě hustotu  $\rho(x, y, z) = x + 3$ .

Není potřeba jakékoliv transformace do jiných souřadnic, lze tedy vypočítat hmotnost

$$m = \iiint_M (x + 3) \, dx dy dz = \int_2^3 \left[ \int_0^4 \left( \int_0^2 (x + 3) \, dx \right) dy \right] dz = \int_2^3 \left[ \int_0^4 8 \, dy \right] dz = 32.$$

Obrázek 4.30: Ilustrace množiny  $M$  ze cvičení 9.1**Cvičení 9.2:**

Vypočtete hmotnost válce  $M$  s podstavou v rovině  $z = 0$ , středem v počátku soustavy souřadnic, poloměrem podstavy 3 a výškou 4, jestliže má v každém bodě hustotu  $\rho(x, y, z) = x^2 + 4 + y^2$ .

Obrázek 4.31: Ilustrace množiny  $M$  ze cvičení 9.2

Válec umístíme podle zadání do kartézské soustavy souřadnic, získáme tak množinu  $M$  a přejdeme k transformaci do cylindrických souřadnic

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \rho \leq 3,$$

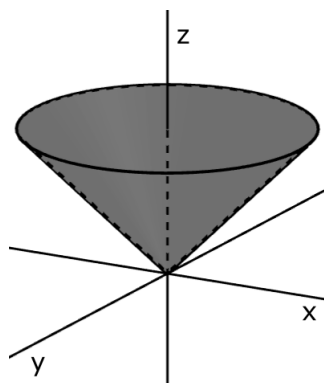
$$0 \leq z \leq 4.$$

Množinu transformovaných cylindrických souřadnic označíme  $M^*$ . Po transformaci do válcových souřadnic už zbývá pouze vypočítat hmotnost

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_M (x^2 + y^2 + 4) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{M^*} (\rho^3 + 4\rho) \, d\rho \, d\varphi \, dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^4 \left( \int_0^3 (\rho^3 + 4\rho) \, d\rho \right) dz \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^4 \frac{153}{4} dz \right] d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} 153 \, d\varphi = 306\pi.
 \end{aligned}$$

**Cvičení 9.3:**

Vypočítejte hmotnost tělesa, které je omezené plochou  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  a rovinou  $z = 3$ . Jeho hustota je v každém bodě  $\rho(x, y, z) = z$ .



Obrázek 4.32: Ilustrace množiny ze cvičení 9.3

Z rovnice  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  poznáváme, že se jedná o kužel, který označíme  $M$ , s vrcholem v počátku soustavy souřadnic, jehož podstavu tvoří kruh ležící v rovině  $z = 3$ , která protíná kuželovou plochou v kružnici o poloměru 3. Pro jednoduchost využijeme transformace do sférických souřadnic

$$\begin{aligned}
 z &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\
 \rho^2 \cos^2 \vartheta &= \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta, \\
 0 &= \rho^2 \cos 2\vartheta.
 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice plyne, že  $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$ . Zbývá vypočítat krajní hodnoty proměnných  $\rho$ ,  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}
 z = 3 &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\
 \rho \cos \vartheta &= 3 = \rho \sin \vartheta,
 \end{aligned}$$

je vhodné využít krajních hodnot proměnné  $\vartheta$ , protože  $\cos \vartheta = \sin \vartheta \Leftrightarrow \vartheta = \frac{\pi}{4}$ ,

$$3 = \rho \sin \frac{\pi}{4}.$$

Získáváme  $0 \leq \rho \leq 3\sqrt{2}$ ,  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ . Množinu transformovanou do sférických souřadnic označíme  $M^*$ . Posledním krokem k vyřešení cvičení je výpočet hmotnosti

$$\begin{aligned} m &= \iiint_M z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{M^*} (\rho \cos \vartheta) |-\rho^2 \sin \vartheta| \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^3 \sin 2\vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right] d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} 81 \sin 2\vartheta \, d\vartheta \right] d\varphi \\ &= \frac{81}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = \frac{81}{2} \pi. \end{aligned}$$

### Cvičení 10.1:

Vypočítejte těžiště tělesa  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in \langle 0, 2 \rangle, y \in \langle 0, 4 \rangle, z \in \langle 2, 3 \rangle\}$ , které má v každém bodě hustotu  $\rho(x, y, z) = x + 3$ .

Hmotnost tělesa je známe z předchozího cvičení,  $m = 32$ , s jejím využitím lze vypočíst souřadnice těžiště,

$$\begin{aligned} x_\tau &= \frac{S_{yz}(M)}{m} = \frac{1}{32} \iiint_M (x^2 + 3x) \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{32} \int_0^2 \left[ \int_0^4 \left( \int_2^3 (x^2 + 3x) \, dz \right) dy \right] dx \\ &= \frac{1}{32} \int_0^2 \left[ \int_0^4 (x^2 + 3x) \, dy \right] dx = \frac{1}{32} \int_0^2 (4x^2 + 12x) \, dx = \frac{1}{32} \left[ \frac{4x^3}{3} + 12 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{13}{12}, \\ y_\tau &= \frac{S_{xz}(M)}{m} = \frac{1}{32} \iiint_M (xy + 3y) \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{32} \int_0^2 \left[ \int_0^4 \left( \int_2^3 (xy + 3y) \, dz \right) dy \right] dx \\ &= \frac{1}{32} \int_0^2 \left[ \int_0^4 (xy + 3y) \, dy \right] dx = \frac{1}{32} \int_0^2 \left[ x \frac{y^2}{2} + 3 \frac{y^2}{2} \right]_0^4 dx = \frac{1}{32} \int_0^2 (8x + 24) \, dx \\ &= \frac{1}{32} \left[ 4x^2 + 24x \right]_0^2 = 2, \\ z_\tau &= \frac{S_{xy}(M)}{m} = \frac{1}{32} \iiint_M (xz + 3z) \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{32} \int_0^2 \left[ \int_0^4 \left( \int_2^3 (xz + 3z) \, dz \right) dy \right] dx \\ &= \frac{1}{32} \int_0^2 \left[ \int_0^4 \left( \frac{9}{2}x + \frac{27}{2} - 2x - 6 \right) dy \right] dx = \frac{1}{32} \int_0^2 \left[ \int_0^4 \left( \frac{5}{2}x + \frac{15}{2} \right) dy \right] dx \\ &= \frac{1}{32} \int_0^2 (10x + 30) \, dx = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Těžištěm tělesa  $M$  ze zadání je bod  $T = \left[ \frac{13}{12}, 2, \frac{5}{2} \right]$ .

**Cvičení 10.2:**

Vypočítejte těžiště válce  $M$  s podstavou v rovině  $z = 0$ , středem v počátku soustavy souřadnic, poloměrem podstavy 3 a výškou 4, jestliže má v každém bodě hustotu  $\rho(x, y, z) = x^2 + 4 + y^2$ .

Ze cvičení 9.2 již známe obsah tělesa  $m = 306\pi$  a transformaci do cylindrických souřadnic, kde

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 3, \quad 0 \leq z \leq 4.$$

Množinu transformovanou do cylindrických souřadnic označíme  $M^*$ . S využitím obsahu vypočteme souřadnice těžiště,

$$\begin{aligned} x_\tau &= \frac{S_{yz}(M)}{m} = \frac{1}{m} \iiint_M (x^2 + 4 + y^2)x \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{m} \iiint_M (\rho^3 + 4\rho)(\rho \cos \varphi) \, d\rho \, d\varphi \, dz \\ &= \frac{1}{306\pi} \int_0^4 \left[ \int_0^{2\pi} \left( \int_0^3 (\rho^4 \cos \varphi + 4\rho^2 \cos \varphi) \, d\rho \right) d\varphi \right] dz \\ &= \frac{1}{306\pi} \int_0^4 \left[ \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^5}{5} \cos \varphi + 4\frac{\rho^3}{3} \cos \varphi \right]_0^3 d\varphi \right] dz \\ &= \frac{1}{306\pi} \int_0^4 \left[ \int_0^{2\pi} \left( \frac{243}{5} \cos \varphi + 36 \cos \varphi \right) d\varphi \right] dz = 0, \\ y_\tau &= \frac{S_{xz}(M)}{m} = \frac{1}{m} \iiint_M (x^2 + 4 + y^2)y \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{306\pi} \int_0^4 \left[ \int_0^{2\pi} \left( \int_0^3 (\rho^3 + 4\rho)(\rho \sin \varphi) \, d\rho \right) d\varphi \right] dz \\ &= \frac{1}{306\pi} \int_0^4 \left[ \int_0^{2\pi} \left( \int_0^3 (\rho^4 \sin \varphi + 4\rho^2 \sin \varphi) \, d\rho \right) d\varphi \right] dz \\ &= \frac{1}{306\pi} \int_0^4 \left[ \int_0^{2\pi} \left( \frac{243}{5} \sin \varphi + 36 \sin \varphi \right) d\varphi \right] dz \\ &= \frac{1}{306\pi} \int_0^4 \left[ -\frac{243}{5} \cos \varphi - 36 \cos \varphi \right]_0^{2\pi} dz = 0, \\ z_\tau &= \frac{S_{xy}(M)}{m} = \frac{1}{m} \iiint_M (x^2 + 4 + y^2)z \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{306\pi} \int_0^4 \left[ \int_0^{2\pi} \left( \int_0^3 (\rho^3 z + 4\rho z) \, d\rho \right) d\varphi \right] dz \\ &= \frac{1}{306\pi} \int_0^4 \left[ \int_0^{2\pi} \left[ z \frac{\rho^4}{4} + 4z \frac{\rho^2}{2} \right]_0^3 d\varphi \right] dz \\ &= \frac{1}{306\pi} \int_0^4 \left[ \int_0^{2\pi} \left( z \frac{81}{4} + 18z \right) d\varphi \right] dz = \frac{1}{153} \int_0^4 \left( \frac{81}{4}z + 18z \right) dz = 2. \end{aligned}$$

Těžištěm množiny  $M$  je bod  $T = [0, 0, 2]$ .



**Cvičení 10.3:**

Vypočtete těžiště tělesa, které je omezené plochou  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  a rovinou  $z = 3$ . Jeho hustota je v každém bodě  $\rho(x, y, z) = z$ .

Z řešení cvičení 9.3 již známe obsah tělesa  $M$  a sférické souřadnice tělesa,

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 3\sqrt{2}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}, \quad m = \frac{81}{2}\pi.$$

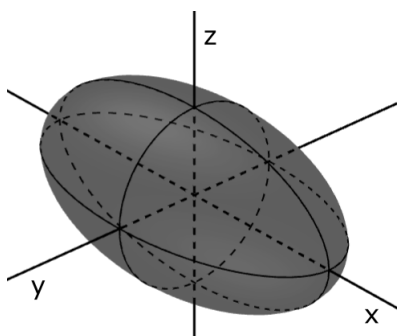
Množinu  $M$  transformovanou do sférických souřadnic označíme  $M^*$ . Pomocí uvedených údajů budou vypočteny souřadnice těžiště  $T$ ,

$$\begin{aligned} x_\tau &= \frac{S_{yz}(M)}{m} = \frac{1}{m} \iiint_M xz \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{81\pi} \iiint_{M^*} (\rho^3 \sin 2\vartheta)(\rho \cos \varphi \sin \vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta \, d\rho \\ &= \frac{1}{81\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi}_0 \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^4 \, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = 0, \\ y_\tau &= \frac{S_{xz}(M)}{m} = \frac{1}{m} \iiint_M yz \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{81\pi} \iiint_{M^*} (\rho^3 \sin 2\vartheta)(\rho \sin \varphi \sin \vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta \, d\rho \\ &= \frac{1}{81\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi}_0 \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^4 \, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = 0, \\ z_\tau &= \frac{S_{xy}(M)}{m} = \frac{1}{m} \iiint_M z^2 \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{81\pi} \iiint_{M^*} (\rho^3 \sin 2\vartheta)(\rho \cos \vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta \, d\rho \\ &= \frac{4}{81\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{3\sqrt{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^4 \sin \vartheta - \rho^4 \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \right) d\rho \right] d\varphi \\ &= \frac{4}{81\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{3\sqrt{2}} \left[ -\rho^4 \cos \vartheta - \rho^4 \left( -\frac{2 \cos \vartheta}{3} - \frac{1}{3} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\rho \right] d\varphi \\ &= \frac{4}{81\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{3\sqrt{2}} \left[ -\rho^4 \cos \vartheta + \rho^4 \frac{2 \cos \vartheta}{3} + \frac{1}{3} \rho^4 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\rho \right] d\varphi \\ &= \frac{4}{81\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{3\sqrt{2}} \left[ -\rho^4 \frac{\sqrt{2}}{2} + \rho^4 \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \rho^4 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \rho^4 - \rho^4 \frac{2}{3} \right] d\rho \right] d\varphi \\ &= \frac{4}{81\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^4 \frac{4 - \sqrt{2}}{12} d\rho \right] d\varphi = \frac{4}{81\pi} \frac{4 - \sqrt{2}}{12} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^5}{5} \right]_0^{3\sqrt{2}} d\varphi = \frac{32\sqrt{2} - 16}{5}. \end{aligned}$$

Souřadnice těžiště množiny  $M$  jsou  $\left[ 0, 0, \frac{32\sqrt{2} - 16}{5} \right]$ .

**Cvičení 11.1:**

Vypočtete momenty setrvačnosti vejčitého elipsoidu, jehož délky poloos jsou postupně 4, 2, 2. homogenního tělesa tvaru elipsoidu vzhledem k jeho osám. Hustota elipsoidu je konstantní.



Obrázek 4.33: Ilustrace množiny ze cvičení 11.1

Řešení:

Bez újmy na obecnosti lze počítat s hustotou  $\rho(x, y, z) = 1$ . Střed elipsoidu umístíme do počátku soustavy souřadnic. Rovnice elipsoidu má v takovém případě tvar  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ . Elipsoid označme jako množinu  $M$ . Pro zjednodušení výpočtu bude využita transformace do zobecněných sférických souřadnic

$$x = 4\rho \cos \varphi \sin \vartheta, y = 2\rho \sin \varphi \sin \vartheta, z = 2\rho \cos \vartheta.$$

Z uvedených rovnic úpravou dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho \leq 1, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \vartheta \leq \pi. \end{aligned}$$

Množinu  $M$  transformovanou do sférických souřadnic označíme  $M^*$ . Výpočet momentu setrvačnosti dle souřadnicových os  $x, y, z$  pak pokračuje dle vzorce pro výpočet momentu setrvačnosti vzhledem k souřadnicovým osám,

$$\begin{aligned} I_x(M) &= \iiint_M (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= 16 \iiint_{M^*} (\rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta) \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\vartheta d\varphi \\ &= 64 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \left( \int_0^1 (\rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta) \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \right) d\vartheta \right] d\varphi \\ &= 64 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \left[ \frac{\rho^5}{5} (\sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) \right]_0^1 d\vartheta \right] d\varphi \\ &= \left| \begin{array}{l} \cos \vartheta = t \\ -\sin \vartheta \, d\vartheta = dt \\ 0 \rightarrow 1, \pi \rightarrow -1 \end{array} \right| = \frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left[ \int_1^{-1} (-\sin^2 \varphi + t^2 \sin^2 \varphi - t^2) dt \right] d\varphi \\ &= \frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left[ -t \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{3} \right]_1^{-1} d\varphi \\ &= \frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \sin^2 \varphi + \frac{1}{3} + \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \sin^2 \varphi + \frac{1}{3} \right) d\varphi \\ &= \frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left( 2 \sin^2 \varphi - \frac{2}{3} \sin^2 \varphi + \frac{2}{3} \right) d\varphi = \frac{64}{5} \left( \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{512}{15} \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_y(M) &= \iiint_M (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz \\
&= 16 \iiint_{M^*} (16\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + 4\rho^2 \cos^2 \vartheta) \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho d\vartheta d\varphi \\
&= 64 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \left( \int_0^1 (4\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta) \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right] d\varphi \\
&= 64 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \left( \int_0^1 (4\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^3 \vartheta + \rho^4 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) \, d\rho \right) d\vartheta \right] d\varphi \\
&= \frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \left( 4\cos^2 \varphi \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) + \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \right) d\vartheta \right] d\varphi \\
&= \left| \begin{array}{l} \cos \vartheta = t \\ -\sin \vartheta \, d\vartheta = dt \\ 0 \rightarrow 1, \pi \rightarrow -1 \end{array} \right| = -\frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left[ \int_1^{-1} \left( 4\cos^2 \varphi (1 - t^2) + t^2 \right) dt \right] d\varphi \\
&= -\frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left[ 4\cos^2 \varphi t - 4\cos^2 \varphi \frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{3} \right]_1^{-1} d\varphi \\
&= -\frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left( -8\cos^2 \varphi + \frac{8}{3}\cos^2 \varphi - \frac{2}{3} \right) d\varphi \\
&= \frac{128}{15} \int_0^{2\pi} (8\cos^2 \varphi + 1) \, d\varphi = \frac{128}{15} \left[ 4\varphi + 4\sin \varphi \cos \varphi + \varphi \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{128}{15} (8\pi + 2\pi) = \frac{256}{3} \pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_z(M) &= \iiint_M (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz \\
&= 16 \iiint_{M^*} (16\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^3 \vartheta + 4\rho^4 \sin^2 \varphi \sin^3 \vartheta) \rho \, d\rho d\vartheta d\varphi \\
&= 64 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \left( \int_0^1 (4\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^3 \vartheta + \rho^4 \sin^2 \varphi \sin^3 \vartheta) \, d\rho \right) d\vartheta \right] d\varphi \\
&= \frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \left( 4\cos^2 \varphi \sin^3 \vartheta + \sin^2 \varphi \sin^3 \vartheta \right) d\vartheta \right] d\varphi = \left| \begin{array}{l} \cos \vartheta = t \\ -\sin \vartheta \, d\vartheta = dt \\ 0 \rightarrow 1, \pi \rightarrow -1 \end{array} \right| \\
&= -\frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left[ \int_1^{-1} \left( 4\cos^2 \varphi (1 - t^2) + \sin^2 \varphi (1 - t^2) \right) dt \right] d\varphi \\
&= -\frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left[ 4t \cos^2 \varphi - 4\cos^2 \varphi \frac{t^3}{3} + t \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi \frac{t^3}{3} \right]_1^{-1} d\varphi \\
&= -\frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \left( -8\cos^2 \varphi + \frac{8}{3}\cos^2 \varphi - 2\sin^2 \varphi + \frac{2}{3}\sin^2 \varphi \right) d\varphi \\
&= -\frac{64}{5} \left[ -\frac{8}{3}\varphi - \frac{8}{3}\sin \varphi \cos \varphi - \frac{2}{3}\varphi + \frac{2}{3}\sin \varphi \cos \varphi \right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{64}{5} \left( -\frac{16}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi \right) = \frac{256}{3} \pi.
\end{aligned}$$

**Cvičení 11.2:**

Vypočítejte moment setrvačnosti válce  $M$  s podstavou v rovině  $z = 0$ , středem dolní podstavy v počátku soustavy souřadnic, poloměrem podstavy 3 a výškou 4, vzhledem k ose rotace, jestliže má v každém bodě hustotu  $\rho(x, y, z) = 1$ .

Z řešení cvičení 9.2 využijeme znalosti transformovaných cylindrických souřadnic,

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \rho \leq 3,$$

$$0 \leq z \leq 4.$$

Moment setrvačnosti tělesa  $M$  vzhledem k ose rotace, tedy ose  $z$  je roven,

$$\begin{aligned} I_z(M) &= \iiint_M (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^3 \left( \int_0^4 (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho \, dz \right) d\rho \right] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^3 \left( \int_0^4 \rho^3 \, dz \right) d\rho \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^3 4\rho^3 \, d\rho \right] d\varphi \\ &= 81 \int_0^{2\pi} d\varphi = 162\pi. \end{aligned}$$

**Cvičení 11.3:**

Vypočítejte moment setrvačnosti tělesa, které je omezené plochou  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  a rovinou  $z = 3$  vzhledem k ose rotace. Jeho hustota je v každém bodě  $\rho(x, y, z) = z$ .

Z řešení cvičení 9.3 využijeme znalosti transformovaných sférických souřadnic,

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \rho \leq 3\sqrt{2},$$

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose  $z$  je

$$\begin{aligned} I_z(M) &= \iiint_M (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{3\sqrt{2}} (\rho^2 \sin^2 \vartheta) (\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta) \, d\rho \right) d\vartheta \right] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{3\sqrt{2}} (\rho^5 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta) \, d\rho \right) d\vartheta \right] d\varphi \\ &= 972 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \cos \vartheta \, d\vartheta \right] d\varphi \\ &= \left| \begin{array}{l} \cos \vartheta = t \\ -\sin \vartheta \, d\vartheta = dt \\ 0 \rightarrow 1, \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = 972 \int_0^{2\pi} \left[ \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (t^3 - t) \, dt \right] d\varphi \\ &= 972 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\varphi = 972 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) d\varphi = 972 \frac{1}{16} 2\pi = \frac{243}{2} \pi. \end{aligned}$$

**Cvičení 12.1:**

Vypočtete elektrický náboj tělesa  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in \langle 0, 2 \rangle, y \in \langle 0, 4 \rangle, z \in \langle 2, 3 \rangle\}$ , které má v každém bodě hustotu elektrického náboje  $\omega(x, y, z) = 2x + 3y$ .

Celkový elektrický náboj tělesa  $M$  je

$$\begin{aligned} Q(M) &= \iiint_M \omega(x, y, z) \, dx dy dz = \int_0^2 \left[ \int_0^4 \left( \int_2^3 (2x + 3y) \, dz \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^2 \left[ \int_0^4 (2x + 3y) \, dy \right] dx = \int_0^2 (8x + 24) \, dx = 64. \end{aligned}$$

**Cvičení 12.2:**

Vypočtete elektrický náboj části válce nacházející se v prvním oktantu. Válec  $M$  má podstavu v rovině  $z = 0$ , střed dolní podstavy v počátku soustavy souřadnic, poloměr podstavy 3 a výšku 4. V každém bodě má hustotu elektrického náboje  $\omega(x, y, z) = x^2 + y^2$ .

Z řešení cvičení 9.2 využijeme znalosti transformovaných cylindrických souřadnic a pozměníme souřadnici  $\varphi$  tak, aby zkoumaná oblast ležela pouze v prvním oktantu,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 &\leq \rho \leq 3, \\ 0 &\leq z \leq 4. \end{aligned}$$

Celkový elektrický náboj tělesa  $M$  se vypočte následovně,

$$\begin{aligned} Q(M) &= \iiint_M \omega(x, y, z) \, dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^3 \left( \int_0^4 \rho^2 \rho \, dz \right) d\rho \right] d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^3 4\rho^3 \, d\rho \right] d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 81 \, d\varphi = \frac{81}{2} \pi. \end{aligned}$$

**Cvičení 12.3:**

Vypočtete elektrický náboj části tělesa nacházejícího se v prvním oktantu, které je omezené plochou  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  a rovinou  $z = 3$  vzhledem k ose rotace. Jeho hustota elektrického náboje je v každém bodě  $\rho(x, y, z) = xy$ .

Z řešení cvičení 9.3 využijeme znalosti transformovaných sférických souřadnic a pozměníme souřadnici  $\varphi$  tak, aby celé těleso leželo pouze v prvním oktantu,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 &\leq \rho \leq 3\sqrt{2}, \\ 0 &\leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Následně vypočítáme celkový elektrický náboj tělesa  $M$ ,

$$\begin{aligned}
Q(M) &= \iiint_M \omega(x, y, z) \, dx dy dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{3\sqrt{2}} (\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \vartheta) (\rho^2 \sin \vartheta) \, d\rho \right) d\vartheta \right] d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^4 \sin \varphi \cos \varphi \sin^3 \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right] d\varphi \\
&= \frac{972\sqrt{2}}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \vartheta \right) \sin \vartheta \, d\vartheta \right] d\varphi \\
&= \left| \begin{array}{l} \cos \vartheta = t \\ -\sin \vartheta \, d\vartheta = dt \\ 0 \rightarrow 1, \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = \frac{972\sqrt{2}}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( -\sin \varphi \cos \varphi + t^2 \sin \varphi \cos \varphi \right) dt \right] d\varphi \\
&= \frac{972\sqrt{2}}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -t \sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \frac{t^3}{3} \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\varphi \\
&= \frac{972\sqrt{2}}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{4}{12} \right) \right] d\varphi \\
&= \frac{972\sqrt{2}}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{-6\sqrt{2} + \sqrt{2} + 12 - 4}{12} \right) d\varphi \\
&= \frac{972\sqrt{2}}{5} \left( -\frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{2}{3} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \\
&= \left| \begin{array}{l} \sin \varphi = t \\ \cos \varphi \, d\varphi = dt \\ 0 \rightarrow 0, \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 \end{array} \right| = \frac{972\sqrt{2}}{5} \left( -\frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{2}{3} \right) \int_0^1 t \, dt \\
&= \frac{972\sqrt{2}}{5} \left( -\frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{2}{3} \right) \frac{1}{2} = -81 + \frac{324\sqrt{2}}{5}.
\end{aligned}$$

# Seznam použité literatury

- [1] DĚMIDOVĚČ, Boris, Pavlovič. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy* 1. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. 464 s. ISBN 80-7200-587-1.
- [2] FRANKE, J. E., GRIGGS, J. R. a NORRIS, L. K. *Integral Multivariable Calculus Calculus III* [online] c2014, last revision 26th of October 2015 [cit. 2018-04-22]. Dostupný na WWW: [http://www4.ncsu.edu/~lkn/TextBook/JJLCalculusIIIChapter4\\_oct\\_23.pdf](http://www4.ncsu.edu/~lkn/TextBook/JJLCalculusIIIChapter4_oct_23.pdf)
- [3] KALAS, Josef a KUBEN, Jaromír. *Integrální počet funkcí více proměnných* 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2009, 272 s., ISBN 9788021049758.
- [4] KLUVÁNEK, Igor, MIŠÍK, Ladislav a ŠVEC, Marko. *Matematika pre študium technických vied. II. diel* 1. vyd. Bratislava: Slovenské vydavateľ'stvo technickej literatúry, 1961. 855 s.
- [5] KNISLEY, Jeff. *Multivariable Calculus Online* [online]. c2001, [cit. 2018-04-22]. Dostupný na WWW: <http://math.etsu.edu/multicalc/prealpha/contents.htm>.
- [6] LIPJANCOVÁ, Miriama. *Integrální počet funkcí více proměnných a jeho aplikace: bakalářská práce* Brno: Masarykova univerzita, Ústav matematiky a statistiky, 2013. 32 s. Vedoucí bakalářské práce prof. RNDr. Roman Šimon Hilscher, DSc.
- [7] LJAŠKO, Ivan Ivanovič a kol. *Matematičeskij analiz v primerach i zadačach, Rjady, funkcii neskol'kich peremennych, kratnyje i krivolinejnyje integraly*. Kiev: Vyšča škola, 1977. 670 s.
- [8] NAGY, Josef, NOVÁKOVÁ, Eva a VACEK, Milan. *Integrální počet* 1. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1984. 312 s. Matematika pro vysoké školy technické VI.
- [9] POLEDNO, Vladimír. *Sbírka úloh z fyziky: část I, Mechanika*. Praha: SNTL, 1967, 62 s.
- [10] RÁB, Miloš. *Zobrazení a Riemannův integrál v  $E^n$*  1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. 97 s.
- [11] ProfRobBob. In: Youtube [online]. 2014-06-09 [cit. 2018-04-22]. Dostupné z: <https://youtu.be/VfcGS6gs8g8>

- [12] ŘÍHOVÁ, Helena. *Transformace grafů funkcí* 2006, [online], [cit. 2018-04-22]. Dostupný na WWW: <http://dagles.klenot.cz/rihova/transformace.pdf>.
- [13] SCHWABIK, Štefan a ŠARMANOVÁ, Petra. *Malý průvodce historií integrálu* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. 96 s. ISBN 80-7196-038-1.
- [14] TRENCH, William F. *Introduction to real analysis* Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall/Pearson Education, 2003. ISBN 0130457868.
- [15] WILLERS, Michael. *Algebra bez mučení* Grada Publishing a.s., 2012, 176 s., ISBN 9788024741239, [online], [cit. 2018-02-02], Dostupný na WWW: <https://books.google.cz/books?id=JVMCdUDfmNQC>.
- [16] ZORICH, Vladimir A. *Mathematical Analysis II* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004, 688 s., ISBN 978-3-540-87453-9, [online], [cit. 2018-03-10], Dostupný na WWW: <https://zr9558.files.wordpress.com/2013/11/mathematical-analysis-zorich2.pdf>.



