# Obsah

**Čestné prohlášení:**

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. Miroslava Bartuška, DrSc. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

Jana Pěgřímová

**Poděkování:**

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, prof. RNDr. Miroslavu Bartuškovi, DrSc. za zapůjčení odborné literatury, čas věnovaný konzultacím a hlavně cenné rady, bez kterých by tato práce nemohla být napsána.

# ÚVOD

Tato práce je zaměřena na diferenciální rovnice 1. řádu. První dvě kapitoly vysvětlují základní pojmy a geometrickou interpretaci těchto rovnic.

Ve třetí kapitole uvádím výčet základních typů diferenciálních rovnic 1. řádu rozřešených vzhledem k derivaci, jako jsou rovnice se separovanými proměnnými, rovnice homogenní, lineární, Bernoulliova a další. Každá z těchto podkapitol popisuje daný typ rovnice a také metody, které se používají při jejím řešení. Připojila jsem i několik ilustrujících příkladů, které by měly sloužit k lepší názornosti. Ne vždy se diferenciální rovnice vyskytují pouze v uvedených základních tvarech, a to i přesto že jsou snadno řešitelné. Na závěr této kapitoly proto uvádím postup (tzv. metodu integračního faktoru), pomocí kterého lze některé rovnice převést na rovnici exaktní.

Čtvrtá kapitola se zabývá řešením rovnic, které nejsou rozřešitelné vzhledem k derivaci, ale jsou rozřešitelné vzhledem k jiným proměnným. Speciálně se jedná o rovnice Clairautovu a Lagrangeovu, jejichž řešení je opět popsáno s pomocí konkrétních příkladů a grafů.

Pátá kapitola uvádí nejvýznamnější uplatnění diferenciálních rovnic při řešení geometrických úloh, tedy při hledání systému izogonálních a ortogonálních trajektorií k dané diferenciální rovnici.

Závěrečná kapitola pak popisuje dvě modelové situace z praxe, při jejichž řešení jsou diferenciální rovnice nepostradatelné. Cílem této kapitoly bylo vytvořit alespoň základní představu o tom, k čemu se vlastně diferenciální rovnice používají, a dokázat tak jejich důležitost v každodenním životě.

# 1 Základní pojmy

Diferenciální rovnice jsou rovnice, ve kterých se neznámá funkce $y(x)$ vyskytuje spolu se svými derivacemi. Obecně lze tedy tyto rovnice rozdělit do skupin podle řádu nejvyšší derivace, která se v nich vyskytuje. Řekneme tedy, že diferenciální rovnice je **n-tého řádu**, pokud v ní vystupuje derivace řádu $n$, $y^{(n)}$, a neexistuje $k > n$, $k \in N$ takové, aby derivace $y^{(k)}$ byla v rovnici také obsažena. Obecně je tedy diferenciální rovnice tvaru $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$. Tato práce je zaměřena jen na rovnice 1. řádu, tj. rovnice tvaru $F(x, y, y') = 0$.

**Definice 1.** Nechť G je neprázdná oblast (tj. otevřená a souvislá množina) v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ a $f$ je reálná funkce, která je definovaná na $G$. Rovnice tvaru $y' = f(x, y)$, kde $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, se nazývá **diferenciální rovnicí 1. řádu**. Jejím **řešením** rozumíme funkci $y$, která je diferencovatelná na nějakém intervalu $I$ a splňuje podmínky: $[x, y(x)] \in G$ a $y'(x) = f(x, y(x))$ pro $\forall x \in I$. Není-li I otevřený interval, pak v každém krajním bodě značí $y'(x)$ jednostrannou derivaci.

Při hledání řešení dané diferenciální rovnice obvykle postupujeme tak, že ji pomocí různých operací převádíme na novou diferenciální rovnici. Pokud nová rovnice splňuje podmínku, že každé její řešení je zároveň i řešením rovnice původní a obráceně, hovoříme o tzv. **ekvivalentních rovnicích** a provedené úpravy nazýváme rovněž ekvivalentní. Ekvivalentnost úprav hraje při hledání řešení velmi významnou roli. Aplikací neekvivalentní úpravy totiž může dojít k tomu, že nová rovnice ztratí nebo naopak získá další řešení oproti rovnici původní, jak ilustruje následující příklad.

**Příklad 1.** Uvažujme diferenciální rovnici $xy' = y^2 - y$.
Vynásobením výrazem $x^{-1}(y^2 - y)^{-1}$ ji lze převést na rovnici $\frac{y'}{y^2 - y} = \frac{1}{x}$. Tuto úpravu však lze provést pouze pro $x \neq 0$ a $y \neq 0, 1$. To znamená, že konstantní řešení $y = 0$, $y = 1$ nemohou být řešením nové rovnice a to i přesto, že splňují identitu v rovnici původní. Provedená úprava tedy nebyla ekvivalentní, protože se při ní vytratila dvě řešení. Pokud tato řešení nepůjde později v obecném řešení vyjádřit pomocí konkrétní konstanty $C$, musí být k němu přidána. Kromě toho sice platí, že ostatní řešení nové rovnice jsou zároveň řešeními i rovnice původní, ale ne na stejných množinách, protože nová rovnice nemůže mít řešení na množině obsahující body osy $y$.

Při určování řešení diferenciální rovnice je tedy potřeba určit i množinu $M$, na které je funkce $y(x)$ řešením. Ve většině případů bývá tato množina totožná s diferenčním oborem řešení - funkce $y(x)$.

Z výše uvedeného příkladu je patrné, že diferenciální rovnice může mít i více (nekonečně mnoho) řešení. Často se však budeme soustředit na nalezení jediného řešení, které splňuje jisté dodatečné podmínky.

**Definice 2.** Nechť $[x_0, y_0]$ je libovolný bod v $G$. Úloha určit řešení rovnice $y' = f(x, y)$, která splňují počáteční (Cauchyovu) podmínku $y(x_0) = y_0$, se nazývá **počáteční (Cauchyova) úloha**.

V tomto případě se tady soustředíme na hledání takového řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$, které prochází daným bodem $[x_0, y_0] \in G$. Takové řešení však nemusí existovat nebo může nastat situace, kdy daný počáteční problém může mít více řešení. Nastane-li taková situace, že existuje řešení $y$ počátečního problému $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, které není zúžením žádného jiného řešení tohoto problému, nazývá se $y$ **úplné řešení**. Existuje-li úplné řešení počátečního problému takové, že každé jiné řešení tohoto problému je jeho zúžením, budeme stručně říkat, že daný problém má právě jedno řešení.

**Definice 3.** **Obecným řešením** rovnice $y' = f(x, y)$ budeme rozumět funkci závisející na jednom parametru $C$ takovou, že speciální volbou $C$ lze získat každé řešení počátečního problému $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

**Definice 4.** Graf řešení nazýváme **integrální křivkou** dané diferenciální rovnice.

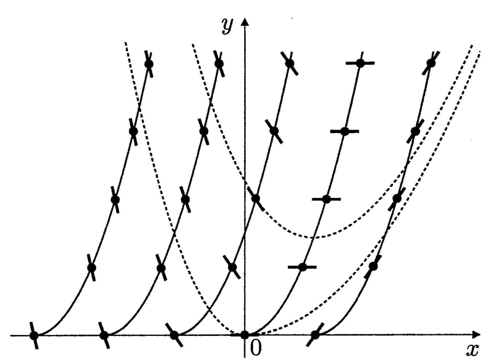
## 2 Geometrická interpretace

Nechť funkce $f(x, y)$ je definovaná na oblasti $G$ roviny, ve které jsme zvolili pravoúhlý souřadnicový systém. Každému bodu této oblasti je rovnicí $y' = f(x, y)$ přiřazena hodnota $y'$, kterou lze geometricky chápat jako směrnici jisté přímky procházející bodem $(x, y)$. Tuto přímku budeme graficky znázorňovat krátkou úsečkou, která má střed v bodě $(x, y)$, a nazývat **lineárním elementem**.

Oblast $G$, ve které je každému bodu přiřazen určitý směr rovnicí tvaru $y' = f(x, y)$, budeme pak nazývat **směrovým polem** této diferenciální rovnice. Množinu bodů oblasti $G$, kterým je přiřazen stejný směr, budeme nazývat **izoklinou**. Budou to tedy všechny body z $G$, jejichž souřadnice budou splňovat rovnici $f(x, y) = C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Tuto rovnici pak nazveme **rovnicí izoklin**.

Nechť $y(x)$ je řešení dané diferenciální rovnice. Příslušná integrální křivka má tu vlastnost, že její tečna v bodě $[x, y(x)]$ obsahuje příslušný lineární element. Vidíme tedy, že mezi směrovým polem diferenciální rovnice a jejími integrálními křivkami je velmi úzký vztah a že tedy směrové pole může sloužit k předběžné informaci o průběhu řešení dané diferenciální rovnice.

**Příklad 2.** Nalezněte izokliny a integrální křivky rovnice $y' = x - \sqrt{y}$. Pravá strana této rovnice je definovaná v polorovině $y \geq 0$, izoklinami jsou větve parabol $y = (x - c)^2$, $x \geq c$ dotýkající se osy $x$ (Obr. 1). Izokliny jsou vyznačeny plnou čarou, integrální křivky tečkovaně.




Obr. 1. Izokliny a integrální křivky

# 3 Dif. rovnice rozřešené vzhledem k derivaci

## 3.1 Rovnice se separovanými proměnnými

**Věta 3.1.** *Nechť $f \in C^\circ(a,b)$, $g \in C^\circ(a,b)$ a $g(y) \neq 0$ pro každé $y \in (c,d)$. Pak je funkce $y$ řešením počátečního problému*

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a,b), \quad y_0 \in (c,d) \tag{3.1}$$

*na intervalu $I$, $x_0 \in I$, právě tehdy, když*

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s \text{ pro každé } x \in I. \tag{3.2}$$

*Důkaz.* Nechť $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$ pro $x \in I$. Vzhledem k tomu, že $g(y) \neq 0$, dostaneme po integraci od $x_0$ do $x$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{g(y(s))}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s \ , \ x \in I.$$

Provedeme-li v integrálu na levé straně substituci $t = y(s)$, a uvážíme-li, že $y(x_0) = y_0$, obdržíme (3.2).

Definujme nyní

$$F(x,y) := \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} - \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s \tag{3.3}$$

a předpokládejme, že funkce $y$ je řešením rovnice $F(x,y) = 0$ na intervalu $I$, tj. $F(x, y(x)) = 0$, $x \in I$. Protože je $F$ spojitou funkcí a $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{g(y)} \neq 0$, plyne z věty o implicitní funkci, že $y$ má pro $x \in I$ derivaci

$$y'(x) = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right|_{y=y(x)} = f(x) \cdot g(y(x)) \,.$$

To znamená, že $y$ je řešením rovnice (3.1). Splnění počáteční podmínky plyne z (3.2) a faktu, že $g$ nemění znaménko. Důkaz je dokončen. $\square$

**Definice 5.** Rovnice

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

se nazývá **rovnice se separovanými proměnnými**.

**Příklad 3.** Najděte řešení diferenciální rovnice $(x^2+1)(y^2-1) + xyy' = 0$ splňující počáteční podmínku $y(1) = \sqrt{2}$.
Tento příklad lze řešit buďto pomocí určitých integrálů podle vztahu (3.2) nebo můžeme nejdříve najít obecné řešení, ze kterého již snadno vyjádříme

hledané řešení splňující danou počáteční podmínku.
Danou rovnici lze převést na rovnici tvaru:

$$\frac{x^2+1}{x} - \frac{y}{y^2-1}y' = 0,$$

která má separované proměnné. Přímkami $x = 0$, $y = 1$ a $y = -1$ se celá rovina rozpadne na části. Bod $[1, \sqrt{2}]$ leží v části $x > 0$, $y > 1$, takže platí, že obě rovnice jsou ekvivalentní. Obecné řešení pak snadno spočítáme pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\begin{aligned}
\int \left(x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y,\\
\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C &= -\frac{1}{2}\ln|y^2-1|,\\
\mathrm{e}^{x^2}\cdot|x|^2\cdot K &= |y^2-1|^{-1}, \quad K>0,\\
\mathrm{e}^{x^2}\cdot|x|^2\cdot|y^2-1| &= K_2.
\end{aligned}$$

Mezi těmito řešeními se nachází i hledané řešení y(x). Pokud do rovnice obecného řešení dosadíme $x = 1$, $y = \sqrt{2}$, dostaneme, že $K_2 = \mathrm{e}$. Naše hledané řešení je pro $y > 0$ vyjádřeno rovnicí

$$y = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{1-x^2}\cdot x^{-2}}$$

Toto řešení je jediné, které prochází bodem $[1, \sqrt{2}]$.

## 3.2 Homogenní rovnice

Předpokládejme, že funkce $f$ je spojitá na nějakém intervalu $I$. Když položíme $u = \frac{y}{x}$, platí $y' = u'x + u$ a rovnice

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.4}$$

se transformuje na rovnici

$$u'x + u = f(u),$$

v níž lze separovat proměnné

$$u' = \frac{1}{x}\left(f(u) - u\right). \tag{3.5}$$

Je-li $y$ řešení rovnice (3.4) splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, pak je $u = \frac{y}{x}$ řešením rovnice (3.5) splňujícím počáteční podmínku $u(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$ a obráceně. Protože zobrazení množiny všech řešení rovnice (3.4) na množinu

všech řešení rovnice (3.5) je vzájemně jednoznačné, dostaneme tímto způsobem prostřednictvím rovnice (3.5) všechna řešení rovnice (3.4).
Izoklinami jsou grafy funkcí daných implicitně rovnicí

$$C = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Jsou to polopřímky $y = Kx$, $x \neq 0$, kde $K$ je takové, že $C = f(K)$. Odtud je vidět, že integrální křivky jsou podobné se středem podobnosti v počátku.

**Příklad 4.** Řešte homogenní diferenciální rovnici $y^2 - xy + (x^2 + xy)y' = 0$. Pro $x \neq 0$ a $x \neq -y$ lze tuto rovnici převést na ekvivalentní rovnici

$$y' = \frac{-y^2 + xy}{x^2 + xy}.$$

Zavedením substituce $u = \frac{y}{x}$ získáme

$$\begin{aligned} u'x + u &= \frac{-u^2 + u}{1 + u}, \\ u' &= \frac{1}{x} \cdot \frac{-2u^2}{1 + u}, \end{aligned}$$

což je rovnice se separovanými proměnnými, kterou již lze snadno vyjádřit zpětným dosazením $u = \frac{y}{x}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + u}{u^2}\,\mathrm{d}u &= \int -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x, \\ -\frac{1}{u} + \ln|u\,| &= -2\ln|x| + C, \quad C > 0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{u}} \cdot |u\,| &= |x|^{-2} \cdot K, \quad K > 0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}|y| &= |x|^{-1} \cdot K, \\ y &= \frac{k}{|x|} \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}. \end{aligned}$$

## 3.3 Rovnice tvaru $y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$

Předpokládejme, že funkce $f$ je spojitá na nějakém intervalu $I$. Platí-li, že $\gamma = c = 0$, lze rovnici

$$y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right) \tag{3.6}$$

převést na rovnici homogenní

$$y' = f\left(\frac{\alpha + \beta\frac{y}{x}}{a + b\frac{y}{x}}\right), \tag{3.7}$$

pokud $\alpha b - a\beta \neq 0$, nebo je tvaru $y' = konst.$, když $\alpha b - a\beta = 0$. V obou případech již lze rovnici bez problému vyřešit pomocí předchozích metod. Zaměřme se tedy na situaci, kdy $\gamma^2 + c^2 \neq 0$. Zde můžeme rozlišit dva případy:

**a) $\alpha\mathbf{b} - \mathbf{a}\beta \neq \mathbf{0}$**

Pak existuje jediná dvojice čísel $m$, $n$ taková, že splňuje podmínky

$$\alpha m + \beta n + \gamma = 0, \quad am + bn + c = 0. \tag{3.8}$$

Položme tedy $x = u + m$, $y = v + n$. Pak platí $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ a rovnici (3.6) lze transformovat na rovnici

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{\alpha u + \beta v}{au + bv}\right),$$

kterou lze převést na rovnici homogenní. Protože zobrazení definované rovnicemi (3.8) je prosté, dostaneme z řešení této homogenní rovnice všechna řešení rovnice (3.6).

**b) $\alpha\mathbf{b} - \mathbf{a}\beta = \mathbf{0}$**

Je-li $\alpha = a = 0$ nebo $\beta = b = 0$, má rovnice (3.6) separované proměnné. Nechť tedy $\alpha^2 + a^2 \neq 0$ a $\beta^2 + b^2 \neq 0$.
Je-li $b \neq 0$, pak ze vztahu $\alpha b - a\beta = 0$ plyne $\alpha = \frac{a\beta}{b}$ a rovnice (3.6) je tvaru

$$y' = f\left(\frac{\frac{\beta}{b}(ax + by) + \gamma}{ax + by + c}\right).$$

Odtud substitucí $ax + by = z$ dostaneme $y' = \frac{1}{b}(z' - a)$ a tedy

$$\frac{1}{b}(z' - a) = f\left(\frac{\frac{\beta}{b}z + \gamma}{z + c}\right),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

**Příklad 5.** Řešte rovnici $y' = \frac{x-y-1}{x+y+3}$.
Na první pohled je patrné, že $\alpha b - a\beta = 2 \neq 0$, takže zavedeme substituci $x = u + m$, $y = v + n$, kde $m$ a $n$ jsou řešením systému $m - n - 1 = 0$, $m + n + 3 = 0$. Tedy $m = -1$, $n = -2$. Dosazením získáme homogenní rovnici

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{u - v}{u + v}.$$

Substitucí $z = \frac{v}{u}$ obdržíme rovnici se separovanými proměnnými

$$z'u + z = \frac{1 - z}{1 + z},$$
$$z' = \frac{1}{u} \cdot \frac{1 - 2z - z^2}{1 + z}.$$

Je-li $u \neq 0$ a $(1-2z-z^2) \neq 0$, plyne odtud

$$-\int \frac{1+z}{z^2+2z-1}\,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u,$$

$$-\frac{1}{2}\ln|z^2+2z-1| = \ln|u\,| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$|z^2+2z-1|u^2 = K, \quad K\ \neq 0.$$

Je-li $z^2+2z-1=0$, tj. $z=-1\pm\sqrt{2}$, je identita v rovnici splněna. Tento výsledek je však obsažen v obecném řešení pro $K=0$. Každé řešení původní rovnice je tedy implicitně určeno rovnicí

$$(y+2)^2+2(y+2)(x+1)-(x+1)^2=K$$

při vhodné konstantě $K$.

**Příklad 6.** Najděte řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{x-2y+3}{2x-4y+5}$.

Protože $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$ , jedná se o případ b). Položíme tedy $z = x-2y$. Potom pro $z$ dostáváme diferenciální rovnici

$$z' = 1 - 2\cdot\frac{z+3}{2z+5}$$

a po úpravě

$$z' = -\frac{1}{2z+5}.$$

Tato rovnice je již diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, jejímž řešením je

$$z^2+5z = -x+C,$$

kde $C$ je libovolné číslo. Zpětným dosazením za $z$, tj. $z=x-2y$, dostaneme rovnici

$$x^2+4y^2-4xy+6x-10y-C=0.$$

Každá funkce, která je implicitně určená touto rovnicí a má derivaci, je řešením dané diferenciální rovnice. Derivací rovnice podle proměnné $y$ získáme rovnici tvaru $8y-4x-10=0$, která má jediný kořen $y=\frac{2x+5}{4}$. Tato funkce je spojitá na celém intervalu $(-\infty,\infty)$.

## 3.4 Lineární diferenciální rovnice

Dalším velmi jednoduchým, ale velmi důležitým typem diferenciální rovnice 1. řádu je lineární diferenciální rovnice, tj. rovnice tvaru

$$y' = a(x)y + b(x),$$

kde $a$, $b$ jsou funkce spojité na nějakém intervalu $I$.

Další úvahy rozdělíme na dva případy podle toho, zda $b(x) \equiv 0$ nebo $b(x) \neq 0$ na celém intervalu $I$.

### a) Lineární diferenciální rovnice homogenní

Tak se nazývá rovnice tvaru

$$y' = a(x)y. \tag{3.9}$$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, takže každý počáteční problém

$$y' = a(x)y, \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in I, \quad y_0 \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

má právě jedno řešení definované na celém intervalu $I$. Toto řešení získáme integrací a jednoduchými úpravami:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t, \quad y(t) \neq 0,\\
\int_{y_0}^{y} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t,\\
y = y_0 \cdot \exp &\left( \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t \right) \quad \text{pro } y \neq 0. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Zároveň je však vidět, že identita je v původní rovnici (3.10) splněna i pro $y_0 = 0$, takže tento případ není třeba vylučovat. Obecné řešení lze pak zapsat ve tvaru

$$y = C \cdot \exp\left( \int a(t)\,\mathrm{d}t \right), \quad C \in \mathbb{R},$$

kde $\int a(t)\,\mathrm{d}t$ značí libovolnou, ale pevně zvolenou primitivní funkci k $a(t)$.

**Příklad 7.** Najděte řešení diferenciální rovnice $y' = -\frac{x}{1+x^2}y$ splňující počáteční podmínku $y(1) = -3$.
Při hledání tohoto řešení budeme postupovat přesně podle výše popsaného postupu.

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{y} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{1}^{x} -\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
\ln|t| \,\Big|_{-3}^{y} &= -\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\,\Big|_{1}^{x}\\
\left| -\frac{y}{3} \right| &= \left| \frac{2}{1+x^2} \right|^{\frac{1}{2}}\\
y &= \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

### b) Lineární diferenciální rovnice nehomogenní

Nyní přistupme k řešení lineární diferenciální rovnice tvaru

$$y' = a(x)y + b(x), \quad b(x) \neq 0. \tag{3.12}$$

Uvedeme dvě metody řešení počátečního problému

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in I, \quad y_0 \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

### 1) Metoda integračního faktoru

Násobíme-li rovnici (3.13) funkcí

$$\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

můžeme ji psát ve tvaru

$$\left[y(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]' = b(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Integrací a úpravou odtud obdržíme

$$y(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) - y_0 = \int_{x_0}^{x} b(t)\exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t,$$

$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right)\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t\right] \tag{3.14}$$

### 2) Metoda variace konstant

Hledejme řešení počátečního problému (3.13) ve tvaru řešení počátečního problému (3.10), v němž nahradíme počáteční hodnotu $y_0$ funkcí $y_0(x)$[1], tj.

$$y(x) = y_0(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right). \tag{3.15}$$

Úkolem je určit $y_0(x)$ tak, aby funkce $y(x)$ byla řešením počátečního problému (3.13). Po dosazení do této rovnice a jednoduchými úpravami získáme vztah:

$$y_0'(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) + y_0(x)a(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) =$$
$$= a(x)y_0(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) + b(x),$$

[1] odtud název metody

tedy

$$y_0'(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) = b(x),$$

$$y_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t. \tag{3.16}$$

Dosadíme-li tuto rovnici do vztahu (3.15), obdržíme řešení počátečního problému (3.13) opět ve tvaru (3.14).

**Věta 3.2.** *Obecné řešení diferenciální rovnice* (3.12) *se rovná součtu obecného řešení diferenciální rovnice* (3.9) *a libovolného řešení rovnice* (3.12)*.*

*Důkaz.* Nechť $y_1(x)$ je řešením rovnice (3.12), které získáme ze vztahu (3.14) tak, že položíme $y_0 = C$. Tedy:

$$y_1(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right)\left[C + \int_{x_0}^{x} b(t)\exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right]$$

Položme nyní v rovnici (3.14) $y_0 = C + C^*$. Dostaneme obecné řešení rovnice (3.12) ve tvaru:

$$y = C^*\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) + y_1.$$

Tím je věta dokázána. □

**Příklad 8.** Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y' = \frac{3y}{x} + x$

a) metodou variace konstant,

b) metodou integračního faktoru.

**ad a)** Nejdříve nalezneme řešení homogenní rovnice $y' = \frac{3y}{x}$:

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = 3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$$
$$y = Cx^3.$$

Dále předpokládáme, že $C$ je funkcí proměnné $x$, tj. $C = C(x)$ a provedeme derivaci rovnice $y = Cx^3$ podle $x$.

$$y' = C'x^3 + 3\cdot Cx^2,$$
$$y' = 3\cdot\frac{Cx^3}{x} + x.$$

Z tohoto systému rovnic již snadno vyjádříme funkci $C$:

$$C'x^3 = x,$$
$$C = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$
$$C = -\frac{1}{x}.$$

Jedno řešení je tedy tvaru $y_1 = -\frac{1}{x} \cdot x^3 = -x^2$ a obecné řešení původní nehomogenní lineární rovnice získáme tak, že k němu přičteme obecné řešení homogenní rovnice, tj.

$$y = Cx^3 - x^2.$$

**ad b)** Nyní se pokusme vyřešit tento příklad metodou integračního faktoru, tj. budeme postupovat tak, že celou rovnici vynásobíme výrazem:
$\exp\left(-\int a(x)\,\mathrm{d}x\right) = \exp\left(-\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \exp(-3\ln x) = x^{-3}$.

$$\begin{aligned}
y' \cdot x^{-3} - 3yx^{-2} &= x^{-2},\\
[y \cdot x^{-3}]'_x &= x^{-2},\\
y \cdot x^{-3} &= \int x^{-2}\,\mathrm{d}x,\\
y \cdot x^{-3} &= -\frac{1}{x} + C,\\
y &= Cx^3 - x^2.
\end{aligned}$$

Vidíme, že výsledek je totožný s výsledkem, který jsme získali metodou variace konstant, ale metoda integračního faktoru je rychlejší, zejména při řešení Cauchyovy úlohy.

## 3.5 Bernoulliova rovnice

Lineární diferenciální rovnice je zvláštním případem rovnice Bernoulliovy

$$y' = a(x)y + b(x)y^r, r \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Nadále budeme opět předpokládat, že funkce $a$, $b$ jsou spojité na nějakém intervalu $I$ a že $b(x) \neq 0$. Pro $r = 0$ nebo $r = 1$ je rovnice (3.17) lineární. Ukážeme, že i pro $r \neq 0$ a $r \neq 1$ lze rovnici (3.17) převést na rovnici lineární. Vynásobením celé rovnice výrazem $y^{-r}$ obdržíme

$$y'y^{-r} = a(x)y^{1-r} + b(x).$$

Užitím substituce $y^{1-r} = z$, tj. $(1-r)y^{-r}y' = z'$, obdržíme

$$z' = (1-r)a(x)z + (1-r)b(x),$$

což je rovnice lineární.

**Příklad 9.** Najděte řešení rovnice $y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{y}$.
Vynásobením $y$ získáváme

$$yy' = \frac{y^2}{x} + 1.$$

Zaveďme novou proměnnou $z = y^2$. Derivováním obdržíme $z' = 2yy'$ a uvažovanou rovnici lze transformovat na rovnici lineární

$$z' = 2\frac{z}{x} + 2.$$

Jejím řešením je $z = Cx^2 - 2x$ a řešeními původní rovnice jsou tedy funkce

$$y = \sqrt{Cx^2 - 2x} \quad \text{a} \quad y = -\sqrt{Cx^2 - 2x}.$$

Je-li $C > 0$, existují tato řešení na intervalu $(-\infty, 0)$ nebo na intervalu $(\frac{2}{c}, \infty)$. Je-li $C < 0$, jsou řešení definovaná na intervalu $(\frac{2}{c}, 0)$ a pro $C = 0$ na intervalu $(-\infty, 0\rangle$.

## 3.6 Exaktní rovnice

Na závěr této kapitoly věnujme pozornost diferenciální rovnici typu

$$y' = -\frac{p(x,y)}{q(x,y)},$$

neboli

$$p(x,y)\mathrm{d}x + q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{3.18}$$

kde $p$ a $q$ jsou funkce definované na nějaké oblasti $G$ roviny $(x, y)$.

**Definice 6.** Předpokládejme, že existuje funkce $F(x,y)$ taková, že na $G$ platí

$$\mathrm{d}F(x,y) = p(x,y)\mathrm{d}x + q(x,y)\mathrm{d}y.$$

Pak je výraz $p(x,y)\mathrm{d}x+q(x,y)\mathrm{d}y$ **totálním diferenciálem** funkce $F$, funkce $F$ se nazývá **kmenová funkce** totálního diferenciálu a diferenciální rovnice (3.18) se nazývá **exaktní diferenciální rovnice**.

Je-li rovnice exaktní, pak je kmenová funkce $F$ určena jednoznačně až na aditivní konstantu, neboť $\frac{\partial(F-G)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial(F-G)}{\partial y}$ pro každou dvojici takových funkcí $F$, $G$. [2]

Je-li $y = \varphi(x)$, $x \in I$ řešení exaktní rovnice (3.18) na nějakém intervalu $I$ a $q(x, \varphi(x)) \neq 0$ pro $x \in I$, pak je $F(x, \varphi(y))$ konstantní na $I$, neboť

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,\varphi(x)) &= \frac{\partial}{\partial x}F(x,\varphi(x)) + \frac{\partial}{\partial y}F(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\\ &= p(x,\varphi(x)) + q(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.\end{aligned}$$

pro všechna $x \in I$.

Naopak, je-li rovnice (3.18) exaktní a $\varphi$ je diferencovatelná funkce taková, že $F(x, \varphi(x))$ je konstantní a $q(x, \varphi(x)) \neq 0$ na $I$, pak

$$\begin{aligned}0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,\varphi(x)) &= \frac{\partial}{\partial x}F(x,\varphi(x)) + \frac{\partial}{\partial y}F(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\\ &= p(x,\varphi(x)) + q(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).\end{aligned}$$

[2] Tvrzení plyne z Taylorovy věty

pro $x \in I$ a $\varphi(x)$ je řešením rovnice (3.18).

Obecné řešení exaktní rovnice je implicitně určeno rovnicí $F(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Jednoduchá postačující podmínka pro exaktnost rovnice (3.18) a návod jak určit funkci $F$ jsou uvedeny v následující větě.

**Věta 3.3.** *Nechť $p$, $g, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial x}$ jsou funkce spojité v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Je-li v tomto okolí $q(x, y) \neq 0$ a*

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial q}{\partial x}(x, y), \tag{3.19}$$

*je rovnice exaktní a má v jistém okolí bodu $x_0$ jediné řešení splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.*
*Toto řešení je dáno implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, kde*

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} p(t, y)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} q(x_0, t)\,\mathrm{d}t \tag{3.20}$$

*Důkaz.* Poněvadž

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) &= p(x, y), \\
\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial p}{\partial y}(t, y)\,\mathrm{d}t + q(x_0, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial q}{\partial t}(t, y)\,\mathrm{d}t + q(x_0, y) \\
&= q(x, y) - q(x_0, y) + q(x_0, y) = q(x, y),
\end{aligned}$$

je funkce (3.20) diferencovatelná v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ a jejím totálním diferenciálem je výraz $p(x, y)\mathrm{d}x + q(x, y)\mathrm{d}y$ Rovnice (3.18) je tedy exaktní. Protože $F(x_0, y_0) = 0$ a $q(x, y) \neq 0$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$, existuje podle věty o implicitní funkci v okolí bodu $x_0$ jediná funkce $y = \varphi(x)$ daná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, která je řešením počáteční úlohy (3.18), $y(x_0) = y_0$. Tím je důkaz věty dokončen. □

*Poznámka.* Je-li $q(x, y) \neq 0$ v nějaké oblasti, lze rovnici (3.18) psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\rho(x, y) \cdot p(x, y)}{\rho(x, y) \cdot q(x, y)} = 0. \tag{3.21}$$

Je-li tato rovnice exaktní, nazývá se funkce $\rho$ **integrační faktor**. Postačující podmínka exaktnosti je nyní

$$\frac{\partial(\rho p)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho q)}{\partial x} \text{ pro všechna } [x, y] \in G.$$

To znamená, že když se podaří najít řešení $\rho$ této rovnice, $\rho(x, y) \neq 0$, pak je rovnice (3.18) redukovatelná na rovnici exaktní. Integrační faktor lze snadno najít v těchto případech:

1.
$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\alpha(x);\ \text{potom}\ \rho=\exp\left(\int\alpha(x)\,\mathrm{d}x\right). \tag{3.22}$$

2.
$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=\beta(y);\ \text{potom}\ \rho=\exp\left(\int\beta(y)\,\mathrm{d}y\right). \tag{3.23}$$

**Příklad 10.** Ukažte, že levá strana rovnice $(3x^2+2y)\,\mathrm{d}x+(2x-3)\,\mathrm{d}y=0$ je totálním diferenciálem a vyřešte exaktní rovnici.
Exaktnost rovnice ověříme podle vztahu (3.19). Chceme tedy zjistit, zda platí $P_y=Q_x$.

$$P_y=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}y}(3x^2+2y)=2,$$
$$Q_x=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}(2x-3)=2.$$

Rovnost tedy platí, a proto výraz $(3x^2+2y)\,\mathrm{d}x+(2x-3)\,\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem kmenové funkce $F(x,y)$. Obecné řešení této exaktní rovnice budeme hledat podle vztahu (3.20) pomocí neurčitého integrálu:

$$\int(3x^2+2y)\,\mathrm{d}x=x^3+2yx+C(y),$$
$$\int(2x-3)\,\mathrm{d}y=2yx-3y+C(x).$$

Z těchto vztahů je již patrné, že obecným řešením dané rovnice je rovnice

$$x^3+2xy-3y=C.$$

**Příklad 11.** Najděte obecné řešení rovnice $(\mathrm{e}^{2x}-y^2)\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$.
Nejdříve opět ověříme, zda se jedná o exaktní diferenciální rovnici, tj. zda $P_y=Q_x$.

$$P_y=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}y}(\mathrm{e}^{2x}-y^2)=-2y,$$
$$Q_x=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}(y)=0.$$

Vidíme tedy, že rovnost neplatí a tedy daná rovnice není exaktní. Pokusíme se tedy najít integrační faktor $\rho$ podle vztahu (3.22), resp. (3.23).

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{-2y}{y}=-2$$

a tato funkce již není funkcí proměnné $y$. Integrační faktor $\rho$ tedy bude tvaru

$$\rho = \mathrm{e}^{\int -2\,\mathrm{d}x},$$
$$\rho = \mathrm{e}^{-2x}.$$

Vynásobením původní rovnice integračním faktorem získáme novou rovnici tvaru

$$(1 - y^2 \cdot \mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x + (e^{-2x}y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

což už je exaktní diferenciální rovnice, protože platí $P_y = Q_x$:

$$P_y = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}y}(1 - y^2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}) = -2y\mathrm{e}^{-2x},$$
$$Q_x = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-2x}y) = -2y\mathrm{e}^{-2x}.$$

Obecné řešení již najdeme snadno integrací podle proměnných $x$ a $y$.

$$\int (1 - y^2 \cdot \mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x = x + \frac{y^2}{2} \cdot \mathrm{e}^{-2x} + C(y),$$
$$\int (\mathrm{e}^{-2x}y)\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} \cdot \mathrm{e}^{-2x} + C(x)$$

a tedy obecné řešení je tvaru

$$y^2 = (K - 2x) \cdot e^{2x}, \text{ kde K=-2C.}$$

# 4 Dif. rovnice nerozřešené vzhledem k derivaci

Ne vždy se nám podaří rozřešit rovnici $F(x, y, y') = 0$ vzhledem k derivaci $y'$. Proto je někdy výhodné rozřešit danou rovnici buď vzhledem k $x$ nebo $y$. Tak dostaneme diferenciální rovnice tvaru

$$x = f(y, y') \quad \text{nebo} \quad y = f(x, y'),$$

jejichž speciálními případy jsou rovnice tvaru

$$x = f(y') \quad \text{a} \quad y = f(y').$$

V rámci této kapitoly si ukážeme postup při hledání řešení těchto rovnic, který je založen na tzv. **metodě zavedení parametrů**. Při užití této metody se obvykle zavádí označení $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, takže rovnice, kterými se budeme zabývat, jsou tvaru

$$F(x, y, p) = 0 \ , \ p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{4.1}$$

Užití metody zavedení parametrů $u$, $v$ pro řešení této rovnice je založeno na předpokladu, že se nám podaří najít funkce $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\omega(u, v)$, které jsou spojité na nějaké oblasti roviny $(u, v)$ a mají v $G$ tyto vlastnosti:

**a)** $F[\varphi(u, v), \psi(u, v), \omega(u, v)] = 0$,

**b)** Funkce $\varphi$, $\psi$ mají spojité parciální derivace 1. řádu $\varphi_u$ ,$\varphi_v$, $\psi_u$, $\psi_v$ a platí $\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u \neq 0$.

Ze vztahu $\mathrm{d}y = p \cdot \mathrm{d}x$ plyne, že funkce $\varphi$, $\psi$, $\omega$ jsou dány vztahem:

$$\psi_u \mathrm{d}u + \psi_v \mathrm{d}v = \omega(\varphi_u \mathrm{d}u + \varphi_v \mathrm{d}v),$$

takže

$$(\psi_u - \omega\varphi_u)\mathrm{d}u + (\psi_v - \omega\varphi_v)\mathrm{d}v = 0. \tag{4.2}$$

Kdyby na nějaké podmnožině oblasti $G$ platilo, že $(\psi_u - \omega\varphi_u) = 0$, $(\psi_v - \omega\varphi_v) = 0$, bylo by $\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u = 0$, což je ve sporu s předpokladem. Pokud tedy platí např. $(\psi_v - \omega\varphi_v) \neq 0$, pak lze rovnici (4.2) zapsat ve tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = -\frac{\psi_u - \omega\varphi_u}{\psi_v - \omega\varphi_v}, \tag{4.3}$$

což už je rovnice rozřešená vzhledem k derivaci.

Je-li $v$ nějaké řešení této rovnice, má funkce $x = \varphi(u, v(u))$ derivaci různou od nuly, neboť

$$x' = \varphi_u + \varphi_v \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \varphi_u - \varphi_v \cdot \frac{\psi_u - \omega\varphi_u}{\psi_v - \omega\varphi_v} = \frac{\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u}{\psi_v - \omega\varphi_v} \neq 0,$$

takže

$$x = \varphi\left(u, v(u)\right), y = \psi\left(u, v(u)\right) \tag{4.4}$$

je parametrickým vyjádřením rovnice (4.2).

Předpoklad **b)** zaručuje, že zobrazení $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ je prosté, takže každému řešení rovnice (4.3) odpovídá právě jedno řešení rovnice (4.2). Je-li $v$ řešení rovnice (4.3), které je určeno počáteční podmínkou $v(u_0) = v_0$, $[u_0, v_0] \in G$, pak (4.4) je řešení rovnice (4.1) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$.

## 4.1 Rovnice tvaru $y = f(y')$, $x = f(y')$

Tyto rovnice, které explicitně neobsahují jednu z proměnných, lze snadno řešit pro $\forall p \neq 0$ za předpokladu, že funkce $f$ má na nějakém intervalu $J$ spojitou a od nuly různou derivaci $f'(p)$, kde $p = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Uvažujeme nejprve rovnici tvaru

$$y = f(y').$$

Položíme-li opět $y' = p$, dostaneme rovnici

$$y = f(p). \tag{4.5}$$

Derivováním této rovnice podle proměnné $x$ dostaneme

$$p = f'(p) \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

a odtud

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{f'(p)},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými. Neobsahuje-li interval $J$ nulu je její řešení tvaru

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}\,\mathrm{d}p =: z(p). \tag{4.6}$$

Řešení rovnice (4.5) lze tedy vyjádřit parametricky

$$x = z(p), \quad y = f(p), \quad p \in J.$$

Podle předpokladu je $f'(p) \neq 0$, $p \neq 0$, takže $z(p)$ je monotónní a existuje $z^{-1}(x)$. Po vyloučení parametru $p$ obdržíme řešení $y$ ve tvaru

$$y = f\left(z^{-1}(x)\right).$$

Za uvedených předpokladů dostaneme tímto způsobem všechna řešení rovnice (4.5).

Postup při řešení rovnice $x = f(y')$ je zcela analogický. Položíme $y' = p$, tj.

$$x = f(p) \tag{4.7}$$

a tuto rovnici derivujeme podle $y$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} &= f'(p) \cdot p \end{aligned}$$

a odtud

$$y = \int f'(p) \cdot p \, \mathrm{d}p =: z(p). \tag{4.8}$$

Parametrické řešení rovnice (4.7) je tedy tvaru

$$x = f(p), \quad y = z(p), \quad p \in J.$$

**Příklad 12.** Řešte diferenciální rovnici, která explicitně neobsahuje proměnnou $x$: $y = y'^2 + y'^3$

Rovnice $y = p^2 + p^3$ je spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$ a pro $p \neq 0$ a $p \neq -\frac{2}{3}$ má zde i spojitou nenulovou derivaci $f'(p) = 2p + 3p^2$. Lze ji tedy řešit metodou derivování podle $x$:

$$\begin{aligned} p &= 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 3p^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} &= \frac{2p + 3p^2}{p}, \\ x &= 2p + \frac{3}{2}p^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Parametrické řešení je tedy tvaru:

$$\begin{aligned} y &= p^2 + p^3, \\ x &= 2p + \frac{3}{2}p^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Příklad 13.** Řešte diferenciální rovnici, která explicitně neobsahuje proměnnou $y$: $x = 2y' - \frac{1}{y'^2}$

Rovnice $x = 2p - \frac{1}{p^2}$ je spojitá na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ a má zde také spojitou nenulovou derivaci $f'(p) = 2 + \frac{1}{p^3}$ pro $p \neq 0$, tj. lze ji řešit derivováním podle $y$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= 2 \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + \frac{2}{p^3} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} &= 2p + \frac{2}{p^2}, \\ y &= p^2 - \frac{2}{p} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Parametrické řešení je tedy tvaru:

$$x = 2p - \frac{1}{p^2},$$
$$y = p^2 - \frac{2}{p} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

## 4.2 Rovnice tvaru $y = f(x, y')$, $x = f(y, y')$

Zabývejme se nyní diferenciálními rovnicemi, které jsou rozřešitelné vzhledem k $y$ nebo vzhledem k $x$. Zavedeme značení $y' = p$. Pak tyto rovnice jsou tvaru

$$y = f(x, p), \tag{4.9}$$

kde $x$ a $p$ jsou zvolené parametry, tj. $\varphi(x,p) = x$, $\psi(x,p) = f(x,p)$, $\omega(x,p) = p$; a

$$x = f(y, p), \tag{4.10}$$

kde jsme za parametry zvolili $y$ a $p$, tj. $\varphi(y,p) = f(y,p)$, $\psi(y,p) = y$, $\omega(y,p) = p$.

O funkci $f$ budeme předpokládat, že má spojité parciální derivace podle obou proměnných, přičemž $\frac{\partial f}{\partial p} \neq 0$ v nějaké oblasti $G$.

Derivací rovnice (4.9) podle $x$ získáme:

$$p = f_x + f_p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

a tedy

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{p - f_x}{f_p}, \tag{4.11}$$

což je přesně rovnice odpovídající tvaru (4.3).

Je-li $p = z(x)$ řešení této rovnice, je $y = f(x, z(x))$ řešení rovnice (4.9). Je-li $x_0$, $y_0$, $p_0$ trojice čísel takových, že $y_0 = f(x_0, p_0)$, pak řešení $z(x)$ rovnice (4.11) splňující počáteční podmínku $z(x_0) = p_0$ odpovídá řešení $y = f(x, z(x))$, které splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Stejně postupujeme i v případě rovnice (4.10). Jejím derivováním podle $y$ a jednoduchou úpravou získáme rovnici tvaru

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \left(\frac{1}{p} - f_y\right) f_p^{-1}. \tag{4.12}$$

*Poznámka.* Srovnáme-li předchozí způsoby řešení rovnic

$$y = f(p), \quad y = f(x,p), \quad x = f(p), \quad x = f(y,p),$$

vidíme, že každou z nich jsme převedli na rovnici, kterou lze obdržet derivováním původní rovnice podle $x$, resp. podle $y$

$$\begin{aligned} p &= f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \quad & p &= f_x + f_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \\ \frac{1}{p} &= f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}, \quad & \frac{1}{p} &= f_y + f_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}. \end{aligned}$$

Proto se této metodě říká **metoda derivování**.

**Příklad 14.** Najděte řešení diferenciální rovnice tvaru $xy'^2 + 2xy' - y = 0$. Vidíme, že tato rovnice je rozřešitelná vzhledem k $y$, takže budeme postupovat podle metody derivování podle $x$. Nejdříve zavedeme označení $y' = p$. Derivací rovnice

$$y = xp^2 + 2xp$$

a následnou jednoduchou úpravou získáme

$$\begin{aligned} p &= 2xpp' + p^2 + 2xp' + 2p, \\ p' &= -\frac{p(p+1)}{2x(p+1)} \qquad \text{pro } x \neq 0 \text{ a } x \neq -y. \end{aligned}$$

Řešením této rovnice je $p^2 = \frac{k}{x}$ a tedy $(y-k)^2 = 4xk$, což je systém parabol, ke kterým přidáme ještě tzv. singulární řešení $y = -x$. Jeho dosazením do původní rovnice totiž zjistíme, že jej není třeba vylučovat, protože je také řešením.

## 4.3 Lagrangeova rovnice

**Věta 4.1.** *Nechť funkce $f$ a $g$ mají spojité derivace na intervalu $I = (a, b)$ a nechť*

$$f(p) \neq p \tag{4.13}$$

*Nechť existuje interval $J := (c, d)$ takový, že*

$$xf'(p) + g'(p) \neq 0,\ \forall x \in J,\ \forall p \in I. \tag{4.14}$$

*Pak množinu všech řešení Lagrangeovy rovnice*

$$y = f(p)x + g(p) \tag{4.15}$$

*získáme metodou derivování.*

*Důkaz.* Předpoklady věty zaručují, že lze metody derivování užít, takže stačí ukázat, že lze najít všechna řešení rovnice, kterou derivováním obdržíme. Ta je tvaru

$$p = f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}x + f(p) + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

a po úpravě

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{p - f(p)}{xf'(p) + g'(p)} \tag{4.16}$$

Vzhledem k předpokladům (4.13) a (4.14) je $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \neq 0$, takže řešení rovnice (4.16) jsou na intervalu $J$ ryze monotónní. Všechna řešení této rovnice obdržíme jako funkce inverzní ke všem řešením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}.$$

To je diferenciální rovnice lineární, jejíž koeficienty jsou funkce spojité na intervalu $J$. Je-li $\psi(p, C)$ obecné řešení této rovnice, je

$$x = \psi(p, C) \ , \ y = \psi(p, C) \cdot f(p) + g(p) \ , \ p \in J$$

parametrickým vyjádřením obecného řešení Lagrangeovy rovnice (4.15) na intervalu s koncovými body $\psi(a)$, $\psi(b)$. □

*Poznámka.* Izoklinami Lagrangeovy rovnice jsou přímky

$$y = f(C)x + g(C) \ , \ C \in \mathbb{R}.$$

Dále platí-li v nějakém čísle $C_0$:

$$f(C_0) = C_0,$$

tedy i když je porušen předpoklad (4.13), je přímka

$$y = C_0 x + g(C_0)$$

také řešením rovnice (4.15), jak se snadno přesvědčíme dosazením.

**Příklad 15.** Najděte řešení Lagrangeovy rovnice $y = x(1 + y') + y'^2$.
Do dané rovnice zavedeme parametr $p = y'$. Na první pohled je patrné, že jak funkce $(1 + p)$, tak funkce $p^2$ jsou definované na intervalu $(-\infty, \infty)$ a mají tam i spojité derivace. Předpoklad $xf'(p) + g'(p) \neq 0$ je splněn pro $x \neq -2p$. Při hledání řešení budeme postupovat podle metody derivování (podle $x$):

$$\begin{aligned} y &= x(1 + p) + p^2, \\ p &= 1 + p + (x + 2p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x + 2p) + 1. \end{aligned}$$

Nyní přejdeme k inverzní funkci $x(p)$, pro kterou získáme diferenciální rovnici tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -x - 2p.$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici prvního řádu, kterou snadno vyřešíme metodou integračního faktoru:

$$\begin{aligned} x' &= -x - 2p \quad |\mathrm{e}^{-\int -1\,\mathrm{d}p} = \mathrm{e}^p \\ x' \cdot \mathrm{e}^p + x \cdot \mathrm{e}^p &= -2p \cdot \mathrm{e}^p, \\ (x \cdot \mathrm{e}^p)' &= -2p \cdot \mathrm{e}^p, \\ x &= \mathrm{e}^{-p} \left( -2 \int p \cdot \mathrm{e}^p \,\mathrm{d}p \right), \\ x &= \mathrm{e}^{-p} \left( -2(p \cdot \mathrm{e}^p - \mathrm{e}^p + K) \right), \\ x &= -2(p-1) + C \cdot \mathrm{e}^{-p}, \quad C = -2K. \end{aligned}$$

Tato rovnice spolu s rovnicí

$$y = C \cdot \mathrm{e}^{-p}(1+p) + 2 - p^2 \;, \; p \in (-\infty, \infty),$$

parametricky určuje řešení dané diferenciální rovnice.

## 4.4 Clairautova rovnice

Clairautova rovnice

$$y = px + g(p) \tag{4.17}$$

je zvláštním případem rovnice Lagrangerovy, a to když $f(p) = p$ na nějakém intervalu $J := (p_1, p_2)$, což jsme při řešení této rovnice vyloučili.

**Věta 4.2.** *Předpokládejme, že funkce $g$ má spojitou derivaci $g'(p)$ a že platí $x + g'(p) \neq 0$ pro všechna $p \in J$. Dále nechť má $g(p)$ v intervalu $J$ druhou derivaci, která je od nuly různá pro všechna $p \in J$. Pak lze rovnici (4.17) řešit metodou derivování.*

*Důkaz.* Derivováním rovnice (4.17) podle $x$ obdržíme

$$\begin{aligned} p &= x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + p + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(x + g'(p)\right). \end{aligned}$$

Nechť nejprve

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ , takže } p = C \text{ , } C \in J.$$

Vidíme, že integrálními křivkami jsou polopřímky

$$y = C \cdot x + g(C), \quad C \in J, \quad x \neq -g'(C).$$

Zároveň je vidět, že bod $x = -g'(C)$ není třeba vylučovat, neboť každá z funkcí

$$y = C \cdot x + g(C) \tag{4.18}$$

je řešením rovnice (4.17) pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Nechť nyní $x + g'(p) = 0$. Protože podle předpokladů věty má $g(p)$ v intervalu $J$ druhou derivaci, která je od nuly různá pro všechna $p \in J$, je $g'(p)$ monotónní a v intervalu s krajními body $\alpha$, $\beta$, kde

$$\alpha = \lim_{p \to p_1^+} g'(p), \quad \beta = \lim_{p \to p_2^-} g'(p),$$

existuje funkce $p = \psi(x)$ taková, že

$$x + g'(\psi(x)) = 0. \tag{4.19}$$

Ukážeme, že funkce

$$y = x \cdot \psi(x) + g(\psi(x)) \tag{4.20}$$

nebo v parametrickém vyjádření

$$x = -g'(p), \quad y = -p \cdot g'(p) + g(p)$$

je též řešením rovnice (4.17). Skutečně podle pravidel o derivování složené funkce je

$$\begin{aligned} y' &= \psi(x) + x \cdot \psi'(x) + \psi'(x) g'(\psi(x)), \\ &= \psi(x) + \psi'(x) \left( x + g'(\psi(x)) \right), \\ &= \psi(x), \end{aligned}$$

takže

$$y = x + \psi(x) + g(\psi(x)) = p(x) + g(p),$$

a to je tvrzení. □

Řešení (4.18) geometricky znamenají systém přímek. Mezi těmito přímkami a funkcí $y(x)$ z (4.20) je velmi úzký vztah:
Každá přímka ze systému (4.18) je tečnou k integrální křivce (4.20) a každá tečna grafu funkce $y(x)$ je jednou z přímek systému (4.18). Obě křivky totiž procházejí bodem $[x_0, y_0]$, $x_0 = -g'(C)$, $y_0 = -g'(C)C + g(C)$ a jejich tečny mají v tomto bodě směrnici $p_0 = C$. Na základě této vlastnosti nazýváme graf funkce $y(x)$ **obálkou** systému přímek (4.18). Je nutné si ještě uvědomit, že Cauchyova úloha s počáteční podmínkou na obálce má nekonečně mnoho řešení.

Ke Clairautově diferenciální rovnici vedou mnohé úlohy o tečnách a o systémech přímek $y = ax + b$, kde mezi parametry $a$ a $b$ platí nějaký vztah $b = g(a)$. Protože $y' = a$, dosazením za $a$ a $b$ do rovnice tohoto systému přímek dostaneme diferenciální rovnici

$$y = xy' + g(y'),$$

tj. Clairautovu diferenciální rovnici. Jejími řešeními jsou přímky daného systému.

**Definice 7.** Křivka se nazývá **obálka systému křivek** $F(x, y, \alpha) = 0$, jestliže splňuje tyto podmínky :

1. dotýká se každé křivky soustavy,
2. každý její bod je bodem dotyku s nějakou křivkou soustavy.

Existuje-li obálka soustavy křivek $F(x, y, \alpha) = 0$, najde se vyloučením parametru $\alpha$ z rovnic

$$F(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{a} \quad F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

**Příklad 16.** Řešte diferenciální rovnici $y = xy' + 2y'^2$.
Do rovnice zavedeme parametr $p = y'$, tj. $y = xp + 2p^2$.
Vidíme, že funkce $g(p) = p^2$ je definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$ a má zde i spojitou derivaci. Podle předpokladu musí dále platit, že $x + g'(p) \neq 0$, což pro $x \neq -4p$ znamená, že můžeme k řešení příkladu použít metodu derivování:

$$\begin{aligned} p &= p + xp' + 4p \cdot p', \\ 0 &= p'(x + 4p). \end{aligned}$$

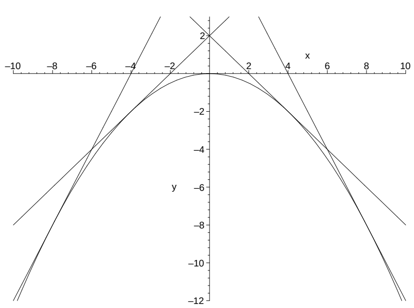
Tato rovnice má řešení $p' = 0$, tj. $p = C$, což po dosazení do původní rovnice dá vztah

$$y = Cx + 2C^2.$$

Tato rovnice zadává systém polopřímek v rovině.
Vidíme, že $p = -\frac{1}{4}x$ je také řešením původní rovnice, takže jej není třeba vylučovat. Tím získáme další řešení

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{8}x^2.$$

Obecným řešením dané diferenciální rovnice je integrální křivka $y = -\frac{1}{8}x^2$ a systém přímek $y = Cx + 2C^2$. (Obr. 2)




Obr. 2. Křivka $y = -\frac{1}{8}x^2$ a systém přímek $y = Cx + 2C^2$

# 5 Aplikace diferenciálních úloh

Diferenciální rovnice hrají významnou roli při řešení geometrických úloh. V této kapitole si ukážeme jejich uplatnění při řešení tzv. úloh o trajektorii.

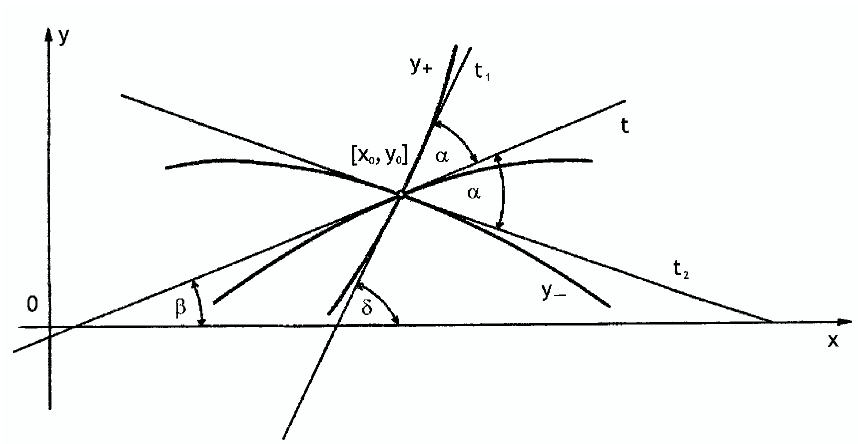
## 5.1 Úlohy o trajektorii

Tyto úlohy se zabývají problémem určit diferenciální rovnici, jejíž integrální křivky protínají všechny integrální křivky rovnice

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \tag{5.1}$$

pod konstantním úhlem $\alpha$. Takové křivky se nazývají **izogonální trajektorie** integrálních křivek rovnice (5.1).

Řekneme, že křivky procházející bodem $[x_0, y_0]$ se protínají pod úhlem $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}\rangle$ právě tehdy, když mají v tomto bodě tečny svírající úhel $\alpha$. Je-li $y$ nějaká integrální křivka, pak každým jejím bodem procházejí dvě křivky, které ji protínají pod stejným úhlem (s výjimkou úhlu $\alpha = \frac{\pi}{2}$, kdy se tyto křivky ztotožní). Jejich tečny $t_1$ a $t_2$ v tomto bodě jsou symetrické podle tečny $t$ integrální křivky $y$ procházející tímto bodem. Z toho vyplývá, že ke každému svazku integrálních křivek existují dva systémy $S_+$ a $S_-$ křivek izogonálních (Obr. 3)




Obr. 3. Izogonální křivky

Přistupme nyní k problému jejich nalezení. Nechť $[x_0, y_0] \in G \subseteq \mathbb{R}^2$, $y = y(x)$ je integrální křivka rovnice (5.1) procházející tímto bodem a nechť $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ jsou trajektorie procházející tímto bodem a protínající $y$ pod úhlem $\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Směrnice tečny integrální křivky $y$ v bodě $[x_0, y_0]$ je $y'(x_0) = \operatorname{tg} \delta$, kde $\delta$ značí úhel, který svírá tato tečna s osou $x$. Označíme-li $\beta = \operatorname{arctg} y(x_0)$, pak jedna z křivek $y_1$, $y_2$ má směrnici $\operatorname{tg}(\beta + \alpha)$, označíme ji $y_+$, a druhá $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$, označíme ji $y_-$. Mezi úhly $\delta$ a $\beta$ tedy platí vztah $\delta = \beta \pm \alpha$.

Oba případy můžeme stručně zapsat formulí

$$y'_\pm(x_0) = \operatorname{tg}(\beta \pm \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta \pm \operatorname{tg} \alpha}{1 \mp \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} = \frac{y'_1(x_0) \pm \operatorname{tg} \alpha}{1 \mp y'_1(x_0) \operatorname{tg} \alpha}.$$

Odtud je vidět, že diferenciální rovnice izogonálních trajektorií integrálních křivek rovnice (5.1) dostaneme nahrazením funkce $y'(x)$ funkcí

$$\frac{y'(x) \pm \operatorname{tg} \alpha}{1 \mp y'(x) \operatorname{tg} \alpha},$$

čímž dostaneme

$$F\left(x, y(x), \frac{y'(x) \pm \operatorname{tg} \alpha}{1 \mp y'(x) \operatorname{tg} \alpha}\right) = 0. \tag{5.2}$$

Je-li diferenciální rovnice (5.1) rozřešená vzhledem k derivaci,

$$y' = f(x, y), \tag{5.3}$$

jsou izogonální trajektorie řešeními rovnice

$$\frac{y'(x) \pm \operatorname{tg} \alpha}{1 \mp y'(x) \operatorname{tg} \alpha} = f(x, y),$$

a po úpravě

$$(f(x, y) \mp \operatorname{tg} \alpha)\mathrm{d}x - (1 \pm f(x, y) \operatorname{tg} \alpha)\mathrm{d}y = 0. \tag{5.4}$$

Nyní se zabývejme případem, kdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, který jsme zatím z našich úvah vyloučili. Jedná se o případ, kdy je trajektorie kolmá na každou křivku uvažovaného systému a systémy $S_+$ a $S_-$ tak splývají do jednoho. Tyto trajektorie nazýváme **ortogonální trajektorie** integrálních křivek.

Nechť tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Pak jsou tečny integrální křivky a ortogonální trajektorie v každém jejich průsečíku navzájem kolmé a je-li směrnice jedné z nich $k$, je směrnice druhé $-\frac{1}{k}$. Odtud plyne, že

$$F\left(x, y(x), -\frac{1}{y'(x)}\right) = 0$$

je rovnicí ortogonálních trajektorií integrálních křivek rovnice (5.1) a

$$y'(x) = -\frac{1}{f(x,y)}$$

je rovnicí ortogonálních trajektorií integrálních křivek rovnice (5.3).

Svazek křivek $S$, jehož izogonální trajektorie se mají určit, může být také popsán rovnicí

$$F(x,y) = C, \tag{5.5}$$

kde $C$ je reálný parametr, $C \in I \subseteq \mathbb{R}$, a $F$ je funkce definovaná a spojitá na oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^2$, na které má spojité parciální derivace $F_x$, $F_y$, pro které platí $F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y) \neq 0$ [3].

Derivováním rovnice (5.5) obdržíme

$$F_x(x,y)\mathrm{d}x + F_y(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

což je exaktní diferenciální rovnice, jejíž obecné řešení je právě (5.5). Je-li $F_y(x,y) \neq 0$, lze tuto rovnici psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}, \tag{5.6}$$

a tedy diferenciální rovnice izogonálních trajektorií svazku (5.5) je

$$\frac{y'(x) \pm \operatorname{tg}\alpha}{1 \mp y'(x)\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

a po úpravě

$$(-F_x(x,y) \pm F_y(x,y)\operatorname{tg}\alpha)\mathrm{d}x - (F_y(x,y) \pm F_x(x,y)\operatorname{tg}\alpha)\mathrm{d}y = 0.$$

Diferenciální rovnice ortogonálních svazků (5.5) je

$$F_y(x,y)\mathrm{d}x - F_x(x,y)\mathrm{d}y = 0. \tag{5.7}$$

**Příklad 17.** K systému křivek $y - \alpha x^2 = 0$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$ najděte ortogonální trajektorie.
Na první pohled je patrné, že daný systém křivek je systém parabol, které mají společnou osu $y$ a procházejí počátkem souřadného systému. Platí tedy $F(x,y,y') = y - \alpha x^2$, $(F_x)^2 + (F_y)^2 = 4\alpha^2x^2 + 1 \neq 0$ v každém bodě $(x,y)$ roviny, $F_x = -2\alpha x \neq 0$ s výjimkou osy $y$, $F_y = 1 \neq 0$. Dosazením do rovnice (5.7) dostaneme

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha x y' &= 0, \\ y - \alpha x^2 &= 0. \end{aligned}$$

[3] Tento předpoklad zaručuje, že každá křivka svazku má ve všech bodech tečnu.

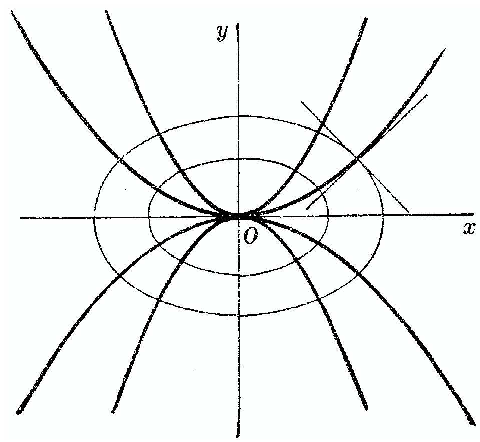
Vyloučením parametru $\alpha$ získáme diferenciální rovnici

$$1 + 2\frac{y}{x}y' = 0.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, jejímž řešením jsou funkce vyjádřené rovnicí

$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = C,\ C \in (0, \infty).$$

Jedná se o systém elips, které mají střed v počátku souřadnicového systému a jejich osy jsou totožné se souřadnicovými osami. To jsou hledané ortogonální trajektorie. K nim přidáme ještě přímku $x = 0$, která je ortogonální trajektorií v těch bodech uvažovaného systému křivek, kde jsou jejich tečny rovnoběžné s osou $x$. To je jediný bod $[0, 0]$, přes který prochází každá křivka uvažovaného systému (Obr. 4).




Obr. 4. Systém ortogonálních trajektorií

**Příklad 18.** Určete rovnici soustavy izogonálních trajektorií systému křivek $x^2 + y^2 - 2\alpha x = 0$ pro úhel $\beta = \frac{\pi}{4}$.
K tomu, abychom získali diferenciální rovnici zadaného systému křivek, potřebujeme nejdříve vyloučit parametr $\alpha$, což provedeme pomocí zadané rovnice systému křivek a rovnice pro jejich derivace, tj. $2x + 2yy' - 2\alpha = 0$. Tato rovnice je tedy tvaru $x^2 + 2xyy' - y^2 = 0$.
Podle vztahu (5.2) získáme diferenciální rovnici izogonálních trajektorií tak, že funkci $y'(x)$ nahradíme funkcí $\frac{y' - \operatorname{tg}\beta}{1 + y' \operatorname{tg}\beta}$, což pro $\beta = \frac{\pi}{4}$ dává konkrétní funkci $\frac{y'-1}{1+y'}$.
Po dosazení a úpravě dostaneme rovnici tvaru

$$y' = \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{x^2 - y^2 + 2xy}, \quad x \neq -y(1 \pm \sqrt{2})$$

což je homogenní diferenciální rovnice. Tu budeme řešit pomocí substituce $u = \frac{y}{x}$, tedy

$$u' = \frac{1}{x} \frac{(u^2+1)(u-1)}{1 + 2u - u^2}, \quad x \neq 0 \ , \ u \neq 1,$$

je již rovnice se separovanými proměnnými, kterou snadno vyřešíme pomocí rozkladu na parciální zlomky:

$$\int \left( \frac{1}{u-1} - \frac{2u}{u^2+1} \right) \mathrm{d}u = \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x, \quad u \neq 1,$$

$$\ln|u-1| - \ln|u^2+1| = \ln|x| + C, \quad C > 0,$$

$$\frac{|u-1|}{u^2+1} = K|x|, \quad K > 0.$$

Zpětným dosazením $u = \frac{y}{x}$ získáme rovnici

$$\frac{|y-x|}{x^2+y^2} = K, \quad K > 0.$$

Pro $u = 1$ dostaneme dále řešení $y = x$.
Trajektoriemi pod úhlem $\beta = \frac{\pi}{4}$ daného systému křivek jsou tedy přímka $y = x$ a systém křivek

$$K(x^2+y^2) - y + x = 0, \quad K \neq 0,$$

což je systém kružnic, které procházejí počátkem souřadnicového systému a mají středy na přímce $y = -x$.

# 6 Příklady využití diferenciálních rovnic v praxi

K tomu, abychom mohli zkoumat reálné situace, je nejdříve potřebujeme popsat pomocí určitého matematického modelu. Ten se snažíme zkonstruovat tak, aby jeho chování co nejpřesněji odpovídalo vlastnostem zkoumaného objektu. Model tedy lze chápat jako standard idealizovaného chování, na jehož pozadí můžeme posuzovat realitu. Následující matematická analýza vede ke získání teoretických důsledků. Nyní je třeba ověřit, zda jsou v souladu s praktickými poznatky, a případně model vylepšit.

Je však nutné zdůraznit, že matematický model je pouze přibližným popisem reálné skutečnosti (vybíráme pouze některé vlastnosti zkoumaného objektu, nedokonalá znalost zákonitostí popisujících chování reálného světa, nepřesné měření vstupních údajů, různé aproximace zjednodušující skutečnost). Dalším problémem je, že soustavy diferenciálních rovnic popisujících zkoumanou skutečnost mohou být velmi složité, a proto se při rozboru modelu využívá jiných metod než jejich přímé řešení.

V další části se zaměříme na dva jednoduché modely, které lze pomocí elementárních metod snadno vyřešit. Jedná se o nejvýznamnější zástupce ze skupiny tzv. růstových modelů.

## 6.1 Růstové modely

Označme $x(t)$ nějakou číselnou "míru" velikosti jisté populace v čase $t$. Populací zde rozumíme nejen společenstvo živých organismů, například lidí, ale také souhrn atomů radioaktivní látky apod. Příkladem vhodné míry velikosti populace může být počet milionů lidí žijících na Zemi nebo samotný počet přítomných atomů.

Předpokládejme, že $b(t,x)$ vyjadřuje míru přidávání jednotek (jedinců) k populaci za jednotku času na každou jednotku populace v čase $t$ při velikosti populace $x$. Podobně nechť $d(t,x)$ značí míru, ve které jednotky populace umírají nebo jsou z ní odstraňovány. Budeme předpokládat, že $b(t,x)$, $d(t,x)$ jsou spojité nezáporné funkce a že velikost populace $x = x(t)$ je diferencovatelná funkce. Uvažujme nyní změnu velikosti populace na časovém intervalu $\langle t, t+\Delta t\rangle$, kde $\Delta t$ je malé. Vzhledem k výše uvedeným podmínkám lze předpokládat, že

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) - x(t) = {} & [b(t,x(t)) + o(1)]\Delta t[x(t) + o(1)] \\ & -[d(t,x(t)) + o(1)]\Delta t[x(t) + o(1)], \end{aligned} \tag{6.1}$$

kde $o(1)$ značí libovolnou funkci konvergující k 0 pro $\Delta t \to 0$.

Ze vztahu (6.1) dostáváme

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = [b(t,x(t))+o(1)][x(t)+o(1)] \\ -[d(t,x(t))+o(1)][x(t)+o(1)].$$

Limitním přechodem $\Delta t \to 0$ získáme diferenciální rovnici tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mu(t,x)x, \tag{6.2}$$

kde funkce $\mu(t,x) = b(t,x) - d(t,x)$ se nazývá **specifická míra růstu**. Po stanovení předpokladů kladených na funkci $\mu(t,x)$ se rovnice (6.2) stává matematickým modelem.

## 6.2 Model radioaktivního rozpadu

Nyní si představme model, kde za populaci považujeme radioaktivní atomy v nějakém izotopu chemického prvku. Víme, že tyto atomy ve svém jádře obsahují daný počet neutronů. [4] Běžná míra velikosti této populace v čase $t$ je tedy dána počtem přítomných atomů. Označme ho $N(t)$. Radioaktivita je přirozený nebo uměle vyvolaný samovolný rozpad atomového jádra doprovázený vysíláním radioaktivního záření. E.Rutheford dokázal, že rychlost tohoto rozpadu je přímo úměrná počtu atomů příslušného prvku. V rovnici (6.1) tedy máme $x(t) = N(t)$, $b(t,x) = 0$ a $d(t,x) = \lambda$, kde $\lambda > 0$ je tzv. **přeměnová konstanta** prvku.

Dostáváme tak diferenciální rovnici se separovanými proměnnými:

$$N' = -\lambda N, \tag{6.3}$$

která má řešení $N(t) = N(0)\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Model radioaktivního rozpadu nám může posloužit například k určování stáří různých zkamenělin, kreseb v jeskyních či obrazů, jak ilustruje následující příklad.

**Příklad 19.** Model radioaktivního rozpadu se stal v polovině minulého století jediným důkazem pro usvědčení známého holandského malíře H. A. Van Meegerena z padělání obrazů jeho slavného kolegy, Jana Vermera. Van Meegeren znal velmi dobře všechny postupy používané při ověřování pravosti obrazu, a proto používal plátna ze starých bezcenných obrazů a také speciální druh barev, který smíchával dohromady s chemickými látkami tak, aby poté, co se obraz zahřál v troubě, ztvrdly a vytvořily tak dokonalou imitaci starého obrazu. Jediným způsobem, jak odhalit jeho padělky, tedy

[4] U různých izotopů daného prvku zůstává počet protonů v jádře stejný, mění se jen počet neutronů.

bylo určení samotného stáří obrazu.

Velmi důležitým údajem při radioaktivním rozpadu je tzv. **poločas rozpadu**, který je definován jako čas potřebný k tomu, aby se rozpadla přesně polovina atomů dané látky. Abychom mohli poločas rozpadu vyjádřit v závislosti na přeměnové konstantě $\lambda$, musíme nejdříve vyřešit počáteční problém

$$N' = -\lambda N, \quad N(t_0) = N_0.$$

Jeho řešením je

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\lambda \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\right) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}$$

neboli

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(\lambda(t-t_0)\right).$$

Zlogaritmováním obou stran získáme rovnici

$$-\lambda(t-t_0) = \ln\frac{N}{N_0}.$$

Je-li $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$, potom $-\lambda(t-t_0) = \ln\frac{1}{2}$, takže

$$(t-t_0) = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,6931}{\lambda}. \tag{6.4}$$

Poločasy rozpadu mnoha látek byly již určeny. Například poločas rozpadu uhlíku $(^{14}C)$ je 5568 let a uranu $(^{238}U)$ 4,5 bilionů let. Základem určování stáří pomocí radioaktivity je řešení diferenciální rovnice

$$t - t_0 = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0}{N}\right).$$

Pokud $t_0$ udává čas, kdy daná látka vznikla nebo byla vyrobena, potom stávající věk látky je $\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$. Přeměnová konstanta $\lambda$ je v mnoha případech známá nebo ji lze lehce vypočítat (stejně jako hodnotu $N$). Takže pokud známe také $N_0$, můžeme již snadno vypočítat stáří dané látky. Přestože $N_0$ většinou neznáme, můžeme pro něj v mnoha případech určit alespoň určitý rozsah, jako právě v případě Van Meegerenových falšovaných obrazů.

Radioaktivní přeměna je umožněna tím, že daná látka obsahuje určité množství uranu. Ten se přeměňuje na jinou radioaktivní látku a ta zase na jinou, až do doby, kdy je řetězec zakončen přeměnou na neradioaktivní olovo $(^{206}Pb)$. Barvy používané malíři již přes 2000 let se skládají z bílého olova, které obsahuje malé množství radioaktivního radia $(^{226}Ra)$ s poločasem rozpadu 1600 let a olova $(^{210}Pb)$ s poločasem rozpadu 22 let. Nechť $y(t)$ a $y_0$ vyjadřují množství olova $(^{210}Pb)$ na gram bílého olova v časech $t$ a $t_0$. Dále nechť $r(t)$ popisuje počet radioaktivních rozpadů radia ($^{226}Ra$) za minutu na gram bílého olova v čase $t$. Je-li $\lambda$ přeměnová konstanta pro olovo ($^{210}Pb$), potom

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\lambda y + r(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Protože nás zajímá období nejvýše 300 let, lze díky vysokému poločasu rozpadu považovat množství radia za neměnné a $r(t)$ pak za konstantu $r$. Vynásobením obou stran integračním faktorem $\rho(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ získáme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda t} y = r\mathrm{e}^{\lambda t},$$
$$\mathrm{e}^{\lambda t} y(t) - \mathrm{e}^{\lambda t_0} y_0 = \frac{r}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\lambda t_0}\right),$$

takže

$$y(t) = \frac{r}{\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}\right) + y_0 \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{6.5}$$

Hodnoty $y(t)$ a $r$ mohou být snadno změřeny. Takže pokud známe $y_0$, můžeme z rovnice (6.5) spočítat $(t - t_0)$ a určit tak, zda byla kresba skutečně zhotovena v 17. století nebo zda se jedná o novodobý padělek. Vycházíme přitom z toho, že pokud se jedná o starší kresbu, bude množství radioaktivity z olova téměř stejné jako z radia. Naopak, pokud se jedná o padělek starý přibližně 20 let, potom radioaktivita z olova bude značně větší než radioaktivita z radia.

Předpokládejme tedy, že chceme určit, zda se skutečně jedná o kresbu starou 300 let. Nechť tedy $(t-t_0) = 300$. Dosazením do rovnice (6.5) získáme

$$\lambda y_0 = \lambda y(t)\mathrm{e}^{300\lambda} - r\left(\mathrm{e}^{300\lambda} - 1\right).$$

Pokud se jedná o padělek, bude výraz $\lambda y_0$ extrémně vysoký. Protože poločas rozpadu olova ($^{210}Pb$) je velmi podobný poločasu rozpadu polonia ($^{210}Po$), se kterým se lépe počítá, nahradíme jej v našich výpočtech poloniem. Přeměnová konstanta se vypočítá snadno podle rovnice (6.4), tedy $\lambda = \frac{\ln 2}{22}$. Proto

$$\mathrm{e}^{300\lambda} = \mathrm{e}^{300\frac{\ln 2}{22}} = 2^{\frac{150}{11}}.$$

Dále víme, že $r = 0,8$ a $\lambda y(t) = 8.5$, takže můžeme již snadno spočítat $\lambda y_0$:

$$\lambda y_0 = (8,5)2^{\frac{150}{11}} - 0,8\left(2^{\frac{150}{11}} - 1\right)$$
$$= 98,050,$$

což je nepřiměřeně vysoká hodnota svědčící o padělku.

### 6.3 Populační model

Nyní se budeme zabývat diferenciálními rovnicemi 1. řádu, kterými se řídí modely růstu lidské populace. Na první pohled se může zdát, že růst populace nemůže být diferencovatelnou funkcí času, protože se populace zřejmě zvyšuje o celá čísla. Nicméně, pokud se jedná o velkou populaci, pak jsou jednotkové přírůstky v porovnání s celou populací zanedbatelné. Proto tedy lze uvažovat, že se populace zvyšuje plynule a dokonce diferencovatelně s časem.

Nechť tedy $x(t)$ udává velikost populace v čase $t$. Jestliže se jedná o izolovanou populaci, která není ovlivňována emigrací ani imigrací, pak lze růst populace popsat tzv. **Malthusovým modelem**:

$$x' = ax, \tag{6.6}$$

ve kterém se nepředpokládá závislost specifické míry růstu $\mu$ na velikosti populace $x$. Řešením počátečního problému

$$x' = ax, \quad x(t_0) = x_0$$

je $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{a(t-t_0)}$. Proto populace řídící se tímto modelem narůstá exponenciálně s časem, jak ukazuje následující příklad.

**Příklad 20.** V roce 1961 byla velikost populace asi 3,060,000,000 a během následujících 10 let se zvyšovala průměrně o 2% za rok. Dosazením $t_0 = 1961$, $x_0 = (3,06)10^9$ a $a = 0,02$ získáme rovnici

$$x(t) = (3,06)10^9 \mathrm{e}^{0,02(t-1961)}.$$

Tato rovnice popisuje až s neuvěřitelnou přesností populační růst v letech 1700–1961. Populace na Zemi se v těchto letech zdvojnásobovala každých 35 let a naše rovnice zdvojnásobování předpokládá každých 34,6 let. (Pokud se populace zdvojnásobí v čase $T = t - t_0$, kde $\mathrm{e}^{0.02} = 2$, zlogaritmováním obou stran dostaneme $0.02T = \ln 2$, takže $T = 50 \ln 2 \cong 34,6$.) Nyní se však zkusme podívat na odhady do budoucna. Podle Malthusova modelu bude populace v roce 2510 asi 200,000 bilionů, v roce 2635 asi 1,800,000 bilionů a konečně v roce 2670 dosáhne populace na Zemi enormního počtu 3,600,000 bilionů, což již dvojnásobně převyšuje celkový povrch Země.

Je tedy zřejmé, že podle tohoto modelu populace roste neomezeně, což v reálném prostředí není možné. Malthusův model tedy dává dobrou shodu se statistickými údaji, jen pokud se jedná o kratší časové okamžiky a pokud populace není příliš velká.

Model tedy musíme modifikovat tak, aby přesněji odrážel reálnou skutečnost, tj. aby zahrnoval vzájemnou konkurenci jedinců týkající se životního prostoru, omezených přírodních zdrojů a hlavně potravy. Tato vnitrodruhová konkurence zvyšuje úmrtnost nebo snižuje porodnost a je tím větší, čím více je soupeřících jedinců. Vhodnou volbou je výraz $-bx^2$, kde $b$ je kladná konstanta, protože statistický průměr počtu střetů dvou jedinců za jednotku času je přímoúměrný $x^2$. Model

$$x' = (a - bx)x = ax - bx^2, \tag{6.7}$$

kde konstanta $a$ značí tzv. **koeficient růstu** a konstanta $b$ **koeficient zpomalení růstu**, se nazývá **Verhulstova** nebo **logistická rovnice**. Grafem jejího řešení je pak **logistická křivka**.

Je zřejmé, že konstanta $b$ je v porovnání s konstantou $a$ velmi malá. Je volena tak, aby v případě, kdy velikost populace $x$ není příliš velká, byl výraz $-bx^2$ vzhledem k výrazu $ax$ zanedbatelný a populace tak rostla exponenciálně. Nicméně, pokud uvažujeme velkou populaci, stává se konstanta $b$ velmi významnou při zpomalování rychlého tempa růstu populace. Samozřejmě čím vyspělejší je stát, čím větší má rozlohu a dostupnost potravin, tím menší je konstanta $b$.

Zkoumejme nyní, jak logistická rovnice předpovídá růst populace v budoucnosti. Nechť $x_0$ vyjadřuje velikost populace v čase $t_0$, pak počáteční problém je dán rovnicemi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - bx^2, \quad x(t_0) = x_0.$$

Jedná se o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, kterou lze snadno vyřešit pomocí dříve uvedených metod. Řešme tedy rovnici

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{ar - br^2}\,\mathrm{d}r = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s$$

Výraz na levé straně nejdříve rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{ar - br^2} = \frac{1}{r(a - br)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{a - br}.$$

Řešením této rovnice je $A = \frac{1}{a}$ a $B = \frac{b}{a}$. Po dosazení získáme rovnici

$$\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{r} + \frac{b}{a - br}\right)\mathrm{d}r = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s,$$

jejímž řešením je

$$\begin{aligned} \ln\frac{x}{x_0} + \ln\frac{a - bx_0}{a - bx} &= a(t - t_0), \\ \frac{x}{x_0}\frac{a - bx_0}{a - bx} &= \mathrm{e}^{a(t - t_0)} \end{aligned}$$

a po úpravě

$$x(t) = \frac{ax_0}{bx_0 + (a - bx_0)\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}}. \tag{6.8}$$

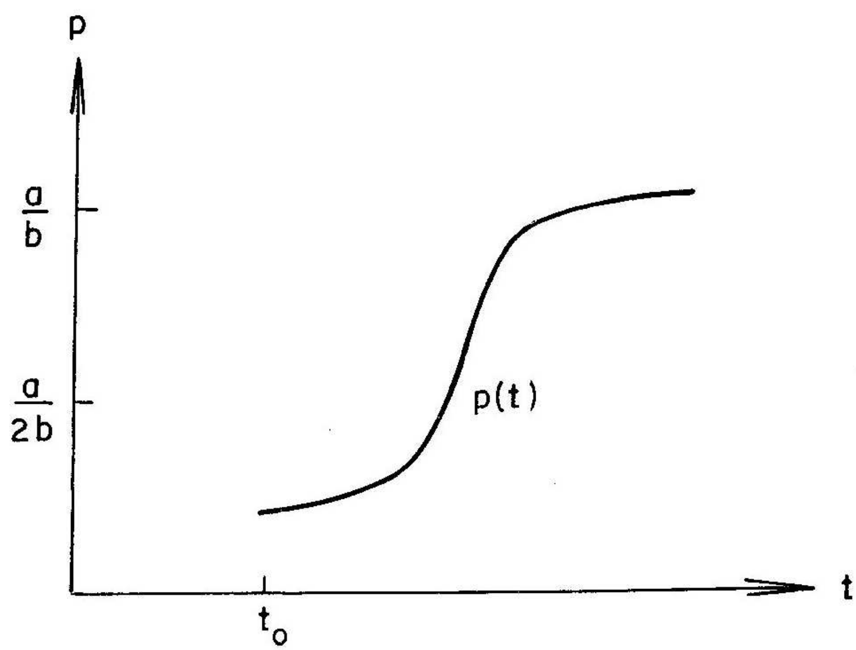
Povšimněme si, že pro $t \to \infty$

$$p(t) \to \frac{ap_0}{bp_0} = \frac{a}{b}.$$

Takže pokud $x_0 \neq 0$, dosahuje populace vždy nezávisle na své počáteční velikosti limitní hodnoty $\frac{a}{b}$. Přitom funkce $x$ je pro $x_0 = \frac{a}{b}$ konstantní, pro $x_0 > \frac{a}{b}$ klesající a pro $x_0 \in (0, \frac{a}{b})$ rostoucí. Protože navíc

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (a - 2bx)x(a - bx),$$

je zřejmé, že $x(t)$ je rostoucí pro $x(t) < \frac{a}{2b}$ a klesající pro $x(t) > \frac{a}{2b}$. Z grafu logistické křivky (Obr. 5) je patrné, že období před tím, než populace dosáhne poloviny své limitní hodnoty, je obdobím rychlého růstu. Po překonání tohoto bodu se růst zpomaluje, až se úplně zastaví.




Obr. 5. Graf logistické křivky

**Příklad 21.** Abychom mohli použít logistickou rovnici pro předpověď růstu velikosti populace, musíme nejdříve určit konstanty $a$ a $b$. Přirozená hodnota konstanty $a$ je podle ekologů 0,029. Dále také víme, že v době, kdy velikost populace byla $(3,06)10^9$, se populace zvyšovala o 2% za rok. Z rovnice (6.7) plyne

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a - bx,\\ 0,02 &= 0,029 - b(3,06)10^9.\end{aligned}$$

Řešením je $b = 2,941 \cdot 10^{-12}$. Proto se tedy velikost populace bude blížit ke své limitní hodnotě

$$\frac{a}{b} = \frac{0,029}{2,941 \cdot 10^{-12}} = 9,86 \text{ bilionů lidí.}$$

Povšimněme si, že v roce 1961 byla velikost populace stále ještě pod polovinou své limitní hodnoty, takže se nacházela v období rychlého růstu.

V roce 1845 Verhulst předpovídal maximální velikost populace v Belgii na 6,600,000 a ve Francii na 40,000,000. Avšak již v roce 1930 dosáhla velikost populace v Belgii výše 8,092,000. Tato výrazná odchylka by mohla svědčit o tom, že logistická rovnice je velmi nepřesná, alespoň co se týče předpovědi pro Belgii. Avšak velikost populace bývá ovlivňována vnějšími faktory, jako jsou válka, ekonomická prosperita nebo imigrace, takže by konstanty $a$ a $b$ měly být přepočítávány pravidelně po několika letech. Právě 30. léta minulého století byla pro Belgii obdobím překvapivého průmyslového růstu a také získání Konga Belgii zajistilo dostatečné finanční prostředky k tomu, aby mohla zabezpečit větší počet obyvatel. Jediná chyba, které se tedy Verhulst dopustil, byla, že vzhledem ke zlepšení celkové ekonomické situace v Belgii nesnížil konstantu $b$.

Na druhé straně populace ve Francii dosáhla v roce 1930 až pozoruhodné shody s Verhulstovou předpovědí. Zvláštním paradoxem však je, že v roce 1930 narůstala populace ve Francii výrazně pomaleji v porovnání s francouzskou populací v Kanadě. Vysvětlení je jednoduché. V této době se totiž populace ve Francii pohybovala velmi blízko své limitní hodnoty, zatímco v Kanadě se nacházela stále v období rychlého růstu.

*Poznámka.* Abychom mohli zkonstruovat přesnější model růstu populace, měli bychom populaci rozdělit na různé věkové skupiny a také na muže a ženy, protože rychlost reprodukce závisí více na počtu žen než na počtu mužů. Možná ještě závažnějším nedostatkem je, že některé populace mají tendenci se pohybovat periodicky mezi dvěma hodnotami a logistická křivka takové chování vylučuje. Tyto tendence mohou být vysvětleny tím, že když určitá populace dosáhne dostatečně velké hustoty, stává se náchylnější k nemocem. Epidemie pak výrazně sníží velikost populace a ta začíná znova růst až do doby, kdy je dostatečně velká a začne být méně odolná.

# Závěr

Téma diferenciálních rovnic 1. řádu jsem si zvolila nejen proto, abych si vytvořila ucelený přehled o základních typech diferenciálních rovnic a způsobech jejich řešení, ale hlavně proto, abych se dozvěděla něco bližšího o jejich využití v praxi. Příklady, řešené v rámci každého typu diferenciální rovnice, jsem volila tak, aby co nejsrozumitelněji ilustrovaly zmiňované metody.

Omezený rozsah této bakalářské práce a složitost výpočtu většiny modelů mi bohužel nedovolují, abych v rámci poslední kapitoly popsala více modelů. Proto jsem se zaměřila jen na dva příklady, tedy konkrétně na modely radioaktivního rozpadu a populačního růstu. Vybrala jsem si je proto, že mi připadaly velmi srozumitelné a tedy vhodné k vysvětlení způsobu, jakým lze převádět reálné situace do matematického jazyka a prostřednictvím řešení daných diferenciálních rovnic pak dojít k velmi zajímavým závěrům. Podkapitola o populačním růstu zahrnuje dva konkrétní modely, u kterých jsou také popsány jejich přínosy a hlavně nedostatky v porovnání s reálnou situací. Tyto modely jsou však jen nepatrným zlomkem skutečých možností využití matematických modelů popisovaných pomocí diferenciálních rovnic.

Diferenciální rovnice totiž nacházejí své uplatnění v mnoha oblastech každodenního života, ať už se jedná například o medicínu, ekologii, nebo vědecko-technický rozvoj. S jejich pomocí lze také popsat podstatu nejrozmanitějších biologických procesů, jako je regulace glykémie inzulínem, vytváření heterosexuálních párů, stabilizace chodících robotů, šíření epidemií, nebo pohyb mravenců při cestě za potravou.

## Literatura


[1] Braun M. *Differential Equations and Their Applications*, 1978.

[2] Edwards C.H., Penney D.E. *Differential Equations*, 1996.

[3] Kalas J., Ráb M. *Obyčejné diferenciální rovnice*, 2001.

[4] Kalas J., Pospíšil Z. *Spojité modely v biologii*, 2001.

[5] Kluvánek I., Mišík L., Švec M. *Matematika II*, 1970.

[6] Minorskij V.P. *Sbírka úloh z vyšší matematiky*, 1964.

[7] Plch R. *Příklady z matematické analýzy (Diferenciální rovnice)*, 2002.

[8] Ráb M. *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, 2004.