MASARYKOVA UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra Matematiky

Řetězové zlomky

Diplomová práce

Brno 2014

Autor práce:

Bc. Petra Dvořáčková

Vedoucí práce:

doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Bibliografický záznam

Dvořáčková, Petra. Řetězové zlomky: diplomová práce.
Brno: Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, 2014.
Vedoucí práce doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Anotace

Diplomová práce by měla sloužit především jako studijní materiál vhodný nejen pro studenty matematiky jako rozšiřující učivo, ale i pro zájemce o samostudium. Obsahuje řadu definic, vět, důkazů a především řešených a neřešených příkladů. Práce je užitečná především pro studenty vysokých škol, ovšem může zaujmout i žáky středních škol, kteří chtějí rozšířit své vědomosti.

Annotation

This thesis should serve as a study material not only for the students of mathematics but for interested person about self-study too. It includes the row of definitions, sentences, proofs and in the first place the examples, some of them are solved and the other are outstanding. The work is usefull primarily for stundents of the universities. But naturally it could angage attention of the students of high school who widen your knowledge.

Prohlášení

„Prohlašuji, že jsem závěrečnou diplomovou práci vypracovala samostatně, s využitím pouze citovaných literárních pramenů, dalších informací a zdrojů v souladu s Disciplinárním řádem pro studenty Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity a se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů."

„Souhlasím, aby práce byla uložena na Masarykově univerzitě v Brně v knihovně Pedagogické fakulty a zpřístupněna ke studijním účelům."

V Brně dne 19.4.2014 Bc. Petra Dvořáčková

Poděkování:

Především bych chtěla velice poděkovat doc. RNDr. Jaroslavu Beránkovi, CSc. za vedení, trpělivost, cenné rady, připomínky a návrhy k vypracování této diplomové práce.

Obsah

Úvod

Na zakončení svého magisterského studia na Pedagogické fakultě, jsem si jako téma své diplomové práce vybrala Řetězové zlomky. Toto téma je sice dostatečně popsáno v různých knihách, ale cílem mé diplomové práce je zpracovat základní a důležité poznatky o této problematice tak, aby byly přístupné studentům a učitelům na školách. Obsahem je řada definic, vět, důkazů a řešených i neřešených příkladů, které pomohou čtenáři přiblížit řetězové zlomky, jejich vlastnosti a využití v praxi.

Řetězové zlomky jsou zajímavé především pro studenty vysokých škol, ale mohou zaujmout také nadané žáky středních škol, kteří mají zájem o prohloubení a rozšíření svých matematických vědomostí, zejména z oblasti teorie čísel a dělitelnosti. I z tohoto důvodu obsah a především zpracování příkladů této práce odpovídá středoškolským znalostem a některých poznatků by bylo možné využít i při řešení úloh z matematických olympiád.

Jednotlivé kapitoly obsahují teoretické části a řešené příklady, které usnadňují danou kapitolu lépe chápat. Práce je rozdělena do 13 kapitol, které se zabývají stručným přehledem teorie, dále řetězovými zlomky racionálních a iracionálních čísel a jejich využitím. V závěru práce je pak obsažena i reflexe studentů na dané téma.

1. Motivace

Mnozí z nás se setkali s Pohádkami tisíce a jedné noci. Byla zde Šeherezáda, která se vyhnula popravě tím, že vyprávěla pohádky. Mohla vyprávět jen do té doby, než pokryla koberec, který si sama vybrala, hedvábnými čtverci. Každý večer před vyprávěním pohádky musela vždy provést další krok pokrytí. V každém kroku vždy musela k pokrytí použít čtverec s maximálním možným obsahem. Pokud se na koberec vešlo takových shodných čtverců více, musela je tam dát všechny. Za každý krok udělaný podle tohoto algoritmu mohla Šeherezáda vyprávět jednu pohádku. Protože byla velice mazaná, vybrala si koberec, jehož poměr délky ku šířce bylo racionální číslo. Proč si právě vybrala tento koberec? Jaké poznatky a znalosti Šeherezádu zachránily před popravou?

Představte si koberec ve tvaru obdélníku o rozměrech 83 x 181, který musela pokrýt čtverci podle uvedeného algoritmu. V prvním kroku ho pokryla dvěma čtverci o rozměrech 83 x 83. Zbývající obdélník 83 x 15 mohla pokrýt pěti čtverci o rozměrech 15 x 15. Dále jí zůstal obdélník 8 x 15. Ten pokryla jedním čtvercem 8 x 8 a zbyl jí obdélník 7 x 8. Ten pokryla čtvercem 7 x 7. Zbývající obdélník 7 x 1 pokryla sedmi malými čtverci 1 x 1. Počítejme:

$$\frac{181}{83} = \frac{83+83+15}{83} = 2 + \frac{15}{83} = 2 + \frac{1}{\frac{83}{15}} = 2 + \frac{1}{5+\frac{8}{15}} = 2 + \frac{1}{5+\frac{1}{\frac{15}{8}}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{7}{8}}} = 2 + \frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{8}{7}}}} = 2 + \frac{1}{5+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{7}}}}$$

Hodnotě 2 odpovídají první dva čtverce s rozměry 83 x 83. Hodnotě 5 odpovídá pět čtverců o rozměrech 15 x 15, hodnota 1 odpovídá čtverci 8 x 15. Následující hodnota 1 odpovídá čtverci o rozměrech 7 x 7 a poslední hodnota 7 odpovídá sedmi čtvercům 1 x 1. Sestrojili jsme konečný řetězový zlomek. Právě tento zlomek je řešením Šeherezádiny volby. [1]

[1] http://is.muni.cz/th/99603/prif_b/bakalarpredelane.pdf

2. Základní pojmy

Zpracováno podle publikace P.Víta (1982,[2])

Řetězovým zlomkem budeme nazývat složený zlomek ve tvaru

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots + \cfrac{1}{q_n}}} \qquad (1)$$

kde $q_1, q_2, \dots q_n \in N$. Pro q_1 předpokládáme $q_1 \in Z$. Z toho vyplývá, že q_1 může být i záporné číslo. Prozatím však budeme uvažovat jen $q_1 \in N_0$. Případy, kdy $q_1 < 0$ se budeme zabývat později.

Čísla $q_1, q_2, \dots q_n$ nazýváme prvky řetězového zlomku nebo neúplné podíly. Úpravami (1) dostáváme (pokud $q_1 \in N_0$) kladné racionální číslo $\frac{p}{q}$. Později se ukáže, že $\frac{p}{q}$ je zlomek v základním tvaru, tedy p, q jsou čísla nesoudělná.

Zápis řetězového zlomku můžeme najít v publikacích různě.

Např.:

$$q_1 + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_n} \quad \text{nebo také} \quad q_1 + \frac{1\,|}{|\,q_2} + \dots + \frac{1\,|}{|\,q_n}$$

Tyto zápisy nejsou však pro nás moc vhodné, proto budeme následně zapisovat řetězový zlomek ve tvaru : $(q_1, q_2, \dots q_n)$, kde $q_1, q_2, \dots q_n$ jsou neúplné podíly.

[2] Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

Příklad 1:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{2}{11}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{11}{46}}=\cfrac{1}{\cfrac{103}{46}}=\frac{46}{103}$$

(V tomto případě $q_1=0$)

Příklad 2:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{21}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{21}{68}}=1+\frac{68}{157}=\frac{225}{157}$$

(V tomto případě $q_1=1$)

Příklad 3:

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{13}}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{13}{30}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{30}{73}}$$

$$=2+\cfrac{1}{\cfrac{103}{73}}=2+\frac{73}{103}=\frac{279}{103}$$

(V tomto případě $q_1=2$)

Řetězový zlomek z příkladu 1 tedy zapíšeme (0,2,4,5,2), řetězový zlomek z příkladu 2 zapíšeme (1,2,3,4,5) a řetězový zlomek z příkladu 3 zapíšeme (2,1,2,2,3,4).

Můžeme počítat i naopak :

Příklad 4:

$\frac{154}{139} = ?$

$154 = 1 \cdot 139 + 15$

$139 = 9 \cdot 15 + 4$

$15 = 3 \cdot 4 + 3$

$3 = 1 \cdot 3$

Z tohoto výpočtu sestavíme řetězový zlomek : $\frac{154}{139} = 1 + \frac{1}{9+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}$

Příklad 5:

$\frac{638}{123} = ?$

$638 = 5 \cdot 123 + 23$

$123 = 5 \cdot 23 + 8$

$23 = 2 \cdot 8 + 7$

$7 = 7 \cdot 1$

Z tohoto výpočtu sestavíme řetězový zlomek : $\frac{638}{123} = 5 + \frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{7}}}$

Příklad 6:

$\frac{1273}{655} = ?$

$1273 = 1 \cdot 655 + 618$

$655 = 1 \cdot 618 + 37$

$618 = 16 \cdot 37 + 26$

$37 = 1 \cdot 26 + 11$

$11 = 2 \cdot 4 + 3$

$4 = 1 \cdot 3 + 1$

$3 = 3 \cdot 1$

Z tohoto výpočtu sestavíme řetězový zlomek : $\frac{1273}{655} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}}}}}$

Takto provádíme výpočet neúplných podílů pomocí Euklidova algoritmu, čímž se budeme podrobněji zabývat v kapitole 4

Hodnotu řetězového zlomku můžeme počítat také „zepředu". Dostáváme tím postupně zlomky:

$$q_1 = \frac{q_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1},$$

$$q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_1 q_2 + 1}{q_2} = \frac{P_2}{Q_2},$$

$$q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} = q_1 + \frac{q_3}{q_2 q_3 + 1} = \frac{P_3}{Q_3} \tag{2}$$

$$\vdots$$

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}} = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q}$$

Zlomky $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots, \frac{P_n}{Q_n}$ nazýváme sblížené zlomky řetězového zlomku (1).

Sblížený zlomek $\frac{P_i}{Q_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ nazýváme i-tým sblíženým zlomkem nebo zlomkem i- tého řádu. Sblížený zlomek $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q}$ nazýváme poslední sblížený zlomek.

Nyní si uvedeme příklady na výpočet sblížených zlomků. Zadání příkladů použijeme již z předešlé kapitoly.

Vypočítejme sblížené zlomky řetězových zlomků z příkladů 1,2,3.

Příklad 7 :

Řešení příklad 1 :

$$\frac{P_1}{Q_1} = 0$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}} = \frac{21}{47} \frac{P_5}{Q_5} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}}} = \frac{46}{103}$$

Řešením příkladu 1 je posloupnost $0, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{21}{47}, \frac{46}{103}$

Příklad 8:

Řešení příkladu 2:

$$\frac{225}{157} = (1,2,3,4,5)$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = 1$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{10}{7}$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = \frac{43}{30}$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} = \frac{225}{157}$$

Řešením příkladu 2 je tedy posloupnost $1, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{43}{30}, \frac{225}{157}$

Příklad 9:

Řešení příkladu 3:

$$\frac{279}{103} = (2,1,2,2,3,4)$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = 2$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = 2 + \frac{1}{1} = 3$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{19}{7}$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}}} = \frac{65}{24}$$

$$\frac{P_6}{Q_6} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}} = \frac{279}{103}$$

Řešením příkladu 3 je posloupnost $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{19}{7}, \frac{65}{24}, \frac{279}{103}$

Vzorce (2) jsou pro rostoucí index nevýhodné a počítání s nimi je příliš pracné. Jejich uvedení bylo vhodné pouze pro zavedení pojmu sblíženého zlomku. V dalším textu je nebudeme používat. Pro výpočet sblížených zlomků uvedeme jednoduché rekurentní vzorce.

3. Rekurentní vzorce sblížených zlomků

Zpracováno podle publikací P.Víta (1982,[3]) a A.J.Chinčina (1952,[4])

V předešlé kapitole jsme se seznámili s pojmem sblíženého zlomku. Následující věta určuje čitatele a jmenovatele zlomků řetězového zlomku. Nultý přibližný zlomek se v řetězovém zlomku nevyskytuje.

Věta 1: Pro čitatele P_k a jmenovatele Q_k řetězového zlomku $(a_1,a_2,\ldots a_n)$ platí vztahy :

$P_1 = q_1, \qquad Q_1 = 1$

$P_2 = q_1q_2 + 1, \qquad Q_2 = q_2,$

$Q_k = q_kQ_{k-1} + Q_{k-2}, \qquad k \geq 3$

$$P_k = q_kP_{k-1} + P_{k-2}, \qquad k \geq 3 \tag{3}$$

První dva vztahy (pro $P_1,\ P_2,\ Q_1, Q_2$) dostaneme z obecných vztahů:

$$P_k = q_kP_{k-1} + P_{k-2},$$

$$Q_k = q_kQ_{k-1} + Q_{k-2},$$

jestliže v nich položíme $P_0 = 1,\ P_{-1} = 0, Q_0 = 0, Q_{-1} = 1$, pak pro $k = 1$ dostáváme $P_1 = q_1,\ Q_1 = 1;\ pro\ k = 2$ je pak $P_2 = q_2P_1 + P_0 = q_1q_2 + 1, Q_2 = q_2Q_1 + Q_0 = q_2$.

Podle vzorců (2) platí :

$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1}$ tedy $P_1 = q_1\ ,\ Q_1 = 1$

$\frac{P_2}{Q_2} = q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_1q_2 + 1}{q_2}$, tedy $P_2 = q_1q_2 + 1\ ,\ Q_2 = q_2$

---

[3] Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

[4] CHINČIN, A. J. *Řetězové zlomky [Chinčin, 1952] : Cepnyje drobi (Orig.).* 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 104 s

Pro $k \geq 3$ provedeme důkaz matematickou indukcí

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{q_1q_2q_3 + q_3 + q_1}{q_2q_3 + 1}$$

$tj.\ P_3 = q_3 (q_2q_1 + 1) = q_3P_2 + P_1$,

$Q_3 = q_3Q_2 + Q_1$, pro k=3 vzorce (3) platí.

Předpokládejme, že (3) platí pro i>3, tedy

$$\frac{P_i}{Q_i} = \frac{q_iP_{i-1} + P_{i-2}}{q_iQ_{i-1} + Q_{i-2}} \tag{4}$$

a dokážeme, že platí pro i+1.

Pro větší názornost budeme zlomky zapisovat ve tvaru (1).

$$\frac{P_i}{Q_i} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots + \cfrac{1}{q_i}}}$$

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots + \cfrac{1}{q_{i+1}}}}$$

Sblížený zlomek $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ tedy dostaneme ze sblíženého zlomku $\frac{P_i}{Q_i}$, jestliže v něm prvek q_i nahradíme součtem $q_i + \frac{1}{q_{i+1}}$. Tímto součinem nyní nahradíme q_i ve (4) a dostaneme vyjádření zlomku $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$.

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} = \frac{\left[q_i + \frac{1}{q_{i+1}}\right] P_{i-1} + P_{i-2}}{\left[q_i + \frac{1}{q_{i+1}}\right] Q_{i-1} + Q_{i-2}}$$

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} = \frac{q_i q_{i+1} P_{i-1} + P_{i-1} + q_{i+1} P_{i-2}}{q_i q_{i+1} Q_{i-1} + Q_{i-1} + q_{i+1} Q_{i-2}}$$

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} = \frac{q_{i+1}(q_i P_{i-1} + P_{i-2}) + P_{i-1}}{q_{i+1}(q_i Q_{i-1} + Q_{i-2}) + Q_{i-1}}$$

Do výrazů v závorce dosadíme z (4) a pro P_{i+1} a Q_{i+1} dostáváme:

$$P_{i+1} = q_{i+1}(q_i P_{i-1} + P_{i-2}) + P_{i-1}$$

$$Q_{i+1} = q_{i+1}(q_i Q_{i-1} + Q_{i-2}) + Q_{i-1}$$

Výpočet si ukážeme na konkrétních příkladech. Hodnoty sblížených zlomků získané ze vzorců zapisujeme pro větší přehlednost do tabulky:

q_i	----	q_1	q_2	...	...	...	q_k	...	q_{n-1}	q_n
P_i	1	q_1	P_2	...	P_{k-2}	P_{k-1}	P_k	...	P_{n-1}	a
Q_i	0	1	Q_2	...	Q_{k-2}	Q_{k-1}	Q_k	...	Q_{n-1}	b

První řádek z této tabulky obsahuje prvky řetězového zlomku, tj. $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$. Druhý řádek obsahuje čitatele a třetí jmenovatele sblíženého zlomku.

První neúplný podíl q_1 je vždy nutné vypočítat prostým dělením čísel $\frac{p}{q}$, pak lze vyplnit první dva sloupce. Dále se tabulka vyplňuje podle vzorců z (3).

Příklad 10 : Vypočítejme sblížené zlomky řetězového zlomku (0,1,4,3,1)

q_i	-	0	1	4	3	1
P_i	1	0	1	4	13	17
Q_i	0	1	1	5	16	21

Z tabulky nám vychází sblížené zlomky :

$\frac{P_1}{Q_1} = 0, \frac{P_2}{Q_2} = 1,\ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{4}{5},\ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{13}{16},\ \frac{P_5}{Q_5} = \frac{17}{21}$

Příklad 11 : Vypočítejme sblížené zlomky řetězového zlomku (0,2,4,6,8).

q_i	-	0	2	4	6	8
P_i	1	0	1	5	31	253
Q_i	0	1	2	9	56	457

Z tabulky nám vychází sblížené zlomky:

$\frac{P_1}{Q_1} = 0, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{2},\ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{5}{9},\ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{31}{56},\ \frac{P_5}{Q_5} = \frac{253}{457}$

Příklad 12 : Vypočítejme sblížené zlomky řetězového zlomku (1,2,3,2,2).

q_i	-	1	2	3	2	2
P_i	1	1	3	10	23	56
Q_i	0	1	2	7	16	39

Z tabulky nám vychází sblížené zlomky:

$\frac{P_1}{Q_1} = 1, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{2},\ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{10}{7},\ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{23}{16},\ \frac{P_5}{Q_5} = \frac{56}{39}$

Příklad 13 : Vypočítejme sblížené zlomky řetězového zlomku (1,5,3,4,2,1).

q_i	-	1	5	3	4	2	1
P_i	1	1	6	19	110	239	339
Q_i	0	1	5	16	69	154	223

Z tabulky nám vychází sblížené zlomky:

$$\frac{P_1}{Q_1} = 1, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{6}{5}, \ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{19}{16}, \ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{110}{69}, \ \frac{P_5}{Q_5} = \frac{239}{154}, \ \frac{P_5}{Q_5} = \frac{339}{223}$$

4. Výpočet neúplných podílů

Zpracováno podle publikací A.J.Chinčina (1952,[5]) a I.M.Vinogradova (1953,[6])

Výpočet neúplných podílů řetězového zlomku, tj. čísel $q_1, q_2, \ldots q_n$ můžeme provádět dvěma způsoby:

1) Obecný postup pro výpočet čísel $q_1, q_2, \ldots q_n$

   Při výpočtu použijeme pojmu celá a zlomková část čísla. Každé reálné číslo *„a“* můžeme vyjádřit ve tvaru $a = [a] + \{a\}$, kde $[a] \epsilon Z$, $[a]$ se nazývá *celá část čísla „a“*. Pro číslo $\{a\}$ platí : $0 \leq \{a\} \leq 1$ a nazývá se *zlomková část čísla „a“*.

   Nechť je dáno kladné racionální číslo *„a“*. Položme $q_1 = [a]$, $a_1 = \frac{1}{\{a\}}$.

   Pak zřejmě platí $a = a_1 + \frac{1}{q_1}$, *a = q₁* ... kde $a_1 > 1, a_1 \in Q$. Odtud plyne

   $a_1 = \frac{1}{a - q_1}$.

   Celý postup opakujeme pro a_1. Tedy $q_2 = [a_1] = \left[\frac{1}{a - q_1}\right]$, $a_2 = \frac{1}{\{a_1\}}$.

   Pak platí $a_1 = q_2 + \frac{1}{a_2}$, kde $a_2 > 1$, $a_2 \in Q$. Z tohoto vztahu dostáváme

   $a_2 = \frac{1}{a_1 - q_2}$ a dále stejným způsobem definujeme čísla $q_3, a_3, q_4, a_4, \ldots q_n, a_n$.

   Jakmile je některé a_{n-1} celé číslo, pak $q_n = a_{n-1}$ je poslední prvek řetězového zlomku a postup se zastaví. Tento způsob výpočtu však nezaručí, zda výpočet skončí. Nemůže totiž určit, jestli některé z čísel $a_1, a_2, \ldots a_n$ je skutečně celé číslo.

Pro lepší představu a názornost si uvedeme několik příkladů, které budeme řešit tímto prvním postupem.

[5] CHINČIN, A. J. *Řetězové zlomky [Chinčin, 1952] : Cepnyje drobi (Orig.).* 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 104 s

[6] Vinogradov I. M.: Základy theorie čísel. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953.

Vypočítejme tímto obecným postupem čísla $q_1, q_2, \ldots q_n$

Příklad 14: $\frac{170}{39}$

$$q_1 = \left[\frac{170}{39}\right] = 4;\ \frac{170}{39} = 4 + \frac{1}{a_1};\ \frac{170}{39} - 4 = \frac{1}{a_1}; a_1 = \frac{39}{14}$$

$$q_2 = \left[\frac{39}{14}\right] = 2;\ \frac{39}{14} = 2 + \frac{1}{a_2};\ \frac{39}{14} - 2 = \frac{1}{a_2}; a_2 = \frac{14}{11}$$

$$q_3 = \left[\frac{14}{11}\right] = 1;\ \frac{14}{11} = 1 + \frac{1}{a_3};\ \frac{14}{11} - 1 = \frac{1}{a_3}; a_3 = \frac{11}{3}$$

$$q_4 = \left[\frac{11}{3}\right] = 3;\ \frac{11}{3} = 3 + \frac{1}{a_4};\ \frac{11}{3} - 3 = \frac{1}{a_4}; a_4 = \frac{3}{2}$$

$$q_5 = \left[\frac{3}{2}\right] = 1;\ \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{a_5};\ \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{a_5}; a_5 = \frac{2}{1} = 2$$

$$q_6 = 2$$

Dostáváme tedy $\frac{170}{39} = (4,2,1,3,1,2)$.

Příklad 15: $\frac{568}{26}$

$$q_1 = \left[\frac{568}{26}\right] = 21;\ \frac{568}{26} = 21 + \frac{1}{a_1};\ \frac{568}{26} - 21 = \frac{1}{a_1}; a_1 = \frac{26}{22}$$

$$q_2 = \left[\frac{26}{22}\right] = 1;\ \frac{26}{22} = 1 + \frac{1}{a_1};\ \frac{26}{22} - 1 = \frac{1}{a_1}; a_1 = \frac{22}{4}$$

$$q_3 = \left[\frac{22}{4}\right] = 5;\ \frac{22}{4} = 5 + \frac{1}{a_3};\ \frac{22}{4} - 5 = \frac{1}{a_3}; a_3 = \frac{4}{2} = 2$$

$$q_4 = 2$$

Dostáváme tedy $\frac{568}{26} = (21,1,5,2)$.

Příklad 16: $\frac{264}{325}$

$$q_1 = \left[\frac{264}{325}\right] = 0;\ \frac{264}{325} = 0 + \frac{1}{a_1};\ \frac{264}{325} - 0 = \frac{1}{a_1};\ a_1 = \frac{325}{264}$$

$$q_2 = \left[\frac{325}{264}\right] = 1;\ \frac{325}{264} = 1 + \frac{1}{a_2};\ \frac{325}{264} - 1 = \frac{1}{a_2};\ a_2 = \frac{264}{61}$$

$$q_3 = \left[\frac{264}{61}\right] = 4;\ \frac{264}{61} = 4 + \frac{1}{a_3};\ \frac{264}{61} - 4 = \frac{1}{a_3};\ a_3 = \frac{61}{20}$$

$$q_4 = \left[\frac{61}{20}\right] = 3;\ \frac{61}{20} = 3 + \frac{1}{a_4};\ \frac{61}{20} - 3 = \frac{1}{a_4};\ a_4 = \frac{20}{1} = 20$$

$$q_5 = 20$$

Dostáváme tedy $\frac{264}{325} = (0,1,4,3,20).$

Dále si uvedeme druhý postup, který jsme vlastně používali již v druhé kapitole na výpočet řetězových zlomků:

2) Výpočet pomocí Euklidova algoritmu

   Věta: Nechť $\frac{p}{q}$ je libovolný racionální zlomek v základním tvaru a platí $q \neq 0$. Pak neúplné podíly $q_1, q_2, q_{3,} \dots q_n$, vyskytující se v řetězovém zlomku $\frac{p}{q}$, jsou totožné s neúplnými podíly postupných dělení Euklidova algoritmu při výpočtu NSD.

Uvedeme si pouze jeden příklad, další příklady není třeba uvádět, řešíme je již v kapitole 2.

Příklad 17: Vypočítejme pomocí Euklidova algoritmu neúplné podíly čísla $\frac{143}{53}$

$\frac{143}{53} = ?$

$53 = 0 \cdot 143 + 53$

$143 = 2 \cdot 53 + 37$

$53 = 1 \cdot 37 + 16$

$37 = 2 \cdot 16 + 5$

$16 = 3 \cdot 5 + 1$

$5 = 5 \cdot 1 + 0$ Z tohoto výpočtu sestavíme řetězový zlomek : $\frac{143}{53} = (0,2,1,2,3,5).$

Důkaz: Z Euklidova algoritmu je :

$$p = qq_1 + r_1 \dots\dots \frac{p}{q} = q_1 + \frac{r_1}{q} \quad \dots(a)$$

$$q = r_1 q_2 + r_2 \dots\dots \frac{q}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} \quad \dots(b)$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \dots\dots \frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2} \quad \dots(c)$$

.

.

.

$$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} \dots\dots \frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = q_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n \dots\dots \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n$$

Všimneme-li si pouze rovností pravých, pak po dosazení $\frac{q}{r_1}$ z (b) do (a), $\frac{r_1}{r_2}$ z (c) do (b) atd. Skutečně tedy dostáváme: $\frac{p}{q} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_{3+\cdots \frac{1}{q_n}}}}$

5. Vlastnosti sblížených zlomků

Zpracováno podle publikací A.J.Chinčina (1952,[7]), P.Víta (1982,[8]) a I.M.Vinogradova (1953,[9])

Vyšetřujeme vlastnosti posloupnosti sblížených zlomků řetězového zlomku kladného racionálního čísla. Vezměme si například posloupnost $0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{4}{11},\frac{11}{30}$ sblížených zlomků řetězového zlomku $\frac{11}{30}$. Utvořme rozdíly $\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}$; $\frac{P_3}{Q_3}-\frac{P_2}{Q_2}$ atd., obecně tedy můžeme napsat $\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$, kde $k \geq 2$ (a v daném případě je $k \leq 6$):

$$\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}=\frac{1}{Q_2Q_1},$$

$$\frac{P_3}{Q_3}-\frac{P_2}{Q_2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{6}=\frac{-1}{Q_3Q_2},$$

$$\frac{P_4}{Q_4}-\frac{P_3}{Q_3}=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}=\frac{1}{Q_4Q_3},$$

$$\frac{P_5}{Q_5}-\frac{P_4}{Q_4}=\frac{4}{11}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{88}=\frac{-1}{Q_5Q_4},$$

$$\frac{P_6}{Q_6}-\frac{P_5}{Q_5}=\frac{11}{30}-\frac{4}{11}=\frac{1}{330}=\frac{1}{Q_6Q_5}.$$

Z tohoto příkladu vidíme, že platí:

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{\pm 1}{Q_kQ_{k-1}}$$

Pozn.: se znaménkem „+“ pro sudá *k*, se znaménkem „−" pro lichá *k*.

[7] CHINČIN, A. J. *Řetězové zlomky [Chinčin, 1952] : Cepnyje drobi (Orig.)*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 104 s

[8] Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

[9] Vinogradov I. M.: Základy theorie čísel. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953.

Věta 2: Pro rozdíl dvou sousedních sblížených zlomků kladného racionálního čísla platí:

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}, \quad 2 \leq k \leq n$$

Po úpravě (odstranění zlomku) dostáváme vztah: $P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^k$ (5)

Důkaz:

Provedeme důkaz tohoto vztahu. Především dokážeme, že platí pro $k = 2$, a to dosazením známých hodnot $P_1 = q_1, P_2 = q_1 q_2 + 1, Q_1 = 1, Q_2 = q_2$:

$$(q_1 q_2 + 1) \cdot 1 - q_1 q_2 = 1 = (-1)^2$$

Označme rozdíl na levé straně (5) symbolem Δ_k. Je zřejmě $\Delta_2 = 1$. Do (5) dosadíme za P_k, Q_k ze vzorců (3) v kapitole Rekurentní vzorce sblížených zlomků. Dostáváme:

$$\Delta_k = (q_k P_{k-1} + P_{k-2}) Q_{k-1} - P_{k-1}(q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) = -(P_{k-1} Q_{k-2} - P_{k-2} Q_{k-1}) \\ = -\Delta_{k-1}$$

Je tedy $\Delta_k = -\Delta_{k-1}$ a opakováním téhož postupu dostaneme rovnosti:

$$\Delta_k = P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^k$$

Ze vzorce (5) plyne tvrzení o nesoudělnosti čísel P_k, Q_k: Největší společný dělitel čísel totiž musí dělit pravou stranu rovnosti (5), tj. číslo ± 1, je tedy 1 největším společným dělitelem čísel P_k, Q_k a $\frac{P_k}{Q_k}$ je zlomek v základním tvaru.

Na posloupnosti sblížených zlomků $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{11}{30}$ ze začátku této kapitoly si ukážeme další vlastnost sblížených zlomků. Jde o posloupnost sblížených zlomků řetězového zlomku $\frac{11}{30}$.

Platí:

$\frac{P_1}{Q_1} = 0 < \frac{11}{30}$

$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{2} > \frac{11}{30}$

$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{1}{3} < \frac{11}{30}$

$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{3}{8} > \frac{11}{30}$

$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{4}{11} < \frac{11}{30}$

$\frac{P_6}{Q_6} = \frac{11}{30}$

Vidíme, že hodnoty sblížených zlomků jsou střídavě menší a vetší než hodnota daného racionálního čísla, až ovšem na poslední sblížený zlomek, pro který platí rovnost. Přitom menší hodnoty mají sblížené zlomky lichého řádu $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_5}{Q_5}$, větší hodnoty sblížené zlomky sudého řádu $\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_4}{Q_4}$.

Věta 3: Sblížené zlomky lichého řádu $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_5}{Q_5}, \ldots$ kladného racionálního čísla $\frac{p}{q}$ tvoří rostoucí posloupnost, sblížené zlomky sudého řádu $\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_4}{Q_4}, \frac{P_6}{Q_6}, \ldots$ klesající posloupnost.

Důkaz: K důkazu potřebujeme vzorec $P_{k-2}Q_k - P_kQ_{k-2} = (-1)^k q_k,\ k \geq 3.$ (6)

Jestliže dosadíme za P_k, Q_k ze vzorců (3) z předešlé kapitoly, dostáváme:

$$P_{k-2}(q_kQ_{k-1} + Q_{k-2}) - (q_kP_{k-1} + P_{k-2})Q_{k-2} = -q_k\Delta_{k-1}$$

Δ_{k-1} je převzato z důkazu předešlé věty: je $\Delta_{k-1} = (-1)^{k-1}$, což dokazuje vzorec (6). Vydělíme-li (6) číslem Q_kQ_{k-2}, které je ovšem kladné, dostáváme

$$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k q_k}{Q_kQ_{k-2}}$$

Tedy pro sudé k je $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} - \frac{P_k}{Q_k} > 0$ $\quad pro\ k \geq 3$ a pro sblížené zlomky sudého řádu je $\frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$, tvoří tedy klesající posloupnost. Pro liché k je však $\frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$, tj. sblížené zlomky lichého řádu tvoří rostoucí posloupnost.

Z této věty vyplývá, že platí: $\frac{P_1}{Q_1} < \frac{P_3}{Q_3} < \cdots < \frac{p}{q} < \cdots < \frac{P_4}{Q_č} < \frac{P_2}{Q_2}$ (7)

(Sblížené zlomky lichého řádu řetězového zlomku kladného racionálního čísla $\frac{p}{q}$ jsou vesměs menší než $\frac{p}{q}$, sblížené zlomky sudého řádu jsou vesměs větší. Toto tvrzení se netýká posledního sblíženého zlomku).

Příklad 18:

Porovnejme sblížené zlomky $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{2}{13}, \frac{23}{63}$ řetězového zlomku číslo $\frac{p}{q} = \frac{23}{63}$.

Řešení:

$$\frac{P_1}{Q_1} = 0 < \frac{23}{63}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{2} > \frac{23}{63}$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{1}{4} < \frac{23}{63}$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{3}{8} > \frac{23}{63}$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{2}{13} < \frac{23}{63}$$

$$\frac{P_6}{Q_6} = \frac{23}{63}$$

Řešení ukazuje pravdivost (7).

Věta 4: Pro každé k (i pro $k = n$) platí, že hodnota zlomku $\frac{p}{q}$ je blíže hodnotě sblíženého zlomku $\frac{P_k}{Q_k}$ než hodnotě zlomku $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$, tj.platí:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \left|\frac{p}{q} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|$$

Důkaz:

Mějme řetězový zlomek $(q_1, q_2, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots, q_n)$ a označme písmenem r jeho zbytek: $r = (q_{k+1}, \dots, q_n)$. Zapíšeme tedy:

$$(q_1, q_2, \dots, q_k, r) \tag{8}$$

Racionální číslo, které je vyjádřeno (8) zapíšeme takto:

$$\frac{p}{q} = \frac{rP_k + P_{k-1}}{rQ_k + Q_{k-1}}$$

Tedy:

$$\frac{p}{q} \cdot rQ_k + \frac{p}{q} Q_{k-1} = rP_k + P_{k-1},$$

$$\frac{p}{q} \cdot rQ_k - rP_k = P_{k-1} - \frac{p}{q} Q_{k-1},$$

$$rQ_k \left(\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right) = Q_{k-1} \left(\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - \frac{p}{q}\right).$$

Pro $r > 1, Q_k > Q_{k-1}$ odtud dostáváme $\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \left|\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{p}{q} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|$.

Důsledek: Z toho, že $\frac{p}{q}$ leží mezi dvěma po sobě jdoucími sblíženými zlomky, řekněme $\frac{P_k}{Q_k}$ a $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ plyne $\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \left|\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k}\right|$ což nám dává $\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}$. Tento vzorec platí pro $k < n$. Uvědomíme-li si, že $Q_{k+1} > Q_k$, dostáváme vzorec:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k^2} \tag{9}$$

který platí i pro $k = n$.

Tento vzorec (9) udává **horní mez rozdílu**

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| \tag{10}$$

Výraz (10) je **absolutní chyba aproximace** $\frac{p}{q}$ sblíženým zlomkem $\frac{P_k}{Q_k}$.

Rozdíl $\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}$ je **chyba aproximace** $\frac{p}{q}$ sblíženým zlomkem $\frac{P_k}{Q_k}$.

Věta 5: Hodnota sblíženého zlomku $\frac{P_k}{Q_k}$ se méně liší od hodnoty $\frac{p}{q}$ než hodnota kterékoli jiného zlomku $\frac{x}{y}$, pro jehož jmenovatele platí $y < Q_k$, tj. platí nerovnost:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \left|\frac{p}{q} - \frac{x}{y}\right|$$

- pokud je $y < Q_k$.

Důkaz: Důkaz provedeme sporem. Je dán zlomek $\frac{x}{y}$, který vyhovuje podmínkám věty. Zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$ je blíže zlomku $\frac{p}{q}$ než zlomek $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ a zlomek $\frac{x}{y}$ je blíže zlomku $\frac{p}{q}$ než zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$. Dále pak je zlomek $\frac{x}{y}$ blíže zlomku $\frac{p}{q}$ než zlomek $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$. Protože dále $\frac{p}{q}$ leží mezi $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ a $\frac{P_k}{Q_k}$, platí:

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right| < \left|\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|.$$

Odtud s použitím první věty z této kapitoly plyne:

$$\left|\frac{xQ_{k-1} - yP_{k-1}}{yQ_{k-1}}\right| < \frac{1}{Q_k Q_{k-1}}.$$

Z $y < Q_k$ plyne $yQ_{k-1} < Q_k Q_{k-1}$, a tedy:

$$|xQ_{k-1} - yP_{k-1}| < 1.$$

Protože x, y, P_{k-1}, Q_{k-1} jsou celá čísla, je i výraz v absolutní hodnotě celé číslo, ale to je možné jen tak, že $xQ_{k-1} - yP_{k-1} = 0, \frac{x}{y} = \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$.

To je však hledaný spor, protože sblížený zlomek $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ by se podle toho měl méně lišit od zlomku $\frac{p}{q}$ než sblížený zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$, zatímco podle předešlých vět se liší více.

Věta 6: Zlomek $\frac{P}{Q}$ se nazývá nejlepším přiblížením zlomku $\frac{p}{q}$, jestliže kterýkoli jiný zlomek, který leží blíže nebo stejně blízko zlomku $\frac{p}{q}$, má většího jmenovatele. Pokud je tento zlomek $\frac{x}{y}$, pak slova „leží blíže nebo stejně blízko“ znamenají následující:

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P}{Q}\right| \leq \left|\frac{p}{q}-\frac{x}{y}\right| \quad pro\ y > Q.$$

Podle věty 5 v této kapitole jsou tedy sblížené zlomky řetězového zlomku čísla $\frac{p}{q}$ nejlepšími přiblíženími zlomku $\frac{p}{q}$. Toto tvrzení platí pro sblížené zlomky $\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots$, ale nemusí platit pro $\frac{P_1}{Q_1}$.

Příklad 19:

Zvolme si $\frac{p}{q}$ tak, aby $q_2 = 1$.

Řešení:

$$\frac{p}{q} = \frac{39}{22} = (1,1,3,2,2)$$

Sestavíme tabulku:

q_i	1	1	3	2	2
P_i	1	2	7	16	39
Q_i	1	1	4	9	22

Sblížené zlomky: $1, 2, \frac{7}{4}, \frac{16}{9}, \frac{39}{22}$

Sblížené zlomky $2, \frac{7}{4}, \frac{16}{9}, \frac{39}{22}$ jsou nejlepším přiblížením zlomku $\frac{39}{22}$.

Dokážeme si předešlé tvrzení, které uvádí, že $\frac{P_1}{Q_1}$ není nejlepším přiblížením, když $q_1 = 1$ platí.

Důkaz:

$$\left|\frac{39}{22} - \frac{P_2}{Q_2}\right| < \left|\frac{39}{22} - \frac{P_1}{Q_1}\right|$$

$$\left|\frac{39}{22} - 2\right| < \left|\frac{39}{22} - 1\right|$$

$$\frac{5}{22} < \frac{17}{22}$$

$\frac{P_1}{Q_1}$ není nejlepším přiblížením zlomku $\frac{p}{q}$.

6. Nerovnosti mezi řetězovými zlomky

Zpracováno podle publikace P.Víta(1982,[10])

V případě, kdy chceme porovnat řetězové zlomky, zvolíme jednoduchý způsob: převedení řetězových zlomků na racionální čísla. Řešení si ukážeme na příkladech:

Příklad 20: Porovnejme řetězové zlomky (1,3,4,2,1) a (0,5,3,1,2).

Řešení: Převedeme na racionální čísla:

(1,3,4,2,1) : $$1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}}=1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}}=1+\frac{1}{3+\frac{3}{13}}=1+\frac{1}{\frac{42}{13}}=\frac{55}{42}$$

(0,5,3,1,2) : $$0+\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{2}{3}}}=\frac{1}{5+\frac{3}{11}}=\frac{1}{\frac{58}{11}}=\frac{11}{58}$$

$\frac{55}{42}>\frac{11}{58}$ z toho plyne $(1,3,4,2,1)\ >\ (0,5,3,1,2)$.

Příklad 21: Porovnejme řetězové zlomky (1,1,3,3,1) a (1,1,3,3,3).

Pozn. Na první pohled by se zdálo, že druhý zlomek je větší. Vzhledem k tomu, že první 4 členy jsou stejné a poslední člen je u druhého větší.

Řešení: Převedeme na racionální čísla:

(1,1,3,3,1) : $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{13}{4}}}=1+\frac{1}{1+\frac{4}{13}}=1+\frac{1}{\frac{17}{13}}=\frac{30}{17}$$

(1,1,3,3,3) : $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{3}{10}}}=1+\frac{1}{1+\frac{10}{33}}=1+\frac{33}{43}=\frac{76}{43}$$

$\frac{30}{17}>\frac{76}{43}$ z toho plyne (1,1,3,3,1) > (1,1,3,3,3)

[10] Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

Věta 7: Jsou-li racionální čísla a,b dána ve tvaru řetězových zlomků $a = (q_1, q_2, \dots, q_k)$, $b = (q_1, q_2, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots, q_n)$. Pak platí $a > b$, je-li k sudé, $a < b$, je-li k liché.

Důkaz:

Označme zbytky řetězového zlomku čísla a postupně $r_k, r_{k-1}, r_{k-2}, \dots, r_1$.

$$r_k = (q_k) = q_k,$$

$$r_{k-1} = (q_{k-1}, q_k),$$

$$r_{k-2} = (q_{k-2}, q_{k-1}, q_k),$$

$$\dots..$$

$$r_1 = a.$$

Podobně zbytky řetězového zlomku čísla b označme $S_k, S_{k-1}, S_{k-2}, \dots, S_1$. Je

$$S_k = (q_k, q_{k+1}, \dots q_n)$$

$$S_{k-1} = (q_{k-1}, q_k, \dots, q_n),$$

$$S_{k-2} = (q_{k-2}, q_{k-1}, \dots, q_n),$$

$$\dots..$$

$$S_1 = b$$

Především je $S_k = (q_k, q_{k-1}, \dots q_n) > q_k = r_k$.

Dále platí: $r_{k-1} = q_{k-1} + \frac{1}{r_k}$, $\;s_{k-1} = q_{k-1} + \frac{1}{s_k}$.

Protože podle hořejšího je $r_k < s_k$ a r_k, s_k jsou kladná čísla, je $\frac{1}{r_k} > \frac{1}{s_k}$, a tedy $r_{k-1} > S_{k-1}$.

Dále platí: $r_{k-2} = q_{k-2} + \frac{1}{r_{k-1}}$, $\;S_{k-2} = q_{k-2} + \frac{1}{S_{k-1}}$ a vzhledem k nerovnosti mezi r_{k-1}, S_{k-1} je $r_{k-2} < S_{k-2}$.

Postup lze opakovat tak dlouho, až skončíme nerovností mezi r_1, s_1, tj. mezi a,b. Dostáváme posloupnost nerovností, v níž se střídají znaky $<, >$:

$$r_k < s_k,$$

$$r_{k-1} > s_{k-1},$$

$$r_{k-2} < s_{k-2},$$

$$\dots$$

$$a = r_1 <> s_1 = b.$$

Počet těchto nerovností je k. Proto pro liché *k* bude poslední v nerovnosti znak $<$, pro sudé *k* znak $>$.

Věta 8: Nechť jsou dány dva řetězové zlomky, pak platí následující tvrzení:

- Nejsou-li zlomky identické, pak si nejsou rovny
- Označíme-li $a = (q_1, q_2, \dots, q_n), b = (q_1', q_2', \dots, q_m')$,
  pak pro $q_1 > q_1'$ platí $a > b$, pro $q_1 < q_1'$ platí $a < b$.
- Nechť $q_1 = q_1'$, $q_2 = q_2'$,…, $q_k = q_k'$. Je-li *k* sudé, pak pro $q_{k+1} > q_{k+1}'$ je $a > b$ a pro $q_{k+1} < q_{k+1}'$ je $a < b$. Je-li *k* liché, platí naopak, že pro $q_{k+1} > q_{k+1}'$ je $a < b$ a pro $q_{k+1} < q_{k+1}'$ je $a > b$.

Příklad 22:

Pomocí věty 8 rozhodněme o nerovnostech mezi zlomky:

(4, 1, 3, 5) > (2, 4, 4 ,5) ($q_1 = 4 > 2 = q_1'$)

(1,4,2,5) > (1,5,2,5) (k liché, $q_{k+1} = 4 < 5 = q_{k+1}'$ $\Rightarrow$ a > b)

(1, 4, 4, 2, 2) > (1, 4, 4, 3, 4) (k liché, $q_{k+1} = 2 < 3 = q_{k+1}'$)

(2, 6, 3, 5, 7, 1) < (2, 6, 5, 5, 7, 1) (k sudé, $q_{k+1} = 3 < 5 = q_{k+1}'$)

(5, 4, 8, 3, 4) > (5, 4, 8, 5, 4) (k liché,$q_{k+1} = 3 < 5 = q_{k+1}'$)

(1, 2, 5, 1, 4) = (1, 2, 5, 1, 4) (zlomky jsou identické)

7. Vsunuté zlomky

Zpracováno podle publikací P.Víta (1982,[11]) a A.J.Chinčina (1952,[12])

Nechť $\frac{P_k}{Q_k}, \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ jsou dva po sobě jdoucí sblížené zlomky řetězového zlomku $(q_1, q_2, \dots q_n)$. Utvoříme posloupnost zlomků:

$$\frac{P_k}{Q_k}, \frac{P_{k+1}+P_k}{Q_{k+1}+Q_k}, \frac{2P_{k+1}+P_k}{2Q_{k+1}+Q_k}, \frac{3P_{k+1}+P_k}{3Q_{k+1}+Q_k}, \dots, \frac{cP_{k+1}+P_k}{cQ_{k+1}+Q_k}, \dots, \frac{(q_{k+2}-1)P_{k+1}+P_k}{(q_{k+2}-1)Q_{k+1}+Q_k},$$

$$\frac{q_{k+2}P_{k+1}+P_k}{q_{k+2}Q_{k+1}+Q_k} = \frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$$

První a poslední člen této posloupnosti jsou sblížené zlomky $\frac{P_k}{Q_k}, \frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$. Žádný jiný člen však není sblížený zlomek. Jsou to většinou zlomky tvaru: $\frac{cP_{k+1}+P_k}{cQ_{k+1}+Q_k}$, (11)

kde $c \in N$ splňuje nerovnosti: $1 \leq c \leq q_{k+2} - 1$

Právě těmto zlomkům říkáme vsunuté zlomky. Je zřejmé, že zlomky dostaneme pro $q_{k+2} > 1$.

Pro hodnotu $q_{k+2} = 1$ vsunuté zlomky neexistují.

Vsunutý zlomek (11) je právě tehdy nejlepším přiblížením, jestliže $2c > q_{k+2}$ nebo jestliže $2c = q_{k+2}$ a přitom platí $(q_{k+2}, q_{k+1}, \dots, q_2) > (q_{k+2}, q_{k+3}, q_{k+4}, \dots)$. Pro $2c < q_{k+2}$ není vsunutý zlomek (11) nejlepším přiblížením.

Definice vsunutých zlomků má smysl i pro k=0, což při výpočtu vsunutých zlomků vyžaduje, abychom pracovali se sblíženým zlomkem nultého řádu, tj.: Zlomek nultého řádu si tedy definujeme takto: $P_0 = 1, Q_0 = 0$.

[11] Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

[12] CHINČIN, A. J. *Řetězové zlomky [Chinčin, 1952] : Cepnyje drobi (Orig.)*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 104 s

Příklad 23:

Vypočítejme prvních šest sblížených zlomků čísla $\sqrt{5}$. Určete k nim zlomky vsunuté a rozhodněte, které z nich mají vlastnost nejlepšího přiblížení.

Řešení:

$$\sqrt{5} = 2{,}23606\ldots$$

Číslo $\sqrt{5}$ nejprve zapíšeme řetězovým zlomkem:

$$q_1 = 2{,}23606 = 2 + \frac{1}{a_1};\ 2{,}23606 - 2 = \frac{1}{a_1}; a_1 = 4{,}2362$$

$$q_2 = 4{,}2362 = 4 + \frac{1}{a_2};\ 4{,}2362 - 4 = \frac{1}{a_2}; a_2 = 4{,}2337$$

$$q_3 = 4{,}2337 = 4 + \frac{1}{a_3}; 4{,}2337 - 4 = \frac{1}{a_3}; a_3 = 4{,}2789$$

$$q_4 = 4{,}2789 = 4 + \frac{1}{a_4};\ 4{,}2789 - 4 = \frac{1}{a_4}; a_4 = 3{,}5855$$

$$q_5 = 3{,}5855 = 3 + \frac{1}{a_5};\ 3{,}5855 - 3 = \frac{1}{a_5}; a_5 = 1{,}7079$$

$$q_6 = 1{,}7079 = 1 + \frac{1}{a_6};\ 1{,}7079 - 1 = \frac{1}{a_6}; a_6 = 1{,}4126$$

$$\vdots$$

$\sqrt{5} = (2,4,4,4,3,1,\ldots)$

Spočítáme sblížené zlomky:

$$\frac{P_1}{Q_1} = 2$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}} = \frac{38}{17}$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}} = \frac{161}{72}$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{3}}}} = \frac{521}{233}$$

$$\frac{P_6}{Q_6} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{682}{305}$$

Sblížené zlomky tedy jsou: $2, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{161}{72}, \frac{521}{233}, \frac{682}{305}, \cdots$

Podle předešlé věty jsou vsunuté zlomky tvaru $\frac{cP_{k+1} + P_k}{cQ_{k+1} + Q_k}$, kde pro c platí:

$$1 \leq c \leq q_{k+2}-1,\ c \in \mathbf{N}.$$

Spočítáme vsunuté zlomky mezi nultým a prvním sblíženým zlomkem, tj. pro hodnoty $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, $P_1 = 2$, $Q_1 = 1$.

Dosadíme do vztahu a získáme tento vsunutý zlomek $\frac{2c+1}{c}$, $c = 1$ tj. $\frac{3}{1}$.

Tento vsunutý zlomek není nejlepším přiblížením, protože $2c < q_{k+2}$ ($2 < 4$).

Další vsunuté zlomky získáme pro c = 2, c = 3:

* $\frac{2c+1}{c}$, $c = 2$ tj. $\frac{5}{2}$, tento vsunutý zlomek také není nejlepším přiblížením, protože $2c = q_{k+2}$ ale $(4) < (4, 4, \dots)$

* $\frac{2c+1}{c}$, $c = 3$ tj. $\frac{7}{3}$, tento vsunutý zlomek je nejlepším přiblížením, protože

$2c > q_{k+2}$ ($6 > 4$).

Pro hodnotu k = 1 získáme:

$P_1 = 2$, $Q_1 = 1$, $P_2 = 9$, $Q_2 = 4$. Vsunuté zlomky jsou následujících hodnot.

* $\frac{9c+2}{4c+1}$, $c = 1$ tj. $\frac{11}{5}$, tento vsunutý zlomek není nejlepším přiblížením, protože

$2c < q_{k+2}$ ($2 < 4$).

* $\frac{9c+2}{4c+1}$, $c = 2$ tj. $\frac{20}{9}$, tento vsunutý zlomek je nejlepším přiblížením, protože

$2c = q_{k+2}$ ale (4, 4) > (4, 4, 3, …).

* $\frac{9c+2}{4c+1}$, $c = 3$ tj. $\frac{29}{13}$, tento vsunutý zlomek je nejlepším přiblížením, protože $2c > q_{k+2}$ (6 > 4).

Pro hodnotu k = 2 získáme:

$P_2 = 9$, $Q_2 = 4$, $P_3 = 38$, $Q_3 = 17$. Vsunuté zlomky jsou následujících hodnot.

* $\frac{38c+9}{17c+4}$, $c = 1$ tj. $\frac{47}{21}$, tento vsunutý zlomek není nejlepším přiblížením,

protože $2c < q_{k+2}$ (2 < 4).

* $\frac{38c+9}{17c+4}$, $c = 2$ tj. $\frac{85}{38}$, tento vsunutý zlomek je nejlepším přiblížením,

protože $2c = q_{k+2}$ ale (4, 4, 4) > (4, 3, 1, …).

* $\frac{38c+9}{17c+4}$, $c = 3$ tj. $\frac{123}{55}$, tento vsunutý zlomek je nejlepším přiblížením,

protože $2c > q_{k+2}$ (6 > 4).

Pro hodnotu k = 3 získáme:

$P_3 = 38$, $Q_3 = 17$, $P_4 = 161$, $Q_4 = 72$. Vsunuté zlomky jsou následujících hodnot.

* $\frac{161c+38}{72c+17}$, $c = 1$ tj. $\frac{199}{89}$, tento vsunutý zlomek není nejlepším přiblížením,

protože $2c < q_{k+2}$ (2 < 3).

* $\frac{161c+38}{72c+17}$, $c = 2$ tj. $\frac{360}{161}$, tento vsunutý zlomek je nejlepším přiblížením,

protože $2c > q_{k+2}$ (4 > 3).

Pro hodnotu k = 4 získáme:

$P_4 = 161$, $Q_4 = 72$, $P_5 = 521$, $Q_5 = 233$. Pro tyto hodnoty vsunuté zlomky neexistují, protože $q_{k+2} = 1$.

8. Symetrické řetězové zlomky

Zpracováno podle publikace P.Víta (1982,[13])

Jako první bychom se měli seznámit s pojmem inverzní řetězový zlomek. Jak už název napovídá: K řetězovému zlomku (1,2,4,3,2) je inverzní řetězový zlomek (2,3,4,2,1) a obráceně.

Příklad 23:

Vypočítej řetězové zlomky (1,2,4,3,2) a (2,3,4,2,1).

Řešení:

q_i	1	2	4	3	2
P_i	1	3	13	42	97
Q_i	1	2	9	29	67

$$(1,2,4,3,2) = \frac{P_5}{Q_5} = \frac{97}{67}$$

q_i	2	3	4	2	1
P_i	2	7	30	67	97
Q_i	1	3	13	29	42

$$(2,3,4,2,1) = \frac{P_5}{P_4} = \frac{97}{67}$$

Pozn. Čísla P_4, P_5 jsou čitatelé sblížených zlomků inverzního řetězového zlomku (1,2,4,3,2).

[13] Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

Tento příklad ilustruje následující větu:

Věta 9: Nechť je $(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{P_n}{Q_n}$ a nechť P_{n-1} je čitatel předposledního sblíženého zlomku. Řetězový zlomek $(q_n, q_{n-1}, \dots, q_1)$ nazýváme inverzním k řetězovému zlomku $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ a platí $(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{P_n}{P_{n-1}}$.

Důkaz: Sestavme posloupnost rovností pro čísla P_k, počínajíc P_1:

$$P_1 = q_1 \cdot 1,$$

$$P_2 = q_1 q_2 + 1 = q_2 \cdot P_1 + 1,$$

$$P_3 = q_3 \cdot P_2 + P_1$$

......

$$P_n = q_n \cdot P_{n-1} + P_{n-2}.$$

Odtud:

$$\frac{P_2}{P_1} = q_2 + \frac{1}{P_1} = q_2 + \frac{1}{q_1} = (q_2, q_1),$$

$$\frac{P_3}{P_2} = q_3 + \frac{1}{\frac{P_2}{P_1}} = (q_3, q_2, q_1),$$

......

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = q_n + \frac{1}{\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}} = (q_n, q_{n-1}, \dots, q_1).$$

Tím je věta dokázána.

Jsou-li si oba inverzní řetězové zlomky rovny, je $q_1 = q_n, q_2 = q_{n-1}, \dots$. Mohou nastat dva případy.

Řetězový zlomek

$$(q_1, \dots, q_m, q_m, \dots, q_1) \tag{12}$$

má sudý počet prvků $2m$.

Řetězový zlomek

$$(q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, q_m, \dots, q_1) \tag{13}$$

má lichý počet prvků $2m+1$.

Řetězový zlomek tvaru (12) nebo (13) se nazývá symetrický řetězový zlomek.

Věta 10: Budiž $\frac{p}{q}$ zlomek v základním tvaru, $p > q > 1$ $(p, q \in N)$. Potom $\frac{p}{q}$ lze vyjádřit řetězovým zlomkem, který je symetrický a má sudý počet prvků $n = 2m$ právě tehdy, když $p/q^2 + 1$.

Důkaz má dvě části:

a) Je dán zlomek $\frac{p}{q}$ v základním tvaru a nechť jeho řetězový zlomek je symetrický o sudém počtu prvků $n = 2m$:

$$\frac{p}{q} = (q_1, \dots, q_m, q_m, \dots, q_1).$$

Protože je tento řetězový zlomek roven svému inverznímu řetězovému zlomku, platí $Q_n = P_{n-1}$. Je ovšem $p = P_n, q = Q_n$.

Ze vztahu (5) z kapitoly Vlastnosti sblížených zlomků plyne pro sudé n:

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = 1$$

Dosadíme za P_n, Q_n, P_{n-1} a dostáváme: $pQ_{n-1} = q^2 + 1$, tedy $p/q^2 + 1$.

b) Nechť nyní máme $p/q^2 + 1$, tj. existuje $t \in Z$ tak, že je $q^2 + 1 = pt$.
Řetězový zlomek číslo $\frac{p}{q}$ je roven $(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{P_n}{Q_n}$.

Nyní využijeme poznatků z první kapitoly:

Rovnosti $(q_1, \dots, q_n, 1) = (q_1, \dots, q_{n+1})$ lze využít k tomu, abychom podle potřeby zvolili v řetězovém zlomku kteréhokoli kladného racionálního čísla za počet prvků buď číslo sudé, nebo číslo liché.

Zvolme v našem řetězovém zlomku čísla $\frac{p}{q}$ za počet prvků n sudé číslo, takže je $(-1)^n = 1$. Platí stejně jako v první části důkazu:

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = 1.$$

Je tedy $p = P_n, q = Q_n$ a podle předpokladu věty $P_n > Q_n$, tj. existuje $t \in Z$ tak, že:

$$P_n t = Q_n^2 + 1$$
$$Q_n^2 + 1 = P_n t.$$

Jestliže k této rovnosti připojíme $Q_n P_{n-1} + 1 = P_n Q_{n-1}$ a obě rovnosti odečteme dostaneme:

$$Q_n(Q_n - P_{n-1}) = P_n(t - Q_{n-1}),$$

což znamená, že $P_n / Q_n(Q_n - P_{n-1})$.

Protože však čísla P_n, Q_n jsou nesoudělná, je $P_n / Q_n - P_{n-1}$. Je však $P_n > Q_n - P_{n-1}$; jediné číslo, které je dělitelné větším číslem, je nula. Musí proto být $Q_n - P_{n-1} = 0$, tj. $Q_n = P_{n-1}$.

Platí tedy rovnost $\frac{p}{q} = \frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n}{P_{n-1}}$, to značí, že řetězový zlomek čísla $\frac{p}{q}$ je symetrický, a to se sudým počtem prvků $n = 2m$, tj. je to řetězový zlomek $(q_1, \dots, q_m, q_m, \dots, q_1)$. Tím je důkaz hotový.

9. Záporná racionální čísla

Zpracováno podle publikací P.Víta (1982,[14]) a A.J.Chinčina (1952,[15])

Uveďme si příklad, kdy hledáme řetězový zlomek záporného racionálního čísla, tedy chceme, aby bylo $q_2, q_3, \dots, q_n \in N$. Toho lze dosáhnout tak, že q_1 bude záporné celé číslo. Použijeme celé hodnoty záporného racionálního čísla.

Lze vypočítat dvěma způsoby:

1) Výpočet použitím celé části čísla:

$$a = [a] + \frac{1}{a_1}$$

$$a = q_1 + \frac{1}{a_1}$$

a pro $a < 0\ je\ q_1 < 0, a_1 > 0, tj.\ q_2, \dots., q_n \in N.$

2) Pomocí Euklidova algoritmu – ukážeme si na př.24.

Příklad 24: Určeme řetězový zlomek čísla $\frac{-133}{61}$ a určeme jeho sblížené zlomky.

Řešení: a) Vypočítáme pomocí Euklidova algoritmu neúplné podíly čísla $\frac{-133}{61}$

$-133 = 61 \cdot (-3) + 50$

$61 = 50 \cdot 1 + 11$

$50 = 11 \cdot 4 + 6$

$11 = 6 \cdot 1 + 5$

$6 = 5 \cdot 1 + 1$

$5 = 1 \cdot 5$

[14] Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

[15] CHINČIN, A. J. *Řetězové zlomky [Chinčin, 1952] : Cepnyje drobi (Orig.).* 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 104 s

Vypočítali jsme tedy, že $\frac{-133}{61} = (-3,1,4,1,1,5)$

b) Vypočítáme sblížené zlomky:

	-3	1	4	1	1	5
P_i	-3	-2	-11	-13	-24	-133
Q_i	1	1	5	6	11	61

Sblížené zlomky jsou: $(-3,-2,\frac{-11}{5},\frac{-13}{6},\frac{-24}{11},\frac{-133}{61})$

10. Nekonečné řetězové zlomky

Zpracováno podle publikací P.Víta (1982,[16]) a A.J.Chinčina (1952,[17])

Nyní si zavedeme nekonečné řetězové zlomky, které mají tvar:

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}} \tag{14}$$

a zapisujeme je ve tvaru

$$(q_1, q_2, q_3, \ldots). \tag{15}$$

Nekonečné řetězové zlomky jsou vyjádřením iracionálního čísla α. Je-li $\alpha > 0, \alpha \in \mathbf{I}$, potom postupujeme takto:

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\alpha_1},$$

kde je $q_1 = [\alpha], \alpha_1 > 1, \ \alpha_1 \in \mathbf{I}$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - q_1},$$

$$q_2 = [\alpha_1],$$

$$\alpha_1 = q_2 + \frac{1}{\alpha_2}, \alpha_2 > 1, \ \alpha_2 \in \mathbf{I},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - q_2},$$

$$q_3 = [\alpha_2],$$

$$\alpha_2 = q_3 + \frac{1}{\alpha_3}, \alpha_3 > 1, \ \alpha_3 \in \mathbf{I},$$

$$\vdots$$

Všechna $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ jsou iracionální čísla, proto nemůže postup nikdy skončit. Dostaneme tedy skutečně nekonečný řetězový zlomek $(q_1, q_2, q_3, \ldots)$, kde je $q_1 \in \mathbf{Z}$ a $q_2, q_3, \ldots \in \mathbf{N}$.

[16] Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

[17] CHINČIN, A. J. *Řetězové zlomky [Chinčin, 1952] : Cepnyje drobi (Orig.)*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 104 s

Nyní si ukážeme na příkladech, jak probíhá výpočet čísel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ a $q_1, q_2, q_3 \ldots$

Příklad 25:

Vypočítejme nekonečný řetězový zlomek čísla $\alpha = \sqrt{3}$

Řešení:

$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_1} \qquad q_1 = 1$

$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_2} \qquad q_2 = 1$

$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1} = \sqrt{3} + 1$

$\sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{\alpha_3} \qquad q_3 = 2$

$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}+1-2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_4} \qquad q_4 = 1$

$\alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1} = \sqrt{3} + 1$

$\sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{\alpha_5} \qquad q_5 = 2$

$\alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{3}+1-2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_6} \qquad q_6 = 1$

$\alpha_6 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1} = \sqrt{3} + 1$

$\sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{\alpha_7} \qquad q_7 = 2$

$\vdots$

Dále není třeba počítat, vidíme: $q_1 = q_2 = q_4 = q_6 = \cdots = 1$

$$q_3 = q_5 = q_7 = \cdots = 2.$$

Dále z výpočtu vyplývá: $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \cdots = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \cdots = \sqrt{3} + 1$$

$\alpha = \sqrt{3} = (1,1,2,1,2,1,2,\ldots)$

Příklad 26:

Vypočítejme nekonečný řetězový zlomek čísla $\alpha = \sqrt{47}$

Řešení:

$\sqrt{47} = 6 + \frac{1}{\alpha_1} \qquad q_1 = 6$

$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{47}-6} = \frac{\sqrt{47}+6}{11}$

$\frac{\sqrt{47}+6}{11} = 1 + \frac{1}{\alpha_2} \qquad q_2 = 1$

$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{47}+6}{11}-1} = \frac{\sqrt{47}+5}{2}$

$\frac{\sqrt{47}+5}{2} = 5 + \frac{1}{\alpha_3} \qquad q_3 = 5$

$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{47}+5}{2}-5} = \frac{\sqrt{47}+5}{11}$

$\frac{\sqrt{47}+5}{11} = 1 + \frac{1}{\alpha_4} \qquad q_4 = 1$

$\alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{47}+5}{11}-1} = \sqrt{47} + 6$

$\sqrt{47} + 6 = 12 + \frac{1}{\alpha_6} \qquad q_5 = 12$

$\alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{47}+6-12} = \frac{\sqrt{47}+6}{11}$

$\frac{\sqrt{47}+6}{11} = 1 + \frac{1}{\alpha_6} \qquad q_7 = 1$

$\alpha_6 = \frac{1}{\frac{\sqrt{47}+6}{11}-1} = \frac{\sqrt{47}+5}{2}$

$\frac{\sqrt{47}+5}{2} = 5 + \frac{1}{\alpha_7} \qquad q_7 = 5$

$\alpha_7 = \frac{1}{\frac{\sqrt{47}+5}{2}-5} = \frac{\sqrt{47}+5}{11}$

$\frac{\sqrt{47}+5}{11} = 1 + \frac{1}{\alpha_8} \qquad q_8 = 1$

$\alpha_8 = \frac{1}{\frac{\sqrt{47}+5}{11}-1} = \sqrt{47} + 6$

$\sqrt{47} + 6 = 12 + \frac{1}{\alpha_9} \qquad q_9 = 12$

$\vdots$

Dále není třeba počítat, vidíme: $q_1 = 6$

$$q_2 = q_4 = q_6 = q_8 \ldots = 1$$

$$q_3 = q_7 = \cdots = 5$$

$$q_5, q_9 = 12$$

Dále z výpočtu vyplývá: $\alpha_1 = \alpha_5 = \cdots = \frac{\sqrt{47}+6}{11}$

$$\alpha_3 = \alpha_7 = \cdots = \frac{\sqrt{47}+5}{11}$$

$$\alpha_2 = \alpha_6 = \cdots = \frac{\sqrt{47}+5}{2}$$

$$\alpha_4 = \alpha_8 = \cdots = \sqrt{47} + 6$$

$\alpha = \sqrt{47} = (6,1,5,1,12,1,5,1,12, \ldots)$

Dostali jsme nekonečné řetězové zlomky a to periodické. V prvním příkladu je perioda dvouprvková a začíná prvkem q_2. V druhém příkladu je perioda čtyřprvková a začíná také prvkem q_2.

Z vypočítaných příkladů vyplývá: Každému iracionálnímu číslu odpovídá jeden nekonečný řetězový zlomek. Tento zlomek je periodický, je – li číslo algebraické, neperiodický, je – li číslo transcendentní. Výpočet tohoto zlomku provedeme pomocí celé části čísla. Výpočet je komplikován pouze tím, že pracujeme s iracionálními čísly.

Pro periodické řetězové zlomky $(q_1, q_2, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots, q_n, q_{k+1}, \dots)$ budeme používat zápisu $(q_1, q_2, \dots, q_k, \overline{q_{k+1}, \dots, q_n})$.

Uvedeme si tedy nějaké příklady: $\sqrt{3} = (1, \overline{1,2})$,

$$\sqrt{5} = (2, \overline{4}),$$

$$2 - \sqrt{2} = (0,1,1, \overline{2}).$$

Ale ne všechny nekonečné řetězové zlomky jsou periodické. Naopak jsou mezi všemi nekonečnými řetězovými zlomky v menšině. Např. $\pi = (3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \dots)$.

Existují také nekonečné řetězové zlomky, které nejsou periodické, ale pro jejich prvky platí určité zákonitosti tzv. **výtvarné zákony**. Např. $e = (2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,\dots)$ nebo $e^2 = (7,2,1,1,3,18,5,1,1,6,30,8,1,1, \dots)$.

Výtvarné zákony pro e, e^2:

$$e = (2, \overline{1, 2m, 1})_{m=1}^{\infty}$$

$$e^2 = (7, \overline{2 + 3m, 1,1,3 + 3m, 18 + 12m})_{m=0}^{\infty}$$

Víme tedy, že každé iracionální číslo má nekonečný řetězový zlomek. Zbývá ještě dokázat obrácené tvrzení, že hodnotou každého (pravidelného) nekonečného řetězového zlomku je nějaké iracionální číslo.

Nechť je dáno: $(q_1, q_2, \dots)$ je nekonečný řetězový zlomek. Sblížené zlomky jsou $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots$. Ovšem neexistuje žádný poslední sblížený zlomek.

To se projevuje ve vzorci pro horní mez absolutní hodnoty chyby, pro kterou jsme v jedné z předešlých kapitol odvodili vzorec $\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}$.

Nyní píšeme α místo $\frac{p}{q}$: $\left|\alpha-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{Q_kQ_{k-1}}$.

Pro konečné řetězové zlomky o n prvcích platí tento vzorec jen pro $k<n$, ale pro nekonečné řetězové zlomky ovšem toto omezení odpadá a vzorec platí pro všechna $k\in N$. Nekonečný řetězový zlomek $(q_1,q_2,\dots)$ můžeme vždy nahradit konečným řetězovým zlomkem $(q_1,q_2,\dots,q_n,\alpha_n)$, kde ovšem α_n je iracionální číslo a není to nic jiného, než zbytek řetězového zlomku $(q_1,q_2,\dots)$: $\alpha_n=(q_{n+1},q_{n+2},\dots)$.

A tedy: $\alpha=(q_1,q_2,\dots,q_n,\alpha_n)$.

Z toho vyplývá vztah: $\alpha=\frac{\alpha_nP_n+P_{n-1}}{\alpha_nQ_n+Q_{n-1}}$. Známe-li $P_{n-1},P_n,Q_{n-1},Q_n,\alpha_n$ můžeme odtud počítat α.

Příklad 27:

Vypočítejme hodnotu řetězového zlomku $\alpha=\left(1,2,\sqrt{2}+1\right)$.

Řešení:

Je zde $q_1=1,q_2=2,\alpha_2=\sqrt{2}+1$. Z těchto hodnot určíme $P_1=1,P_2=3,Q_1=1,Q_2=2$

a dosadíme:

$$\alpha=\frac{3\left(\sqrt{2}+1\right)+1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)+1}=\frac{3\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}+3}=\frac{(3\sqrt{2}+4)(2\sqrt{2}-3)}{-1}=\sqrt{2}$$

Pozn. Výraz $\sqrt{2}+1$ vyjadřuje zbytek, uvědomíme si, že platí: $\sqrt{2}=(1,\overline{2})$

Nyní si ještě uvedeme něco o výrazech s druhou odmocninou. Jejich nekonečné řetězové zlomky dovedeme počítat podle algoritmu uvedeného na začátku kapitoly. Obecný tvar toho, čemu jsme zatím říkali „výraz s druhou odmocninou“, je:

$$\frac{P\pm\sqrt{N}}{Q} \tag{16}$$

kde P,Q jsou celá čísla a N je přirozené číslo, které není druhou mocninou celého čísla: $N\neq a^2, kde\ a\in Z$. Jinak řečeno: N je takové přirozené číslo, že $\sqrt{N}\in I$.

Proto $\sqrt{N}$ je iracionální číslo. Čísla P,Q nemají nic společného s čísly P_k,Q_k, kterými značíme čitatele a jmenovatele sblížených zlomků.

Každý výraz (16) budeme nazývat kvadratická iracionalita, protože je kořenem určité kvadratické rovnice.

Jeli $\alpha = \frac{P-\sqrt{N}}{Q}$ iracionálním kořenem nějaké kvadratické rovnice, je $\alpha' = \frac{P-\sqrt{N}}{Q}$ jejím druhým iracionálním kořenem, a rovnice má tvar $(x-\alpha)(x-\alpha') = 0$.

Pro výraz $\alpha = \sqrt{N}$ je $\alpha' = -\sqrt{N}$ a příslušná kvadratická rovnice je obzvlášť jednoduchá: $x^2 - N = 0$.

Druhými odmocninami čísel N se budeme zabývat později. Uvedeme si ještě ale tabulku řetězových zlomků čísla $\sqrt{N}, kde\ N \leq 50$.

N	Řetězový zlomek čísla $\sqrt{N}$
2	$(1,\overline{2})$
3	$(1,\overline{1,2})$
5	$(2,\overline{4})$
6	$(2,\overline{2,4})$
7	$(2,\overline{1,1,1,4})$
8	$(2,\overline{1,4})$
10	$(3,\overline{6})$
11	$(3,\overline{3,6})$
12	$(3,\overline{2,6})$
13	$(3,\overline{1,1,1,1,6})$
14	$(3,\overline{1,2,1,6})$
15	$(3,\overline{1,6})$
17	$(4,\overline{8})$
18	$(4,\overline{4,8})$
19	$(4,\overline{2,1,3,1,2,8})$
20	$(4,\overline{2,8})$
21	$(4,\overline{1,1,2,1,1,8})$
22	$(4,\overline{1,2,4,2,1,8})$

23	$(4,\overline{1,3,1,8})$
24	$(4,\overline{1,8})$
26	$(5,\overline{10})$
27	$(5,\overline{5,10})$
28	$(5,\overline{3,2,3,10})$
29	$(5,\overline{2,1,1,2,10})$
30	$(5,\overline{2,10})$
31	$(5,\overline{1,1,3,5,3,1,1,10})$
32	$(5,\overline{1,1,1,10})$
33	$(5,\overline{1,2,1,10})$
34	$(5,\overline{1,4,1,10})$
35	$(5,\overline{1,10})$
37	$(6,\overline{12})$
38	$(6,\overline{6,12})$
39	$(6,\overline{4,12})$
40	$(6,\overline{3,12})$
41	$(6,\overline{2,2,12})$
42	$(6,\overline{2,12})$
43	$(6,\overline{1,1,3,1,5,1,3,1,1,12})$
44	$(6,\overline{1,1,1,2,1,1,1,12})$
45	$(6,\overline{1,2,2,2,1,12})$
46	$(6,\overline{1,3,1,1,2,6,2,1,1,3,1,12})$
47	$(6,\overline{1,5,1,12})$
48	$(6,\overline{1,12})$
50	$(7,\overline{14})$

10. Ryze periodické řetězové zlomky

Zpracováno podle publikací P.Víta (1982,[18]) a A.J.Chinčina (1952,[19])

Věta 11: Takto nazýváme řetězové zlomky tvaru:

$$(q_1, q_2, \dots, q_k, q_1, q_2, \dots, q_k, q_1, \dots). \tag{17}$$

Jejich perioda je $k - prvkov$á a místo (17) píšeme pro $k > 1$:

$$\overline{(q_1, q_2, \dots, q_k)}. \tag{18}$$

Pro $k = 1$ je příslušný zápis tento: $(\overline{q_1})$.

Příklad 28:

Dokažme, že platí: $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = (\overline{1})$.

Řešení:

Protože víme $2 < \sqrt{5} < 3$

potom tedy $\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right] = q_1 = 1,$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, \qquad \alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \alpha.$$

Je tedy $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

a odtud $q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = 1$

Důkaz, že platí $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = (\overline{1})$ je proveden.

[18] Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

[19] CHINČIN, A. J. *Řetězové zlomky [Chinčin, 1952] : Cepnyje drobi (Orig.)*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 104 s

Perioda ovšem nemusí být pouze jednoprvková. Uvedeme si dva příklady tříprvkové periody.

Příklad 29:

Budiž $\alpha = \overline{(2,1,3)}$. Píšeme $\alpha = (2,1,3,\alpha)$. Především si musíme zapamatovat, že $\alpha > 1$. Potřebujeme sestavit kvadratickou rovnici pro α za použití vzorce $\alpha = \frac{\alpha_n P_n + P_{n-1}}{\alpha_n Q_n + Q_{n-1}}$.

Tedy: $\alpha = \frac{\alpha P_3 + P_2}{\alpha Q_3 + Q_2} = \frac{11\alpha + 3}{4\alpha + 1}$

tj. po úpravě $4\alpha^2 - 10\alpha - 3 = 0$

- nahradíme α písmenem x, abychom rozlišili neznámou a kořeny kvadratické rovnice

$$4x^2 - 10x - 3 = 0$$

Kořeny budou:

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{N}}{Q}, kde\ P, Q \in Z, N \in N\ a\ \sqrt{N} \in I.$$

$$\alpha' = \frac{P - \sqrt{N}}{Q}, kde\ P, Q \in Z, N \in N\ a\ \sqrt{N} \in I.$$

Taková čísla α, α' se nazývají **sdružená** a každá dvě iracionální čísla, které jsou kořeny kvadratické rovnice, jsou sdružená.

Příklad 30:

Budiž $\beta = \overline{(3,1,2)}$. Píšeme $\beta = (3,1,2,\alpha)$. Především si musíme zapamatovat, že $\beta > 1$. Potřebujeme sestavit kvadratickou rovnici pro α za použití vzorce $\beta = \frac{\beta_n P_n + P_{n-1}}{\beta_n Q_n + Q_{n-1}}$.

Tedy: $\beta = \frac{11\beta + 4}{3\beta + 1}$,

Tj. po úpravě $3\beta^2 - 10\beta - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 10x - 4 = 0$.

Rovnici $3x^2 - 10x - 4 = 0$ a rovnici z předešlého příkladu $4\alpha^2 - 10\alpha - 3 = 0$ budeme nazývat **konjungovanými.** (Všimněme si, že perioda čísla β vznikla z periody čísla α tím, že se prvky psali v obráceném pořádku).

Obecně si všimněme: jeli $ax^2 + bx + c = 0$ nějaká kvadratická rovnice, pak kvadratická rovnice s ní konjugovaná má tvar $cx^2 - bx + a = 0$.

Dále příklad řešíme úplně stejně, jako předešlý - není nutno uvádět.

Úvahy, které jsme prováděli nad předešlými dvěma příklady lze popsat obecně:

Věta 12: Jsou dány $\alpha = (q_1, \dots, q_k)$ a $\beta = (q_k, \dots, q_1)$ dva ryze periodické řetězové zlomky, přičemž perioda řetězového zlomku β vznikne obrácením periody řetězového zlomku α. Pak kvadratické rovnice pro α, β jsou navzájem konjungované. Má-li první kvadratická rovnice kladný kořen $\alpha > 1$, druhá kladný kořen $\beta > 1$, platí pro sdružený kořen $\alpha\prime$ první rovnice rovnost: $\alpha\prime = -\frac{1}{\beta}$ a je $-1 < \alpha\prime < 0$.

Důkaz je v podstatě opakováním výpočtu předešlých příkladů tedy není nutné ho uvádět.

11. Řetězové zlomky druhých mocnin

Zpracováno podle publikace P.Víta (1982,[20])

Výrazem druhá mocnina budeme rozumět výhradně číslo $\sqrt{N} \in I$ $(N \neq a^2, kde\ a \in Z)$.

Pro ≤ 50 jsme tabulku řetězových zlomků takových mocnin zařadili už do kapitoly Nekonečné řetězové zlomky. Řetězové zlomky iracionálních čísel $\sqrt{N}$ nejsou ryze periodické. Neboť je-li $\alpha = \sqrt{N}$ kladným kořenem kvadratické rovnice $x^2 - N = 0, je\ pro\ N \neq 1$, což předpokládáme, $\alpha > 1$. Pro sdružený kořen α' je však $\alpha' < -1$, což odporuje podmínce $-1 < \alpha' < 0$. Tedy číslo $\sqrt{N}$ nevyhovuje větě z předešlé kapitoly, a tedy nemá ryze periodický řetězový zlomek.

Věta 13: Pro řetězový zlomek čísla $\sqrt{N}$, $N \in N, \sqrt{N} \in I$ platí

$$\sqrt{N} = (q_1, \overline{q_2, q_3, \dots, q_3, q_2, 2q_1}).$$

Můžeme si popsat slovy: Perioda řetězového zlomku čísla $\sqrt{N}$ se skládá ze dvou částí. První část je symetrická $(q_2, q_3, \dots, q_3, q_2)$ a druhá část je poslední prvek $2q_1$, který je dvojnásobkem prvního prvku.

Symetrická část může mít více podob:

- počet prvků v symetrické části je roven nule $(q_1, \overline{2q_1})$
- počet prvků v symetrické části periody je roven jedné $(q_1, \overline{q_2, 2q_1})$
- může mít prostřední prvek a tedy obsahuje lichý počet prvků $\sqrt{54} = (7, \overline{2,1,6,1,2,14})$
- nemá prostřední prvek a tedy obsahuje sudý počet prvků $\sqrt{53} = (7, \overline{3,1,1,3,14})$

Důkaz:

Označme $\alpha = q_1 + \sqrt{N}, q_1 = [\sqrt{N}]$, víme že $q_1 \in Z$ a platí:

$$q_1 \leq \sqrt{N} < q_1 + 1$$

Je ovšem: $\alpha = q_1 + \sqrt{N} > 1$

Pro číslo α' sdružené s α, tj. pro číslo $\alpha' = q_1 - \sqrt{N}$, je pak tedy:

$$-1 < \alpha' < 0.$$

[20] Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

Nerovnosti pro čísla α, α' jsou však podmínkou, aby $\alpha = q_1 + \sqrt{N}$ mělo ryze periodický řetězový zlomek, jehož perioda zřejmě začíná prvkem $2q_1$:

$$\alpha = q_1 + \sqrt{N} = (2q_1, q_2, \dots, q_k).$$

Z předešlé kapitoly víme, že ryze periodický řetězový zlomek $(q_k, q_{k-1}, \dots, q_2, 2q_1)$ je vyjádřením čísla $-\frac{1}{\alpha'}$, kde α' je sdružené s α, tedy $\alpha' = q_1 - \sqrt{N}$.

Je tedy: $-\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{-q_1+\sqrt{N}} = \frac{1}{\alpha-2q_1} = \frac{1}{(0,q_2,\dots,q_k,2q_1,\dots)}$

Výraz na pravé straně rozepíšeme:

$$\frac{1}{(0, q_2, \dots, q_k, 2q_1, \dots)} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{2q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}}} =$$

$$= q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{2q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}}$$

Máme tedy: $-\frac{1}{\alpha'} = (q_2, q_3, \dots, q_k, 2q_1, q_2, \dots)$. Srovnáme-li oba výrazy pro $-\frac{1}{\alpha'}$ dostáváme $q_k = q_2, q_{k-1} = q_3, \dots, q_2 = q_k$. Tím jsme dostalli symetrickou část periody. Zbytek periody je tvořen prvkem $2q_1$. Řetězový zlomek čísla $\sqrt{N}$ dostaneme z čísla $\alpha = q_1 + \sqrt{N}$ ihned odečtením q_1:

$$\sqrt{N} = (q_1, \overline{q_2, q_3, \dots, q_3, q_2, 2q_1}).$$

Tím je věta dokázána.

12. Použití řetězových zlomků

Zpracováno podle publikací A.J.Chinčina (1952,[21]), P.Víta (1982,[22]) a I.M.Vinogradova (1953,[23])

- Řešení kongruence $ax \equiv b(mod\ m)$

Uvedeme si něco málo o kongruenci:

Nechť $a, b \in Z, m \in N, m \geq 2$; jestliže platí: $m\ |a - b$,

tj. jestliže existuje $t \in Z$ takové, že $a - b = mt$, píšeme:

$$a \equiv b(mod\ m)$$

a čteme: a je kongruentní s b podle modulu m.

Věta 14: Kongruence mezi dvěma čísly $a, b \in Z$ je ekvivalentní v Z, tj. pro každá tři $a, b, c \in Z$ platí:

1) $a \equiv a(mod\ m)$ - REFLEXIVNOST
2) Jestliže $a \equiv b(mod\ m), pak\ b \equiv a(mod\ m)$ - SYMETRIČNOST
3) Jestliže $a \equiv b(mod\ m)\ a\ zároveň\ b \equiv c(mod\ m), pak\ a \equiv c(mod\ m)$ – TRANZITIVNOST

Věta 15: Jestliže

$$a \equiv b(mod\ m)\ a\ \ c \equiv d(mod\ m)$$

pak také

$$a + c \equiv b + d(mod\ m)$$

$$ac \equiv bd(mod\ m)$$

---

[21] CHINČIN, A. J. *Řetězové zlomky [Chinčin, 1952] : Cepnyje drobi (Orig.)*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 104 s

[22] Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

[23] Vinogradov I. M.: Základy theorie čísel. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953.

Důsledek:

Platí $c \equiv c(mod\ m)$ pro každé $c \in Z$ a tedy, platí-li

$$a \equiv b(mod\ m),$$

pak také platí

$$a + c \equiv b + c(mod\ m)$$

$$ac \equiv bc(mod\ m)$$

pro každé $c \in Z.$

Ze vztahu $a - b = mt$ pro $t \in Z,$ okamžitě plyne:

$$a = b + mt.$$

Zřejmě je $mt \equiv 0(mod\ m)$ pro každé $t \in Z$, tedy také $0 \equiv mt(mod\ m)$ a jestliže tuto kongruenci přičteme ke kongruenci $a \equiv b(mod\ m)$, dostáváme kongruenci:

$$a \equiv b + mt(mod\ m).$$

Další důsledek:

Obě strany kongruence $a \equiv b(mod\ m)$ tj. obě čísla $a, b \in Z$, lze vynásobit libovolným celým číslem, aniž se tím poruší platnost kongruence.

Příklad 30:

Z platné kongruence $25 \equiv 14(mod\ 6)$ dostáváme tedy například tyto další platné kongruence:

$50 \equiv 28(mod\ 6)$

$75 \equiv 42(mod\ 6)$

$-25 \equiv -14(mod\ 6)$

$\vdots$

Pro dělení kongruencí platí následující:

Věta 16: Nechť platí $a \equiv b(mod\, m)$. Nechť dále existuje

a) $d \in N$, pro které $d\ |a, d\ |b, d\ |m$. Pak platí:

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d}\left(mod\ \frac{m}{d}\right)$$

b) Existuje $d \in Z$, pro které $d\ |a, d\ |b,\ ale\ neplatí\ d\ |m$. Pak platí:

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d}(mod\, m).$$

Příklad 31:

Dělíme platnou kongruenci $12 \equiv 4(mod\ 8)$

Řešení: obě strany i modul dělíme čtyřmi, tedy: $3 \equiv 1(mod\ 2)$

Kongruenci $ax \equiv b(mod\, m)$ nazýváme lineární kongruencí s neznámou x; $a, b \in Z, m \in N, m \geq 2$. Celá čísla x, která vyhovují $ax \equiv b(mod\, m)$ jsou řešení této kongruence. Jestliže takové x existuje, pak jich existuje nekonečně mnoho. Budeme však vždy vybírat takové řešení x_0, které je prvkem úplné soustavy nejmenších nezáporných zbytků $(mod\, m)$. Takových x_0 není ovšem nekonečně mnoho.

Věta 17: Nechť v kongruenci $ax \equiv b(mod\, m)$ platí:

a) Největší společný dělitel čísel $a, m\ je\ d = 1$. Pak má $ax \equiv b(mod\, m)$ právě jedno řešení x_0 ze soustavy $\{0,1, \ldots, m-1\}$
b) Největší společný dělitel čísel $a, m\ je\ d > 1$. Pak mohou nastat dva případy:
   a) Neplatí $d\ |b$: pak $ax \equiv b(mod\, m)$ nemá řešení
   b) Platí $d\ |b$: pak $ax \equiv b(mod\, m)$ má právě d řešení, z nichž každé je prvkem soustavy $\{0,1, \ldots, m-1\}$.

Budeme řešit kongruenci $ax \equiv b(mod\, m)$ za předpokladu, že největší společný dělitel čísel $a, m\ je\ 1$. Použijeme řetězového zlomku racionálního čísla $\frac{m}{a}$. Nechť je tedy $a, m \in N$. Sblížené zlomky kladného racionálního čísla $\frac{m}{a}$ nechť jsou

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n} = \frac{m}{a}.$$

Použijeme vztah z jedné z předešlých kapitol: $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n$

Máme tedy: $mQ_{n-1} - aP_{n-1} = (-1)^n$

Odtud: $aP_{n-1} = (-1)^n + mQ_{n-1}$

První člen na pravé straně můžeme psát jako $(-1)^{n-1}$ a protože $Q_{n-1} \in Z$, platí:

$$aP_{n-1} \equiv (-1)^{n-1} (mod\, m).$$

Násobíme obě strany této kongruence číslem $(-1)^{n-1} b$ a dostáváme:

$$a(-1)^{n-1} P_{n-1} b \equiv b (mod\, m).$$

To však znamená, že je:

$$x \equiv (-1)^{n-1} P_{n-1} b (mod\, m). \tag{19}$$

Jestliže takto vypočítané x není prvkem soustavy $\{0,1, \dots, m-1\}$, dostaneme x_0 přičtením mt, kde *t* je vhodné celé číslo.

Příklad 32:

Řešme kongruenci $285x \equiv 177 (mod\, 924)$

Řešení:

Největší společný dělitel čísel 285,177 a 924 je číslo 3. Podle vzorce (19) řešíme již upravenou kongruenci:

$95x \equiv 59 (mod\, 308)$ v níž je největší společný dělitel čísel 95 a 308 roven 1.

Vypočítáme prvky řetězového zlomku čísla $\frac{308}{95}$.

$308 : 95 = 3 \cdot 95 + 23$

$95 : 23 = 4 \cdot 23 + 3$

$23 : 3 = 7 \cdot 3 + 2$

$3 : 2 = 1 \cdot 2 + 1$

$2 : 1 = 2$

Máme tedy: $\frac{308}{95} = (3,4,7,1,2)$ odtud n = 5

Sestavíme tabulku:

q_i	3	4	7	1	2
P_i	3	13	94	107	208
Q_i	1	4	29	33	95

$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{107}{33}$ a je tedy $P_4 = 107$

$$x \equiv 107 \cdot 59 (mod\ 308),$$

$$x \equiv 6313 (mod\ 308),$$

$$x \equiv 6313 - 20 \cdot 308 = 153$$

Řešení původní kongruence jsou čísla: 153,461,769.

- Řešení neurčité rovnice $ax + by = c$

Nechť $a, b, c \in Z$. Úlohu najít, kde hledáme čísla $x, y \in Z$ $(která\ splňují\ vztah\ ax + by = c)$ nazýváme lineární neurčitou (diofantickou) rovnicí o dvou neznámých x, y. Známe-li jedno řešení (x_0, y_0), dovedeme okamžitě napsat nekonečně mnoho řešení (x, y): nechť $x_0, y_0 \in Z$ a nechť platí:

$$ax_0 + by_0 = c. \tag{20}$$

Hledejme nyní nějaká dvě jiná čísla $x, y \in Z$, pro která platí:

$$ax + by = c. \tag{21}$$

Odečteme-li (20) od (21), dostáváme:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$a(x - x_0) = -b(y - y_0). \tag{22}$$

Levá strana této rovnosti je dělitelná číslem $a \in Z$, tedy jím musí být dělitelná i pravá strana:

$$a \mid b(y - y_0).$$

Nyní předpokládejme, že neplatí $a \mid b$, pak je:

$$a \mid y - y_0$$

$$y - y_0 = at,$$

kde $t \in Z$. Dosadíme-li odtud do vztahu (22), dostáváme:

$$x - x_0 = -bt.$$

Celkem tedy máme řešení (x, y), kde:

$$x = x_0 - bt,$$

$$y = y_0 + at,$$

kde *t* je libovolné celé číslo platí:

$$ax_0 + by_0 = c,$$

tj. (x_0, y_0) je řešení rovnice (21).

Je-li $a \mid b$, musí být také $a \mid c$, aby rovnice byla řešitelná. Pak celou rovnici vydělíme číslem „*a*“ a dostáváme předešlý případ.

Existence řešení vychází z věty, která je důsledkem Euklidova algoritmu.

Platí: Nechť $a, b \in Z, d$ je největší společný dělitel čísel a, b. Potom existují čísla $x, y \in Z$ taková, že platí: $ax + by = d$. Tato čísla lze najít Euklidovým algoritmem.

Věta 18: Nechť $a, b, c \in Z$. Neurčitá rovnice $ax + by = c$ má řešení x_0, y_0 v oboru celých čísel, jestliže největší společný dělitel *d* čísel *a,b* dělí také číslo *c*. Řešení je pak nekonečně mnoho a jsou určena vzorci:

$$x = x_0 - bt$$

$$y = y_0 + at, \tag{23}$$

kde *t* je libovolné celé číslo.

Abychom nalezli jednu dvojici kořenů $x_0, y_0 \in Z$, která určuje všechna řešení *x,y* podle (23), použijeme opět řetězových zlomků.

Vyjdeme jako při řešení kongruencí ze vzorce: $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n$ (24)

a vypočítáme řetězový zlomek čísla $\frac{b}{a}$, což je zlomek v základním tvaru, jestliže rovnici

$$ax + by = c$$

Dělíme společným činitelem, největším společným dělitelem čísel *a,b*. Na rozdíl od kongruencí se zde můžeme setkat se záporným zlomkem. Na postupu řešení se nic nemění, jen si musíme uvědomit, že pro záporná racionální čísla jsou všechna čísla P_k záporná.

Určíme sblížené zlomky $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n} = \frac{b}{a}$. Dosadíme do (24) a vynásobíme na obou stranách číslem $(-1)^n c$:

$$bc(-1)^n Q_{n-1} - ac(-1)^n P_{n-1} = c,$$

tedy:

$$ac(-1)^{n-1} P_{n-1} + bc(-1)^n Q_{n-1} = c,$$

$$a[(-1)^{n-1} P_{n-1} c] + b[(-1)^n Q_{n-1} c] = c.$$

Odtud srovnáním s rovnicí $ax_0 + by_0 = c$

dostáváme:

$$x_0 = (-1)^{n-1} P_{n-1} c,$$

$$y_0 = (-1)^n Q_{n-1} c.$$

(24)

Příklad 33:

Řešme rovnici $5x - 3y = 1$.

Řešení: Najdeme prvky řetězového zlomku $\frac{b}{a} = -\frac{3}{5}$. Je tedy: $-\frac{3}{5} = (-1,2,2), n = 3$ (výpočty není třeba uvádět, jsou uvedeny již v mnoha předešlých příkladech)

Sestavíme tabulku:

q_k	-1	2	2
P_k	-1	-1	-3
Q_k	1	2	5

$P_2 = -1, Q_2 = 2$ a vzorce (24) udávají: $x_0 = -1, y_0 = -2$.

Obecné řešení je: $x = -1 + 3t, y = -2 + 5t$.

Pro $t = 1$ dostáváme odtud kladné hodnoty *x, y*: $x = 2, y = 3$.

- Využití řetězových zlomků na SŠ nebo ZŠ

Řetězové zlomky se používají k zobrazení racionálních i iracionálních čísel. Zejména pod pojmem iracionální číslo si žáci základních i středních škol mají špatné představy a hůře ho chápou. Uvědomme si, že při praktickém počítání žáci pracují jen s racionálními čísly. Nejlepším příkladem je číslo π. Žáci a studenti počítají s číslem 3,14 nebo 3,14159. Dále třeba místo čísla *e* počítají s číslem 2,72 nebo 2,7183 apod. Z technických důvodů se tedy omezujeme na konečný počet desetinných míst, tj. na čísla racionální, i když víme, že je to jen přibližné. Studenti a žáci většinou neradi počítají se zlomky a převádějí si je na desetinná čísla i za cenu určitých chyb ve výsledcích, ale my víme, že je to mnohdy výhodnější a hlavně přesnější.

Nyní si ukážeme, jaké chyby se žáci zaokrouhlováním čísla π dopouštějí:

Příklad 34: Sblížené zlomky čísla π jsou

q	-	3	7	15	1
P_k	1	3	22	333	355
Q_k	0	1	7	106	113

Náhrada čísla π:	Chyba, které se dopouštíme
$\pi = 3$	$\delta = 0{,}1415927$
$\pi = \frac{22}{7}$	$\delta = 0{,}0012645$
$\pi = \frac{333}{106}$	$\delta = 0{,}0000832$
$\pi = \frac{355}{113}$	$\delta = 0{,}0000003$

Na školách se často udává jako přibližná hodnota čísla π zlomek $\frac{22}{7}$, což je, jak už víme, druhý sblížený zlomek řetězového zlomku čísla π. Při této aproximaci se dopouštíme chyby v řádu tisícin, což není až tak špatné. Vidíme ale, že použitím třetího sblíženého zlomku $\pi = \frac{333}{106}$ bychom se dopouštěli chyby menší.

Příklad 35:

Žákům zadáme příklad: Vypočtěte obvod kružnice o poloměru $r=5cm$.

Pokud si najdou v kalkulačce $\pi = 3{,}1415927$, je obvod $o = 2 \cdot \pi \cdot r = 31{,}415927cm$. Žáci ale většinou znají zaokrouhlenou hodnotu $\pi = 3{,}14$. Potom vyjde obvod $o = 31{,}4cm$, tzn. rozdíl obou obvodů je $\delta = 0{,}015927$.

Kdyby však použili hodnotu $\pi = \frac{22}{7}$, obvod $o = 31{,}4285714\ cm$ a $\delta = 0{,}0126444$.

~ Další aplikace na ZŠ je použití při procvičování úpravy složených zlomků. Řetězový zlomek je vlastně zlomek složený. Řetězové zlomky lze použít i v případě, kdy máme složitý zlomek, se kterým se nám bude těžko počítat. Vyjádříme-li ho jako řetězový zlomek a najdeme jeho sblížené zlomky. Dopustíme se pouze malých chyb a získáme mnohem jednodušší zlomek, se kterým se nám mnohem lépe počítá.

13. Sbírka neřešených příkladů

1) Vypočítejme čísla $q_1, \dots, q_n$ čísla $\frac{43}{30}$.

[(1,2,3,4)]

2) Vypočítejme čísla $q_1, \dots, q_n$ čísla $2{,}3547$

[(2,2,1,4,1,1,6,1,20,2)]

3) Vypočítejme sblížené zlomky řetězových zlomků čísla $\frac{900}{3361}$

$$\left[0, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{4}{15}, \frac{15}{56}, \frac{49}{183}, \frac{64}{239}, \frac{177}{661}, \frac{241}{900}, \frac{900}{3361}\right]$$

4) Vypočítejme sblížené zlomky řetězových zlomků:
   a) $(0,3,3,3,3,3,3)$
   b) (1,1,2,3,2)

$$\left[a)\ 0, \frac{1}{3}, \frac{10}{33}, \frac{33}{109}, \frac{109}{360}, \frac{360}{1189}, b) 1,2, \frac{5}{3}, \frac{17}{10}, \frac{39}{23}\right]$$

5) Najděme řetězový zlomek čísla $-\frac{43}{30}$.

[(−2,1,1,3,4)]

6) Najděme řetězový zlomek čísla $-\frac{105}{38}$ a jeho sblížené zlomky

$$\left[(-3,4,4,2), -3, -\frac{11}{4}, -\frac{47}{17}, -\frac{105}{38}\right]$$

7) Určeme, s jakou předností vyjadřuje číslo 0,317317 pátý sblížený zlomek řetězového zlomku tohoto desetinného čísla.

$[\delta = 0{,}0002]$

8) Určeme hodnotu periodického zlomku $a = \left(2,3,\overline{10,1,1,1}\right)$.

$$\left[\frac{20-\sqrt{2}}{8}\right]$$

9) Vypočítejme iracionální číslo α, jestliže $\alpha = (\overline{1,2,3,4})$.

$$\left[\frac{9+2\sqrt{39}}{15}\right]$$

10) Vypočítejme nekonečný řetězový zlomek čísla $\alpha = \sqrt{5}$.

$$\left[\alpha = \sqrt{5} = (2,4,4,4,\ldots)\right]$$

11) Vypočítejme nekonečný řetězový zlomek čísla $\alpha = \sqrt{41}$.

$$\left[\alpha = \sqrt{41} = (6,2,2,12,2,2,12,\ldots)\right]$$

12) Řešme kongruenci $42x \equiv 11(mod\ 95)$

$$[x_0 = 93]$$

Závěr

Diplomová práce shrnuje již známé poznatky o řetězových zlomcích, jejich vlastnostech a využití. Kromě úvodu a závěru je práce rozdělená na 13 kapitol, které obsahují množství vět a jejich důkazů. Pro lepší pochopení jsou doplněny množstvím příkladů.

Hlavním cílem práce bylo seznámení se základními poznatky řetězových zlomků a aplikace na různých typech příkladů. To nám mělo ukázat, jaké mají široké využití. Protože k danému tématu není příliš mnoho literatury, bylo vyhledávání příkladů obtížnější. Přesto jsem se pokusila téměř od každého typu uvést více příkladů a některé příklady jsem si vytvořila sama.

Následnou sondou mezi další studenty matematiky byla užitečnost řetězových zlomků potvrzena. Pro malé množství dotázaných jsem se dalším výzkumem a jeho zpracováním nezabývala. Část práce – využití řetězových zlomků na ZŠ a SŠ jsem využila při výuce matematiky v 9. třídě. V této hodině jsme se zabývali právě číslem π a jeho použitím.

Literatura

Knižní zdroje:

Vít,Pavel. Škola mladých matematiků, Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

CHINČIN, A. J. *Řetězové zlomky [Chinčin, 1952] : Cepnyje drobi (Orig.)*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 104 s

Vinogradov I. M.: Základy theorie čísel. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953

Internetové zdroje:

http://mks.mff.cuni.cz/library/RetezoveZlomkyDM/RetezoveZlomkyDM.pdf

https://is.muni.cz/th/99603/prif_b/bakalarpredelane.pdf

http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf

http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1551-mocninne-rady-a-retezove-zlomky

Resumé

Diplomová práce „Řetězové zlomky“ je psaná tak, aby sloužila nejen jako didaktická pomůcka pro studenty a učitele matematiky, ale i jako podpůrný text pro nadané studenty středních škol. Může sloužit jako materiál pro studenty „samouky“ a lze ho také například využít při řešení různých matematických olympiád.

Práce obsahuje základní teoretické poznatky, které jsou třeba pro řešení uvedených příkladů. Tyto příklady ukazují užitečnost znalosti řetězových zlomků v praxi a jejich využití.

The thesis „Chain fractions“ is written to serve as an didactical aid for students and teachers of mathematics. But it is intended as supportig text for talented students of high schools, too. It could be used as the material for „self-learners“ and the mathematical olympics is possible to use by this work.

The work contains the basic theoretical knowledges, which are needed to solve mentioned examples. They show the benefit of the understanding of chain fractions in practice and their application.