MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diferenční rovnice a diskrétní dynamické systémy

Bakalářská práce

Jana Gajdošíková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc. **Brno 2014**

Bibliografický záznam

Autor:	Jana Gajdošíková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Diferenční rovnice a diskrétní dynamické systémy
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc.
Akademický rok:	2013/2014
Počet stran:	35
Klíčová slova:	diskrétní dynamický systém, diferenční rovnice 1. řádu, iterace, rovnovážný bod, periodický bod, cyklus, stabilita, chaotická funkce

Bibliographic Entry

Author:	Jana Gajdošíková Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Difference equations and discrete dynamical systems
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial and Insurance Mathematics
Supervisor:	prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc.
Academic Year:	2013/2014
Number of Pages:	35
Keywords:	discrete dynamical systems, first-order difference equations, iterations, equilibrium point, periodic point, cycle, stability, chaotic function

Abstrakt

Tato bakalářské práce je zaměřená na studium základních vlastností diferenčních rovnic prvního řádu, které modelují nějaký diskrétní dynamický systém. V úvodu prezentujeme základní typy diferenčních rovnic prvního řádu včetně jejich řešení. Dále zavádíme pojmy jako například iterace či cyklus a klasifikujeme rovnovážné body. Práce je orientovaná především na studium stability rovnovážných a periodických bodů a na studium chaotického chování funkcí.

Abstract

This bachelor thesis deals with basic characteristics of first-order difference equations, which simulate behavior of discrete dynamical systems. At first, we present basic types of the first-order diference equations including their solutions. Then we define terminology like iteration or cycle and classify equilibrium points. Project is aimed on study of stability of equilibrium and periodic points and chaotic behavior of functions.

Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Mgr. Gajdošíková Jana**

Studijní program - obor: **Matematika – Finanční a pojistná matematika**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Diferenční rovnice a diskrétní dynamické systémy

Diference equations and discrete dynamical systems

Oficiální zadání: Diskrétní dynamický systém je alternativní termín pro diferenční rovnici prvního řádu, která modeluje vývoj nějakého systému, přičemž pozorování se provádí v diskrétních časových okamžicích. Bakalářská práce bude zaměřena na studium základních vlastností těchto rovnic, zejména na chaos a stabilitu řešení.

Doporučená literatura:

- ELAYDI, Saber N. *Discrete chaos.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000. xiii, 355. ISBN 1-58488-002-3.
- BLOCK, L. S. a W. A. COPPEL. *Dynamics in one dimension.* New York: Springer-Verlag, 1992. viii, 247. ISBN 0387553096.
- SMÍTAL, Jaroslav. *O funkciách a funkcionálnych rovniciach.* 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1984. 143 s.

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Došlý, DrSc.
Datum zadání bakalářské práce: říjen 2013

V Brně dne 31. 10. 2013

v. z. [signature]

prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Souhlasím se zadáním (datum, podpis):

16.12.2013 [signature] .... student(ka)

O. Došlý .... vedoucí práce

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat prof. RNDr. Ondřeji Došlému, DrSc. za odborné vedení mé bakalářské práce, čas a cenné rady, které mi při konzultacích věnoval. Děkuji také Mgr. Ing. Robertu Kratochvílovi za pomoc při korektuře textu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně pouze za vedení prof. RNDr. Ondřeje Došlého, DrSc. a výhradně s použitím citovaných pramenů.

Brno 5. ledna 2014 ....

Jana Gajdošíková

Obsah

Úvod

V mnoha vědních odvětvích jako např. bankovnictví, pojišťovníctví, genetika, epidemiologie, meteorologie či fyzika atomového jádra, kde nás zajímá vývoj nějakého jevu v čase, můžeme často popsat tento jev pomocí diferenciálních nebo diferenčních rovnic. Soustava takových rovnic popisujících určitý jev tvoří tzv. dynamický systém. V této práci se budeme věnovat pouze diskrétním dynamickým systémům, které ukazují vývoj jevů v diskrétních časových okamžicích, např. hodina, den, měsíc, rok, a jsou tedy popsány pomocí diferenčních rovnic. Omezíme se na studium systémů, které popisují diferenční rovnice prvního řádu.

Práce je rozčleněna do čtyř kapitol. V první kapitole uvedeme základní pojmy týkající se dynamických systémů jako například iterace či orbita. Jelikož diskrétní dynamické systémy lze popsat pomocí diferenčních rovnic, ukážeme si zde také základní typy těchto rovnic prvního řádu včetně řešení a některé jejich speciální případy. Tato kapitola čerpá převážně z pramenů [2] a [6]. Druhá kapitola se věnuje stabilitě rovnovážných bodů diferenčních rovnic. Jsou zde popsána a dokázána kritéria stability hyperbolických i nehyperbolických bodů. Zdrojem pro tuto část jsou [2], [1] a [3]. Třetí kapitola je věnována periodickým bodům a cyklům a zabývá se opět jejich stabilitou. Tato část čerpá ze zdrojů [2], [3] a [1]. Poslední kapitola je zaměřená na teorii chaosu. Obsahuje především významné věty matematiků Liho a Yourka a Šarkovského větu. Dále pojednává o stabilitě chaotických a nechaotických funkcí. Pro vytvoření této kapitoly byly použity hlavně zdroje [3], [1], [2], dále pak [4], [5] a [7].

Práce je určená především pro vysokoškolské studenty jako doplněk základního kurzu matematiky, avšak pro její pochopení téměř postačí znalosti středoškolské matematiky.

Text je vysázen typografickým systémem TEX ve formátu CSLATEX, obrázky jsou vytvořeny programem Ipe.

Přehled použitého značení

$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\lvert x_0 \rvert$	absolutní hodnota reálného čísla x_0
$\subset$, $\supset$	ostrá množinová inkluze
$\subseteq$, $\supseteq$	neostrá množinová inkluze
$[a, b]$	uzavřený interval od a do b
(a, b)	otevřený interval od a do b
$O(x_0)$	orbita bodu x_0
$f^n(x_0)$, x_n	n-tá iterace bodu x_0
$f'(x_0)$	první derivace funkce f v bodě x_0
$f''(x_0)$	druhá derivace funkce f v bodě x_0
$f'''(x_0)$	třetí derivace funkce f v bodě x_0
$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$	posloupnost reálných čísel
$f : I \to J$	zobrazení f z množiny I do množiny J
$I \to J$	interval I pokrývá interval J pod f, neboli $f(I) \supseteq J$
$\prec$	operátor Šarkovského uspořádání
$\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)$	limita posloupnosti iterací $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$
$\limsup\limits_{n\to\infty} f^n(x)$	limita superior posloupnosti iterací $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} f^n(x)$	limita inferior posloupnosti iterací $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$
$\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$	součet čísel a_k pro $k = 0, 1, \ldots, n$
$\prod\limits_{i=0}^{n} a_i$	součin čísel a_i pro $i = 0, 1, \ldots, n$

Kapitola 1

Diferenční rovnice prvního řádu a jejich dynamika

Ať už v přírodě, ekonomii či technice nás často zajímá, jak se nějaký jev mění v čase. Příkladem může být růst či pokles populace, spoření na bankovních účtech, radioaktivní rozpad nebo opotřebení mechanických částí v různých přístrojích. Vývoj takového jevu nazýváme *dynamickým systémem.* Pro úplnost zde uvedeme korektnější definici takového systému, který závisí pouze na jedné nezávisle proměnné:

Definice 1.1. (Jednodimenzionálním) *dynamickým systémem* nazveme funkci $f : I \to I$, kde I je podinterval reálných čísel.

Jeden z typů dynamických sytémů (tzv. diskrétní dynamické systémy) souvisí s diferenčními rovnicemi, pomocí kterých můžeme popsat mnoho jevů, jenž nás zajímají. Je-li x_{n+1} například velikost $(n + 1)$-té generace nějaké populace, je x_{n+1} funkcí velikosti n-té generace x_n. Tuto závislost můžeme vyjádřit pomocí diferenční rovnice prvního řádu

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.1}$$

Tato diferenční rovnice se nazývá *autonomní* neboli nezávislá na čase. V případě, že by f byla zároveň i funkcí n, jednalo by se o rovnici *neautonomní.*

Pokud bychom měli daný počáteční bod x_0, můžeme generovat posloupnost

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots$$

Funkci f nazýváme *iterační funkcí*, bod x_0 nazýváme *počáteční iterací* a složenou funkci f^n, kterou definujeme rekurzivně takto

$$f^1(x_0) = f(x_0), \qquad f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

nazýváme *n-tou iterací* bodu x_0.

Často nás také zajímá i samotný vývoj systému pro konkrétní počáteční stav x_0. Posloupnost x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f^2(x_0)$, …pak nazýváme *orbita bodu* x_0.

1.1 Základní typy lineárních diferenčních rovnic prvního řádu

Zde ukážeme některé základní typy diferenčních rovnic prvního řádu a jejich řešeních. Jako první je jistě vhodné zmínit lineární *homogenní* diferenční rovnici prvního řádu, která má tvar

$$x_{n+1} = a_n x_n, \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2}$$

a jí příslušnou *nehomogenní* diferenční rovnici

$$y_{n+1} = a_n y_n + g_n, \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.3}$$

kde a_n a g_n jsou posloupnosti reálných čísel, definované pro $n \in \mathbb{N}_0$, a kde předpokládáme $a_n \neq 0$.

Řešení homogenní rovnice (1.2) můžeme získat iterováním

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 x_0, \\ x_2 &= a_1 x_1 = a_1 a_0 x_0, \\ x_3 &= a_2 x_2 = a_2 a_1 a_0 x_0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pomocí matematické indukce lze lehce dospět k výsledku

$$x_n = a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_0 x_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) x_0,$$

kde x_0 je tzv. počáteční podmínka, kterou je řešení jednoznačně určeno.

Řešení nehomogenní rovnice (1.3) můžeme i zde získat pomocí iterací.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 y_0 + g_0, \\ y_2 &= a_1 y_1 + g_1 = a_1 a_0 y_0 + a_1 g_0 + g_1, \\ y_3 &= a_2 y_2 + g_2 = a_2 a_1 a_0 y_0 + a_2 a_1 g_0 + a_2 g_1 + g_2, \\ &\vdots \\ y_n &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} a_i \right) g_k. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Nyní dokážeme matematickou indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí předchozí vztah pro y_n. Předpokládejme, že závislost (1.4) platí pro $n = r$, tedy

$$y_r = \left(\prod_{i=0}^{r-1} a_i \right) y_0 + \sum_{k=0}^{r-1} \left(\prod_{i=k+1}^{r-1} a_i \right) g_k.$$

S využitím vztahu (1.3) dostaneme

$$\begin{aligned} y_{r+1} = a_r y_r + g_r &= a_r \left(\prod_{i=0}^{r-1} a_i \right) y_0 + \sum_{k=0}^{r-1} \left(a_r \prod_{i=k+1}^{r-1} a_i \right) g_k + g_r = \\ &= \left(\prod_{i=0}^{r} a_i \right) y_0 + \sum_{k=0}^{r-1} \left(\prod_{i=k+1}^{r} a_i \right) g_k + g_r = \\ &= \left(\prod_{i=0}^{r} a_i \right) y_0 + \sum_{k=0}^{r} \left(\prod_{i=k+1}^{r} a_i \right) g_k \end{aligned}$$

Vztah (1.4) proto platí pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

1.2 Významné speciální typy lineárních rovnic prvního řádu

Z lineárních diferenčních rovnic prvního řádu jsou nejvýznamnější dva speciální typy rovnice (1.3), jenž se objevují v mnoha aplikacích. První z těchto rovnic má tvar

$$y_{n+1} = a y_n + g_n, \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0,$$

tedy koeficient a nezávisí na n, tzn. a je konstantní. Ze vztahu (1.4) vyplývá, že řešení této rovnice je

$$y_n = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} g_k. \tag{1.5}$$

Druhý speciální případ rovnice (1.3) je jejím ještě větším zjednodušením:

$$y_{n+1} = a y_n + b, \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0.$$

Řešení této rovnice můžeme odvodit z (1.5)

$$y_n = \begin{cases} a^n y_0 + b\left(\frac{a^n - 1}{a-1}\right) & \text{pro} \quad a \neq 1, \\ y_0 + bn & \text{pro} \quad a = 1. \end{cases}$$

1.3 Racionální diferenční rovnice prvního řádu

Zmíníme zde ještě pro zajímavost jeden speciální typ diferenční rovnice, a to lineární lomennou diferenční rovnici:

$$y_{n+1} = \frac{a_n y_n + b_n}{c_n y_n + d_n}, \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.6}$$

kde a_n, b_n, c_n, d_n jsou posloupnosti reálných čísel, definované pro $n \in \mathbb{N}_0$. Racionální diferenční rovnice je nejjednodušší nelineární diferenční rovnicí a právě díky svému možnému nelineárnímu chování se mezi ně řadí. Přesto má tato rovnice i lineární charakter, a tedy lze pro její zkoumání použít postupy jako u lineárních rovnic, a právě proto ji zde uvádíme. Tuto rovnici je možné vyjádřit v lineárním tvaru pomocí matic takto:

$$y_{n+1} = \frac{y^{[1]}_{(n+1)}}{y^{[2]}_{(n+1)}}, \qquad \text{kde} \begin{pmatrix} y^{[1]}_{(n+1)} \\ y^{[2]}_{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^{[1]}_n \\ y^{[2]}_n \end{pmatrix}$$
$$\text{a} \begin{pmatrix} y^{[1]}_0 \\ y^{[2]}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení rovnice (1.6) pak můžeme získat opět iterováním

$$\begin{aligned}
y_1 = \frac{y^{[1]}_1}{y^{[2]}_1} \quad &, \text{kde} \begin{pmatrix} y^{[1]}_1 \\ y^{[2]}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^{[1]}_0 \\ y^{[2]}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
y_2 = \frac{y^{[1]}_2}{y^{[2]}_2} \quad &, \text{kde} \begin{pmatrix} y^{[1]}_2 \\ y^{[2]}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^{[1]}_1 \\ y^{[2]}_1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
y_3 = \frac{y^{[1]}_3}{y^{[2]}_3} \quad &, \text{kde} \begin{pmatrix} y^{[1]}_3 \\ y^{[2]}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^{[1]}_2 \\ y^{[2]}_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Pomocí matematické indukce snadno dostaneme řešení

$$\begin{aligned}
y_n = \frac{y^{[1]}_n}{y^{[2]}_n} \quad &, \text{kde} \begin{pmatrix} y^{[1]}_n \\ y^{[2]}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^{[1]}_{n-1} \\ y^{[2]}_{n-1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Důležitým speciálním typem racionální diferenční rovnice (1.6) je diferenční rovnice

$$y_{n+1} = \frac{ay_n + b}{cy_n + d}, \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0, \qquad (1.8)$$

kde a, b, c, d jsou reálné konstanty. Podobně jako rovnici (1.6) můžeme i tuto rovnici zapsat v lineárním tvaru pomocí matic

$$y_{n+1} = \frac{y^{[1]}_{(n+1)}}{y^{[2]}_{(n+1)}}, \qquad \text{kde} \begin{pmatrix} y^{[1]}_{(n+1)} \\ y^{[2]}_{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^{[1]}_{n} \\ y^{[2]}_{n} \end{pmatrix}$$

$$\text{a} \begin{pmatrix} y^{[1]}_{0} \\ y^{[2]}_{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ze vztahu (1.7) vyplývá, že řešení této rovnice je

$$y_n = \frac{y^{[1]}_{n}}{y^{[2]}_{n}} \qquad , \text{kde} \begin{pmatrix} y^{[1]}_{n} \\ y^{[2]}_{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V závislosti na koeficientech a_n, b_n, c_n, d_n (resp. a, b, c, d) je někdy možné rovnici (1.6) (resp. (1.8)) převést na některou lineární diferenční rovnici. Potom má taková rovnice ryze lineární chování. Bližší rozbor závislosti vlastností lomenné diferenční rovnice na koeficientech a, b, c, d je popsán například v knize [6, str. 317–333].

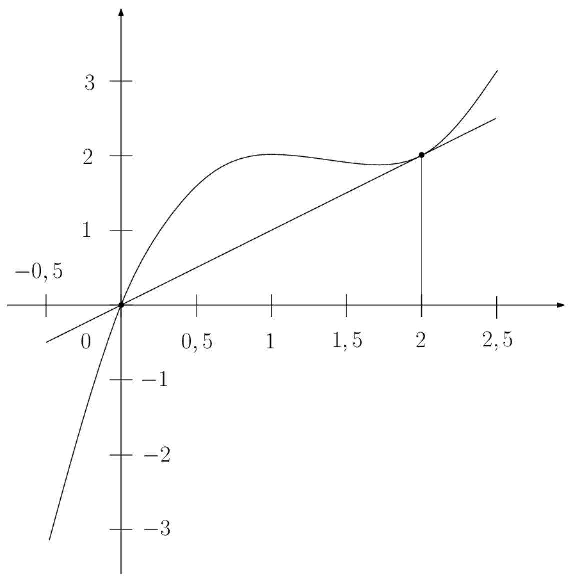
Kapitola 2

Rovnovážné body a stabilita

Časový průběh dynamického systému může být obecně různý. Stav systému se může po určitém čase periodicky opakovat, nějaké hodnoty jeho stavu mohou růst nade všechny meze nebo se mohou na konkrétní hodnotě ustálit. Ve většině vědních disciplín je důležité, aby všechny stavy směřovaly k jistému rovnovážnému stavu (bodu), a proto si nejdříve zavedeme definici tohoto pojmu.

Definice 2.1. Bod x^* z definičního oboru funkce f se nazývá *rovnovážný (stacionární) bod* diferenční rovnice (1.1), jestliže bod x^* je pevným bodem funkce f, neboli $f(x^*) = x^*$.

Grafický význam rovnovážného bodu je x-ová souřadnice průsečíku grafu funkce f s přímkou $y = x$.



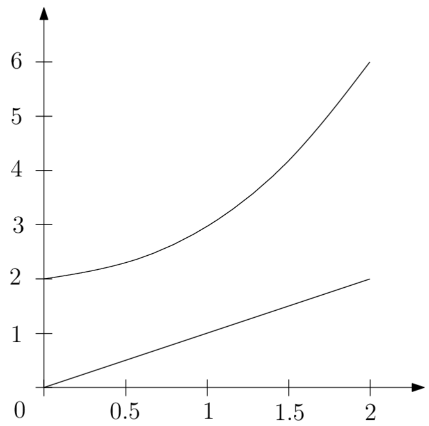
Obr. 2.1 Graf fce $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$.

Příklad 1. Uvažme rovnici

$$x_{n+1} = x_n^3 - 4x_n^2 + 5x_n,$$

kde $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$. Položme $f(x) = x$, neboli $x^3 - 4x^2 + 5x = x$. Řešením této rovnice jsou hledané rovnovážné body, a to 0 a 2 (viz obr. 2.1).

Ne každé zobrazení ovšem rovnovážný bod má. Příkladem je funkce $f(x) = x^2 + 2$ (viz obr. 2.2).



Obr. 2.2 Graf fce $f(x) = x^2 + 2$.

U některých rovnic se může stát, že řešení, které není rovnovážné, se po určitém konečném počtu iterací rovnovážným stane. Zavádíme proto následující pojem.

Definice 2.2. Nechť $\hat{x}$ je bodem definičního oboru funkce f. Jestliže existuje kladné celé číslo k a rovnovážný bod x^* rovnice (1.1) takový, že $f^k(\hat{x}) = x^*$ a zároveň $f^r(\hat{x}) \neq x^*$ pro $0 < r < k$, pak $\hat{x}$ nazveme *skoro rovnovážným bodem.*

Typickým příkladem je tzv. stanové (z anglického tent) zobrazení:

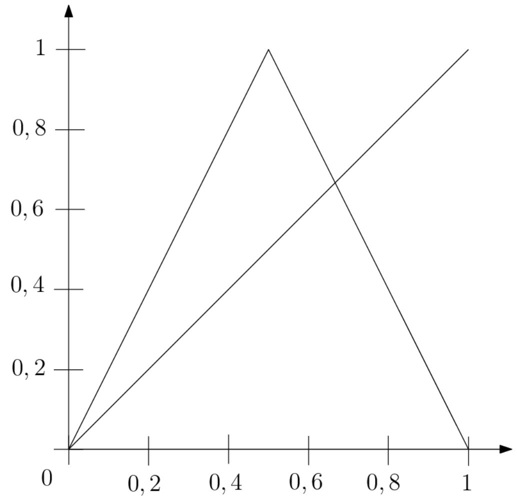
Příklad 2. Uvažme zobrazení $T : [0,1] \to [0,1]$, které je dané rovnicí

$$x_{n+1} = T(x_n),$$

kde

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \text{pro} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Tato diferenční rovnice má dva rovnovážné body, a to 0 a $\frac{2}{3}$ (viz obr. 2.3). Z posloupnosti $T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $T(1) = 0$ pak vyplývá, že body $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1 jsou skoro rovnovážné body. Lze ukázat, že toto zobrazení má nekonečně mnoho skoro rovnovážných bodů.

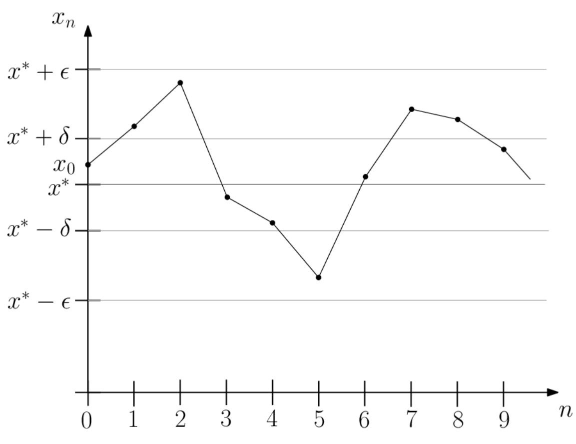


Obr. 2.3 Stanové (z anglického tent) zobrazení

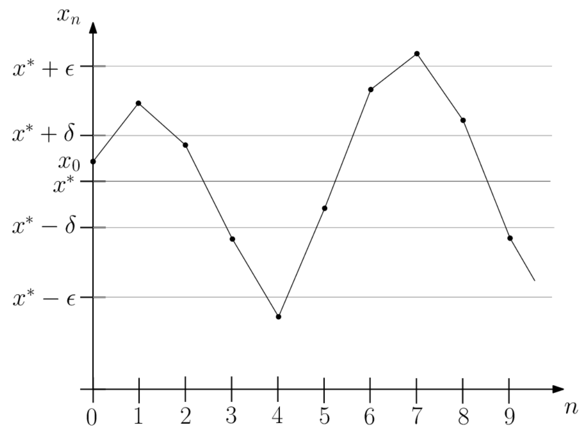
Existuje více typů rovnovážných bodů, přičemž dynamický systém se v jejich okolí může chovat různě. Studium chování řešení v okolí rovnovážných bodů tvoří základ teorie stability diskrétních dynamických systémů. Uvedeme si nyní její základní definice.

Definice 2.3. Nechť x^* je rovnovážný bod diferenční rovnice (1.1). Pak:

a) x^* nazveme *stabilní* (viz obr. 2.4), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou počáteční iteraci x_0, jež splňuje nerovnost $|x_0 - x^*| < \delta$, platí $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$, a to pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Jestliže x^* není stabilní, pak se nazývá *nestabilní* (viz obr. 2.5).



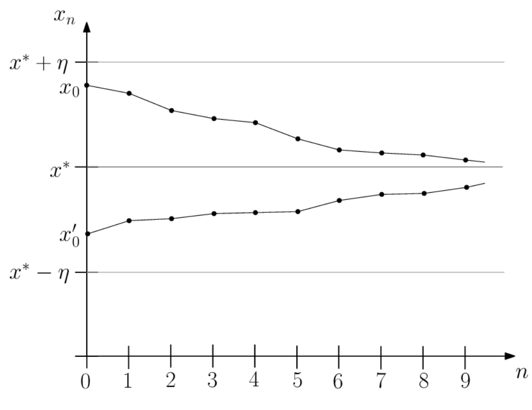
Obr. 2.4 Stabilní rovnovážný bod x^*. Pokud se x_0 nachází v δ-okolí bodu x^*, pak je x_n v ε-okolí x^* pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



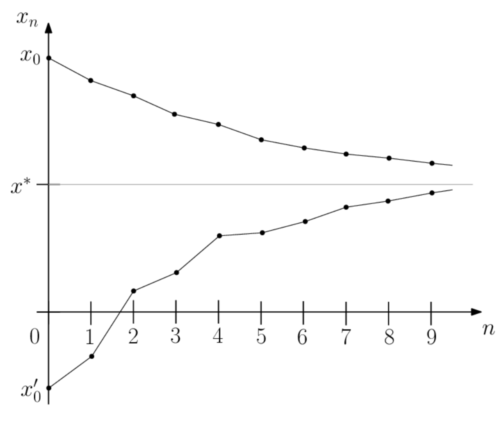
Obr. 2.5 Nestabilní rovnovážný bod x^*. Existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro každé x_0 splňující $|x_0 - x^*| < \delta$ pro $\delta > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které $x_n = f^n(x_0)$ neleží v ε-ovém okolí bodu x^*.

b) řekneme, že bod x^* je *přitahující* (*atraktivní*), jestliže exituje $\eta > 0$ takové, že pro každé x_0 splňující $|x_0 - x^*| < \eta$ platí $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x^*$. Jestliže $\eta = \infty$, pak se bod x^* nazývá *globálně přitahující (atraktivní) rovnovážný bod* nebo *globální atraktor*. Naopak řekneme, že bod x^* je *odpuzující* (*repulzivní*), jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x_0 \neq x^*$ splňující $|x_0 - x^*| < \eta$ existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že $|f^n(x_0) - x^*| > \eta$.

c) x^* nazveme *asymptoticky stabilní* (viz obr. 2.6), jestliže je stabilní a zároveň přitahující. V případě, že $\eta = \infty$, potom se bod x^* nazývá *globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod* (viz obr. 2.7).



Obr. 2.6 Asymptoticky stabilní rovnovážný bod x^*. Je stabilní a zároveň platí: jestliže x_0 je v η-okolí x^*, pak $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x^*$.



Obr. 2.7 Globálně asymptoticky stabilní rovnovážný bod x^*. Je stabilní a zároveň platí $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x^*$ pro všechna x_0.

Určit stabilitu rovnovážných bodů podle těchto definic může být mnohdy velice obtížné nebo dokonce nemožné. Následující věta uvádí důležité kritérium asymptoitcké stability či nestability rovnovážných bodů.

Věta 2.1. *Nechť je dána diferenční rovnice*

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.1}$$

kde x^* je její rovnovážný bod a f je v tomto bodě spojitě diferencovatelná.

a) Jestliže $|f'(x^*)| < q < 1$, pak je rovnovážný bod x^* asymptoticky stabilní. Iterace nacházející se v okolí bodu x^* k tomuto bodu konvergují s rychlostí geometrické posloupnosti, tzn. existuje konstanta $0 < q < 1$, pro kterou platí $|x_n - x^*| < q^n |x_0 - x^*|$, a to pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna x_0 z definičního oboru, která jsou dostatečně blízko x^*.

b) Jestliže $|f'(x^*)| > 1$, pak je rovnovážný bod x^* nestabilní.

Důkaz. a) Nechť platí $|f'(x^*)| < q < 1$. Ze spojitosti $f'(x^*)$ vyplývá existence nějakého intervalu $J = (x^* - \alpha, x^* + \alpha)$ takového, kde $|f'(x)| < q < 1$ platí pro všechna $x \in J$. Pro $x_0 \in J$ platí

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)|. \tag{2.2}$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje mezi x_0 a x^* takový bod c, že

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x^*)}{x_0 - x^*}, \tag{2.3}$$

odkud můžeme psát

$$|f(x_0) - f(x^*)| = |f'(c)| \cdot |x_0 - x^*| < q \cdot |x_0 - x^*|,$$

neboli

$$|x_1 - x^*| < q \cdot |x_0 - x^*|.$$

Protože $q < 1$, z poslední nerovnosti vyplývá, že x_1 je k bodu x^* blíž než x_0. Zároveň také dostáváme $x_1 \in J$. Podobně ukážeme $|x_2 - x^*| < q \cdot |x_1 - x^*|$, tedy $|x_2 - x^*| < q^2 \cdot |x_0 - x^*|$ a indukcí pak získáme

$$|x_n - x^*| < q^n \cdot |x_0 - x^*|. \tag{2.4}$$

Vezmeme-li pro libovolné $\varepsilon > 0$ například hodnotu $\delta = \frac{\varepsilon}{2q}$, bude z nerovnosti $|x_0 - x^*| < \delta$ vyplývat nerovnost $|x_n - x^*| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq 1$, neboť

$$|x_n - x^*| < q^n \cdot |x_0 - x^*| < q^n \cdot \delta = q^n \cdot \frac{\varepsilon}{2q} = \frac{q^{n-1}}{2} \cdot \varepsilon < \varepsilon.$$

Rovnovážný bod x^* je tudíž stabilní. Jelikož $q^n \to 0$ pro $n \to \infty$, z nerovnosti (2.4) vyplývá $\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| = 0$, neboli $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, a bod x^* je proto asymptoticky stabilní.

b) Nechť platí $|f'(x^*)| > 1$. Ze spojitosti $f'(x^*)$ vyplývá existence nějakého intervalu $K = (x^* - \beta, x^* + \beta)$ takového, kde $|f'(x)| > 1$ platí pro všechna $x \in K$. Stejně jako v předchozí části důkazu i zde pro $x_0 \in K$ platí vztahy (2.2) a (2.3), a můžeme pak analogicky psát

$$|f(x_0) - f(x^*)| = |f'(c)| \cdot |x_0 - x^*| > |x_0 - x^*|,$$

tedy

$$|x_1 - x^*| > |x_0 - x^*|.$$

Podobně ukážeme $|x_2 - x^*| > |x_0 - x^*|$ a indukcí potom dostaneme

$$|x_n - x^*| > |x_0 - x^*|. \tag{2.5}$$

Položíme-li pro libovolné $\delta > 0$ a libovolné x_0 splňující relaci $|x_0 - x^*| < \delta$ například $\varepsilon = |x_0 - x^*|$, z nerovnice (2.5) vyplývá pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n - x^*| > |x_0 - x^*| = \varepsilon,$$

tedy

$$|x_n - x^*| > \varepsilon.$$

Rovnovážný bod x^* je tudíž nestabilní. ♠

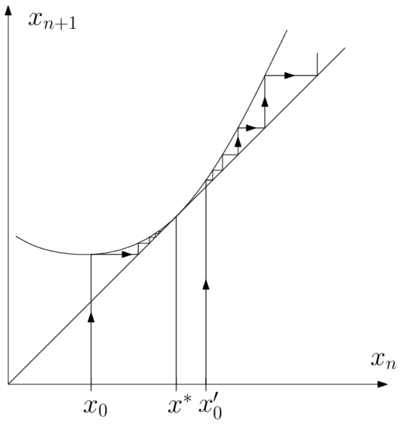
Předchozí věta se věnuje pouze takovým rovnovážným bodům x^*, pro které platí $|f'(x^*)| \neq 1$. Tyto body se nazývají *hyperbolické*. Naopak body, pro které platí $|f'(x^*)| = 1$, nazýváme *nehyperbolické*. Pro nehyperbolický bod x^* tedy platí $f'(x^*) = 1$, resp. $f'(x^*) = -1$, tj. tečnou grafu funkce f v bodě $[x^*, f(x^*)]$ je přímka se směrnicí $k = 1$, resp. $k = -1$. Stability první skupiny nehyperbolických rovnovážných bodů se týká následující věta.

Věta 2.2. *Nechť x^* je rovnovážný bod diferenční rovnice (2.1), pro který platí $f'(x^*) = 1$, a nechť má funkce f v bodě x^* spojité derivace do 3. řádu. Pak platí následující tvrzení:*

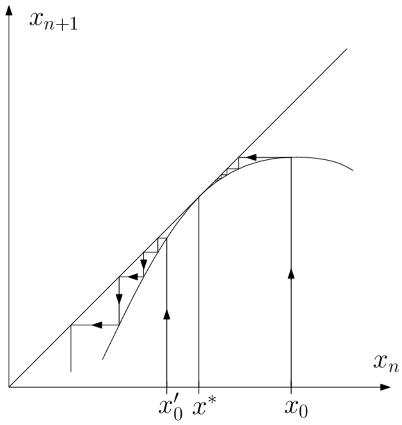
a) Jestliže $f''(x^*) \neq 0$, potom x^* je nestabilní.

b) Jestliže $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) > 0$, potom x^* je nestabilní.

c) Jestliže $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) < 0$, potom x^* je asymptoticky stabilní.



Obr. 2.8 Nestabilní rovnovážný bod x^*, kde $f''(x^*) > 0$ (tzv. semistabilní zleva).



Obr. 2.9 Nestabilní rovnovážný bod x^*, kde $f''(x^*) < 0$ (tzv. semistabilní zprava).

Důkaz. a) Nechť $f''(x^*) \neq 0$. Funkce f je potom v okolí bodu x^* konvexní ($f''(x^*) > 0$) nebo konkávní ($f''(x^*) < 0$).

Předpokládejme nejprve, že $f''(x^*) > 0$. Ze spojitosti derivací funkce f a z $f''(x^*) > 0$ vyplývá existence intervalu $(x^* - \beta, x^* + \beta)$ pro nějaké $\beta > 0$, na kterém je f' rostoucí (viz obr. 2.8). Jelikož $f'(x^*) = 1$, pak dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &< 1 \quad \text{pro } x \in (x^* - \beta, x^*)\,, \\ f'(x) &> 1 \quad \text{pro } x \in (x^*, x^* + \beta)\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pro libovolné $x_0 \in (x^*, x^* + \beta)$ zřejmě platí

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)|\,.$$

Podle nerovnosti (2.6) a podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje takový bod $c \in (x^*, x_0)$, že

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x^*)}{x_0 - x^*} > 1.$$

Z toho vyplývá nerovnost

$$f(x_0) - f(x^*) > x_0 - x^*, \qquad \text{tedy} \qquad x_1 > x_0.$$

Opětovným použitím tohoto argumentu dostaneme obecně

$$x_n > \cdots > x_0.$$

Iterace se tedy s rostoucím n pro libovolné $x_0 \in (x^*, x^* + \beta)$ od bodu x^* vzdalují, a bod x^* je proto pro konvexní funkci f nestabilní.

Podobně ze spojitosti derivací funkce f a z $f''(x^*) < 0$ vyplývá existence intervalu $(x^* - \beta, x^* + \beta)$ pro nějaké $\beta > 0$, na kterém je f' klesající (viz obr. 2.9). Jelikož $f'(x^*) = 1$, pak dostáváme

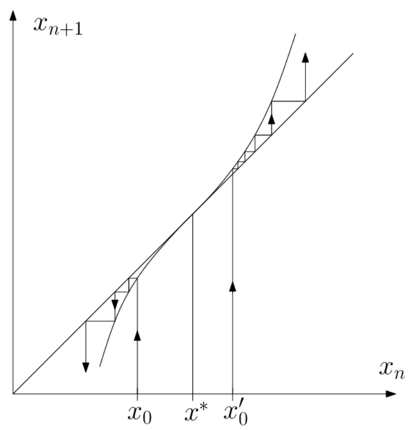
$$\begin{aligned} f'(x) &> 1 \quad \text{pro } x \in (x^* - \beta, x^*), \\ f'(x) &< 1 \quad \text{pro } x \in (x^*, x^* + \beta). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Analogicky jako v předchozí části důkazu pro konvexní funkci f dostaneme pro libovolné $x_0 \in (x^* - \beta, x^*)$ posloupnost iterací $x_n < \cdots < x_0$. Iterace se tedy i zde s rostoucím n vzdalují od bodu x^*, a bod x^* je tudíž i pro konkávní funkci f nestabilní.

b) Nechť $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) > 0$. Ze spojitosti derivací funkce f a z druhých dvou vztahů předpokladu vyplývá, že f' má v bodě x^* lokální minimum a že je konvexní. Protože $f'(x^*) = 1$, platí

$$f'(x) > 1 \quad \text{pro } x \in (x^* - \beta, x^* + \beta) \setminus \{x^*\}, \tag{2.8}$$

pro nějaké $\beta > 0$. Jelikož je v bodě x^* lokální minimum funkce f' a tato funkce je v bodě x^* spojitá, musí být $f'(x)$ pro všechna $x \in (x^* - \beta, x^*)$ klesající, neboli $f''(x) < 0$. Poslední relace zároveň znamená, že je funkce f na intervalu $(x^* - \beta, x^*)$ konkávní (viz obr. 2.10). Zbytek důkazu pro tento interval je stejný



Obr. 2.10 Nestabilní x^*, $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) > 0$.

jako příslušná část důkazu pro konkávní funkci v odstavci *a)*. Podobně pro všechna $x \in (x^*, x^* + \beta)$ musí být funkce f' na tomto intervalu rostoucí, tedy $f''(x) > 0$. Tato relace zároveň znamená, že je funkce f na intervalu $(x^*, x^* + \beta)$ konvexní (viz obr. 2.10). Zbytek důkazu pro tento interval je opět stejný jako příslušná část důkazu pro konvexní funkci v odstavci *a)*.

c) Nechť $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) < 0$. Ze spojitosti derivací funkce f a z druhých dvou vztahů předpokladu vyplývá, že f' má v bodě x^* lokální maximum a že je konkávní. Protože $f'(x^*) = 1$, platí

$$f'(x) < 1 \quad \text{pro } x \in (x^* - \beta, x^* + \beta) \setminus \{x^*\}, \tag{2.9}$$

pro nějaké $\beta > 0$. Vzhledem k $f'(x) \leq 1$, kde $x \in (x^* - \beta, x^* + \beta)$, a ke spojitosti $f'(x)$ můžeme předpokládat, že v uvažovaném intervalu $(x^* - \beta, x^* + \beta)$ platí $f'(x) \geq 0$.

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro libovolné $x_0 \in (x^* - \beta, x^*)$ existuje takový bod $c \in (x_0, x^*)$, že

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x^*)}{x_0 - x^*}.$$

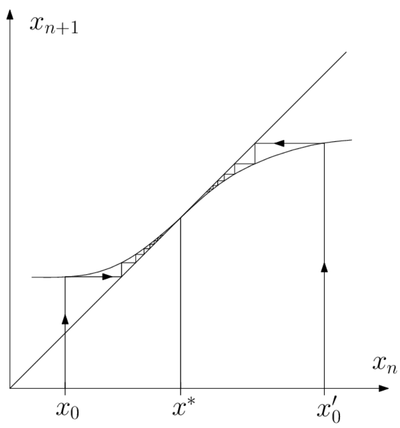
Z tohoto vztahu a z $0 < f'(c) < 1$ dostáváme

$$0 < \frac{f(x_0) - f(x^*)}{x_0 - x^*} < 1. \tag{2.10}$$

Jelikož $x_0 < x^*$, pak z (2.10) získáme

$$x_0 < f(x_0) < x^*.$$

Podobně ukážeme, že $x_1 < f(x_1) = x_2 < x^*$, a použitím matematické indukce dostaneme $x_n < f(x_n) = x_{n+1} < x^*$. Posloupnost $f^n(x_0)$ je tedy rostoucí a shora ohraničená bodem x^* (viz obr. 2.11), a musí proto konvergovat k rovnovážnému bodu. Na intervalu (x_0, x^*) nemůže existovat jiný rovnovážný bod kromě x^*. Kdyby totiž na tomto intervalu takový druhý rovnovážný bod $\hat{x}^* \neq x^*$ existoval, pak by pro něj podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě platilo $f'(\hat{x}^*) = 1$, což je spor s (2.9). Bod x^* je proto asymptoticky stabilní zleva.



Obr. 2.11 Asymptoticky stabilní x^*, $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) < 0$.

Důkaz by se provedl analogicky i pro libovolné $x_0 \in (x^*, x^* + \beta)$, odkud bychom nakonec dokázali asymptotickou stabilitu bodu x^* zprava.

Vzhledem k oběma jednostranným asymptotickým stabilitám je bod x^* asymptoticky stabilní. ♠

Kapitola 3

Periodické body a cykly

Rovnovážný bod diferenční rovnice, neboli pevný bod nějaké funkce f v matematickém modelu, představuje určitý ustálený režim. Pokud systém jednou dosáhne tohoto rovnovážného bodu, pak se jeho vývoj dále nemění. Toto platí v případě, kdy posloupnost iterací dynamického systému konverguje k nějakému bodu. V případech, kdy tyto posloupnosti nekonvergují, může také existovat jistý ustálený režim, a to pokud je posloupnost iterací periodická. S periodičností dynamických systémů souvisí pojem *cyklus* a jeho *řád*.

Definice 3.1. Nechť $f : I \to I$ je zobrazení. Bod $x_0 \in I$ nazveme *k-periodickým bodem* funkce f (*periodickým bodem s periodou k*, *bodem cyklu řádu k* nebo že *generuje cyklus řádu k*), jestliže $f^k(x_0) = x_0$ a zároveň $f^i(x_0) \neq x_0$ pro $1 \leq i < k$. Periodická orbita bodu x_0

$$O = \{x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\}$$

se nazývá *k-cyklus* (*cyklus řádu k*).

Poznámka. Bod x_0 je k-periodickým bodem, jestliže je pevným bodem funkce $f^k(x)$, neboli rovnovážným bodem diferenční rovnice

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

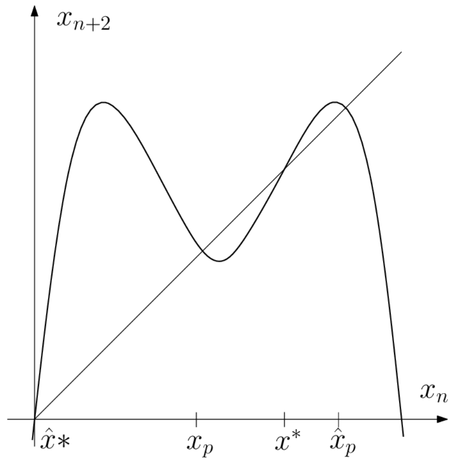
kde $g(x) = f^k(x)$.

Můžeme také říct, že i rovnovážný bod je periodický, a to s periodou 1.

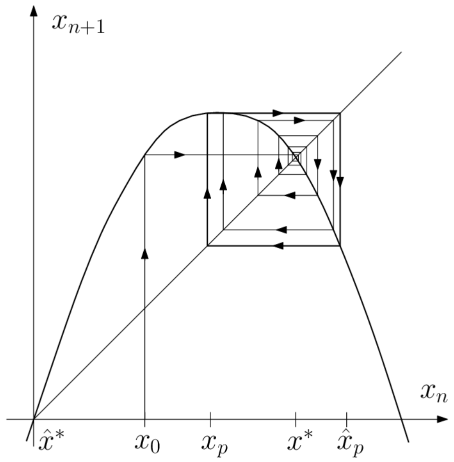
Definice 3.2. Nechť $f : I \to I$ je zobrazení. Bod $x_0 \in I$ nazveme *skoro k-periodickým bodem* funkce f, jestliže existuje nějaké přirozené číslo m, pro které je $f^m(x_0)$ k-periodickým bodem, tzn.

$$f^{m+k}(x_0) = f^m(x_0).$$

Graficky lze znázornit k-periodický bod pomocí průsečíku grafu funkce f^k s přímkou $y = x$. Na obrázku 3.1 můžeme vidět graf funkce f^2, kde f je jisté tzv. logistické zobrazení. Z grafu je vidět, že f^2 má čtyři pevné body, z nichž dva (x^*, $\hat{x}^*$) jsou pevnými body funkce f (viz obr. 3.2) a zbývající dva (x_p, $\hat{x}_p$) tvoří 2-cyklus. Na obrázku 3.2 je zároveň vyznačený bod $x_0 = 0,3$, který po několika iteracích přejde na 2-cyklus, a je tudíž příkladem skoro periodického bodu.



Obr. 3.1 Graf funkce f^2, kde $f(x) = 3,43x(1-x)$.



Obr. 3.2 Graf $f(x) = 3,43x(1-x)$, kde bod x_0 je skoro periodický a body x_p a $\hat{x}_p$ jsou periodické.

I u periodických bodů mluvíme o stabilitě, či nestabilitě. Uvedeme proto následující definici.

Definice 3.3. Nechť bod x_0 je k-periodickým bodem zobrazení f. Pak řekneme, že bod x_0 je:

a) *stabilní*, jestliže je stabilním pevným bodem zobrazení f^k,

b) *asymptoticky stabilní*, jestliže je asymptoticky stabilním pevným bodem zobrazení f^k,

c) *nestabilní*, jestliže je nestabilním pevným bodem zobrazení f^k.

Poznámka. Je zřejmé, že pokud je stabilní, resp. nestabilní, jeden bod nějakého k-cyklu, pak jsou stabilní, resp. nestabilní, i ostatní body tohoto cyklu. Proto můžeme mluvit o stabilitě, případně nestabilitě, celého k-cyklu nebo periodické orbity.

Podobně jako u zkoumání stability pevných bodů funkce f, můžeme i zde formulovat kritéria stability cyklu, neboli kritéria stability pevných bodů funkce f^k.

Věta 3.1. *Nechť $O(x_0) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ je k-cyklus funkce f, která je spojitě diferencovatelná. Pak:*

a) k-cyklus $O(x_0)$ (a tedy i každý jeho bod) je asymptoticky stabilní, jestliže platí

$$|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot \cdots \cdot f'(x_{k-1})| < 1;$$

b) k-cyklus $O(x_0)$ (a tedy i každý jeho bod) je nestabilní, jestliže platí

$$|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot \cdots \cdot f'(x_{k-1})| > 1.$$

Důkaz. Podle pravidla derivování složené funkce upravíme derivaci $\left[f^k(x_0)\right]'$

$$\begin{aligned}\left[f^k(x_0)\right]' &= \left[f\left(f^{k-1}(x_0)\right)\right]' = f'\left(f^{k-1}(x_0)\right) \cdot \left[f^{k-1}(x_0)\right]' = \\ &= f'(x_{k-1}) \cdot \left[f^{k-1}(x_0)\right]' = \cdots = f'(x_{k-1}) \cdots f'(x_1) \cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

Nyní aplikujeme větu 2.1 na funkci f^k v bodě x_0, který je pro tuto funkci pevným bodem, a dostáváme již požadované relace pro asymptotickou stabilitu a nestabilitu. ♠

Uvedeme si ještě dvě věty týkající se cyklů.

Věta 3.2. *Nechť $f : I \to I$ je spojitá funkce. Pak posloupnost generovaná libovolným bodem $x \in I$ a funkcí f konverguje k nějakému pevnému bodu právě tehdy, když funkce f nemá žádný cyklus, kromě cyklu řádu 1.*

Důkaz. Důkaz pro jeho obtížnost neuvádíme. ♠

Definice 3.4. Řekneme, že posloupost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ generovaná funkcí f je *asymptoticky periodická*, jestliže je periodická s periodou 2^j pro nějaké $j \in \mathbb{N}_0$ nebo k této posloupnosti konverguje, tj. existuje taková posloupnost $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ generovaná funkcí f s periodou 2^j pro nějaké $j \in \mathbb{N}_0$, že platí $\lim\limits_{i\to\infty}(y_i - x_i) = 0$.

Důsledek 3.3. *Nechť $f : I \to I$ je spojitá funkce, která má pouze cykly řádů $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Potom každá posloupnost $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $x \in I$, konverguje k nějakému cyklu nebo pevnému bodu funkce f.*

Důkaz. Z předpokladu věty vyplývá, funkce f^{2^n} nemá cykly vyšších řádů než 1, a tedy má pouze pevné body.

Nechť $x \in I$ je libovolný bod a $x_k = f^k(x)$ pro $k = 1, 2, \ldots, 2^n$. Podle věty 3.2 každá z posloupností[1]

$$x_k, f^{2^n}(x_k), f^{2\cdot 2^n}(x_k) = f^{2^n}\left(f^{2^n}(x_k)\right), f^{3\cdot 2^n}(x_k) = f^{2^n}\left(f^{2\cdot 2^n}(x_k)\right), \ldots$$

[1] Jsou to posloupnosti generované bodem x_k a funkcí f^{2^n}.

konverguje k nějakému bodu a_k pro $k = 1, 2, \ldots, 2^n$, tzn.

$$\lim_{t\to\infty} \left(f^{t\cdot 2^n}(x_k) - a_k \right) = 0. \tag{3.1}$$

Vzhledem ke spojitosti funkce f platí také

$$\lim_{t\to\infty} \left(f\left(f^{t\cdot 2^n}(x_k) \right) - f(a_k) \right) = 0.$$

Úpravou levé strany této rovnosti dostaneme

$$0 = \lim_{t\to\infty} \left(f^{t\cdot 2^n}(f(x_k)) - f(a_k) \right) = \lim_{t\to\infty} \left(f^{t\cdot 2^n}(x_{k+1}) \right) - f(a_k).$$

Jelikož z (3.1) vyplývá také $\lim_{t\to\infty} f^{t\cdot 2^n}(x_{k+1}) = a_{k+1}$, kvůli jednoznačnosti limity musí platit $f(a_k) = a_{k+1}$ pro $k < 2^n$. Analogicky se dokáže platnost $f(a_{2^n}) = a_1$. Body $a_1, \ldots, a_{2^n}$ tudíž tvoří cyklus funkce f. Pokud $a_i \neq a_j$ pro každé $i, j \in \{1, \ldots, 2^n\}$, pak se jedná o cyklus řádu 2^n. V opačném případě je jeho řád dělitelem čísla 2^n. Tím je důkaz hotov. ♠

Kapitola 4

Chaos

Z důsledku 3.3 předchozí kapitoly vyplývá, že spojitá funkce f, která má pouze cykly řádu $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, generuje pouze asymptoticky periodické posloupnosti. Pokud má ale funkce f i cykly jiných řádů, může být chování generované posloupnosti komplikované.

V roce 1975 vydali matematikové Li a Yorke článek „Perioda tři implikuje chaos", ve kterém se zabývali cykly. V tomto článku jako první v matematice zavedli pojem *chaos*, ale také uvedli a dokázali následující dvě věty týkající se 3-cyklu, který, jak se ukázalo, s komplikovaným chaotickým chováním funkcí souvisí.

Věta 4.1 (Li-Yorkova věta 1). *Nechť $f : I \to I$ je spojitá funkce, která má cyklus řádu 3. Pak existuje nespočetná množina $S \subset I$ (neobsahující periodické body), pro kterou platí: Každé body $x, y \in S$, $x \neq y$ a libovolný bod $p \in I$, který generuje nějaký cyklus, splňují*

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0,$$
$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0,$$
$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(x)| > 0.$$

Důkaz. Důkaz je uveden například v [4].

Funkce, pro kterou platí vlastnosti z předcházející věty, se nazývá *chaotická funkce* a množina S se nazývá *chaotická množina* funkce f.

Věta 4.2 (Li-Yorkova věta 2). *Nechť $f : I \to I$ je spojité zozbrazení a existuje bod $a \in I$ takový, pro který body $b = f(a)$, $c = f^2(a)$ a $d = f^3(a)$ splňují*

$$d \leq a < b < c \qquad \textit{nebo} \qquad d \geq a > b > c.$$

Potom pro každé $k = 1, 2, 3, \ldots$ existuje na I periodický bod s periodou k.

Poznámka. Všimněme si, že pokud má funkce 3-periodický bod, je předpoklad této věty splněn.

Později se zjistilo, že Li-Yourkova věta je pouze speciálním případem významné věty ukrajinského matematika A. N. Šarkovského z roku 1964.

Dříve než Li-Yourkovu větu dokážeme, uvedeme zde definici a lemmata, která k tomu budeme potřebovat.

Definice 4.1. Řekneme, že interval I pokrývá interval J pod f a píšeme $I \to J$, jestliže platí $f(I) \supseteq J$.

Lemma 4.3. *Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, kde I je interval. Pak pro libovolný uzavřený interval $J \subseteq f(I)$ existuje uzavřený interval $K \subseteq I$ takový, že $f(K) = J$.*

Důkaz. Označme $J = [b_1, b_2]$, pro nějaké $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, kde $b_1 < b_2$. Pak jistě existují body $a_1, a_2 \in I$ takové, že $f(a_1) = b_1$ a $f(a_2) = b_2$. Uvažme případ, že $a_1 < a_2$. Nechť $\beta \in [a_1, a_2]$ je nejmenší číslo takové, že $f(\beta) = b_2$. Dále označme $\alpha \in [a_1, \beta]$ největší číslo takové, že $f(\alpha) = b_1$. Vzhledem k definicím bodů α a β neexistuje žádný bod $c \in (\alpha, \beta)$, pro který by platilo $f(c) = b_1$ nebo $f(c) = b_2$. Z $f(\alpha) = b_1$, $f(\beta) = b_2$ a z druhé Bolzanovy věty[1] vyplývá, že pro uzavřený interval $K = [\alpha, \beta]$ platí $f(K) \supseteq [b_1, b_2]$. Zároveň pro libovolný bod $s \in f(K)$ musí existovat takové $r \in [\alpha, \beta]$, pro které $s = f(r)$. Musí platit $s \in [a, b]$, protože jinak by to podle druhé bolzanovy věty bylo v rozporu s definicemi bodů α, β. Dostáváme tak $f(K) = J$. Pokud bychom na začátku místo $a_1 < a_2$ předpokládali $a_1 > a_2$, důkaz by byl analogický. ♠

Lemma 4.4. *a) Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$, kde $a \neq b$. Pokud $f(a) > a$ a $f(b) < b$, pak existuje pevný bod x_0, pro který platí $a < x_0 < b$.*

b) Jestliže I pokrývá I pod f (tzn. $f(I) \subseteq I$), pak má funkce f v I pevný bod.

Důkaz. a) Zaveďme funkci $g(x) = f(x) - x$. Z předpokladu lemmatu dostáváme $g(a) > 0$ a $g(b) < 0$. Z věty o střední hodnotě pak vyplývá, že existuje takový bod $c \in (a, b)$, pro který platí $g(c) = f(c) - c = 0$, neboli $f(c) = c$. V intervalu (a, b) tedy existuje pevný bod funkce f.

b) Z předpokladu tvrzení a z lemmatu 4.3 vyplývá, že existuje takový interval $K = [c, d] \subseteq I$, že $f(K) = I = [a, b]$. Potom platí

$$f(c) = a \leq c \quad \text{a} \quad f(d) = b \geq d, \tag{4.1}$$

$$\text{nebo} \quad f(c) = b > c \quad \text{a} \quad f(d) = a < d. \tag{4.2}$$

[1] **Druhá Bolzanova věta:** Nechť $I = [a, b]$ je interval reálných čísel a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak $[f(a), f(b)] \subseteq f(I)$ nebo $[f(b), f(a)] \subseteq f(I)$.

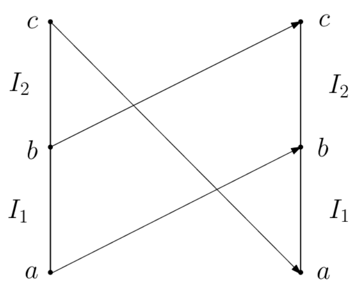
V případě, že v relacích (4.1) nastane alespoň jedna z rovností, má funkce f pevný bod a důkaz je hotov. Pokud budou obě nerovnosti (4.1) ostré, můžeme na ně aplikovat část *a)* tohoto lemmatu. Podobně můžeme část *a)* tohoto lemmatu aplikovat i na relace (4.2). Pevný bod na intervalu (a, b) tedy existuje, a tím je důkaz hotov. ♠

Lemma 4.5. *Nechť $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_n = I_0$ je n-tice intervalů, kde $I_{k+1} \subseteq f(I_k)$ pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Pak existuje pevný bod x_0 funkce f^n, přičemž $f^k(x_0) \in I_k$ pro $k = 1, \ldots, n$.*

Důkaz. Označme $K_0 = I_0$, neboli $f^0(K_0) = I_0$. Definujme interval $K_i \subseteq I_{i-1}$, pro který platí $f^i(K_i) = I_i$. Z lemmatu 4.3 vyplývá, že pro $i = 1$ takový interval existuje. Předpokládejme, že interval existuje pro $i = 1, \ldots, n-1$ a dokážeme jeho existenci pro n. Z předpokladu lemmatu vyplývá, že $I_n \subseteq f(I_{n-1}) = f^n(K_{n-1})$. Z lemmatu 4.3 aplikovaného na funkci f^n pak dostáváme, že existuje uzavřený interval $K_n \subseteq K_{n-1}$ takový, že $f^n(K_n) = I_n = I_0$. Z lemmatu 4.4 již vyplývá, že funkce f^n má pevný bod $x_0 \in K_n \subseteq I_0$. Jelikož $x_0 \in K_n$, platí, že $f^i(x_0) \in I_i$ pro $i = 1, \ldots, n$. ♠

Vraťme si nyní k důkazu věty 4.2

Důkaz. Uvažme funkci f s 3-cyklem $\{a, b, c\}$, pro jehož prvky platí $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a < b < c$ nebo $a > b > c$ [2]. Důkaz provedeme pro systém prvních nerovností, tedy $a < b < c$. (Pro systém nerovností $a > b > c$ by byl důkaz analogický.) Označme $I_1 = [a, b]$ a $I_2 = [b, c]$. Zřejmě $I_2 \subseteq f(I_1)$ a $I_1 \subseteq f(I_2)$ i $I_2 \subseteq f(I_2)$ (viz obr. 4.1).



Obr. 4.1 $I_1 = [a, b]$ a $I_2 = [b, c]$, kde $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$, tedy $I_1 \subset f(I_2)$ a $I_2 \subset f(I_1)$.

Ukážeme, že f má n-periodický bod pro každé $n \geq 1$. Jelikož $f(I_2) \supset I_2$, existuje podle lemmatu 4.4 na I_2 pevný bod, neboli 1-periodický bod funkce f.

[2] Kdyby například platilo $x < f^2(x) < f(x)$, pak zvolíme $a = f(x)$, $b = f(a)$, $c = f^2(a)$, čímž dostaneme druhý systém nerovností $a > b > c$.

Uvažme nyní pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ cyklus délky n, který je tvořený intervalem I_1 a $(n-1)$ intervaly I_2, tedy

$$I_1 \to \underbrace{I_2 \to \ldots \to I_2}_{(n-1)\text{-krát}} \to I_1.$$

Podle lemmatu 4.5 existuje takový bod $x_0 \in I_1$, že $f^n(x_0) = x_0$ a $f^k(x_0) \in I_2$ pro $k = 1, \ldots, n-1$. Pokud by pro některé j, kde $1 \leq j \leq n-1$, platilo $f^j(x_0) = x_0$, znamenalo by to, že $x_0 = f^j(x_0) \in I_2$. Tím bychom dostali, že $x_0 \in I_1 \cap I_2 = \{b\}$. Nyní ukážeme, že $x_0 = b$ nemůže nastat. Pokud $n = 2$, platilo by $f^2(b) = f^2(x_0) = x_0 = b$, což je ve sporu s $f^2(b) = f^3(a) \leq a$. Pokud $n \geq 3$, pak bychom dostali, že $f^2(b) = f^2(x_0) \in I_2$, a to je opět ve sporu s $f^2(b) = f^3(a) \leq a$. Ukázali jsme tak, že $f^j(x_0) \neq x_0$ pro $1 \leq j \leq n-1$, a tedy x_0 má opravdu periodu n. ♠

Vraťme se nyní k již zmíněné významné Šarkovského větě. Dříve než uvedeme její znění, musíme nadefinovat tzv. *Šarkovského uspořádání* přirozených čísel:

$$\begin{gathered}3 \prec 5 \prec 7 \prec \cdots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 7 \prec \cdots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 7 \prec \cdots \prec \\ \prec 2^n \cdot 3 \prec 2^n \cdot 5 \prec 2^n \cdot 7 \prec \cdots \prec 2^n \prec 2^{n-1} \cdots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1\end{gathered}$$

(tj. nejdříve jsou vypsána všechna lichá čísla různá od jedničky uspořádána vzestupně, dále jejich 2-násobky, pak 2^2-násobky atd. a na konci jsou vypsány všechny mocniny 2 v sestupném pořadí, které končí 1).

Věta 4.6 (Šarkovského věta)**.** *Nechť $f : I \to I$ je spojitá funkce. Jestliže f má periodický bod s periodou k, pak má i periodický bod s periodou r pro všechna $r \in \mathbb{N}$, pro která platí $k \prec r$.*

Důkaz. Kvůli omezenému rozsahu práce zde tento delší důkaz neuvádíme. Je možné ho nalézt například v [2]. ♠

Uveďme si další podmínku pro to, aby byla funkce chaotická.

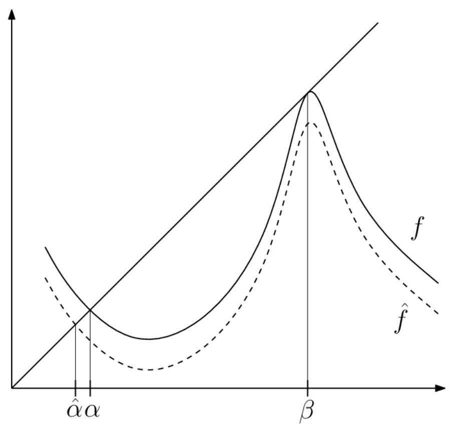
Věta 4.7. *Nechť $f : I \to I$ je spojitá funkce, která má cyklus řádu $k \neq 2^i$, kde $i = 1, 2, \ldots$. Pak f i všechny její iterace jsou chaotické.*

Důkaz. Nechť $k = p \cdot m$, kde p je prvočíslo větší než 2 a $m \in \mathbb{N}$. Funkce f^m má potom cyklus řádu p. Ze Šarkovského věty vyplývá, že f^m má také cyklus řádu $2 \cdot 3$, tudíž funkce f^{2m} má cyklus řádu 3 a podle věty 4.1 musí být chaotická. Jestliže je iterace nějaké funkce chaotická, tak je i původní funkce chaotická.

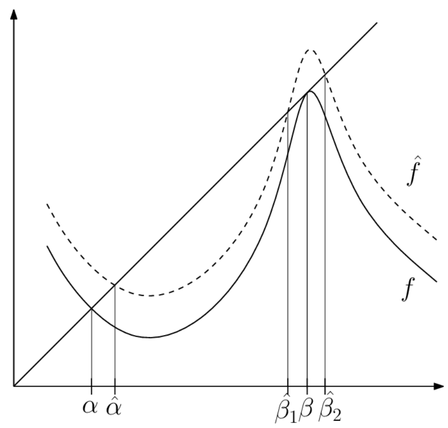
Zbývá dokázat, že jsou i všechny iterace funkce f chaotické. Jestliže funkce f má cyklus řádu $k \neq 2^i$, kde $i = 1, 2, \ldots$ a m je libovolné přirozené číslo, pak f má i cyklus řádu $k \cdot m$, tudíž f^m má cyklus řádu k. Využijeme-li nyní již dokázanou část, tedy že funkce s cyklem řádu k je chaotická, máme důkaz hotov i pro všechny iterace funkce f. ♠

Pro chaotickou funkci je mimo jiné typická velká citlivost na počáteční podmínky. Tedy při malých změnách počátečních podmínek, dostaneme velké změny v hodnotách iterací funkce. Při modelování tedy záleží, zda je posloupnost generovaná chaotickou nebo nechaotickou funkcí, jelikož takové posloupnosti mají odlišný charakter. Zajímá nás také, jak moc se změní posloupnosti generované danou funkcí, pokud použijeme při modelování jinou funkci, která se od té původní nepatrně liší. Může se stát, že vlastnosti generovaných posloupností se výrazně změní. Pokud se nějaká vlastnost podstatně nemění, říkáme, že je funkce f při malých změnách zhledem k takové vlastnosti *stabilní*. Pokud jsou změny výrazné, říkáme, že je *nestabilní*. Pro lepší pochopení uvedeme následující příklad.

Příklad 3. Uvažme funkci f, která je na obrázku 4.2 a 4.3 vyznačená plnou čárou. Tato funkce má dva rovnovážné body α a β. Pokud bychom nahradili funkci f funkcí $\hat{f}$, která se od funkce f liší pouze nepatrným posunutím (na obrázcích 4.2 a 4.3 vyznačená čárkovaně), můžou se její rovnovážné body změnit. Z obrázků je vidět, že při malých změnách funkce f se rovnovážný bod α může posunout doleva nebo doprava a vznikne tak rovnovážný bod $\hat{\alpha}$. Oproti tomu rovnovážný bod β může zcela zmizet (viz obr. 4.2) nebo místo něj mohou vzniknout dva rovnovážné body $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ (viz obr. 4.3). V tomto případě je tedy α stabilní rovnovážný bod funkce f a β její nestabilní rovnovážný bod.



Obr. 4.2 Malou změnou funkce f zanikne rovnovážný bod.



Obr. 4.3 Malou změnou funkce f přibude rovnovážný bod.

Nyní uvedeme větu, která se týká ztráty cyklů při změně nějaké chaotické funkce.

Věta 4.8. *Nechť $f : I \to I$ je spojitá funkce, kde I je uzavřený ohraničený interval, a nechť f má cyklus řádu k. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že každá spojitá funkce $g : I \to I$, splňující $|f(x) - g(x)| < \delta$ pro všechna $x \in I$, má cyklus řádu r, kde r je libovolné přirozené číslo z Šarkovského uspořádání, pro které platí $k \prec r$.*

Důkaz. Důkaz je uveden například v [2]. ♠

Z této věty ve spojení s větou 4.7 vyplývá, že malou změnou chaotické funkce dostaneme funkci opět chaotickou. Platí tedy následující věta.

Věta 4.9. *Chaotické funkce jsou stabilní.*

Jak je to se stabilitou nechaotické funkce, tomu se věnuje věta 4.10.

Věta 4.10. *Ke každé spojité funkci* $f : I \to I$*, kde* I *je uzavřený ohraničený interval, a ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje chaotická funkce* $g : I \to I$ *taková, že platí* $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ *pro všechna* $x \in I$*.*

Důkaz. Důkaz je uveden například v [3]. ♠

Tato věta tedy říká, že i libovolně malou změnou lze z každé nechaotické funkce získat funkci chaotickou. Tento chaos bude ovšem malý.

Závěr

V této bakalářské práci bylo zpracováno téma základních vlastností diskrétních dynamických systémů a jejich souvislost s diferenčními rovnicemi. V úvodní kapitole byly představeny nejvýznamnější typy diferenčních rovnic prvního řádu společně s jejich řešeními. Řešení byla odvozena pomocí iterací. V následujících kapitolách byla uvedena klasifikace rovnovážných a periodických bodů diferenčních rovnic prvního řádu. Pozornost byla věnována především otázce jejich stability. Finální část práce seznámila s pojmem chaos a přiblížila souvislost chaotického chování funkcí s existencí cyklů určitého řádu. Byla také diskutována stabilita chaotických a nechaotichých funkcí.

Vytvořený text má sloužit k prohloubení znalostí o diferenčních rovnicích ze základního kurzu matematiky. V tomto ohledu přinesla příprava textu i velký užitek mně osobně. Jelikož diferenciální a diferenční počet má velké praktické využití v mnoha oblastech, je možné na tuto práci v budoucnu navázat například aplikací probrané teorie v konkrétní vědní disciplíně.

Seznam literatury

[1] GOODSON, Geoffrey R.: *Lecture Notes on Dynamical Systems, Chaos and Fractal Geometry* [online] [cit. 20. 12. 2013], Dostupné z: http://pages.towson.edu/goodson/Chaos_Notes.pdf

[2] ELAYDI, Saber N.: *Discrete Chaos*, Chapman & Hall/CRC Press, Florida, 2000

[3] SMÍTAL, Jaroslav: *O funkciách a funkcionálnych rovniciach*, Alfa, Bratislava, 1884

[4] LI, T., YORKE, J. A.: *Period Three Implies Chaos*, The American Mathematical Monthly, 1975, 82(10), s. 985–992

[5] BLOCK, L. S., COPPEL, W. A.: *Dynamics in One Dimension*, Springer, Berlín, 1992

[6] CULL, P., FLAHIVE, M., ROBSON, R.: *Difference equation: From Rabbits to Chaos*, Springer, USA, 2005

[7] ROBINSON, Clark: *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, USA, 1999