MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2013 DÁVID IGAZ

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Rozklady matic a jejich aplikace

Bakalářská práce

Dávid Igaz

Vedoucí práce: doc. RNDr. Martin Čadek, CSc. **Brno 2013**

Bibliografický záznam

Autor:	Dávid Igaz Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Rozklady matic a jejich aplikace
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Martin Čadek, CSc.
Akademický rok:	2012/2013
Počet stran:	xi + 33
Klíčová slova:	Lineární operátor; normální operátor; unitární operátor; samoadjungovaný operátor; Schurův rozklad; singulární rozklad; polární rozklad; pseudoinverze

Bibliografický záznam

Autor:	Dávid Igaz Prírodovedecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a štatistiky
Názov práce:	Rozklady matíc a ich aplikácie
Študijný program:	Matematika
Študijný odbor:	Finančná a poistná matematika
Vedúci práce:	doc. RNDr. Martin Čadek, CSc.
Akademický rok:	2012/2013
Počet strán:	xi + 33
Kľúčové slová:	Lineárny operátor; normálny operátor; unitárny operátor; samoadjungovaný operátor; Schurov rozklad; singulárny rozklad; polárny rozklad; pseudoinverzia

Bibliographic Entry

Author:	Dávid Igaz Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Decompositions of matrices and their applications
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial and Insured Mathematics
Supervisor:	doc. RNDr. Martin Čadek, CSc.
Academic Year:	2012/2013
Number of Pages:	xi + 33
Keywords:	Linear operator; normal operator; unitary operator; hermitian operator; Schur decomposition; singular value decomposition; polar decomposition; pseudo-inversion

Abstrakt

Cílem bakalářské práce je popsat různé rozklady matic a jejich aplikace. Zabýváme se normálními maticemi, Schůrovým rozkladem, singulárním rozkladem a polárním rozkladem. Ukážeme, jak pomocí singulárního rozkladu definovat pseudoinverzi a jak pseudoinverzi aplikovat v úlohách lineární regrese.

Abstrakt

Cieľom bakalárskej práce je popísať rôzne rozklady matíc a ich aplikácií. Zaoberáme sa normálnymi maticami, Schurovým rozkladom, singulárnym rozkladom a polárnym rozkladom. Ukážeme, ako pomocou singulárneho rozkladu definujeme pseudoinverziu a ako pseudoinverziu aplikujeme v úlohách lineárnej regresie.

Abstract

The aim of bachelor thesis is to describe various decompositions of matrices and their applications. We deal with normal matrices, Schur decomposition, singular value decomposition and polar decomposition. We will show how to define pseudo-inversion using singular value decomposition and also how to apply pseudo-inversion to problems related to linear regression.

Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Dávid Igaz**

Studijní program - obor: **Matematika - Finanční a pojistná matematika**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Rozklady matic a jejich aplikace

Decompositions of matrices and their applications

Oficiální zadání: Příkladem rozkladu matice známým ze základní přednášky z lineární algebry je zápis symetrické reálné matice ve tvaru A=P^t D P, kde P je ortogonální matice a D je diagonální matice.Práce by se měla zabývat různými dalšími rozklady matic, a jejich aplikacemi.

Literatura: Doporučená literatura

MOTL, Luboš a Miloš ZAHRADNÍK. Pěstujeme lineární algebru. 3. vyd. Praha: Karolinum, 2002. 348 s. ISBN 80-246-0421-3., ŠIK, František. Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu. Vyd. 1. Brno: Masarykova univerzita, 1998. 177 s. ISBN 80-210-1966-2.

Práce bude psána ve slovenském jazyce.

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Martin Čadek, CSc.

Datum zadání bakalářské práce: květen 2012

Datum odevzdání bakalářské práce: dle harmonogramu ak. roku 2012/2013

V Brně dne 31.10.2012

v.z.

prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
Ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Zadání bakalářské práce převzal dne: 13.12.2012

Podpis studenta

Poďakovanie

Na tomto mieste by som chcel poďakovať doc. RNDr. Martinovi Čadkovi, CSc. za odborné vedenie mojej bakalárskej práce, ústretový prístup, cenné rady a pripomienky, ako aj celkový čas strávený pri konzultáciách.

Prehlásenie

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracoval samostatne s využitím informačných zdrojov, ktoré su v práci citované.

Brno 20. května 2013 ....

Dávid Igaz

Obsah

Úvod

Cieľom tejto práce je zhrnutie základných informácií o vybraných druhoch maticových rozkladov. Maticové rozklady budú vznikať súčinom niekoľkých matíc, ktoré majú nejaké špeciálne vlastnosti. Ich vlastnosti sú užitočné pri riešení matematických problémov, hlavne pri riešení sústav lineárnych rovníc.

Táto práca je rozdelená do šiestich kapitol. V každej sa venujeme inému rozkladu, avšak všetky na seba úzko nadväzujú. Pri jednotlivých výkladoch daného rozkladu začneme vždy budovaním teoretických základov potrebných k porozumeniu. Následne bude čitateľovi ponúknutý samotný tvar rozkladu, vlastnosti jednotlivých matíc a postup ako sa k nim dostaneme. Práca zahŕňa aj príklady na rozklady, ktoré uvádzajú spôsob, ktorým môžeme maticový rozklad prakticky demonštrovať. V niektorých rozkladoch uvedieme aj viacero spôsobov.

Prvá kapitola je venovaná rozkladu normálnych operátorov. Tento rozklad zovšeobecňuje rozklad samoadjungovaných a unitárnych operátorov, s ktorými sme sa zoznámili v základnej prednáške z lineárnej algebry.

Druhá kapitola pojednáva o Schurovom rozklade. V tomto rozklade na rozdiel od rozkladu normálnych operátorov vystupuje namiesto diagonálnej matice horná trojuholníková matica.

V najrozsiahlejšej tretej kapitole čitateľovi predstavíme rozklady matíc, ktoré nie sú všeobecne štvorcové. Ide o tzv. singulárny rozklad, ktorý hrá dôležitú rolu pre výpočet tzv. pseudoinverzie v kapitole 5, a tak tiež ho použijeme pre odvodenie polárneho rozkladu v kapitole 4.

V poslednej kapitole ukážeme, ako sa pojem pseudoinverzia dá použiť pri hľadaní tzv. pseudoriešení preurčených sústav lineárnych rovníc.

V práci predpokladáme, že čitateľ absolvoval základné kurzy lineárnej algebry a geometrie.

Kapitola 1

Rozklady normálnych operátorov

1.1 Rozklady normálnych operátorov

V základnom kurze Lineárnej algebry sme sa zoznámili so samoadjungovanými resp. unitárnymi operátormi. Avšak všeobecnejším pojmom, ktorý obsahuje v sebe obidva pojmy sú normálne operátory. Vektorové priestory berieme nad $\mathbb{C}$.
Hlavným zdrojom pre túto kapitolu boli knihy [1], [2] a [3].

Definícia 1.1. Lineárny operátor φ na vektorovom priestore U je *normálny*, ak komutuje so svojím združeným operátorom, t.j. ak platí

$$\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi.$$

Zrejme φ je *normálny operátor* práve vtedy, keď je normálny jeho združený operátor φ^*.

Lemma 1.2. *Samoadjungované a unitárne operátory sú normálne.*

Dôkaz. Pre samoadjungované operátory platí, že

$$\varphi^* = \varphi,$$

potom

$$\varphi \circ \varphi^* = \varphi \circ \varphi = \varphi^* \circ \varphi.$$

Pre unitárne operátory platí

$$\varphi^* \circ \varphi = \mathrm{id} = \varphi \circ \varphi^*.$$

□

Lemma 1.3. *Nech* φ : U $\to$ U *je normálny operátor. Ak u je vlastný vektor operátoru* φ *s vlastným číslom* λ*, tak u je zároveň vlastným vektorm operátoru* φ^* *s vlastným číslom* $\overline{\lambda}$.

Dôkaz. Platí $(\varphi - \lambda id)^* = (\varphi^* - \overline{\lambda} id)$, v dôsledku čoho združené operátory komutujú.

$$(\varphi - \lambda id)(\varphi^* - \overline{\lambda} id)$$

$$= \varphi\varphi^* - \lambda\varphi^* - \varphi\overline{\lambda} + \lambda\overline{\lambda} = \varphi^*\varphi - \varphi^*\lambda - \overline{\lambda}\varphi + \overline{\lambda}\lambda = (\varphi^* - \overline{\lambda} id)(\varphi - \lambda id).$$

Nech u je vlastný vektor operátoru φ s vlastným číslom λ, potom

$$\|(\varphi-\lambda id)^*(u)\|^2$$

$$= \langle(\varphi-\lambda id)^*(u),(\varphi-\lambda id)^*(u)\rangle = \langle(u),(\varphi-\lambda id)(\varphi-\lambda id)^*(u)\rangle =$$
$$= \langle(u),(\varphi-\lambda id)^*(\varphi-\lambda id)(u)\rangle = \langle(\varphi-\lambda id)(u),(\varphi-\lambda id)(u)\rangle = \langle 0,0\rangle = 0.$$

teda $\varphi^*(u)-\overline{\lambda}u = (\varphi-\lambda id)^*(u) = \underline{0}$. To znamená, že u je vlastným vektorom operátora φ^* prislúchajúcemu vlastnému číslu $\overline{\lambda}$. □

Vzájomne združené *normálne* operátory možno súčasne diagonalizovať vzhľadom na tú istú ortonormálnu bázu. To je tvrdenie nasledujúcej vety.

Veta 1.4. *Nech φ je normálny operátor na unitárnom priestore* U. *Potom existuje ortonormálna báza α priestoru U, vzhľadom na ktorú majú združené operátory φ a φ^* matice*

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad (\varphi^*)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ sú príslušné vlastné čisla operátoru φ a $\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},\dots,\overline{\lambda_n}$ sú príslušné vlastné čisla operátoru φ^*.

Dôkaz. Dokážeme pomocou indukcie podľa n. Pre $n=1$ stačí vziať za α nejaký jednotkový vektor. Nech teda $n>1$ a predpokladajme, že tvrdenie platí v unitárnych priestoroch dimenzie $<n$. Operátor φ má nad $\mathbb{C}$ nejaké vlastné číslo λ s vlastným vektorom u, $\|\mathrm{u}\|=1$. Potom podľa lemmy 1.3 je u tiež vlastný vektor oprátoru φ^* s vlastným číslom $\overline{\lambda}$. Dokážeme, že $[u]^\perp$ je invariantný podpriestor operátoru φ. Chceme ukázať, že pre $v\in[u]^\perp$ je $\varphi(v)\in[u]^\perp$, t.j. $\langle\varphi(v),u\rangle = 0$.

$$\langle\varphi(v),u\rangle = \langle v,\varphi^*(u)\rangle = \langle v,\overline{\lambda_1}u\rangle = \lambda_1\langle v,u\rangle = 0.$$

Kedže $[u]^\perp$ je invariantný podpriestor operátora φ, tak aj ortogonálny doplnok $[u]^\perp$ je invariantný podpriestor operátora φ^*. Podobne z φ^*-invariantnosti $[u]^\perp$ vyplýva φ-invariantnosť ortogonálneho doplnku $[u]^\perp$.

Potom zúženia $\varphi\restriction[u]^\perp$, $\varphi^*\restriction[u]^\perp$ sú navzájom združené normálne operátory na $(n-1)$ - rozmernom unitárnom priestore $[u]^\perp$. Podľa indukčného predpokladu v $[u]^\perp$ možno nájsť ortonormálnu bázu $\alpha_0 = (u_1,\dots,u_{n-1})$, vzhľadom na ktorú majú tieto operátory matice $(\varphi\restriction[u]^\perp)_{\alpha_0,\alpha_0} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$ a $(\varphi^*\restriction[u]^\perp)_{\alpha_0,\alpha_0} = \mathrm{diag}(\overline{\lambda}_1,\dots,\overline{\lambda}_{n-1})$. Potom $\alpha = (u_1,\dots,u_{n-1},u)$ je ortonormálna báza priestoru U taká, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda) \quad a \quad (\varphi^*)_{\alpha,\alpha} = \mathrm{diag}(\overline{\lambda}_1,\dots,\overline{\lambda}_{n-1},\overline{\lambda}).$$

□

Teraz si zavedieme dôležitý pojem, s ktorým budeme následne pracovať.

Definícia 1.5. Štvorcová komplexná matica sa nazýva *normálna*, keď splňuje podmienku

$$AA^* = A^*A,$$

kde $A^* = \overline{A}^\top$.

Táto definícia je ospravedlnená nasledujúcim tvrdením

Lemma 1.6. *Nech α je ortonormálna báza a φ je normálny operátor. Potom $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je normálna matica.*

Dôkaz. Musíme ukázať, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (\varphi)^*_{\alpha,\alpha} = (\varphi)^*_{\alpha,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

Podľa pravidiel pre počítanie s maticami zobrazenia, platí

$$\begin{aligned}(\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (\varphi)^*_{\alpha,\alpha} &= (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (\varphi^*)_{\alpha\,\alpha} = (\varphi \circ \varphi^*)_{\alpha,\alpha} \\ &= (\varphi^* \circ \varphi)_{\alpha,\alpha} = (\varphi^*)_{\alpha,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (\varphi)^*_{\alpha,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha}.\end{aligned}$$

□

Dôsledok 1.7. *Nech A je normálna matica. Potom existuje unitárna matica P taká, že*

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P = P^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P,$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice A.

Dôkaz. Pre $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definované ako $\varphi(x) = Ax$ platí $(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A$, podľa vety 1.4 exituje báza α taká, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Potom

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha}(\varphi)_{\alpha,\alpha}(id)_{\alpha,\varepsilon} \tag{1.1}$$

Matica $P = (id)_{\alpha,\varepsilon}$ je matica prechodu tvorená ortonormálnymi bázami, preto je unitárna.

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = (id)^{-1}_{\alpha,\varepsilon} = P^{-1} = P^*.$$

Teda (1.1) môžeme písať ako

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P = P^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P.$$

□

Definícia 1.8. Nech $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ je normálny operátor a f je funkcia s definičným oborom $D \subseteq \mathbb{C}$ a hodnotami v $\mathbb{C}$ taká, že všetky vlastné čísla operátora φ ležia v D

Definícia 1.9. Podľa vety 1.4 existuje ortonormálna báza $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ tvorená vlastnými vektormi operátora φ s vlastnými číslami $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
Operátor $f(\varphi) : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ je definovaný na bázi α takto

$$f(\varphi)(u_i) = f(\lambda_i)(u_i).$$

Tým je $f(\varphi)$ určené jednoznačne.

Lemma 1.10. *Nech φ je samoadjungované a nech $D \subseteq \mathbb{R}$ obsahuje všetky vlastné čísla φ. Potom pre každú funkciu $f : D \to \mathbb{R}$ je $f(\varphi)$ tiež samoadjungované.*

Dôkaz. Nech $u_1, \dots, u_n$ je ortonormálna báza tvorená vlastnými vektormi operátora φ s vlastnými číslami $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in D$. Tieto vektory sú podľa definície vlastné vektory operátora $f(\varphi)$ s vlastnými číslami $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n) \in \mathbb{R}$.
Platí

$$\langle f(\varphi)u_i, u_i \rangle = f(\lambda_i) = \langle u_i, f(\varphi)u_i \rangle .$$

Pre $i \neq j$ platí

$$\begin{aligned} \left\langle f(\varphi)u_i, u_j \right\rangle &= \left\langle f(\lambda_i)u_i, u_j \right\rangle = f(\lambda_i) \left\langle u_i, u_j \right\rangle = 0 \\ &= f(\lambda_j) \left\langle u_i, u_j \right\rangle = \left\langle u_i, f(\lambda_j)u_j \right\rangle = \left\langle u_i, f(\varphi)u_j \right\rangle . \end{aligned}$$

Teda

$$\langle f(\varphi)u, v \rangle = \langle u, f(\varphi)v \rangle$$

pre všetky $u, v \in U$.

□

Lemma 1.11. *Ak $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ je normálny operátor s maticou*

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P.$$

kde P je unitárna matica, potom

$$(f(\varphi))_{\varepsilon,\varepsilon} = P^{-1} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} P.$$

Dôkaz. Vezmeme v $\mathbb{C}^n$ ortonormálnu bázu α takú, že $(id)_{\varepsilon,\alpha} = P^{-1}$. Dokážeme, že α je báza tvorená vlastnými vektormi operátora φ. K tomu spočítame $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$:

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}(id)_{\varepsilon,\alpha}$$

Potom

$$PAP^{-1} = P(P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}P)P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Teda podľa definície 1.9 je

$$(f(\varphi))_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Potom

$$(f(\varphi))_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha}(f(\varphi))_{\alpha,\alpha}(id)_{\alpha,\varepsilon}$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}P.$$

Na základe tejto lemmy môžeme definovať dosadením normálnej matice do funkcie. $\square$

Definícia 1.12. Nech A je normálna matica. Potom existuje unitárna matica tak, že

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}P.$$

Nech $f : D \to \mathbb{C}$ je funkcia taká, že $\operatorname{Spec} A \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$. Potom $f(A)$ definujeme takto:

$$f(A) = P^{-1}\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}P.$$

Lemma 1.13. *Táto definícia nezávisí na poradí $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a na výberu matice P.*

Dôkaz. Vezmeme $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definované ako $\varphi(x) = Ax$.
Potom

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

Podľa definície 1.9 a 1.12 a lemmy, je

$$(f(\varphi))_{\varepsilon,\varepsilon} = P^{-1} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} P = f(A)$$

Matica vľavo nezávisí na voľbe poradia $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ani matici P. Teda rovnakú vlastnosť má aj matica vpravo. $\square$

Veta 1.14. *Nech A je normálna matica.*

(i) Nech g je definovaná na spektru matice A a nech f je definovaná na spektru matice $g(A)$. Potom

$$(f \circ g)(A) = f(g(A)).$$

(ii) Nech f a g sú definované na spektru matice A. Potom

$$(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A).$$

Dôkaz. (i) A je normálna matica, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ tvorená vlastnými číslami matice A
Nech $g : D \to \mathbb{C}$, kde $\operatorname{Spec} A \subseteq D$ a $f : g(D) \to \mathbb{C}$.
Potom $(f \circ g)(A) = f(g(A))$

$$(f \circ g)(A) = P^{-1} \begin{pmatrix} (f \circ g)(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (f \circ g)(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (f \circ g)(\lambda_n) \end{pmatrix} P$$

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} f(g(\lambda_1)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(g(\lambda_2)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(g(\lambda_n)) \end{pmatrix} P = f(g(A)).$$

(ii) Počítame podobne ako v predchádzajúcom prípade

$$f(A)\cdot g(A)=$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} P\cdot P^{-1}\begin{pmatrix} g(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g(\lambda_n) \end{pmatrix} P$$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix} f(\lambda_1)g(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2)g(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n)g(\lambda_n) \end{pmatrix} P$$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix} (f\cdot g)(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (f\cdot g)(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (f\cdot g)(\lambda_n) \end{pmatrix} P=(f\cdot g)(A).$$

□

Kapitola 2

Schurov rozklad

V tejto kapitole ukážeme, že každý lineárny operátor vo vhodnej ortonormálnej báze má hornú trojuholníkovú maticu, ktorej diagonálu tvoria vlastné čísla s príslušnou algebraickou násobnosťou. Hlavným zdrojom pre túto kapitolu boli knihy [1] a [5].

2.1 Schurova veta

Veta 2.1. *Nech* U *je komplexný vektorový priestor dimenzie n. Nech* $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *je lineárny operátor s vlastnými číslami* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$*. Potom existuje ortonormálna báza* α *taká, že*

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

je horná trojuholníková matica s vlastnými číslami $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *na diagonále, pričom každé sa vyskytuje toľkokrát, aká je jeho algebraická násobnosť.*

Dôkaz. Dokážeme pomocou indukcie vzhľadom k n. Pre $n = 1$ je $\alpha = (u)$, kde $\|u\| = 1$. Nech veta platí pre $n-1 \geq 1$. Nech $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ a $\dim \mathrm{U} = n$. Sme nad $\mathbb{C}$, preto má φ vlastné číslo $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ s vlastným vektorom u_1, kde $\|u_1\| = 1$.
$\mathrm{U} = [u_1] \oplus [u_1]^{\perp}$ označme $[u_1]^{\perp} = \mathrm{V}$, potom $\mathrm{U} = [u_1] \oplus \mathrm{V}$.
Budeme definovať zobrazenie $\tilde{\varphi} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ týmto predpisom

$$\tilde{\varphi}(v) = \pi\varphi(v),$$

kde $\pi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ je kolmá prjekcia. Pre $\tilde{\varphi} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ použijeme indukčný predpoklad, lebo $\dim \mathrm{V} = n-1$.
Teda vo V existuje ortonormálna báza $\tilde{\alpha} = (u_2, u_3, \cdots, u_n)$ taká, že

$$(\tilde{\varphi})_{\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Zvolme $\alpha = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$. Tá je ortonormálna báza v U. Chceme spočítať $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$. Urobíme to podľa definície. Pretože $\varphi(u_1) = \alpha_1 u_1$ je prvý stĺpec matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pre $i \in \{2, 3, \cdots, n\}$ platí

$$\varphi(u_i) = (\pi + (id - \pi)) \circ \varphi(u_i) = \pi\varphi(u_i) + (id - \pi) \circ \varphi(u_i) = \tilde{\varphi}(u_i) + (id - \pi) \circ \varphi(u_i).$$

Vektor $\tilde{\varphi}(u_i)$ poznáme, lebo vieme, že $(i-1)$ stĺpec matice $(\tilde{\varphi})_{\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}}$ je

$$\begin{pmatrix} a_{2,i} \\ a_{3,i} \\ \vdots \\ a_{i-1,i} \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Preto $\tilde{\varphi}(u_i) = a_{2,i}u_2 + a_{3,i}u_3 + \cdots + a_{i-1,i}u_{i-1} + \lambda_i u_i$. Ďalej vieme, že $(id - \pi) \circ \varphi(u_i) \subseteq [u_1]$, preto

$$(id - \pi) \circ \varphi(u_i) = a_{1,i}u_1.$$

Teda

$$\varphi(u_i) = a_{1,i}u_1 + a_{2,i}u_2 + a_{3,i}u_3 + \cdots + a_{i-1,i}u_{i-1} + \lambda_i u_i.$$

Preto i-ty stĺpec matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je

$$\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ a_{3,i} \\ \vdots \\ a_{i-1,i} \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teda $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ má požadovaný tvar. Naviac je zrejmé, že $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ teda i vlastné čísla operátora φ. $\square$

Veta 2.2. *Pre ľubovolnú komplexnú štvorcovú maticu A existuje unitárna matica P a horná trojuholníková matica T tak, že*

$$A = P^{-1}TP = P^{*}TP. \tag{2.1}$$

Naviac T má na diagonále vlastné čísla matice A.

Dôkaz. Pre $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definované ako $\varphi(x) = Ax$ platí $(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A$, podľa vety 2.1 exituje báza α taká, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

je horná trojuholníková matica, kde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sú vlastné čísla na diagonále. Potom

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha}(\varphi)_{\alpha,\alpha}(id)_{\alpha,\varepsilon},$$

kde $(id)_{\alpha,\varepsilon} = P$ je matica prechodu medzi ortonormálnimi bázami, preto je unitárna. To znamená, že

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = (id)^{-1}_{\alpha,\varepsilon} = P^{-1} = P^{*}.$$

Potom 2.1 môžme písať v tvare

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}P = P^{*}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}P.$$

□

Porovnanie Schurovho rozkladu s Jordanovým rozkladom.
Majme štvorcovú maticu A. V prípade Jordanovho rozkladu je

$$A = P^{-1}JP,$$

kde J je blokovo diagonálna matica zložená z Jordanových buniek a P je regulárna matica. V prípade Schurovho rozkladu je

$$A = P^{*}TP = P^{-1}TP,$$

kde P je unitárna matica a T je horná trojuholníková matica.

Veta 2.3. *Reálna varianta Schurovej vety.*
Pre každú reálnu maticu A radu n existuje reálna ortogonálna matica P radu n tak, že

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}P$$

kde matice na diagonále strednej matice sú radu 1 alebo 2. Matice radu 1 sú reálne vlastné čísla. Matice radu 2 odpovedajú dvojiciam komplexne združených vlastných čísel. Bloky na diagonále môžme ukladať ľubovolne.

Dôkaz. Pre dôkaz tejto vety odkazujem na literatúru [1][veta 9.15]. □

Poznámka. Všeobecne neplatí, že je možné ľubovolnú reálnu maticu transformovať na hornú trojuholníkovú maticu pomocou ortogonálnej matice, pretože diagonála je tvorená vlastnými číslami a tie môžu byť nereálne. Matica uvedená vo vete 2.3 je maximálne blízka k trojuholníkovej z hladiska toho, čo môžme dosiahnuť pomocou ortogonálnej podobnosti. Dosiahnutý tvar je tzv. horná Hessenbergová forma, tj. horná trojuholníková matica s pridanou prvou poddiagonálou.

2.2 Príklad Schurovho rozkladu

Úloha 1. *Maticu A vyjadrite v tvare $A = P^\top TP$, kde T je horná trojuholníková matica a P je ortogonálna.*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Riešenie. Najprv hľadajme vlastné čisla matice A. Tie sú riešením charakteristickej rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 12 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

Riešením charakteristickej rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

sú vlastné čísla: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$.

Vlastné vektory sú potom riešením homogénnej sustavy rovníc $(A - \lambda I) = 0$

Pre vlasnté číslo $\lambda_1 = 3$ dostaneme vlastný vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Znormovaním dostaneme

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Pre vlastné číslo $\lambda_1 = 1$ dostaneme vlastný vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Znormovaním dostaneme

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Potrebujeme ortonormálnu bázu, teda hľadáme vektor v_1 kolmý na vektor u_1. Dostaneme $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Znormovaním dostaneme

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Potom

$$P^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Pomocou matice P získame maticu T, kde $T = PAP^\top$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pre kontrolu overíme, že $A = P^\top TP$.

$$P^\top TP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = A.$$

Kapitola 3

Singulárny rozklad

V tejto kapitole sa budeme zaoberať ďalším užitočným rozkladom tzv. singulárnym rozkladom. K jeho pochopení budeme potrebovať ovládať pojem pozitívne semidefinitná matica a singulárne čísla. Hlavným zdrojom pre túto kapitolu boli knihy [1], [2], [3] a [5].

3.1 Pozitívne definitné a semidefinitné matice

Najprv sa budeme zaoberať operátormi.

Definícia 3.1. Nech φ je samoadjungovaný operátor $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ povieme, že je pozitívne semidefinitný, ak

$$\langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle \geq 0$$

pre všetky $u \in U$, a pozitívne definitný, ak

$$\langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle > 0$$

pre u $\neq 0$.

Lemma 3.2. *Ak je* $\psi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *lineárny operátor, potom*

$$\psi^* \psi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$$

je samoadjungovaný pozitívne semidefinitný operátor.

Dôkaz. Podľa definicie platí, že

$$\langle \psi^* \psi(u), u \rangle = \langle \psi(u), \psi(u) \rangle \geq 0.$$

□

Veta 3.3. *Nech* $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *je samoadjungovaný pozitívne semidefinitný operátor. Potom platí*

(i) Existuje ortonormálna báza α *v* U *tak, že v tejto bázi je*

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

diagonálna matica s nezápornými prvkami na diagonále.

(ii) Všetky vlastné čísla operátora φ sú nezáporne.

(iii) Existuje samoadjungovaný pozitívne semidefinitný operátor ψ tak, že

$$\varphi = \psi^2.$$

Dôkaz. Podľa vety 1.4 existuje ortonormálna báza $\alpha = (u_1, \ldots, u_n)$ taká, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

je diagonálna matica s vlastnými číslami λ_i na diagonále. Pretože $\langle \varphi(u_i), u_i \rangle$

$$0 \leq \langle \varphi(u_i), u_i \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_i \rangle = \lambda_i$$

sú tieto čísla nezáporné. Tým sme dokázali 3.3 (i) a (ii).
Podľa definície 1.9 a lemmatu existuje operátor

$$\psi = (\varphi)^{1/2}$$

s vlastnými číslami $\sqrt{\lambda_i}$. Tento operátor je samoadjungovaný a pozitívne semidefinitný. Podľa vety 1.14 (ii) potom platí

$$\psi \circ \psi = (\varphi)^{1/2}.(\varphi)^{1/2} = id(\varphi) = \varphi.$$

□

Teraz si pojmy vysvetlíme pre matice.

Definícia 3.4. Hermitovská matica A (symetrická, ak sme nad $\mathbb{R}$) je pozitívne semidefinitná, ak pre každý vektor x platí, že

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0,$$

pre všetky x a pozitívne definitná ak platí, že

$$\langle Ax, x \rangle > 0$$

pre $x \neq 0$. Kde $x \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$).

Lemma 3.5. *Pre každú maticu A je A^*A pozitívne semidefinitná matica .*

Dôkaz. Podľa definície platí, že

$$\langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0.$$

□

Veta 3.6. *Nech A je pozitívne semidefinitná matica radu n. Potom platí.*

(i) Všetky vlastné čísla matice A sú nezáporné.

(ii) *Existuje unitárna (pri reálnej matici A reálna ortogonálna) matica U a diagonálna matica D s nezápornými prvkami tak, že $A = UDU^*$.*

Dôkaz. (i) Podľa definície $\langle Au_i, u_i\rangle = \lambda_i \langle u_i, u_i\rangle \geq 0$ tým sme dokázali, že vlastné čísla matice A sú nezáporné.

(ii) Nech A je hermitovská matica Podľa vety 1.4 existuje báza α taká, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Potom

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha}(\varphi)_{\alpha,\alpha}(id)_{\alpha,\varepsilon}$$

môžme písať ako

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} U^*,$$

kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice A.

□

3.2 Singulárny rozklad matice

Definícia 3.7. Singulárne čísla matice A typu (m,n) sú kladné druhé odmocniny (nenulových) vlastných čísel matice A^*A.

Veta 3.8 (Veta o singulárnom rozklade matice)**.** *Nech A je komplexná matica typu (m,n). Potom existujú unitárne matice U a V radu m a n a matica T typu (m,n) tak, že*

$$A = UTV^*,$$

kde

$$T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a S je matica radu $r = h(A^*A)$, jej diagonálne prvky sú singulárne čísla matice A a je určená jednoznačne až na poradie diagonálnych prvkov. Ak je matica A reálna, tak U a V sú ortogonálne.

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $m \leq n$ (vv inom prípade prejdeme k matici A^*). Podľa lemmatu 3.5 je matica A^*A pozitívne semidefinitná. Podľa vlastnosti (ii) z vety 3.6 existuje unitárna matica U a diagonálna matica $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ s nezápornými prvkami d_i, $i = 1, \ldots, n$ tak, že

$$A^*A = VDV^*. \tag{3.1}$$

Z čísel d_i je $r = h(A^*A)$ kladných, $n - r$ nulových. Môžeme predpokladať, že $d_i > 0$ pre $i = 1, \ldots, r$. Inak použijeme permutačné matice k preusporiadaniu diagonály. Vyplýva teda z (3.1)

$$(AV)^*(AV) = D = diag(d_1, \ldots, d_r, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-r}), \quad d_i > 0, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{3.2}$$

Čísla d_i sú vlastné čísla matice A^*A. Označíme i-tý stĺpec matice AV ako $s_i(AV)$, z (3.2) plynie

$$s_i(AV)^* s_j(AV) = \begin{cases} d_i, & i = j \leq r \\ 0, & i = j \geq r+1 \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{3.3}$$

Stĺpce $s_i(AV)$ by tvorili ortonormálny systém, keby $d_i = 1, i = 1, \ldots, r$. Vytvoríme pomocou nich ortonormálny systém: Definujeme vektory

$$u_i = +{d_i}^{-1/2} s_i(AV), \quad i = 1, \ldots, r. \tag{3.4}$$

Potom

$$\langle u_i, u_i \rangle = {u_i}^* u_i = {d_i}^{-1/2} s_i(AV)^* {d_i}^{-1/2} s_i(AV) = 1, \quad i = 1, \ldots, r,$$

a ${u_i}^* u_j = 0$ v ostatných prípadoch. Teda $\{u_1, \ldots, u_r\}$ je ortonormálny systém. Rozšírime ho na ortonormálnu bázu $\{u_1, \ldots, u_m\}$ priestoru $\mathbb{C}^m$ a definujeme maticu $U = (u_1, \ldots, u_m)$. U je unitárna matica radu m. Podľa (3.3) a (3.4) platí

$$AV = (s_1(AV) \ldots s_r(AV) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-r}) = ({d_1}^{1/2} u_1 \ldots {d_r}^{1/2} u_r \underbrace{0 \ldots 0}_{n-r}),$$

lebo stĺpce $s_i(AV)$ pre $i > r$ sú podľa (3.3) nulové. Ak $T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je matica typu (m, n), kde $S = diag({d_1}^{1/2}, \ldots, {d_r}^{1/2})$, bude

$$AV = ({d_1}^{1/2} u_1, \ldots, {d_r}^{1/2} u_r, 0, \ldots, 0) = (u_1, \ldots, u_m) \left(\begin{array}{ccc|c} {d_1}^{1/2} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & {d_r}^{1/2} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right) = UT$$

Teda

$$A = UTV^*.$$

Jednoznačnosť matice S (až na poradie diagonálnych prvkov) plynie z toho, že diagonálne prvky matice S sú singulárne čísla matice A. Ak je $A = UTV^*$ singulárny rozklad, kde $T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a S je diagonálna matica s kladnými číslami na diagonále, tak

$$A^*A = (UTV^*)^*(UTV^*) = VT^*U^*UTV^* = VT^*TV^* = V \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right) V^*$$

a teda $d_1, \ldots, d_r$ sú kladné vlastné čísla operátoru A^*A. Teda v singulárnom rozklade je matica S určena jednoznačne. Ak je matica A reálna, potom V a U sú ortogonálne. $\square$

Veta 3.9. *Nech máme maticu A, potom platí*

(i) Matice A^*A radu n a matice AA^* radu m majú tie isté nenulové vlastné čísla.

(ii) $h(A^*A) = h(AA^*) = r$

(iii) Stĺpce matice U resp. V sú normované vlastné vektory matice AA^* resp. A^*A odpovedajúce vlastným číslam matíc AA^* resp. A^*A.

Dôkaz. (i) Pre A^*A platí

$$A^*A = V \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*$$
$$= V \begin{pmatrix} S^*S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^* = V \underbrace{\begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{radu } n} V^*,$$

pre AA^* platí

$$AA^* = U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*V \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$
$$= U \begin{pmatrix} SS^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = U \underbrace{\begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{radu } m} U^*.$$

V oboch prípadoch sú nenulové vlastné čísla vyznačené svorkami diagonálne prvky matice S^2.
(ii) Vyplýva z (i) a odtade, že sa hodnosť matice nemení násobením regulárnej matice.
(iii) Nech $S^2 = diag(d_1, \ldots, d_r)$. Potom

$$(AA^*)U = U \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ((AA^*)s_1U, \ldots, (AA^*)s_mU)$$
$$= (s_1Ud_1, \ldots, s_rUd_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-r}).$$

Teda stĺpce s_iU, matice U sú vlastné vektory matice AA^* príslušné vlastným číslam v poradí $d_1, \ldots, d_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-r}$. Sú normované, pretože U je unitárna. Tvrdenie pre maticu V a A^*A plynie analogicky. □

3.3 Príklad singulárneho rozkladu

V predchádzajúcej kapitole sme si vysvetlili, ako sa hľadá singulárny rozklad matice A. Teraz budeme získané poznatky aplikovať na príklade.

Úloha 2. *Nájdite singulárny rozklad matice A.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie (1. spôsob). Najprv vypočítame maticu AA^*.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podľa vety 3.9 (*iii*) tvoria stĺpce matice U normované vlastné vektory matice AA^*. Hladajme vlastné čísla matice

$$AA^* = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tie sú riešením charakteristickej rovnice $\det(AA^* - \lambda I) = 0$. Vypočítame determinant, položíme ho rovný nule, riešime charakteristickú rovnicu a usporiadame ich podľa velkosti zostupne.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^3 - 7\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

Riešením charakteristickej rovnice

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

sú vlastné čísla: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.

Vlastné vektory su potom riešením homogénnej sústavy rovníc $(AA^* - \lambda E) = 0$
Pre vlastné číslo $\lambda_1 = 6$ má homogénna sústava tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Riešením je $z_1 = \frac{5s}{2}$, $z_2 = \frac{s}{2}$, $z_3 = s$, kde s je parameter.

Dostávame vlastný vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Normovaním vlastného vektoru $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dostaneme prvý stĺpec hľadanej matice U, teda

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Pre druhý a tretí stĺpec hľadanej matice U to spravíme analogicky s vlastnými číslami $\lambda_2 = 1$ a $\lambda_3 = 0$.
Pre vlastné číslo $\lambda_2 = 1$ dostaneme znormovaný vlastný vektor

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Pre vlastné číslo $\lambda_3 = 0$ dostaneme znormovaný vlastný vektor

$$u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Dostávame teda maticu

$$U = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Teraz si vypočítame maticu V. Podľa vety 3.9 (iii) tvoria stĺpce matice V normované vlastné vektory matice A^*A. Najprv vypočítame matice A^*A.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hladajme vlastné čísla matice

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tie sú riešením charakteristickej rovnice $\det(A^*A - \lambda I) = 0$. Vypočítame determinant, položíme ho rovný nule, riešime charakteristickú rovnicu a usporiadame ich podľa velkosti zostupne.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

Riešením charakteristickej rovnice

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

sú vlastné čísla: $\lambda_1 = 6$ a $\lambda_2 = 1$.

Vlastné vektory su potom riešením homogénnej sústavy rovníc $(A^*A - \lambda E) = 0$
Pre vlastné číslo $\lambda_1 = 6$ má homogénna sústava tvar

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Riešením je $z_1 = \frac{t}{2}$, $z_2 = t$, kde t je parameter.
Dostávame vlastný vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Normovaním vlastného vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dostaneme prvý stĺpec hľadanej matice V, teda

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Pre vlastné číslo $\lambda_1 = 1$ má homogénna sústava tvar

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Riešením je $z_1 = -2t$, $z_2 = t$, kde t je parameter.
Dostávame vlastný vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Normovaním vlastného vektoru $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dostaneme druhý stĺpec hľadanej matice V, teda

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Dostávame teda maticu

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Po odmocnení vlastných čísel λ_1, λ_2 dostaneme singulárne čísla, čo sú diagonálne prvky matice S. Podľa vety 3.8 matica T musí mať rovnaké rozmery ako zadaná matica A. Preto pridáme matici S jeden nulový riadok. Teda

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teda singulárny rozklad matice A má tvar

$$UTV^\top = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Riešenie (pomocou MATLABU). Vyriešime túto úlohu pomocou príkazu $svd(A)$, tak že do Matlabu zadáme

```
>> A=[1 2;1 0;0 1]

A =

     1     2
     1     0
     0     1

>> [U,T,V]=svd(A)

U =

    0.9129    0.0000    0.4082
```

```
    0.1826   -0.8944   -0.4082
    0.3651    0.4472   -0.8165


T =

    2.4495         0
         0    1.0000
         0         0


V =

    0.4472   -0.8944
    0.8944    0.4472
```

Matlab vrátil diagonálnu maticu T a unitárne matice U a V.

Poznámka. V software Matlab sa môžme stretnúť s príkazom pre výpočet singulárneho rozkladu. Ak zadáme

(i) `>> [U,T,V]=svd(A)`

Tak nám Matlab vráti diagonálnu maticu T a unitárne matice U a V.

(ii) `>> s=svd(A)`

Tak nám Matlab vráti singulárne čísla matice A.

Kapitola 4

Polárny rozklad

V tejto kapitole sa budeme zaoberať polárnym rozkladom, ktorý si odvodíme pomocou singulárneho rozkladu z kapitoly 3. Hlavným zdrojom pre túto kapitolu boli knihy [1], [2] a [3].

4.1 Polárny rozklad

Veta 4.1 (Veta o polárnom rozklade)**.** *Nech* $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *je lineárny izomorfizmus na komplexom (reálnom) priestore* U *so skalárnym súčinom. Potom*

$$\varphi = \sigma \circ \psi,$$

kde σ *je pozitívne definitný samoadjungovaný operátor a* ψ *je unitárny(ortogonálny) operátor. Naviac* σ *a* ψ *sú určené jednoznačne.*

Dôkaz. Podľa lemmatu 3.2 $\varphi\varphi^* : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ je pozitívne definitný samoadjungovaný operátor. Podľa definície 1.9 a lemmatu 1.10 existuje samoadjungovaný lineárny operátor

$$\sigma = (\varphi\varphi^*)^{1/2}.$$

Operátor σ má kladné vlastné čísla, preto je izomorfizmom s inverzným operátorom

$$\sigma^{-1} = (\varphi\varphi^*)^{-1/2}$$

Položme $\psi = (\varphi\varphi^*)^{-1/2}\varphi$. Platí $\varphi = (\varphi\varphi^*)^{1/2}.(\varphi\varphi^*)^{-1/2}\varphi = \sigma\psi$.
Stačí dokázať, že ψ je unitárny operátor, tj. $\psi\psi^* = id$.
Platí (podľa vety 1.14 (*ii*))

$$\psi\psi^* = (\varphi\varphi^*)^{-1/2}\varphi\varphi^*((\varphi\varphi^*)^{-1/2})^* = (\varphi\varphi^*)^{-1/2}.(\varphi\varphi^*).(\varphi\varphi^*)^{-1/2} = id.$$

Dôkaz jednoznačnosti:
Najprv dokážeme, že σ sa musí rovnať $\sqrt{\varphi\varphi^*}$. Ak je $\varphi = \sigma \circ \psi$, potom

$$\sigma = \varphi\psi^*$$

a

$$\sigma^2 = \sigma\sigma^* = \varphi\psi^*(\varphi\psi^*)^* = \varphi\psi^*\psi\varphi^* = \varphi\varphi^*.$$

Teda $\sigma = \sqrt{\varphi\varphi^*}$ a $\psi = \sigma^{-1}\varphi$. □

Predpoklad, že φ je lineárny izomorfizmus, ktorý máme vo vete, nie je nutný. Platí všeobecnejšia veta.

Veta 4.2. *Ak je $\varphi\ : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ lineárny operátor, potom existuje samoadjungovaný pozitívne semidefinitný operátor σ a unitárny operátor ψ tak, že*

$$\varphi = \sigma \circ \psi.$$

Dôkaz urobíme pomocou vety o singulárnom rozklade.

Dôkaz. Nech $\varphi : \mathrm{W} \to \mathrm{W}$. Vezmeme si nejakú ortonormálnu bázu α a nech $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$, čo je matica typu (n,n). Podľa vety 3.8 existujú unitárne matice U a V typu (n,n) a matica

$$T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde S je diagonálna matica s kladnými prvkami na diagonále, tak že

$$A = UTV^*.$$

Potom

$$A = (UTU^*)(UV^*) = P \cdot R,$$

kde $P = UTU^*$ je samoadjungovaná, pozitívne semidefinitná matica, lebo

$$\langle Px, x\rangle = \langle UTU^*x, x\rangle = \langle TU^*x, U^*x\rangle \geq 0,$$

a $R = UV^*$ je unitárna matica. Potom určite existujú operátory $\sigma : \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ a $\psi : \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ také, že

$$(\sigma)_{\alpha,\alpha} = P \quad \text{a} \quad (\psi)_{\alpha,\alpha} = R,$$

a platí

$$\varphi = \sigma \circ \psi.$$

□

Všimnime si ešte, že na polárny rozklad matice sa môžme pozerať ako na zovšeobecnenie exponenciálneho tvaru komplexného čísla. Ak $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, potom z môžeme napísať v tvare

$$z = |z|e^{i\alpha},$$

kde $|z| > 0$ je absolútna hodnota z, α je nejaká hodnota argumentu z. Pritom $|z^{i\alpha}| = 1$. Aj keď α nie je určené jednoznačne, samotná hodnota $e^{i\alpha}$ jednoznačne určená je. V prípade $z = 0$ môžeme formálne napísať

$$0 = 0 \cdot u,$$

kde $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$, je ľubovolné komplexné číslo na jednotkovej kružnici. Pritom

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha,$$

čo je vlastne vyjadrenie bodu na jednotkovej kružnici v polárnych súradniciach a na rovnosť

$$z = |z|e^{i\alpha} = |z|\cos\alpha + \mathrm{i}\,|z|\sin\alpha$$

sa môžeme pozerať ako vyjadrenie bodu z komplexnej roviny v polárnych súradniciach. Od tade výchádza názov polárny rozklad.

4.2 Príklad polárneho rozkladu

Úloha 3. *Nájdime polárny rozklad matice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Úlohu budeme počítať podľa vety 4.2. Teda

$$A = (UTU^*) \cdot (UV^*) = P \cdot R,$$

kde $P = UTU^*$ je samoadjungovaná, pozitívne semidefinitná matica a $R = UV^*$ je unitárna matica.
Najprv si vypočítame maticu AA^*.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Podľa vety 3.9 (iii) tvoria stĺpce matice U normované vlastné vektory matice AA^*. Hladajme vlastné čísla matice

$$AA^* = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Postup rovnaký ako v riešení Úlohy 2. Teda vlastné čísla sú:

$$\lambda_1 = 10$$
$$\lambda_2 = 0.$$

Vlastné vektory su potom riešením homogénnej sústavy rovníc $(AA^* - \lambda E) = 0$.
Pre vlastn číslo $\lambda_1 = 10$ dostávame vlastný vektor $u_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, normovaním dostaneme

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Pre normovaný vlastný vektor u_2 to spravíme analogicky s vlastným číslom $\lambda_2 = 0$. Teda

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dostávame maticu

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Teraz chceme dostat maticu V. Vypočítame maticu A^*A.

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a postupujeme analogicky. Dostaneme vlastné čísla

$$\lambda_1 = 10$$
$$\lambda_2 = 0.$$

Potom znormované vlastné vektory sú

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Dostávame maticu

$$V = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Po odmocnení vlastných čísel dostaneme singulárne čísla, čo sú diagonálne prvky matice S. Podľa vety 3.8 matica T musí mat rovnaké rozmery ako zadaná matica A. Preto matica bude mať tvar

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom polárny rozklad matice A bude

$$(UTU^*) \cdot (UV^*)$$

$$= \underbrace{\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^* \right)}_{P} \cdot \underbrace{\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^* \right)}_{R}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Kapitola 5

Pseudoinverzia

V tejto kapitole budeme ku každej matici definovať maticu pseudoinverznú. V definícií vychádzame zo singulárneho rozkladu. Hlavným zdrojom pre túto kapitolu boli knihy [1] a [3].

5.1 Pseudoinverzia

Definícia 5.1. Nech A je matica typu (m,n) nad $\mathbb{K}$, kde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$ a nech $A = UTV^*$ je jej singulárny rozklad, $T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Maticu $A^{(-1)} = VT'U^*$, kde $T' = \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nazývame pseudoinverznou maticou k matici A.

Pseudoinverzia je dôležité zovšeobecnenie inverznej matice. Nasledujúca veta zhŕňa jej základné vlastnosti:

Veta 5.2. *Nech A je matica typu (m,n) nad $\mathbb{K}$. Platí*

(i) Ak je A invertibilná , potom
$$A^{(-1)} = A^{-1}.$$

(ii) Pre pseudoinverziu $A^{(-1)}$ platí, že
$$A^{(-1)}A, \quad AA^{(-1)}$$
sú samoadjungované.

(iii) Pre pseudoinverziu $A^{(-1)}$ platí,že
$$AA^{(-1)}A = A, \quad A^{(-1)}AA^{(-1)} = A^{(-1)}.$$

(iv) Pre pseudoinverziu $A^{(-1)}$ platí, že
$$\left(A^{(-1)}\right)^{(-1)} = A.$$

(v) Pre pseudoinverziu $A^{(-1)}$ platí, že

$$A^{(-1)} = (A^*A)^{(-1)}A^*.$$

Dôkaz. (i) Ak je matica A nad $\mathbb{K}$ invertibilná, tak aj $T = U^*AV$ je invertibilná a priamo z definície vychádza, že

$$A^{(-1)} = VT'U^* = VT^{-1}U^* = (UTV^*)^{-1} = A^{-1},$$

(ii) Priamym výpočtom dostávame, že

$$TT'T = T, \qquad T'TT' = T'.$$

Preto

$$\left(AA^{(-1)}\right)^* = \left(UTV^*(UTV^*)^{(-1)}\right)^* = (UTV^*VT'U^*)^* = (UTT'U^*)^*$$

$$= U(T')^\top T^\top U^* = U(TT')^\top U^* = UTT'U^* = AA^{(-1)},$$

a pre druhú rovnosť $(A^{(-1)}A)^*$ analogicky.

(iii) Priamym výpočtom dostávame, že

$$TT'T = T, \qquad T'TT' = T'.$$

Preto

$$AA^{(-1)}A = UTV^*(UTV^*)^{(-1)}UTV^* = UTV^*VT'U^*UTV^* = UTT'TV^* = A,$$

a analogicky pre druhú rovnosť.

(iv) Z definície platí, že $(T')' = T$, potom

$$\left(A^{(-1)}\right)^{(-1)} = (VT'U^*)^{(-1)} = UTV^* = A.$$

(v) Priamym výpočtom dostávame, že

$$(T')^2T = T', \qquad (T)^2T' = T.$$

Preto

$$(A^*A)^{(-1)}A^* = (VTU^*UTV^*)^{(-1)}VTU^* = \left(VT^2V^*\right)^{(-1)}VTU^*$$
$$= V\left(T'\right)^2V^*VTU^* = VT'U^* = A^{(-1)}.$$

□

Poznámka. Nech matica A je typu (m,n), kde $m > n$. Pre hodnoty pochádzajúce z rozumne postavených praktických príkladov je matica A^*A typu (n,n) regulárna a teda má inverziu $(A^*A)^{-1}$. Podľa vety 5.2 (i) a (v) je potom pseudoinverzia

$$A^{(-1)} = (A^*A)^{-1}A^*.$$

5.2 Príklad pseudoinverzie

Pre výpočet pseudoinverzie sa využíva singulárny rozklad. Nasledujúca úloha nadväzuje na úlohu 2 z kapitoly 3.

Úloha 4. *Nájdite pseudoinverznú maticu k matici A.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie (1. spôsob). Najprv hladáme singulárny rozklad matice A. Podľa príkladu 2 je tento singulárny rozklad.

$$A = UTV^\top = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^\top .$$

Teraz podľa definície 5.1 nájdeme pseudoinveznú maticu k matici A.

$$A^{(-1)} = VT'U^\top, \quad \text{kde} \quad T' = \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice U a V poznáme, ostáva nám dopočítať T'. Teda

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pridáme stĺpec núl a máme vypočítanú maticu T'. Teda pseudoinverzná matica k matici A má tvar

$$VT'U^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^\top$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A^{(-1)}.$$

Riešenie (2. spôsob). K hľadaniu pseudoinverzie využijeme tvrdenie (v) vety 5.2.

$$A^{(-1)} = (A^*A)^{(-1)}A^* = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^*$$
$$= \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right)^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Riešenie (pomocou MATLABU). Vyriešime túto úlohou pomocou príkazu $pinv(A)$, tak že do Matlabu zadáme

```
>> A=[1 2;1 0;0 1]

A =

     1     2
     1     0
     0     1

>> B=pinv(A)

B =

    0.1667    0.8333   -0.3333
    0.3333   -0.3333    0.3333
```

Teda matica B je pseudoinverzná matica k matici A.

Kapitola 6

Lineárna regresia

6.1 Lineárna regresia

Nech A je matica typu (m,n), nech X je ľubovoľná matica typu (n,m) a E je jednotková matica typu (m,m). V tejto kapitole ukážeme, že pseudoinverzia $A^{(-1)}$ minimalizuje výraz $\| AX - E \|^2$ (tj. sumu kvadrátov všetkych prvkov uvedenej matice). Hlavným zdrojom pre túto kapitolu boli knihy [3] a [4].

Veta 6.1. *Nech A je matica typu (m,n) nad $\mathbb{K}$. Uvážme pre danú maticu A systém lineárnych rovníc $Az = b$, kde $b \in \mathbb{K}^m$. Potom $y = A^{(-1)}b \in \mathbb{K}^n$ minimalizuje vzdialenosť $\| Az - b \|$ pre všetky $z \in \mathbb{K}^n$.*

Dôkaz. Nech $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ je lineárna zobrazenie zadané predpisom $\varphi(z) = Az$. Potom vektor u z $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \mathbb{K}^m$ minimalizuje vzdialenosť $\| b - u \|$, práve keď je u kolmou projekciou b do $\operatorname{Im}\varphi$. Dokážeme, že

$$u = AA^{(-1)}b.$$

Pretože

$$b = AA^{(-1)}b + (b - AA^{(-1)}b)$$

a $AA^{(-1)}b \in \operatorname{Im}\varphi$, stačí dokázať, že

$$b - AA^{(-1)}b \perp \operatorname{Im}\varphi.$$

Vypočítame skalárny súčin pomocou súčinu matíc. Nech $z \in \mathbb{K}^n$ je ľubovolný.
Potom

$$\left\langle b - AA^{(-1)}b, Az \right\rangle = \langle b, Az\rangle - \left\langle AA^{(-1)}b, Az \right\rangle = b^\top \overline{A}\overline{z} - b^\top (A^{(-1)})^\top A^\top \overline{A} \overline{z}^\top$$

Aby sa tento výraz rovnal 0 pre každé z musíme dokázať, že

$$\overline{A} = (A^{(-1)})^\top A^\top \overline{A}.$$

Po komplexnej konjugácií

$$A = (A^{(-1)})^* A^* A$$

Výpočtom dostaneme

$$\left(A^{(-1)}\right)^* A^*A = \left(VT'U^*\right)^* \left(UTV^*\right)^* \left(UTV^*\right) = UT'V^*VTU^*UTV^*$$
$$= UT'TTV^* = UTV^* = A$$

□

Poznámka. $y = A^{(-1)}b$ nazývame pseudoiverziou sústavy $Az = b$.

6.2 Prvý príklad na lineárnu regresiu

V rovine $\mathbb{R}^2$ je daných $m \geq 2$ bodov $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_m = (x_m, y_m)$, získaných meraním hodnôt nejakej neznámej funkcie. Tuto funkciu aproximujeme priamkou s rovnicou

$$y = \beta x,$$

tak aby výraz $\sum_{i=1}^{m}(y_i - \beta x_i)^2$ bol minimálny. Geometricky chceme body $P_1 = (x_1, y_1), \ldots,$ $P_m = (x_m, y_m)$ preložiť priamkou prechádzajúcej začiatkom tak, aby súčet štvorcov so stranou $|y_i - \beta x_i|$ bol minimálny. Vidíme, že sa jedná o úlohu na lineárnu regresiu. Sústava $Az = b$ má tvar

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{(\beta)}_{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{b}.$$

Koeficient β nájdeme ako pseudoriešenie tejto sústavy. Jednoduchý výpočet dáva

$$A^\top A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \left(\sum x_i^2\right).$$

Potom koeficient β podľa vety 6.1 a 5.2 (v) vypočítame takto

$$\beta = A^{(-1)}b = \left(A^\top A\right)^{(-1)} \cdot A^\top \cdot b.$$

Potom

$$\beta = \frac{1}{\sum x_i^2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum x_i^2} \left(\sum x_i y_i\right).$$

6.3 Druhý príklad na lineárnu regresiu

V rovine $\mathbb{R}^2$ je daných $m \geq 2$ bodov $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_m = (x_m, y_m)$, získaných meraním hodnôt nejakej neznámej funkcie. Tuto funkciu aproximujeme priamkou s rovnicou

$$y = \alpha + \beta x$$

tak aby výraz $\sum_{i=1}^{m} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$ bol minimálny. Ak si uvedomíme, že funkcia $y = \alpha + \beta x$ je lineárnou kombináciou konštantnej funkcie $y = 1$ a identickej funkcie $y = x$, hneď vidíme, že sa jedná o úlohu na lineárnu regresiu. Sústava $Az = b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{b},$$

je okrem triviálneho prípadu, kde všetky body P_i ležia na na jednej priamke, preurčená. Koeficienty α, β nájdeme ako pseudoriešenie tejto sústavy. Výpočtom dostaneme

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum {x_i}^2 \end{pmatrix},$$

$$\det\left(A^\top A\right) = m \sum_{i=1}^{m} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j)^2.$$

Teda $\det\left(A^\top A\right) = 0$, práve keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$. Nech $x_i \neq x_j$ pre nejake i a j. Potom koeficienty $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ podľa vety 6.1 a 5.2 (v) vypočítame takto

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^{(-1)} b = \left(A^\top A\right)^{(-1)} \cdot A^\top \cdot b$$

Potom

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2} \begin{pmatrix} \sum {x_i}^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2} \begin{pmatrix} \sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i \\ m \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i<j} (x_i - x_j)(x_i y_j - x_j y_i) \\ \sum_{i<j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) \end{pmatrix}.$$

Zoznam použitej literatúry

[1] Šik F. *Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu,* Brno, Masarykova univerzita, 1989, 177 s., ISBN 20-210-1966-2.

[2] Zlatoš P. *Lineárna algebra a geometria,* Marenčin PT, Bratislava, 2011,

[3] Slovák J. *Lineární algebra,* skriptá PřF MU, Brno, 1998, elektronický učebný text dostupný z: https://www.math.muni.cz/~slovak/.

[4] Motl L., Zahradník M. *Pěstujeme lineární algebru*, Univerzita Karlova, vydavatelství Karolinum, Praha, 1995.

[5] Serre D. *Matrices: Theory and Applications*, Springer, NY, 2002.