

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2013

ALENA FILIPČUKOVÁ



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



Matematické modely ve fyzice

Diplomová práce

Alena Filipčuková

Vedoucí práce: RNDr. Lenka Příbylová, Ph.D.

Brno 2013

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Alena Filipčuková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Matematické modely ve fyzice
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Vedoucí práce:	RNDr. Lenka Příbylová, Ph.D.
Akademický rok:	2012/2013
Počet stran:	ix + 63
Klíčová slova:	Diferenciální rovnice; Laplaceova transformace; Trojný integrál; Pohybová rovnice; Kladky; Kmitání; Vlnění; Moment setrvačnosti

Bibliographic Entry

Author: Bc. Alena Filipčuková
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Mathematical models in physics

Degree Programme: Physics

Field of Study: Upper Secondary School Teacher Training in Mathematics

Supervisor: RNDr. Lenka Příbylová, Ph.D.

Academic Year: 2012/2013

Number of Pages: ix + 63

Keywords: Differential equation; Laplace transform; Triple integral;
Equation of motion; Pulleys; Oscillation; Wave; Moment of
inertia

Abstrakt

Cílem práce je popsat některé základní matematické modely používané ve fyzice a sestavit sbírku fyzikálních úloh na řešení diferenciálních rovnic, které jsou jejich aplikací. První kapitola obsahuje veškerý matematický aparát potřebný ve zbývajících částech práce. Druhá kapitola se již věnuje fyzice, a to konkrétně pohybovým rovnicím, kmitání a vlnění. Třetí kapitola pak slouží jako pomocná, zabývá se výpočtem momentů setrvačnosti, jež jsou nezbytnou veličinou v pohybových rovnicích. Součástí obou kapitol jsou řešené úlohy doplněné o úlohy neřešené.

Abstract

The thesis aimed to describe some of the basic mathematical models which are used in the physics and assemble a collection of physical exercises to solve differential equations and their applications. The thesis is divided into three chapters. The first chapter contains all of the mathematical apparatus which is needed in the rest of the work. The second chapter deals with physical problems particularly with the equations of motion, oscillation and waves. The third chapter is about supporting materials and it deals with the moments of inertia which are essential for the equations of motion. In both chapters there are solved exercises which are complemented with the unsolved exercises.



Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Alena Filipčuková**

Studijní program - obor: **Fyzika - Učitelství matematiky pro střední školy**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

Matematické modely ve fyzice

Mathematical models in physics

Oficiální zadání: Cílem práce je vytvořit přehled základních matematických modelů používaných ve fyzice a vytvořit sbírku úloh na řešení diferenciálních rovnic, které jsou jejich aplikací.

Doporučená literatura:

Borrelli, Robert L. - Coleman, Courtney S. Differential equations :a modeling perspective. New York : John Wiley & Sons, 1998. xiii, 706. ISBN 0-471-04230-7.

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lenka Příbylová, Ph.D.

Datum zadání diplomové práce: listopad 2011

Datum odevzdání diplomové práce: dle harmonogramu ak. roku 2012/2013

V Brně dne 8. 11. 2011

v. z. prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Zadání diplomové práce převzal dne: 9.12.2011

Podpis studenta

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala RNDr. Lence Příbylové, Ph.D. za odborné vedení diplomové práce, cenné rady a připomínky a čas věnovaný konzultačním hodinám.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 6. května 2013

.....
Alena Filipčuková

Obsah

Úvod	viii
Kapitola 1. Matematický aparát	1
1.1 Diferenciální rovnice	1
1.1.1 Variace konstant	5
1.1.2 Metoda neurčitých koeficientů	6
1.1.3 Laplaceova transformace	7
1.2 Určitý integrál	14
1.2.1 Transformace trojného integrálu	17
Kapitola 2. Užití diferenciálních rovnic	20
2.1 Pohybová rovnice	20
2.2 Mechanika těles	22
2.3 Lana a kladky	32
2.4 Kmitání	38
2.5 Vlnění	53
Kapitola 3. Užití integrálního počtu	56
3.1 Momenty setrvačnosti	56
Závěr	62
Seznam použité literatury	63

Úvod

Fyzikální zákony se nejjednodušeji a nejpřirozeněji formulují ve tvaru diferenciálních rovnic; proto diferenciální rovnice studovali největší matematikové a matematicí fyzikové od dob Newtonových.

G. BIRKHOFF - G. C. ROTA

Většinu přírodních dějů lze popsat pomocí diferenciálních rovnic. A právě diferenciální rovnice hrají důležitou roli v modelování téměř každého fyzikálního děje. Cílem práce je uvést základní matematické modely používané ve fyzice. Jak sám citát říká, matematika a fyzika jdou spolu ruku v ruce. Z tohoto důvodu jsem se i já snažila v práci dbát na důkladný matematický a fyzikální popis úloh. Zaměřuji se na obyčejné diferenciální rovnice 1. a 2. řádu a k jejich řešení užívám řadu metod.

Práce je rozdělena do tří kapitol.

V první kapitole podávám přehled matematického aparátu potřebného ve zbývajících částech práce. Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu zmiňuji jen velmi stručně, neboť jsem se jimi zabývala již v bakalářské práci, viz [4]. Zaměřuji se hlavně na obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu, a to jak na homogenní rovnice, tak i rovnice nehomogenní a hledání jejich partikulárních řešení. K tomu užívám metody variace konstant a neurčitých koeficientů. Silným nástrojem k řešení diferenciálních rovnic je i Laplaceova transformace, které se v práci rovněž věnuji. V závěru kapitoly se ještě zabývám vícerozměrnými integrály, a to konkrétně integrály trojnými, jež jsou nezbytné pro výpočet některých fyzikálních veličin.

Druhá kapitola je již samotným jádrem mé práce. Čtenáře nejprve seznamuji s pohybovými rovnicemi a způsobem jejich řešení. Následuje řada řešených příkladů vycházejících právě z pohybových rovnic doplněná o příklady neřešené. Dále se zabývám mechanickými systémy, v nichž jsou částice připevněny k lanu, které je vedeno přes kladky. Tato část je opět doprovázena názornými příklady. V další podkapitole se věnuji kmitání, a to nejprve vlastním kmitům, později i kmitům buzeným, které řeším právě užitím Laplaceovy transformace. Závěr kapitoly je věnován vlnění a vlnové rovnici.

Kapitola třetí obsahuje aplikace integrálního počtu. Tato kapitola slouží spíše jako pomocná. Využívá trojného integrálu k výpočtu fyzikálních veličin, jež se vyskytují v pohybových rovnicích.

V nadpisu každého příkladu je uveden zdroj, odkud příklad pochází sloužící pro lepší orientaci čtenáře. Přestože jsem se u většiny příkladů nechala inspirovat literaturou, v řadě případů však řešení úloh vyžadovalo rozsáhlejší fyzikální komentář. Bez něj by práce nemusela být srozumitelná širšímu okruhu čtenářů. Doufám tedy, že práce tak poslouží i studentům, kteří nejsou zasvěceni do fyzikální vědy. U některých příkladů jsem pak změnila i způsob řešení, neboť častokrát se mi jevil zbytečně komplikovaný a ne příliš

šikovný. Dokonce jsem v použité literatuře objevila i závažné chyby, které prostřednictvím této práce napravuji. Příklady řešené pomocí Laplaceovy transformace pocházejí z vlastní dílny.

Práce je vysázena systémem \LaTeX .

Obrázky jsou vytvořeny v programech Ipe a GeoGebra.

Kapitola 1

Matematický aparát

1.1 Diferenciální rovnice

Nechť $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce tří proměnných, která je definovaná na otevřené množině $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ a $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, $x \in \mathbb{R}$. Pak rovnice

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

se nazývá obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu v implicitním tvaru s neznámou $y(x)$.

Ve fyzice se většinou setkáváme s funkcemi proměnných t, y, y' , kde t značí čas. V tomto případě je zvyklostí označovat y' symbolem \dot{y} . Proto se budeme tohoto značení držet a budeme ho používat v dalším textu při řešení fyzikálních úloh. Pro potřeby popisu matematického aparátu zůstaneme u značení y' .

Definice 1. Nechť $h(x)$ je funkce definovaná na otevřeném intervalu J . Pak $h(x)$ se nazývá řešení rovnice (1.1) na J , jestliže $h(x)$ má derivaci, pro každé $x \in J$, $(x, h(x), h'(x)) \in \Omega_0$ a platí

$$F(x, h(x), h'(x)) = 0, x \in J.$$

Řešením obyčejné diferenciální rovnice rozumíme tedy funkci, která vyhovuje dané rovnici na nějakém intervalu. Takových řešení může být více, dokonce nekonečně mnoho. Jedno konkrétní řešení nazýváme partikulární řešení. Podaří-li se nám najít univerzální vzorec, ve kterém jsou zahrnuta všechna partikulární řešení, mluvíme o obecném řešení. Obecné řešení bude tedy vzorec obsahující jednu nebo více libovolných konstant, jejichž konkrétními volbami dostaneme všechna možná partikulární řešení dané rovnice. Počet konstant odpovídá v podstatě řádu rovnice.

Při řešení obyčejných diferenciálních rovnic bývá důležité, abychom z rovnice (1.1) osamostatnili y' . Chceme tedy získat tzv. explicitní tvar obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

kde $f(x, y)$ je funkce dvou proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Definice 2. Necht' $(x_0, y_0) \in \Omega$. Pak úloha najít řešení $y(x)$ diferenciální rovnice (1.2), které je definované na nějakém intervalu J obsahujícím bod x_0 a které splňuje tzv. počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, se nazývá Cauchyova počáteční úloha.

Z hlediska uživatele bývá nejdůležitější určit řešení dané rovnice. Ideální by bylo najít obecné řešení, tedy všechna řešení každé rovnice. To však pokaždé není bohužel možné. Nejprve je třeba si uvědomit, co se obvykle rozumí slovy „najít řešení“. Většinou si pod tím představujeme explicitní nebo implicitní vyjádření funkce $y(x)$.

Uvažujme nyní speciální rovnici tvaru

$$y' = f(x).$$

Zřejmě jde o nalezení neurčitého integrálu funkce $f(x)$. Z definice primitivní funkce plyne, že všechna řešení této úlohy mají tvar

$$y(x) = \int f(x) dx + c,$$

což je obecné řešení uvedené rovnice.

Přestože $f(x)$ může být velmi jednoduchá elementární funkce, $\int f(x) dx$ nemusí být elementární funkcí. Avšak řadu jednoduchých rovnic, které jsou významné v aplikacích, lze řešit ve třídě elementárních funkcí. Přehled těch nejdůležitějších typů rovnic 1. řádu, které lze řešit tzv. elementárními metodami řešení obyčejných diferenciálních rovnic, lze nalézt např. v [4].

Nyní se již budeme zabývat diferenciálními rovnicemi 2. řádu.

Necht' $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce čtyř proměnných, která je definovaná na otevřené množině $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^4$ a $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, $x \in \mathbb{R}$. Pak rovnice

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1.3}$$

se nazývá obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu v implicitním tvaru s neznámou $y(x)$.

Jak již bylo řečeno dříve, ve fyzikálních aplikacích, ve kterých se setkáváme s funkcemi závislými na čase t , budeme užívat značení y a \dot{y} .

Definice 3. Necht' $h(x)$ je funkce definovaná na otevřeném intervalu J . Pak $h(x)$ se nazývá řešení rovnice (1.3) na J , jestliže $h(x)$ má derivace až do řádu 2, pro každé $x \in J$, $(x, h(x), h'(x), h''(x)) \in \Omega_0$ a platí

$$F(x, h(x), h'(x), h''(x)) = 0, x \in J.$$

Je-li možné z rovnice (1.3) osamostatnit nejvyšší derivaci neznámé, tj. je-li možné ji upravit na tvar

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1.4}$$

kde $f(x, y, y')$ je nějaká funkce tří proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, mluvíme o obyčejné diferenciální rovnici 2. řádu v explicitním tvaru.

Definice 4. Necht' je dána trojice $(x_0, y_0, y_1) \in \Omega$. Pak úloha najít řešení $y(x)$ rovnice (1.4), které je definované na nějakém intervalu J obsahujícím x_0 a takové, že

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1,$$

se nazývá Cauchyova počáteční úloha.

• **Homogenní rovnice s konstantními koeficienty**

Je to rovnice tvaru

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1.5}$$

kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1$.

Věta 1. Jsou-li $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě řešení rovnice (1.5) a $c \in \mathbb{R}$, pak také funkce $y_1(x) + y_2(x)$ a $c y_1(x)$ jsou řešení rovnice (1.5).

Důkaz. Předpokládejme, že $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou řešení rovnice (1.5), takže

$$y_1''(x) + a_1 y_1'(x) + a_0 y_1(x) = 0 \text{ a } y_2''(x) + a_1 y_2'(x) + a_0 y_2(x) = 0.$$

Chceme dokázat, že i $y_1(x) + y_2(x)$ a $c y_1(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$, jsou také řešení rovnice (1.5). Tedy

$$\begin{aligned} & (y_1(x) + y_2(x))'' + a_1 (y_1(x) + y_2(x))' + a_0 (y_1(x) + y_2(x)) = \\ & = y_1''(x) + y_2''(x) + a_1 y_1'(x) + a_1 y_2'(x) + a_0 y_1(x) + a_0 y_2(x) = 0 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} & (c y_1(x))'' + a_1 (c y_1(x))' + a_0 c y_1(x) = c y_1''(x) + a_1 c y_1'(x) + a_0 c y_1(x) = \\ & = c (y_1''(x) + a_1 y_1'(x) + a_0 y_1(x)) = 0, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Tedy řešení rovnice (1.5) tvoří vektorový prostor, jehož dimenze je 2. V každém vektorovém prostoru konečné dimenze existuje báze. Libovolný prvek tohoto prostoru je pak lineární kombinací prvků této báze. Vybereme tedy dvě lineárně nezávislá řešení $y_1(x), y_2(x)$ rovnice (1.5). Pak každé řešení rovnice (1.5) má tvar

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{1.6}$$

kde c_1, c_2 jsou libovolná reálná čísla. Vzorec (1.6) tedy dává obecné řešení rovnice (1.5). Bázi $y_1(x), y_2(x)$ nazýváme fundamentální systém rovnice (1.5).

Nyní se budeme zabývat nalezením fundamentálního systému rovnice (1.5). Pokusme se najít řešení této rovnice ve tvaru $y = e^{\lambda x}$, kde λ je vhodné číslo. Vypočteme

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \implies y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

a po dosazení obdržíme

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0.$$

Protože $e^{\lambda x} \neq 0$, musí λ splňovat rovnici

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (1.7)$$

To je kvadratická rovnice, kterou umíme snadno vyřešit. Rovnice se nazývá charakteristická rovnice diferenciální rovnice (1.5). Levou stranou této rovnice je polynom stupně 2. Z algebry je známo, že tato rovnice má v komplexním oboru právě 2 kořeny, které mohou být reálné různé nebo reálné stejné (tzv. dvojnásobný kořen) nebo komplexní. Přitom komplexní kořeny se vyskytují vždy po dvojicích (tzv. komplexně sdružené kořeny).

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ je 2-násobný reálný kořen rovnice (1.7). Pak funkce

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x}$$

jsou řešením rovnice (1.5).

Nechť $\alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ je komplexně sdružená dvojice komplexních kořenů rovnice (1.7), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Pak funkce

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

jsou řešením rovnice (1.5).

Věta 2. *Množina řešení zkonstruovaná popsáním způsobem tvoří fundamentální systém rovnice (1.5).*

Důkaz. Plyne z výše uvedeného postupu.

Z předchozího vyplývá, že řešení rovnice (1.5) je v závislosti na typu kořenů charakteristické rovnice lineární kombinací funkcí tvaru

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \text{ nebo } e^{\lambda x}, xe^{\lambda x} \text{ nebo } e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

K těmto funkcím vždy existuje Laplaceův obraz, který je racionální ryze lomenou funkcí. Tyto rovnice lze tedy snadno řešit užitím Laplaceovy transformace, což si ukážeme později.

• Nehomogenní rovnice

Jedná se o rovnici tvaru

$$y'' + a_1y' + a_0y = f(x). \quad (1.8)$$

Věta 3 (Princip superpozice). *Nechť $y_1(x)$ je řešení rovnice $y'' + a_1y' + a_0y = f_1(x)$ a $y_2(x)$ je řešení rovnice $y'' + a_1y' + a_0y = f_2(x)$ (tedy levé strany obou rovnic jsou stejné). Pak pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ je funkce $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ řešením rovnice*

$$y'' + a_1y' + a_0y = c_1f_1(x) + c_2f_2(x).$$

Důkaz. Tvrzení je bezprostředním zobecněním věty 1 a i jeho důkaz je zcela analogický.

Věta 4. Necht' $y_1(x), y_2(x)$ je fundamentální systém homogenní rovnice (1.5) a $y_0(x)$ je partikulární řešení rovnice (1.8). Pak obecné řešení rovnice (1.8) má tvar

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_0(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Vyplývá z principu superpozice.

Obecné řešení homogenní rovnice umíme najít. V dalších odstavcích si nyní ukážeme postupně dva způsoby, jak najít partikulární řešení $y_0(x)$ nehomogenní rovnice, a to buď metodou variace konstant, nebo metodou neurčitých koeficientů.

1.1.1 Variace konstant

Myšlenka metody je obdobná jako u rovnice prvního řádu - viz např. [4], v obecném řešení homogenní rovnice se snažíme zaměnit konstanty c_1, c_2 vhodnými funkcemi $K_1(x), K_2(x)$ a hledat řešení $y_0(x)$ nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y_0(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x).$$

Necht' $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice, tj.

$$y_i'' + a_1 y_i' + a_0 y_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.9)$$

Hledejme partikulární řešení ve tvaru

$$y_0(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x).$$

Vypočteme první derivaci (pro stručnost nepíšeme argument x). Vyjde

$$y_0' = K_1' y_1 + K_1 y_1' + K_2' y_2 + K_2 y_2'.$$

Při výpočtu druhé derivace bychom dostali druhé derivace neznámých funkcí. Požadujeme proto, aby

$$K_1' y_1 + K_2' y_2 = 0.$$

Že takovou podmínku můžeme splnit, uvidíme níže. Pak máme

$$y_0' = K_1 y_1' + K_2 y_2' \implies y_0'' = K_1' y_1' + K_1 y_1'' + K_2' y_2' + K_2 y_2''.$$

Po dosazení do (1.8) a úpravě vyjde

$$\begin{aligned} K_1' y_1' + K_1 y_1'' + K_2' y_2' + K_2 y_2'' + a_1 (K_1 y_1' + K_2 y_2') + a_0 (K_1 y_1 + K_2 y_2) &= f(x), \\ K_1' y_1' + K_2' y_2' + K_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + K_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) &= f(x). \end{aligned}$$

Vezmeme-li v úvahu (1.9), dostaneme

$$K_1' y_1' + K_2' y_2' = f(x).$$

Celkově tedy máme pro derivace neznámých funkcí K_1' a K_2' soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} K_1' y_1 + K_2' y_2 &= 0, \\ K_1' y_1' + K_2' y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Determinant matice soustavy je tzv. wronskián

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

který je vzhledem k nezávislosti řešení $y_1(x), y_2(x)$ nenulový, a proto má naše soustava jediné řešení (které můžeme získat např. Cramerovým pravidlem). Z K_1' a K_2' dostaneme K_1 a K_2 integrací. To ovšem nemusí být možné ve třídě elementárních funkcí. Až na tento problém, je však celý algoritmus metody variace konstant efektivní.

1.1.2 Metoda neurčitých koeficientů

Tato metoda je použitelná pro rovnice, jejichž pravá strana $f(x)$ má speciální tvar. Uvažujme rovnici (1.8), jejíž lineární části přísluší charakteristická rovnice (1.7). Probereme postupně typy pravých stran $f(x)$ od nejjednodušších k nejsložitějším.

1. $f(x) = P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n .

Předpokládejme, že číslo 0 je k -násobným kořenem charakteristické rovnice (1.7). Přitom $k = 0$ znamená, že tato rovnice nemá kořen 0. Pak rovnice (1.8) má partikulární řešení tvaru

$$y_0(x) = x^k Q_n(x),$$

kde $Q_n(x)$ je vhodný polynom stupně n s neznámými koeficienty.

Dále postupujeme tak, že určíme y_0' a y_0'' a dosadíme do (1.8). Z algebry víme, že k tomu, aby se dva polynomy rovnaly pro každé $x \in \mathbb{R}$, je nutné a stačí, aby měly stejný stupeň a stejné koeficienty u týchž mocnin x . Porovnáním dostáváme obecně soustavu lineárních rovnic, jejíž řešení jsou koeficienty polynomu $Q_n(x)$.

2. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n a $\alpha \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme, že číslo α je k -násobným kořenem charakteristické rovnice (1.7); $k = 0$, nemá-li tento kořen. Pak rovnice (1.8) má partikulární řešení tvaru

$$y_0(x) = x^k Q_n(x)e^{\alpha x},$$

kde $Q_n(x)$ je vhodný polynom stupně n s neznámými koeficienty.

3. $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$, kde $P_m(x)$ je polynom stupně m , $Q_n(x)$ je polynom stupně n a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme, že číslo $\alpha + \beta i$ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice (1.7); $k = 0$, nemá-li tento kořen. Pak rovnice (1.8) má partikulární řešení tvaru

$$y_0(x) = x^k [R_s(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + S_s(x)e^{\alpha x} \sin \beta x],$$

kde $s = \max\{m, n\}$ (je-li $P_m(x) = 0$, je $s = n$, je-li $Q_n(x) = 0$, je $s = m$) a $R_s(x)$ a $S_s(x)$ jsou vhodné polynomy stupně s s neznámými koeficienty.

I když je $P_m(x)$ nebo $Q_n(x)$ nulový, tj. pravá strana obsahuje jen samostatný člen s kosinem nebo sinem, je nutné do řešení zahrnout $R_s(x)$ i $S_s(x)$, tj. část s kosinem i sinem.

Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty lze řešit i užitím Laplaceovy transformace, kterou se budeme nyní zabývat.

1.1.3 Laplaceova transformace

Definice 5. Necht' $f(t)$ je daná komplexní funkce reálné proměnné; nazveme ji předmětem. Necht' následující integrál existuje a má konečnou hodnotu aspoň pro jedno komplexní p . Potom k funkci $f(t)$ definujeme Laplaceův obraz $F(p)$ rovnicí

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Vztah mezi předmětem a jeho obrazem se nazývá korespondence. Vztah mezi nimi zapisujeme pomocí znaménka korespondence \triangleq , tedy: $f(t) \triangleq F(p)$. Častěji však používáme symbolu Laplaceovy transformace \mathcal{L} . Výraz $\mathcal{L}(f(t))(p)$ znamená pak totéž jako $\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$, takže můžeme napsat $F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$. Definici Laplaceovy transformace můžeme tedy napsat ve tvaru

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.10)$$

Tabulka 1.1 bývá často nazývána také jako „slovník Laplaceovy transformace“. V levém sloupci jsou uvedeny předměty $f(t)$, v pravém pak příslušné Laplaceovy obrazy. Tato tabulka korespondencí nám později usnadní používání Laplaceovy transformace, odpadne nám totiž v některých případech složité odvozování Laplaceových obrazů z definice. Rozsáhlejší slovník lze nalézt např. v publikaci [12].

Definice 6. Funkce $f(t)$ se nazývá funkce exponenciálního řádu s indexem růstu ξ_1 , jestliže bod $+\infty$ je hromadným bodem jejího definičního oboru a jestliže existuje takové t_0 a takové číslo $M > 0$, že nerovnost

$$|f(t)| \leq Me^{\xi_1 t}$$

platí pro všechna $t > t_0$, pro která je funkce definována. Píšeme potom $f(t) = O(e^{\xi_1 t})$ (symbol funkce exponenciálního řádu).

Definice 7. Komplexní funkce $f(t)$ reálné proměnné t se nazývá předmět standardního typu, má-li tyto tři vlastnosti:

1. Je po částech spojitá na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$.
2. Je exponenciálního řádu.
3. Rovná se nule pro všechna $t < 0$.

Protože některé zvláště jednoduché a často se vyskytující funkce, jako t^n , e^{at} , funkce goniometrické apod., nejsou pro záporná t rovny nule, nejsou to vlastně předměty standardního typu. Proto bychom místo nich měli správně používat funkcí definovaných např. takto:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0, \\ e^{at} & \text{pro } t > 0. \end{cases}$$

Tabulka 1.1: Slovník Laplaceovy transformace:

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(p)$
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$
$t^n e^{at}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$e^{at} (\cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t)$	$\frac{p}{(p-a)^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(p^2 + \omega^2)^2}$

K zjednodušení zápisu používáme tzv. Heavisideovy funkce $H(t)$, definované takto:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0, \\ 1 & \text{pro } t > 0. \end{cases}$$

Obraz Heavisideovy funkce lze snadno určit užitím definice Laplaceova obrazu:

$$\mathcal{L}(H(t))(p) = \int_0^{\infty} H(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{p}(0 - 1) = \frac{1}{p}.$$

Věta 5 (O linearitě přímé Laplaceovy transformace). *Nechť $f_i(t)$ jsou předměty standardního typu a $F_i(p) = \mathcal{L}(f_i(t))(p)$ jejich obrazy, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Necht' dále a_i jsou libovolné komplexní konstanty. Potom pro všechna komplexní p , pro která jsou definovány současně všechny obrazy $F_i(p)$, platí*

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right) = \sum_{i=1}^n a_i F_i(p).$$

Důkaz. Plyne z linearitě integrálu.

Věta 6 (O substituci v obrazu). *Nechť $f(t)$ je předmět standardního typu, $\mathcal{L}(f(t))(p) = F(p)$. Necht' a je komplexní konstanta. Potom*

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(p - a).$$

Důkaz. Přímým dosazením do (1.10).

Věta 7 (O derivaci obrazu). *Nechť $f(t)$ je předmět standardního typu, $\mathcal{L}(f(t))(p) = F(p)$. Potom*

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(p) = -\frac{dF(p)}{dp}.$$

Důkaz. Záměnou pořadí integrace a derivace.

Věta 8 (O integraci obrazu). *Nechť $f(t)$ je předmět standardního typu s indexem růstu ξ_1 , $\mathcal{L}(f(t))(p) = F(p)$. Necht' také funkce $\frac{f(t)}{t}$ má v bodě $t = 0$ konečnou limitu zprava. Potom*

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^\infty F(q) dq.$$

Důkaz. Viz např. [12].

Věta 9 (O změně měřítka). *Nechť $f(t)$ je předmět standardního typu, $\mathcal{L}(f(t))(p) = F(p)$. Necht' k je kladná konstanta. Potom také funkce $g(t) = f(kt)$ je předmětem standardního typu a platí*

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(f(kt)) = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right).$$

Obdobně ovšem platí

$$\frac{1}{k} \mathcal{L}\left(f\left(\frac{t}{k}\right)\right) = F(pk).$$

Důkaz. Užitím substituce $t = \frac{\tau}{k}$.

Věta 10 (O obrazu derivace). *Nechť funkce $f(t)$ a její derivace $f'(t)$ jsou předměty standardního typu. Necht' dále funkce $f(t)$ je spojitá v otevřeném intervalu $(0, +\infty)$. Označme $F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$. Necht' dále $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$. [Tuto veličinu nazveme počáteční hodnotou funkce $f(t)$.] Potom*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0+).$$

Důkaz. Užitím metody per partes.

Za předpokladů předchozí věty platí $\mathcal{L}(f'(t)) = p\mathcal{L}(f(t)) - f(0+)$. Označme $f'(t) = g(t)$. Necht' funkce $g(t)$ zase splňuje předpoklad věty o obrazu derivace, tj. necht' $g(t)$ i $g'(t)$ jsou předměty standardního typu a funkce $g(t)$ je spojitá pro všechna $t > 0$. Potom ovšem $\mathcal{L}(g'(t)) = p\mathcal{L}(g(t)) - g(0+)$, kde $g(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t)$. Dosadíme-li do poslední rovnice $\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(f'(t)) = p\mathcal{L}(f(t)) - f(0+)$ a označíme-li $g(0+) = f'(0+)$, dostaneme

$$\mathcal{L}(f''(t)) = \mathcal{L}(g'(t)) = p[p\mathcal{L}(f(t)) - f(0+)] - g(0+) = p^2\mathcal{L}(f(t)) - pf(0+) - f'(0+).$$

Tento vzorec pro obraz druhé derivace platí za předpokladu, že $f(t)$, $f'(t)$ a $f''(t)$ jsou předměty standardního typu a že $f(t)$ i $f'(t)$ jsou spojitě pro všechna $t > 0$.

Věta 11 (O obrazu n -té derivace). *Nechť n je přirozené číslo. Necht' funkce $f(t)$ a všechny její derivace až do n -tého řádu včetně jsou předměty standardního typu. Necht' dále funkce $f(t)$ a všechny její derivace až do řádu $(n - 1)$ včetně jsou spojité pro všechna $t > 0$. Označme*

$$f^{(k)}(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f^{(k)}(t)$$

pro $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, kde ovšem nultá derivace je původní funkce: $f^{(0)}(t) = f(t)$. Veličiny $f^{(k)}(0+)$ nazveme počátečními hodnotami funkce a jejích derivací. Potom platí

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{i=1}^n p^{n-i} f^{(i-1)}(0+).$$

Důkaz. Úplnou matematickou indukcí a použitím předchozí věty.

• Užití Laplaceovy transformace na řešení diferenciálních rovnic

Věta o obrazu derivace ukazuje výhody Laplaceovy transformace. Jestliže se předmět zderivuje, jeho Laplaceův obraz se vynásobí veličinou p . Operace derivování podle t v prostoru předmětu se převádí na algebraickou operaci násobení v prostoru obrazu. Mají-li tedy mezi předmětem a jeho derivacemi platit nějaké vztahy, budou pro obraz tohoto předmětu platit vztahy mnohem jednodušší. Laplaceova transformace převádí jisté typy diferenciálních rovnic na rovnice algebraické.

Nechť je dána lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

kdy $y(t)$ je hledaná funkce, a_i jsou dané konstanty, $a_n \neq 0$, $f(t)$ je daná funkce, která je předmětem standardního typu.

Mějme dále soustavu n daných čísel b_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Hledejme funkci $y(t)$, která by diferenciální rovnici vyhovovala pro všechna t , pro něž je $f(t)$ spojitá, a která by i se svými derivacemi až do řádu $n - 1$ včetně byla spojitá v otevřeném intervalu $(0, +\infty)$ a která by pro $t = 0$ vyhovovala n počátečním podmínkám $y^{(i)}(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} y^{(i)}(t) = b_i$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Je-li funkce $y(t)$ i se svými derivacemi spojitá v polouzavřeném intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, píšeme obvykle počáteční podmínky ve tvaru $y^{(i)}(0) = b_i$. Předpokládejme, že takové řešení existuje právě jedno. Laplaceův obraz $\mathcal{L}(y) = Y$ tedy existuje a lze použít věty o obrazu derivace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y') &= pY - y(0+) = pY - b_0, \\ \mathcal{L}(y'') &= p^2Y - py(0+) - y'(0+) = p^2Y - pb_0 - b_1, \\ \mathcal{L}(y''') &= p^3Y - p^2b_0 - pb_1 - b_2, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathcal{L}(y^{(n)}) &= p^nY - p^{n-1}b_0 - p^{n-2}b_1 - \dots - pb_{n-2} - b_{n-1}. \end{aligned}$$

Také n -tá derivace je totiž předmětem standardního typu. Podle věty o linearitě Laplaceovy transformace platí pro obraz levé strany rovnice

$$\mathcal{L}(a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y) = a_n \mathcal{L}(y^{(n)}) + \dots + a_2 \mathcal{L}(y'') + a_1 \mathcal{L}(y') + a_0 \mathcal{L}(y).$$

Rovnají-li se dvě funkce, musí se rovnat i jejich Laplaceovy obrazy. Označíme-li tedy $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$, můžeme napsat

$$\begin{aligned} & a_n(p^n Y - p^{n-1} b_0 - \dots - p b_{n-2} - b_{n-1}) + \\ & + a_{n-1}(p^{n-1} Y - p^{n-2} b_0 - \dots - p b_{n-3} - b_{n-2}) + \\ & \dots + a_2(p^2 Y - p b_0 - b_1) + a_1(p Y - b_0) + a_0 Y = F(p). \end{aligned}$$

Tuto rovnici nazýváme obrazem diferenciální rovnice. Můžeme ji ještě přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} & (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y - \\ & - a_n(p^{n-1} b_0 + \dots + p b_{n-2} + b_{n-1}) - \dots - a_1 b_0 = F(p). \end{aligned}$$

Z této algebraické rovnice můžeme vypočítat Y :

$$\begin{aligned} Y = & \frac{F(p)}{a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} + \\ & + \frac{a_n(p^{n-1} b_0 + \dots + b_{n-1}) + \dots + a_2(p b_0 + b_1) + a_1 b_0}{a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \end{aligned}$$

Použijeme-li ještě stručnějšiho označení $Q(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i$ (Q je tedy mnohočlen právě n -tého stupně) a

$$P(p) = a_n(p^{n-1} b_0 + \dots + b_{n-1}) + \dots + a_3(p^2 b_0 + p b_1 + b_2) + a_2(p b_0 + b_1) + a_1 b_0$$

(P je tedy mnohočlen stupně nejvýše $n-1$), můžeme napsat

$$Y = \frac{F(p)}{Q(p)} + \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Tím jsme získali obraz řešení rovnice. Obvykle nám ovšem jde o skutečné řešení rovnice, tj. o předmět $y(t)$, jehož obrazem je právě nalezená funkce $Y(p)$. Podaří-li se nám najít funkci $y(t)$, jejíž Laplaceův obraz by byl $Y(p)$, pak je to právě hledané řešení. Při vyjádření tohoto řešení se ovšem omezíme na interval $\langle 0, +\infty \rangle$.

Věta 12 (O obrazu integrálu). *Nechť $f(t)$ je předmět standardního typu, $\mathcal{L}(f(t))(p) = F(p)$. Potom*

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{F(p)}{p}.$$

Důkaz. Přímým dosazením.

Věta 13 (O translaci). *Nechť $f(t)$ je předmět standardního typu. Necht' ϑ je nezáporná konstanta. Potom $\mathcal{L}(f(t - \vartheta)) = e^{-p\vartheta} \mathcal{L}(f(t))$.*

Důkaz. Přímým dosazením.

V předpokladech věty je již obsaženo, že funkce $f(t)$ je nulová pro všechna záporná t , a že tedy funkce $f(t - \vartheta)$ je nulová pro všechna $t < \vartheta$. Protože však tato okolnost je velice důležitá, bývá užitečné zapamatovat si větu o translaci ve znění, které to lépe zdůrazňuje:

$$\mathcal{L}(f(t - \vartheta)H(t - \vartheta)) = e^{-p\vartheta} \mathcal{L}(f(t)H(t)), \quad \vartheta \leq 0.$$

Do této rovnice můžeme za $f(t)$ dosadit libovolnou funkci po částech spojitou a exponenciálního řádu.

Věty o translaci se často používá k sestrojení obrazů konečných impulsů. Konečným impulsem nazýváme předmět standardního typu, který se rovná nule pro $t > \vartheta$ ($\vartheta > 0$ je trváním impulsu). Jde tedy o funkci, která může nabývat hodnot různých od nuly jen v intervalu $\langle 0, \vartheta \rangle$. Pak platí, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{\vartheta} f(t)e^{-pt} dt.$$

Při použití Laplaceovy transformace na řešení diferenciálních rovnic najdeme obraz řešení a potom hledáme k tomuto obrazu příslušný předmět. Úlohu najít k dané funkci $F(p)$ komplexní proměnné předmět $f(t)$ tak, aby $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$, nazýváme zpětnou transformací.

Při hledání předmětu k danému obrazu používáme pravidel transformace uvedených dříve. Tak např. jestliže existují

$$\mathcal{L}^{-1}(F_1) = f_1, \quad \mathcal{L}^{-1}(F_2) = f_2,$$

potom

$$\mathcal{L}^{-1}(c_1F_1 + c_2F_2) = c_1f_1 + c_2f_2$$

(linearita zpětné transformace). Tento vzorec lze rozšířit na libovolný konečný počet členů.

Podobně jestliže

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t),$$

potom

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(F(p - a)) &= e^{at} f(t) \quad (a \text{ libovolné}), \\ \mathcal{L}^{-1}(e^{-ap}F(p)) &= f(t - a)H(t - a) \quad (a \leq 0). \end{aligned}$$

Obdobně lze při zpětné transformaci užít i ostatních dříve uvedených vět.

Při řešení diferenciálních rovnic a elektrických obvodů se nejčastěji vyskytují obrazy, které mají tvar racionální lomené funkce.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby racionální lomená funkce $F(p)$ (tj. podíl dvou mnohočlenů) byla obrazem předmětu standardního typu, je tato: Stupeň čitatele je nižší než stupeň jmenovatele.

Metoda zpětné transformace racionální lomené funkce spočívá v tom, že racionální lomenou funkci rozložíme v parciální zlomky typu

$$\frac{A_i}{p - p_i}, \quad \frac{B_{i,k}}{(p - p_i)^k},$$

kde p_i jsou nulové body jmenovatele, $A_i, B_{i,k}$ konstanty. Uvedené parciální zlomky jsou však obrazy známých předmětů standardního typu:

$$\frac{1}{p-p_i} = \mathcal{L}(e^{p_i t}), \quad \frac{1}{(p-p_i)^k} = \mathcal{L}\left(\frac{t^{k-1} e^{p_i t}}{(k-1)!}\right).$$

Věta 14 (O rozkladu). *Nechť $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ je racionální lomená funkce, číselník stupně nižšího než jmenovatel. Nechť jmenovatel má právě n vesměs různých kořenů p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, takže $Q(p) = a_n(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)$, $a_n \neq 0$. Potom*

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p-p_i},$$

kde

$$A_i = \lim_{p \rightarrow p_i} [(p-p_i)F(p)] = \frac{P(p_i)}{Q'(p_i)},$$

takže

$$f(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} = \sum_{i=1}^n \frac{P(p_i)}{Q'(p_i)} e^{p_i t}.$$

Důkaz. Užitím l'Hospitalova pravidla.

Konstanty A_i můžeme také dostat způsobem, který je obvyklý v integrálním počtu, a to porovnáváním koeficientů u jednotlivých mocnin p .

• Užití věty o translaci při zpětné transformaci

Nechť $Q(p)$ je mnohočlen n -tého stupně, $P_1(p), P_2(p)$ mnohočleny stupně nejvýše $n-1$, a_1, a_2 nezáporné konstanty. Hledejme předmět k obrazu

$$F(p) = \frac{e^{-a_1 p} P_1(p) + e^{-a_2 p} P_2(p)}{Q(p)}.$$

Napíšeme

$$F(p) = e^{-a_1 p} \frac{P_1(p)}{Q(p)} + e^{-a_2 p} \frac{P_2(p)}{Q(p)}$$

a k oběma racionálním funkcím, které se nám tu vyskytují, najdeme předměty. Označíme je tak, aby bylo zřejmé, že to jsou funkce nulové pro záporná t :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P_1(p)}{Q(p)}\right) = g_1(t)H(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P_2(p)}{Q(p)}\right) = g_2(t)H(t).$$

Potom podle věty o translaci zřejmě platí

$$f(t) = g_1(t-a_1)H(t-a_1) + g_2(t-a_2)H(t-a_2).$$

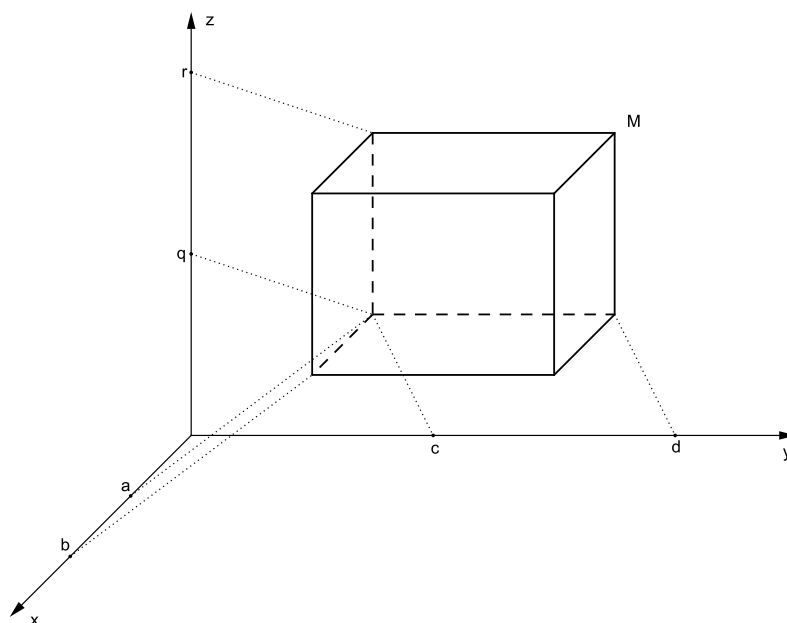
1.2 Určitý integrál

V této části se budeme zabývat vícerozměrnými integrály, a to konkrétně integrály trojnými, jež jsou nezbytným nástrojem pro výpočet některých fyzikálních veličin charakterizujících prostorové útvary, jak si ukážeme později.

K zavedení trojného integrálu je třeba definovat řadu pojmů. Zavedme nejprve pojem intervalu v prostoru.

Definice 8. Intervalem v prostoru neboli trojrozměrným intervalem budeme rozumět množinu J , která je kartézským součinem tří intervalů $J_1, J_2, J_3 \subseteq \mathbb{R}$. Tedy $J = J_1 \times J_2 \times J_3$.

V dalším budeme vždy uvažovat případ, kdy všechny tři intervaly J_1, J_2 a J_3 budou omezené a uzavřené. Odpovídající trojrozměrný interval $M = J_1 \times J_2 \times J_3$ pak bude omezený a uzavřený kvádr, kde $J_1 = \langle a, b \rangle$, $J_2 = \langle c, d \rangle$ a $J_3 = \langle q, r \rangle$.



Obrázek 1.1: Trojrozměrný interval M

Bud' $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle q, r \rangle$ trojrozměrný uzavřený omezený interval, který budeme nazývat kvádrem. Necht' $D_x: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, $D_y: c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ je dělení intervalu $\langle c, d \rangle$ a necht' $D_z: q = z_0 < z_1 < \dots < z_p = r$ je dělení intervalu $\langle q, r \rangle$. Označme $M_{ijk} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle \times \langle z_{k-1}, z_k \rangle$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Systém kvádrů $\{M_{ijk} : i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p\}$ nazýváme dělením kvádrů M a značíme $D = D_x \times D_y \times D_z$. Kvádry M_{ijk} nazýváme dílky dělení D .

Bud' f ohraničená funkce tří proměnných definovaná na kvádru $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle q, r \rangle$ a necht' $D = D_x \times D_y \times D_z$ je dělení kvádrů M o dílcích M_{ijk} ,

$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p$. Označme

$$V_{ijk} = \sup\{f(x, y, z) : [x, y, z] \in M_{ijk}\},$$

$$v_{ijk} = \inf\{f(x, y, z) : [x, y, z] \in M_{ijk}\}$$

a položme

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p V_{ijk}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}),$$

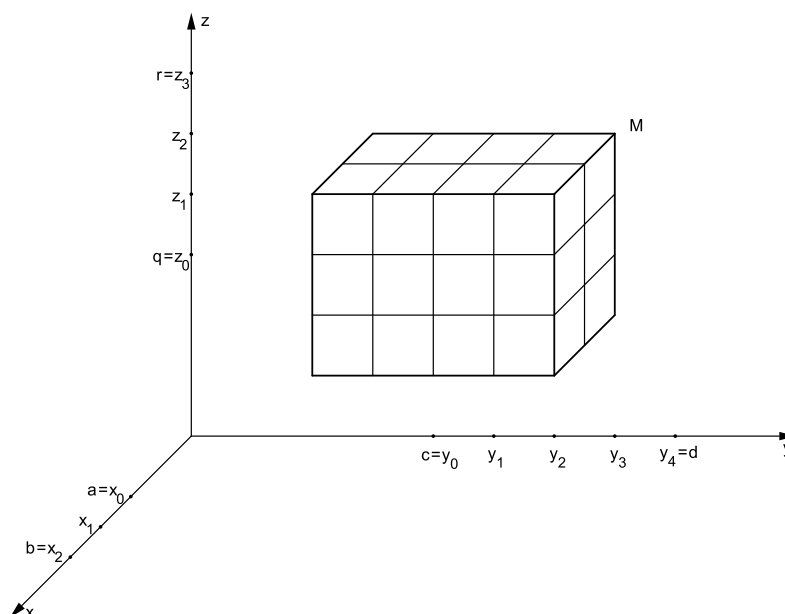
$$s(D, f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p v_{ijk}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

Číslo $S(D, f)$ nazýváme horním součtem a číslo $s(D, f)$ dolním součtem funkce f při dělení D . Označíme-li $m(M_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$, pak lze psát

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p V_{ijk}m(M_{ijk}),$$

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p v_{ijk}m(M_{ijk}),$$

přičemž $m(M_{ijk})$ budeme nazývat mírou (objemem) kvádrů M_{ijk} .



Obrázek 1.2: Dělení trojrozměrného intervalu

Bud' $D_0 \in \mathcal{D}$ libovolné pevně zvolené dělení intervalu $M = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle q, r \rangle$. Platí $s(D, f) \leq S(D_0, f)$ pro každé $D \in \mathcal{D}$ – viz např. [12]. Množina $\{s(D, f) : D \in \mathcal{D}\}$ je tedy neprázdná a shora omezená. Existuje proto $\sup\{s(D, f) : D \in \mathcal{D}\}$, které značíme

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz.$$

Zřejmě platí

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz \leq S(D_0, f).$$

Dělení D_0 však bylo voleno libovolně, takže $S(D, f) \geq \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$ pro každé $D \in \mathcal{D}$ a množina všech horních součtů funkce f je zdola omezená a neprázdná. Existuje tudíž $\inf\{S(D, f) : D \in \mathcal{D}\}$, které značíme

$$\overline{\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz}.$$

Přitom platí

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz \leq \overline{\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz}.$$

Definice 9. Čísla $\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$ resp. $\overline{\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz}$ nazveme dolním resp. horním integrálem ohraničené funkce f na množině M . Platí-li rovnost

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = \overline{\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz},$$

říkáme, že f je integrovatelná (integrace schopná) na množině M a definujeme trojný integrál $\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$ funkce f na množině M vztahem

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = \overline{\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz} = \overline{\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz}.$$

Funkce f se nazývá integrand, množina M integrační obor.

Definice 10. Řekneme, že omezená množina $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je měřitelná, jestliže pro nějaký kvádr $R \supseteq M$ je charakteristická funkce množiny M $\chi_M(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y, z] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y, z] \notin M \end{cases}$ integrovatelná na kvádru R . Přitom klademe

$$m(M) = \iiint_R \chi_M(x, y, z) dx dy dz$$

a číslo $m(M)$ nazýváme (Jordanovou) mírou množiny M .

Definice 11. Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je měřitelná množina a necht' f je ohraničená funkce na M . Funkci f nazveme integrovatelnou (integrace schopnou) na množině M , jestliže funkce $\chi_M f$ určená předpisem

$$(\chi_M f)(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{pro } [x, y, z] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y, z] \notin M \end{cases}$$

je integrovatelná na nějakém kvádru $R \supseteq M$. Trojný integrál funkce f na množině M pak definujeme vztahem

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R (\chi_M f)(x, y, z) dx dy dz.$$

Definice 12. Necht' φ, ψ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že $\varphi(x) \leq \psi(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Označme $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b \rangle, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Říkáme, že A je elementární množina vzhledem k ose x . Podobně, jsou-li φ, ψ spojité funkce na intervalu $\langle c, d \rangle$ takové, že $\varphi(y) \leq \psi(y)$ pro $y \in \langle c, d \rangle$, a je-li $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle c, d \rangle, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$, řekneme, že A je elementární množina vzhledem k ose y . Říkáme, že množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je elementární, je-li elementární vzhledem k ose x nebo vzhledem k ose y .

Definice 13. Bud' M elementární množina v \mathbb{R}^2 (vzhledem k ose x nebo vzhledem k ose y) a necht' $\Phi(x, y), \Psi(x, y)$ jsou spojité funkce na M takové, že $\Phi(x, y) \leq \Psi(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$. Množinu

$$\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, \Phi(x, y) \leq z \leq \Psi(x, y)\}$$

nazýváme elementární množinou vzhledem k rovině xy v \mathbb{R}^3 . Analogicky definujeme elementární množinu vzhledem k rovině xz , resp. vzhledem k rovině yz v \mathbb{R}^3 . Elementární množinou v \mathbb{R}^3 rozumíme elementární množinu vzhledem k některé z rovin xy , resp. xz , resp. yz .

Uvedenými definicemi jsme si připravili půdu pro vyslovení následující věty.

Věta 15. Bud' Ω elementární množina v \mathbb{R}^3 vzhledem k rovině xy , tj. $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, \Phi(x, y) \leq z \leq \Psi(x, y)\}$, kde Φ, Ψ jsou funkce spojité na M takové, že $\Phi(x, y) \leq \Psi(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$ a M je elementární množina v \mathbb{R}^2 . Je-li funkce f spojitá na Ω , pak

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_M \left(\int_{\Phi(x, y)}^{\Psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Předpokládáme-li např., že M je elementární množina vzhledem k ose x , tj. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, přičemž φ, ψ jsou funkce spojité na $\langle a, b \rangle$, takové, že $\varphi(x) \leq \psi(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, pak

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\Phi(x, y)}^{\Psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right\} dx. \quad (1.11)$$

Důkaz. Viz např. [7].

Záměnou pořadí proměnných v předchozí větě dostaneme u každé rovnice dalších pět podobných vzorců, viz např. [7].

1.2.1 Transformace trojného integrálu

Z integrálního počtu funkcí jedné proměnné víme, že významnou metodou výpočtu určitého integrálu je substituční metoda. Při užití této metody nás zajímá především změna integrandu, který chceme zjednodušit, abychom dokázali najít primitivní funkci a mohli ji použít pro výpočet určitého integrálu. I v případě vícerozměrných integrálů má substituční metoda velký význam pro jejich výpočet. Motivace je však poněkud jiná. Často nám

totož jde hlavně o změnu integračního oboru do podoby, která umožní snadnější převod na násobné integrály, a to mnohdy i za cenu případného zkomplikování integrandu. Místo o substituční metodě se u vícerozměrných integrálů často mluví o transformaci integrálu.

Abychom mohli vyslovit větu o transformaci trojného integrálu, je třeba opět zavést některé pojmy.

Definice 14. Necht' $B \subseteq \mathbb{R}^3$ a necht' g, h, k jsou funkce definované na množině B . Bud' $F : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ zobrazení přiřazující každému bodu $[u, v, w] \in B$ bod $F(u, v, w) = [g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)]$. Řekneme, že zobrazení F je spojitě diferencovatelné v B , jestliže existuje otevřená množina $\Omega \supseteq B$ taková, že funkce g, h, k lze rozšířit na Ω takovým způsobem, aby měly v Ω spojitě parciální derivace prvního řádu podle všech tří proměnných u, v, w .

Je-li $F : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ spojitě diferencovatelné zobrazení v B , determinant

$$J = \begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix}$$

se nazývá jakobián zobrazení F . Jakobián $J : B \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcí proměnných u, v a w .

Definice 15. Spojitě diferencovatelné zobrazení $F : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ na otevřené množině B se nazývá regulární, je-li jeho jakobián J různý od nuly v každém bodě množiny B .

Nyní již můžeme zformulovat větu o transformaci trojného integrálu.

Věta 16. Necht' $B \subseteq \mathbb{R}^3$ je uzavřená měřitelná množina a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $B \subseteq \Omega$. Necht' $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ je prosté regulární zobrazení s jakobiánem J takové, že $F(u, v, w) = [g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)]$ pro každé $[u, v, w] \in B$. Necht' funkce f proměnných x, y a z je spojitá v množině $A = F(B)$. Pak platí vztah

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw.$$

Důkaz. Viz např. [7].

Uvedme nyní několik běžných, často užívaných transformací $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$, $z = k(u, v, w)$ trojného integrálu. Patří sem např. posunutí, dilatace, transformace do válcových či sférických souřadnic. V dalším se budeme podrobněji zabývat transformací do válcových souřadnic.

• Transformace do válcových souřadnic

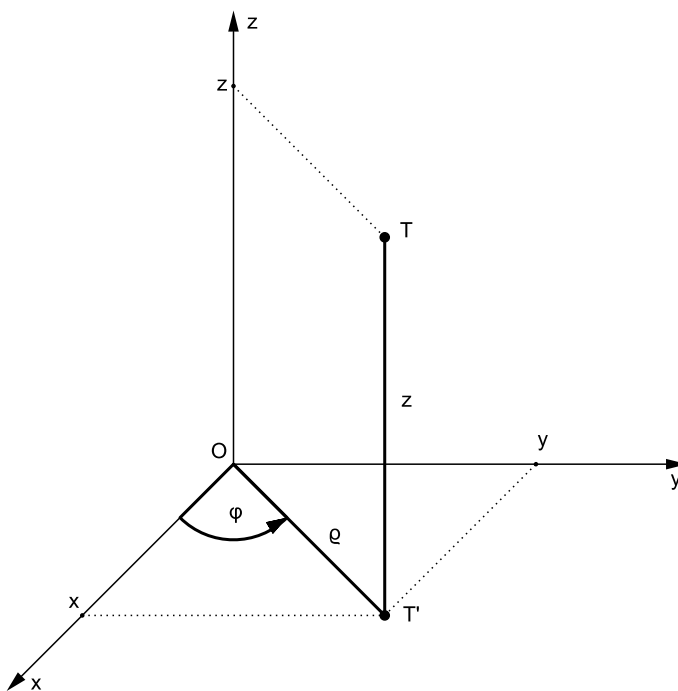
Transformace do válcových (cylindrických) souřadnic ρ, φ, z je dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi & g_z \\ h_\rho & h_\varphi & h_z \\ k_\rho & k_\varphi & k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

Všimněme si nyní geometrického významu cylindrických souřadnic bodu T majícího kartézské souřadnice $[x, y, z]$. Označme T' kolmý průmět bodu T do souřadnicové roviny xy , tedy T' má souřadnice $[x, y, 0]$. Bod T' vyjádříme v polárních souřadnicích $[\rho, \varphi]$ v rovině xy . Polohu bodu T v prostoru lze nyní určit trojicí čísel $[\rho, \varphi, z]$, což jsou cylindrické souřadnice bodu T . Transformace do válcových souřadnic je výhodné užívat zejména v případech, kdy integrační obor je rotační těleso s osou rotace v ose z , nebo jeho vhodná část. V případě, že integrand je těleso mající osu rotace v ose x nebo v ose y , je možné použít patřičně modifikované transformace do válcových souřadnic.



Obrázek 1.3: Válcové souřadnice

Kapitola 2

Užití diferenciálních rovnic

2.1 Pohybová rovnice^[13]

Druhý pohybový zákon, zákon síly, můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}.$$

Je-li $m = \text{konst.}$, pak

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \frac{d\vec{v}}{dt}, \\ \vec{F} &= m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

\vec{F} je výsledná síla v čase t , která působí na těleso hmotnosti m , \vec{r} polohový vektor, \vec{v} je okamžitá rychlost v čase t . Této rovnici říkáme pohybová rovnice. Známe-li působící sílu, pak řešením pohybové rovnice - diferenciální rovnice - můžeme určit zákony daného pohybu, tj. rychlost a dráhu v závislosti na čase.

Pohyb můžeme rozložit do souřadných os x, y, z . Pak pohybovou rovnici (2.1) můžeme nahradit třemi složkovými rovnicemi:

$$\begin{aligned}F_x &= m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}, \\ F_y &= m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}, \\ F_z &= m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2}.\end{aligned}$$

Zákon síly poskytuje tři nezávislé rovnice, z nichž lze určit pohyb tělesa vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic, známe-li složky síly v každém okamžiku. Pohybové rovnice lze užít na tuhá tělesa, jestliže konají posuvný pohyb, který je zcela určen pohybem jediného bodu tělesa - hmotného středu.

Pro rotační pohyb tělesa nabývá pohybová rovnice tvaru

$$\vec{M} = I\vec{\epsilon},$$

kde \vec{M} je moment síly vzhledem k ose rotace, $\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ je vektor úhlového zrychlení rotačního pohybu, I je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace. Způsobem, kterým lze osové momenty setrvačnosti tělesa určit, se budeme podrobně zabývat v kapitole 3.

Tyto pohybové rovnice umožňují určit zrychlení, rychlost, dráhu, popř. úhlové zrychlení, úhlovou rychlost a úhlovou dráhu pohybu tuhého tělesa, známe-li výslednici vnějších sil \vec{F} u posuvného pohybu a výsledný moment sil \vec{M} u otáčivého pohybu. Tedy řešit pohyb tělesa bude znamenat sestavit pohybovou rovnici a řešit příslušnou diferenciální rovnici. Ty nejjednodušší rovnice budeme řešit integrací po separaci proměnných.

• Řešení pohybových rovnic^[8]

Při řešení praktických úloh se můžeme setkat se dvěma základními případy:

- známe kinematické charakteristiky pohybu bodového tělesa a určíme síly, které tyto pohyby vyvolaly nebo síly, které tyto pohyby doprovázejí;
- známe síly působící na bodové těleso a určíme kinematické charakteristiky pohybů, které tyto síly vyvolávají.

První případ je snadný. Známe-li například parametrické rovnice pohybu bodového tělesa

$$x(t) = f_1(t), y(t) = f_2(t), z(t) = f_3(t),$$

získáme dvojnásobným derivováním soustavu rovnic

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2}, \ddot{y}(t) = \frac{d^2 f_2(t)}{dt^2}, \ddot{z}(t) = \frac{d^2 f_3(t)}{dt^2},$$

která po vynásobení hmotností m dává již přímo složky hledané výsledné síly:

$$F_x(t) = m\ddot{x}(t), F_y(t) = m\ddot{y}(t), F_z(t) = m\ddot{z}(t),$$

čímž je problém vyřešen.

Druhý případ je složitější, protože vede na řešení diferenciálních rovnic. Budeme předpokládat, že silové účinky jsou funkcemi vždy jednoho parametru (času, dráhy, rychlosti, apod.); například: $F(t) = F_0 \cos \alpha t$, $F(x) = kx$, $F(v) = bv^s, \dots$, kde F_0, α, k, b, s jsou konstanty. Dále si připomeneme základní vztahy mezi kinematickými veličinami:

$$v = \frac{dx}{dt}, a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v^2)}{2dx} = \frac{v dv}{dx}. \quad (2.2)$$

Hledané pohybové rovnice jsou ovšem závislé na konkrétních počátečních podmínkách, například: pro $t = 0$ je $v(t = 0) = v(0) = v_0$ a $x(t = 0) = x(0) = x_0$, apod.

Výsledná pohybová rovnice - s uvážením konkrétních formulací působících silových účinků a počátečních podmínek - musí ale obsahovat pouze dva parametry, závislý a nezávislý. Toho obvykle dosáhneme vhodným výběrem zrychlení z druhého vztahu v rovnici (2.2).

Více parametrů než dva v pohybových rovnicích pak vede na řešení parciálních diferenciálních rovnic.

2.2 Mechanika těles

Rychlost pohybu hmotného bodu^[13]

Určete závislost rychlosti pohybu hmotného bodu na čase, je-li jeho zrychlení přímo úměrné okamžité rychlosti v ($v > 0$). V čase $t = 0$ s je $v = v_0$.

Řešení

Podle zadání je zrychlení $a = kv$, tj.

$$\frac{dv}{dt} = kv. \quad (2.3)$$

Obdrželi jsme diferenciální rovnici prvního řádu, kterou vyřešíme separací proměnných. Rovnici upravíme na tvar

$$\frac{dv}{v} = k dt$$

a můžeme integrovat

$$\ln v = kt + C_1, v > 0. \quad (2.4)$$

Protože chceme určit v , je výhodné i konstantu napsat ve tvaru $\ln C$ bez újmy na obecnosti. Dále použijeme vztah $kt = \ln e^{kt}$. Tedy (2.4) můžeme napsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} \ln v &= \ln e^{kt} + \ln C, \\ \ln v &= \ln C e^{kt}, \\ v &= C e^{kt}. \end{aligned}$$

V čase $t = 0$ s je $v = v_0$, tj. $v_0 = C e^0, C = v_0$. Partikulární řešení rovnice (2.3), a tedy hledaná rychlost je $v = v_0 e^{kt}$.

Volný pád^[3]

Těleso o hmotnosti $m = 1$ kg je spuštěno bez počáteční rychlosti ve vakuu. Nalezněte rovnice pohybu, víte-li, že na těleso působí stálá síla rovná 980 N.

Řešení

Připustíme, že pohyb se děje ve svislé ose OA a zvolme za počáteční polohu tělesa bod O .

Hledaná rovnice je vztah mezi dráhou s tělesem vykonanou a časem t k tomu potřebným.

V mechanice se ukazuje, že má-li těleso hmotnost rovnou 1 kg, zrychlení a se rovná síle, která na těleso působí, tedy v uvažovaném případě je $a = 980 \text{ ms}^{-2}$.

Dále je známo, že zrychlení a se rovná první derivaci rychlosti čili $\frac{dv}{dt}$ anebo druhé derivaci dráhy $\frac{d^2s}{dt^2}$, takže

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$



Obrázek 2.1: Volný pád

Abychom našli okamžitou rychlost v , vyjdeme z rovnice

$$\frac{dv}{dt} = 980.$$

Integrací získáme

$$v - v_0 = \int_0^t 980 \, d\tau = 980t.$$

Těleso je spuštěno bez počáteční rychlosti, tedy $v_0 = 0$ a odtud

$$v = 980t.$$

Protože rychlost v je rovna první derivaci dráhy s , můžeme opět psát:

$$v = \frac{ds}{dt} = 980t$$

čili

$$ds = 980t \, dt.$$

Integrací získáme:

$$s - s_0 = \int_0^t 980\tau \, d\tau = 980 \frac{t^2}{2} = 490t^2.$$

Protože $s_0 = 0$, hledaná rovnice mezi drahou s a časem t je dána vzorcem:

$$s = 490t^2.$$

Obecný případ jednorozměrného pohybu^[3]

Předpokládejme nyní, že máme nalézt rovnici pro jednorozměrný pohyb v obecném případě: těleso je vrženo počáteční rychlostí v_0 z bodu vzdáleného od počátku O o vzdálenost s_0 . Tíhové zrychlení značíme g .

Řešení

Především máme

$$a = \frac{dv}{dt} = g,$$

čili

$$dv = g \, dt$$

a integrací

$$v - v_0 = \int_0^t g \, d\tau = [g\tau]_0^t = gt.$$

Okamžitá rychlost tudíž je

$$v = gt + v_0.$$

Avšak okamžitá rychlost je derivací dráhy, čili

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + v_0,$$

čili

$$ds = gtdt + v_0dt.$$

Integrací se získá

$$s - s_0 = \int_0^t g\tau \, d\tau + \int_0^t v_0 \, d\tau = g\frac{t^2}{2} + v_0t.$$

Hledaná rovnice tedy zní:

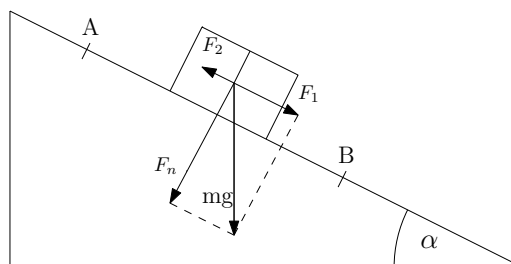
$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0t + s_0.$$

Neřešené příklady^[autor]

Zkoumejte vrh tělesa v homogenním tíhovém poli. Necht' těleso je vrženo kolmo vzhůru ve směru osy x . Rychlost tělesa je $\frac{dx}{dt}$, zrychlení $\frac{d^2x}{dt^2}$. Určete polohu tělesa v čase t , jestliže v čase $t = 0$ je jeho poloha x_0 a rychlost v_0 .

Nakloněná rovina^[13]

Těleso se pohybuje působením tíhové síly po nakloněné rovině o elevačním úhlu α z bodu A do bodu B . Určete rychlost v bodě B , je-li $AB = s$, součinitel tření $f = \operatorname{tg} \varphi$ a rychlost v bodě A je nulová.



Obrázek 2.2: Nakloněná rovina

Řešení

Ve směru pohybu působí na těleso síly

$$\begin{aligned} F_1 &= mg \sin \alpha, \\ F_2 &= -mg \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$

První síla představuje složku tíhové síly, druhá síla pak třecí sílu, jež je součinem normálové síly F_n a součinitele tření f . Pohybová rovnice tělesa má tedy tvar

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - mg \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.5)$$

Rovnici (2.5) zkrátíme hmotností m a upravíme pravou stranu užitím vztahů

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \sin(\alpha - \varphi) = \sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi.$$

Dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} g.$$

Odtud vidíme, že pohyb tělesa po nakloněné rovině je možný jen při $\alpha > \varphi$. Integrací dostaneme

$$v_b - v_a = \int_0^t \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} g d\tau = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} gt.$$

Označme rychlost v bodě B jako $v = v_b$. Rychlost v bodě A je nulová, proto

$$v = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} gt. \quad (2.6)$$

Označíme-li dráhu x , dostaneme další integrací

$$(v = \frac{dx}{dt})$$

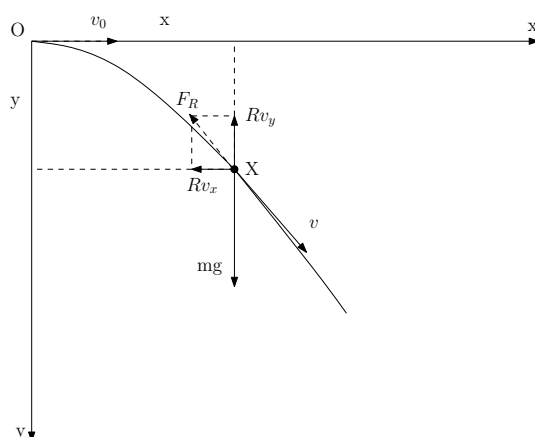
$$x_b - x_a = \int_0^t \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} g \tau d\tau = \frac{gt^2}{2 \cos \varphi} \sin(\alpha - \varphi).$$

Podle zadání je $x_a = 0$ m, $x_b = AB = s$. Odtud

$$s = \frac{gt^2}{2 \cos \varphi} \sin(\alpha - \varphi). \quad (2.7)$$

Nakonec z (2.6) dostáváme po vyloučení času a dosazení z (2.7)

$$v = \sqrt{\frac{2gs \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}}.$$



Obrázek 2.3: Vodorovný vrh

Vodorovný vrh^[13]

Řešte vodorovný vrh za předpokladu, že pohyb se děje ve vzduchu s odporem prostředí přímo úměrným okamžité rychlosti.

Řešení

Uvažujme soustavu souřadnic $(O; x, y)$ s kladnou poloosou y svisle dolů. Počátek vrhu je v bodě O a počáteční rychlost je \vec{v}_0 . Předpokládejme, že těleso (hmotný bod) je v čase t v bodě X , jehož souřadnice jsou x, y . Máme za úkol určit vztah mezi x, y .

Velikost odporové síly je $|F_r| = R \cdot v$, směr má opačný než rychlost \vec{v} ; \vec{v} znamená okamžitou rychlost tělesa v bodě X . Budeme předpokládat, že $R > 0$ je natolik malé, že velikost odporové síly F_r je menší než velikost síly tíhové F_g . Úlohu budeme dále řešit tak, že pohyb rozložíme do směru souřadných os x, y . Složky síly \vec{F}_r jsou $F_{rx} = -Rv_x$, $F_{ry} = -Rv_y$. Dostaneme tedy dvě pohybové rovnice

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Rv_x, \quad (2.8)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -Rv_y + mg > 0. \quad (2.9)$$

Ve směru osy x působí na pohybující se těleso jen odpor prostředí, ve směru osy y kromě odporové síly ještě tíhová síla.

Vyřešíme nyní každou diferenciální rovnici samostatně. Obě rovnice patří mezi lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Můžeme je však řešit metodou separace proměnných. Rovnici (2.8) můžeme přepsat na tvar

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{R}{m}v_x.$$

Separací proměnných dostaneme

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{R}{m}dt$$

a integrací

$$\begin{aligned}\ln v_x &= \ln e^{-\left(\frac{R}{m}\right)t} + \ln C_1, \\ v_x &= C_1 e^{-\left(\frac{R}{m}\right)t}.\end{aligned}$$

Vodorovná složka rychlosti vodorovného vrhu se s časem nemění. Neustále si udržuje svou počáteční hodnotu, v našem případě hodnotu v_0 .

Z počátečních podmínek ($v_x(0) = v_0$) tedy určíme konstantu C_1 : $C_1 = v_0$. Takže

$$v_x = v_0 e^{-\left(\frac{R}{m}\right)t}. \quad (2.10)$$

Podobně postupně upravíme a vyřešíme rovnici (2.9):

$$\begin{aligned}\frac{dv_y}{dt} &= -\frac{R}{m}v_y + g, \quad mg > Rv_y, \\ \frac{dv_y}{g - \frac{R}{m}v_y} &= dt.\end{aligned}$$

Postupně dostaneme:

$$\begin{aligned}-\frac{m}{R} \ln \left(g - \frac{R}{m}v_y \right) &= t + \ln C_2, \\ \ln \left(g - \frac{R}{m}v_y \right)^{-\left(\frac{m}{R}\right)} &= \ln C_2 e^t, \\ \left(g - \frac{R}{m}v_y \right)^{-\left(\frac{m}{R}\right)} &= C_2 e^t.\end{aligned}$$

Z počátečních podmínek ($v_y(0) = 0 \text{ ms}^{-1}$) určíme

$$C_2 = g^{-\left(\frac{m}{R}\right)}.$$

Dosadíme a umocníme celou rovnici na $\left(-\frac{R}{m}\right)$:

$$\begin{aligned}g - \frac{R}{m}v_y &= g e^{-\left(\frac{R}{m}\right)t}, \\ v_y &= \frac{mg}{R} \left(1 - e^{-\left(\frac{R}{m}\right)t} \right).\end{aligned}$$

Obdrželi jsme tak obě složky výsledné rychlosti v čase t . Její velikost je

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \\ v &= \sqrt{v_0^2 e^{-\left(\frac{2R}{m}\right)t} + \frac{m^2 g^2}{R^2} \left(1 - 2e^{-\left(\frac{R}{m}\right)t} + e^{-\left(\frac{2R}{m}\right)t} \right)}.\end{aligned}$$

Rovnici trajektorie, tj. $y = f(x)$, dostaneme další integrací. Pro souřadnici x dostaneme z (2.10)

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\left(\frac{R}{m}\right)t}$$

a odtud integrací

$$x = -v_0 \frac{m}{R} e^{-\left(\frac{R}{m}\right)t} + C_3.$$

Z počátečních podmínek ($x(0) = 0$ m) je $C_3 = \frac{m}{R} v_0$, a tedy

$$x = \frac{m}{R} v_0 (1 - e^{-\left(\frac{R}{m}\right)t}). \quad (2.11)$$

Podobně dostaneme z rovnice pro v_y souřadnici y bodu X :

$$y = \frac{mg}{R} t - \frac{m^2 g}{R^2} (1 - e^{-\left(\frac{R}{m}\right)t}). \quad (2.12)$$

Rovnice (2.11), (2.12) udávají parametrické vyjádření trajektorie pohybu tělesa či hmotného bodu při vodorovném vrhu s odporem prostředí. Explicitní vyjádření ve tvaru $y = f(x)$ lze získat takto:

Z rovnice (2.11) vypočteme:

$$1 - e^{-\left(\frac{R}{m}\right)t} = \frac{R}{mv_0} x,$$

$$t = -\frac{m}{R} \ln \left(1 - \frac{R}{mv_0} x \right).$$

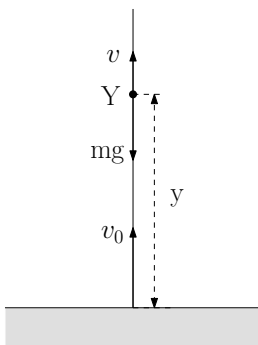
Dosadíme za t do funkční rovnice (2.12) a po úpravě obdržíme

$$y = -\frac{m^2 g}{R^2} \ln \left[\left(1 - \frac{R}{mv_0} x \right) e^{\left(\frac{R}{mv_0}\right)x} \right].$$

Poslední rovnice je funkční rovnicí $y = f(x)$ trajektorie vodorovného vrhu s odporem prostředí úměrným první mocnině rychlosti. Musí platit $1 - \frac{R}{mv_0} x > 0$, tj. $x < \frac{mv_0}{R}$.

Neřešené příklady^[13]

Určete zákony svislého vrhu vzhůru. Pohyb se děje ve vakuu a v homogenním tíhovém poli.



Obrázek 2.4: Vrh svislý vzhůru

Pohyb hmotného bodu^[10]

Jednorozměrný pohyb hmotného bodu (s hmotností m) pod vlivem síly $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ je popsán rovnicí

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}, \quad (2.13)$$

kde U je potenciální energie hmotného bodu. Najděte obecné řešení této pohybové rovnice.

Řešení

Rovnici (2.13) vynásobíme \dot{x} , užitíme identity $x\dot{x} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}x^2)$, $\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{x}^2)$ a vztah $\frac{dU}{dx}\dot{x} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dt}$, což dá

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U \right) = 0.$$

Odtud plyne

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U = konst \equiv W. \quad (2.14)$$

Tento výraz vyjadřuje zákon zachování energie, integrační konstanta W je tedy rovna součtu kinetické ($\frac{1}{2}m\dot{x}^2$) a potenciální energie U . Takový systém, jehož celková energie se zachovává, se nazývá konzervativní.

Z (2.14) plyne

$$\frac{dx}{dt} = \pm \left[\frac{2}{m}(W - U) \right]^{\frac{1}{2}},$$

odkud integrací získáme obecné řešení

$$t = t_0 \pm \left(\frac{m}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{x_0}^x [W - U(s)]^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Dostáváme tak řešení v implicitním tvaru $t = f(x)$.

Neřešené příklady^[autor]

Úlohu řešte pro $U = 10x$ J a řešení zapište v explicitním tvaru. Dále si libovolně zvolte počáteční podmínky a řešte počáteční úlohu za těchto podmínek.

Parametry pohybu^[8]

Určete parametry pohybu bodového tělesa, pohybujícího se ve směru osy x za působení síly $F_x(t) = \frac{mb}{c^2+t^2}$, kde m je hmotnost, t je čas a b a c jsou konstanty. V okamžiku $t = 0$ necht' je $x(0) = x_0$ a $v(0) = v_0$.

Řešení

S ohledem na definici síly, počáteční podmínky a relace (2.2), dostaneme po dosazení do rovnice $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$:

$$ma = F_x(t) \text{ resp. } m \frac{dv}{dt} = \frac{mb}{(c^2 + t^2)}.$$

Po separaci proměnných a po zavedení počátečních podmínek do integračních mezí dostaneme rovnici

$$m \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t \frac{mb}{(c^2 + \tau^2)} d\tau,$$

ze které po elementárních úpravách vypočítáme tzv. první integrál pohybové rovnice:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{b}{(c^2 + \tau^2)} d\tau = v_0 + \frac{b}{c} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{c} \right). \quad (2.15)$$

S ohledem na první vztah (2.2) můžeme psát

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \text{ resp. } dx = v(t)dt$$

a po dosazení za $v(t)$ a elementárních úpravách vypočítáme

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t \left[\int_0^\xi \frac{b}{(c^2 + \tau^2)} d\tau \right] d\xi = x_1 + v_0 t + \frac{bt}{c} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{c} \right) - \frac{b}{2c} \ln \left(1 + \frac{t^2}{c^2} \right). \quad (2.16)$$

Tato rovnice bývá také nazývána tzv. druhým integrálem pohybové rovnice. Rovnice (2.15), (2.16) dávají úplné řešení úlohy a je patrné, jak se na výsledcích projeví vliv počátečních podmínek.

Rotor elektromotoru^[8]

Po vypnutí proudu působí na rotor elektromotoru moment $M = -k_1 - k_2 \omega^2$, kde první člen na pravé straně rovnice vzniká především vlivem pasivních odporů v ložiscích a druhý člen je způsoben ventilačními ztrátami rotoru. Jestliže v okamžiku vypnutí proudu byly otáčky rotoru $n_0 = 50 \text{ ot/s}$, určete:

1. Dobu potřebnou pro zastavení rotoru od okamžiku vypnutí proudu.
2. Počet otočení rotoru do úplného zastavení.

Je dáno: moment setrvačnosti rotoru vzhledem k ose otáčení charakterizující rozložení hmoty rotoru vzhledem k této ose $I = 11,75 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$; hodnota výrazu k_1 představující součin deviačního momentu rotoru a úhlového zrychlení $k_1 = 0,8 \text{ N}\cdot\text{m}$; hodnota výrazu k_2 zachycující deviační moment rotoru $k_2 = 0,015 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Řešení

Vydeme z pohybové rovnice pro rotační pohyb tělesa $M = I\varepsilon$, kde úhlové zrychlení ε je časovou derivací úhlové rychlosti ω .

Dosažením za moment M ze zadání úlohy bude pohybová rovnice rotačního pohybu rotoru elektromotoru

$$-k_1 - k_2 \omega^2 = I \varepsilon \quad (2.17)$$

1. Za úhlové zrychlení dosadíme $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ a po separaci proměnných bude

$$\int_0^t dt = -I \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{k_1 + k_2 \omega^2},$$

odkud obdržíme:

$$t = \frac{I}{\sqrt{k_1 k_2}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \omega_0 - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \omega \right).$$

Má-li se rotor zastavit, bude $\omega = 0$, takže bude

$$t = \frac{11,75}{\sqrt{0,8 \cdot 0,015}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{0,015}{0,8}} 2\pi \cdot 50 = 166 \text{ s.}$$

2. Máme-li určit úhlovou dráhu ϕ do úplného zastavení rotoru, dosadíme do pohybové rovnice (2.17) za úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{\omega d\omega}{d\phi}$.

Po separaci proměnných bude

$$\int_0^{\phi} d\phi = -I \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\omega d\omega}{k_1 + k_2 \omega^2}.$$

Po integraci dostaneme

$$\phi = \frac{I}{2k_2} \ln \frac{k_1 + k_2 \omega_0^2}{k_1 + k_2 \omega^2}.$$

Dosadíme-li $\omega = 0$, dostaneme

$$\phi = \frac{11,75}{2 \cdot 0,015} \ln \frac{0,8 + 0,015 \cdot (2\pi \cdot 50)^2}{0,8} = 4591,49 \text{ rad,}$$

takže počet otočení rotoru do zastavení bude

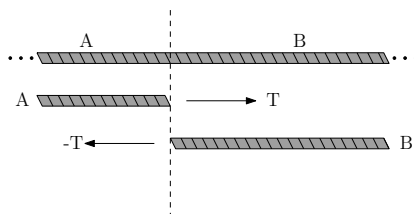
$$N = \frac{\phi}{2\pi} \doteq 730 \text{ ot.}$$

2.3 Lana a kladky^[5]

Tato kapitola se zabývá mechanickými systémy, v nichž jsou částice připevněny k lanu, které je vedeno přes kladky. Pro jednoduchost nebudeme uvažovat tření a hmotnosti lana a kladek. Newtonovy zákony pak lze použít k určení tahové síly lana a zrychlení částic. Na základě tohoto matematického modelu lze vysvětlit princip kladkostrojů, které jsou často využívány v továrnách ke zvedání těžkých nákladů.

Dynamickou úlohu lana lze ilustrovat pomocí dvou týmů soutěžících v přetahování lanem. Přitahováním lana jeden tým vyvíjí sílu působící na druhý tým, přestože jsou od sebe vzdáleny. Tedy lano umožňuje přenos síly na dálku.

Uvažujme nyní lano napínané na jednom z konců. Obrázek ukazuje řez lanem v bodě podél jeho délky.



Obrázek 2.5: Tah v laně

Tento řez myšlenkově rozdělí lano na dvě části, které označíme A a B. Část lana A působí silou na B o velikosti $T > 0$. Podle třetího Newtonova zákona bude část lana B působit na A stejně velkou silou $T > 0$ ale opačného směru. Tahová síla lana je tedy definována jako společná velikost $T > 0$ výše uvedených sil.

Lano nazveme lehkým, má-li nulovou hmotnost. Přestože se takové lano v praxi nevy-skytuje, jeho existenci předpokládáme jako součást našeho idealizovaného matematického modelu. V praxi se lana nulové hmotnosti nahrazují lany, jejichž hmotnosti jsou velmi malé v porovnání s hmotnostmi zavěšených těles.

Platí: Tahová síla lehkého lana napnutého silou na jednom konci je konstantní po celé délce lana.

Tahová síla lana se může měnit během přechodu přes kladku. Například, jestliže čep kladky není pořádně namazaný, velká část síly vyvinuté na jednom konci lana se spotřebuje namísto zvedání nákladu k roztočení kladky, podobně je tomu v případě, kdy kladka je velká a těžká. Protikladným případem je kladka s malým třením v čepu a s hmotností velmi malou v porovnání s hmotností nákladu. Taková kladka je modelem idealizované kladky nulové hmotnosti a s nulovým třením, kterou nazýváme hladkou a lehkou. Tato kladka nemění tahovou sílu lana.

• Řešení kladek^[5]

V typickém příkladě jsou částice zavěšeny na laně jdoucím přes kladky. Naším cílem je zjistit tahovou sílu lana a zrychlení částic. Hlavním krokem během řešení je použití Newtonova druhého zákona. K tomu je však nutné použít několik kroků úvodních a také

závěrečných.

K řešení příkladů užíváme zhruba následující postup:

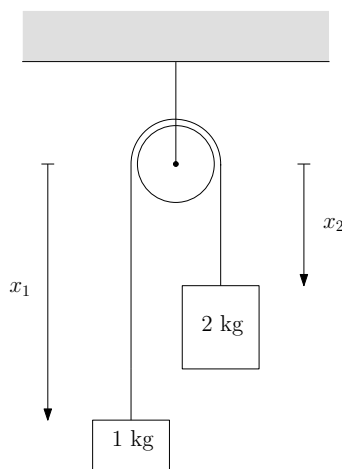
- 1.: Provedeme náčrt, částice zachytíme v odpovídajících pozicích. Zavedeme souřadnice pro částice a vybereme písmeno, kterým budeme značit tahovou sílu lana.
- 2.: Vyjádříme délku lana pomocí souřadnic. Tím obdržíme vztah mezi zrychlením částic.
- 3.: Pro každou částici provedeme náčrt zachycující všechny síly, které působí na částici.
- 4.: Aplikujeme Newtonův druhý zákon na každou částici.
- 5.: Získané rovnice vyřešíme pro neznámé - zrychlení částic a tahovou sílu lana.
- 6.: Zamyslíme se, jaký fyzikální význam mají výsledky a zda jsou skutečně řešením příkladu.

Příklad 1^[5, autor]

Dvě částice o hmotnostech 1 kg a 2 kg jsou připevněny ke koncům lana zanedbatelné hmotnosti, které je vedeno přes hladkou kladku zanedbatelné hmotnosti. Kladka je zavěšena ve stálé vzdálenosti pod úrovní stropu. Určete zrychlení částic a tahovou sílu lana.

Řešení

1.: Provedeme náčrt a zavedeme značení. Částice zachytíme v čase t v odpovídajících pozicích, jak je naznačeno na obrázku.



Obrázek 2.6: Lano vedené přes kladku

Nechť x_1 a x_2 jsou souřadnice částic tak jako na obrázku. Tedy x_1 je vzdálenost první částice od středu kladky, podobně x_2 je vzdálenost druhé částice od středu kladky. Všimněme si, že jestliže souřadnice částice roste, pak se pohybuje směrem dolů. A proto tento směr je kladným směrem souřadnic.

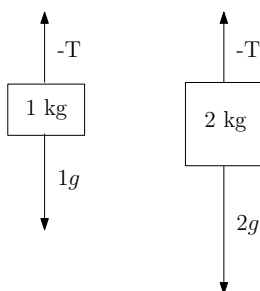
2.: Z náčrtu vidíme, že

$$x_1 + x_2 = \text{délka lana} - \frac{1}{2} \cdot \text{obvod kladky}.$$

Jelikož součet $x_1 + x_2$ se v čase nemění, je tedy konstantní a jeho derivace podle t je rovna 0. Podle pravidla pro derivaci součtu pak dostáváme

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0. \quad (2.18)$$

3.: Nakreslíme obrázek, ve kterém jsou znázorněny všechny síly působící na jednotlivé částice.



Obrázek 2.7: Síly působící na částice

Síly, kterými působí lano na částice, směřují vzhůru, tedy v záporném směru souřadnic. Dále na každou částici působí tíhová síla směrem dolů.

4.: Aplikujeme Newtonův druhý zákon. Pro každou částici je součin hmotnosti a zrychlení roven výsledné síle. Z obrázku 2.7 vidíme, že platí

$$1\ddot{x}_1 = 1g - T, \quad (2.19)$$

$$2\ddot{x}_2 = 2g - T. \quad (2.20)$$

5.: Rovnice vyřešíme. Rovnice (2.18), (2.19) a (2.20) tvoří systém tří lineárních rovnic o třech neznámých \ddot{x}_1 , \ddot{x}_2 a T :

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + T = g$$

$$2\ddot{x}_2 + T = 2g.$$

Soustavu můžeme přepsat do maticového tvaru

$$A \cdot x = b,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ T \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 2g \end{pmatrix}.$$

Systém vyřešíme pomocí Cramerova pravidla. Dostáváme

$$\ddot{x}_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad \ddot{x}_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad T = \frac{|A_3|}{|A|},$$

$$\text{kde } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & 1 \\ 2g & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2g - g = g,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & g & 1 \\ 0 & 2g & 1 \end{vmatrix} = g - 2g = -g, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & g \\ 0 & 2 & 2g \end{vmatrix} = -2g - 2g = -4g.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{1}{3}g, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{1}{3}g, \\ T &= \frac{4}{3}g. \end{aligned}$$

Takže první částice má zrychlení směrem vzhůru o velikosti $\frac{1}{3}g \text{ ms}^{-2}$, druhá částice má zrychlení stejné velikosti, ale směruje dolů. Tahová síla lana je $\frac{4}{3}g \text{ N}$.

6.: Zkontrolujeme odpovědi. Přibližné výsledky můžeme předpovědět již z obrázku 2.6. Například \ddot{x}_1 by mělo být záporné a \ddot{x}_2 kladné, neboť lehčí částice se bude urychlovat směrem vzhůru a těžší směrem dolů. Navíc velikost zrychlení by měla být menší než g , protože pádu těžší částice brání tahová síla lana, která směruje vzhůru. Velikost tahové síly by měla být mezi g a $2g$. Tahová síla by totiž měla být větší než tíhová síla lehčí částice (aby se mohla pohybovat směrem vzhůru) a menší než tíhová síla těžší částice (aby se mohla pohybovat směrem dolů).

Vidíme tedy, že naše předpověď výsledků na základě obrázku odpovídá vypočteným hodnotám, tudíž jsme počítali správně. Vypočtené výsledky dávají smysl a jsou řešením úlohy.

Neřešené příklady^[5]

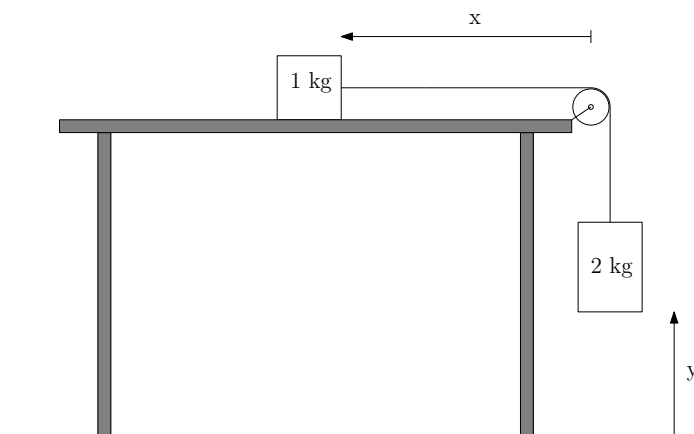
Předpokládejte, že v předchozím příkladě jsou částice uvolněny z klidu v momentě, kdy těžší částice je ve výšce 2 m nad podlahou. Za předpokladu, že lano je dostatečně dlouhé, určete, za jak dlouho se těžší částice dotkne podlahy.

Příklad 2^[5]

Těleso o hmotnosti 1 kg leží na stole a je připevněno k jednomu konci vlákna zanedbatelné hmotnosti. Vlákno je vedeno před hladkou kladkou zanedbatelné hmotnosti, která je připevněna k hraně stolu. Na druhém konci vlákna je připevněno těleso o hmotnosti 2 kg, které visí dolů přes hranu stolu. Koeficient tření μ mezi tělesem a stolem je 0,1. Určete zrychlení tělesa ležícího na stole v případě, kdy a) těleso je uvedeno do pohybu ve směru od kladky, b) těleso je uvedeno do pohybu směrem ke kladce.

Řešení

Nechť x v metrech je vzdálenost tělesa ležícího na stole od kladky v čase t s. Nechť y v metrech je výška zavěšeného tělesa nad úrovní podlahy, jak ukazuje následující obrázek.



Obrázek 2.8: Kladka připevněná ke stolu

Každé změně x odpovídá stejně velká změna y , proto $\dot{x} = \dot{y}$ a pro zrychlení platí

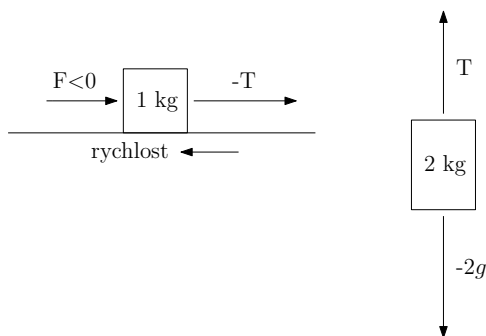
$$\ddot{x} = \ddot{y}. \quad (2.21)$$

Tahovou sílu vlákna budeme značit T .

a) Těleso ležící na stole je uvedeno do pohybu ve směru od kladky. Reakce stolu na těleso je normálová síla N vyrovnávající tíhovou sílu tělesa, tedy

$$N = 1g.$$

Zbývající síly, které působí na tělesa, znázorňuje obrázek:



Obrázek 2.9: Síly působící na tělesa

F značí třecí sílu, která působí proti směru pohybu. Protože tření působí v opačném směru k rychlosti, F působí v záporném směru x a tedy F je záporná. Takže

$$F = -\mu N = -0,1N = -0,1g.$$

Užitím Newtonova druhého zákona pro obě tělesa dostáváme

$$\ddot{x} = F - T = -0,1g - T, \quad (2.22)$$

$$2\ddot{y} = T - 2g. \quad (2.23)$$

Řešíme soustavu tří lineárních rovnic (2.21), (2.22) a (2.23) pro neznámé \ddot{x} , \ddot{y} a T . Soustavu budeme řešit dosazovací metodou. Z (2.21) dosadíme za \ddot{x} do (2.22). Soustava se redukuje na soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -0,1g - T \\ 2\ddot{y} &= T - 2g.\end{aligned}$$

Rovnice sečteme a dostáváme

$$3\ddot{y} = -2,1g$$

a odtud

$$\ddot{y} = -0,7g$$

a tedy i

$$\ddot{x} = -0,7g.$$

Z rovnice (2.23) vyjádříme T a do tohoto vyjádření dosadíme za \ddot{y} , takže

$$T = 2\ddot{y} + 2g = 2 \cdot (-0,7g) + 2g = 0,6g.$$

Zrychlení tělesa ležícího na stole je $0,7g \text{ ms}^{-2}$ a směřuje ke kladce, tahová síla vlákna je $0,6g \text{ N}$.

b) Těleso ležící na stole je uvedeno do pohybu směrem ke kladce.

V tomto případě je směr třecí síly F opačný, tedy F působí v kladném směru x a $F = 0,1g$. Obdobným výpočtem jako v **a)** dostaneme

$$\ddot{x} = \ddot{y} = -0,63g, \quad T = 0,73g.$$

Takže těleso ležící na stole má zrychlení $0,63 \text{ ms}^{-2}$ a směřuje ke kladce, tahová síla vlákna je $0,73g \text{ N}$.

Neřešené příklady

1)^[autor] Provedte výpočet případu b) v předchozím příkladě a ověřte, že uvedené výsledky jsou skutečně správné.

2)^[5] Uvažujte zobecněný případ předchozího příkladu. Předpokládejte, že těleso ležící na stole má hmotnost $m_1 > 0$, zavěšené těleso má hmotnost $m_2 > 0$ a koeficient tření je $\mu > 0$. Ukažte, že

a) zrychlení tělesa ležícího na stole, jež je uvedeno do pohybu ve směru od kladky, je

$$\ddot{x} = \frac{-\mu m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g,$$

b) zrychlení tělesa ležícího na stole, jež je uvedeno do pohybu směrem ke kladce, je

$$\ddot{x} = \frac{\mu m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

c) Ve kterém případě má zrychlení větší velikost? Zdůvodněte.

2.4 Kmitání

VLASTNÍ KMITY^[9]

Jedním z typů rovnic, na který vede řada důležitých úloh, je rovnice *lineárního oscilátoru*

$$y'' + 2ay' + b^2y = 0, \quad a \geq 0, \quad b > 0. \quad (2.24)$$

Je to homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Rovnice popisuje tzv. *vlastní kmity* lineárního oscilátoru. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b^2 = 0.$$

I. Jestliže $a = 0$, je

$$\lambda^2 + b^2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4b^2}}{2} = \pm ib$$

a obecné řešení má tvar

$$y(x) = c_1 \cos bx + c_2 \sin bx.$$

Jde o tzv. *harmonický lineární oscilátor*. Vzorec obecného řešení je s ohledem na aplikace obvykle vhodnější upravit na jiný tvar. Je-li $y(x)$ netriviální řešení, je $c_1^2 + c_2^2 > 0$ (aspoň jeden koeficient je nenulový), a tedy lze psát

$$y(x) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos bx + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin bx \right).$$

Zvolme nyní úhel φ tak, aby

$$\sin \varphi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

Takový úhel vždy existuje. Označme ještě $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} > 0$. Pak

$$y(x) = A(\sin \varphi \cos bx + \cos \varphi \sin bx) = A \sin(bx + \varphi).$$

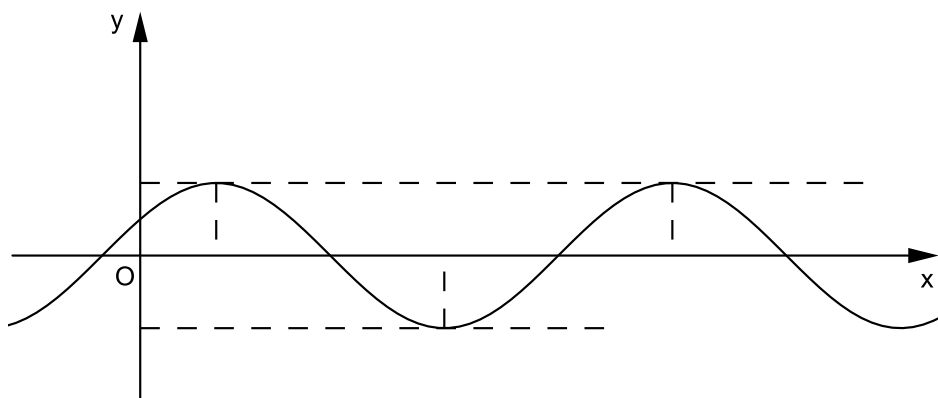
Pro $A = 0$ obsahuje tento vzorec i triviální řešení. Číslo A se nazývá *amplituda* a úhel φ *fáze*. Tato rovnice popisuje harmonické kmity. Jde o *netlumené kmity*.

II. Je-li $a^2 > b^2$, je

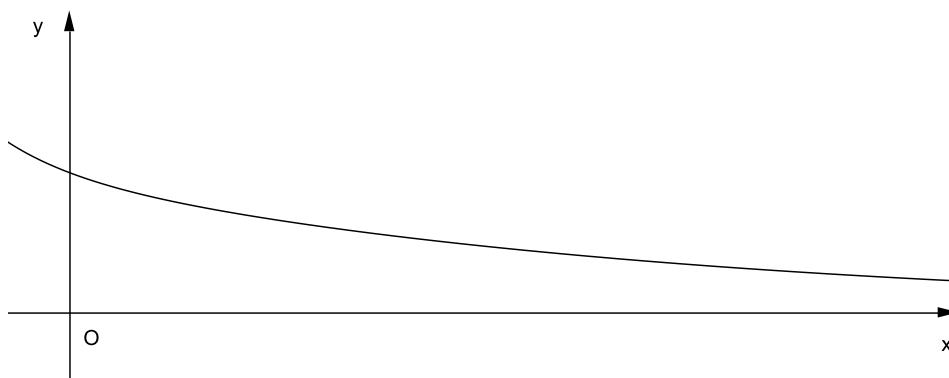
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b^2}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2},$$

což jsou reálné různé kořeny. Obecné řešení je

$$y(x) = c_1 e^{(-a + \sqrt{a^2 - b^2})x} + c_2 e^{(-a - \sqrt{a^2 - b^2})x}.$$



Obrázek 2.10: Netlumené kmity



Obrázek 2.11: Silně tlumené kmity

Jde o neperiodické kmity, které nazýváme *silně tlumené*.

III. Je-li $a^2 = b^2$, je

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{0}}{2} = -a,$$

což je dvojnásobný reálný kořen. Obecné řešení je

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-ax}.$$

Jde o neperiodické kmity, které se nazývají *kriticky tlumené*.

IV. Je-li $a^2 < b^2$, je

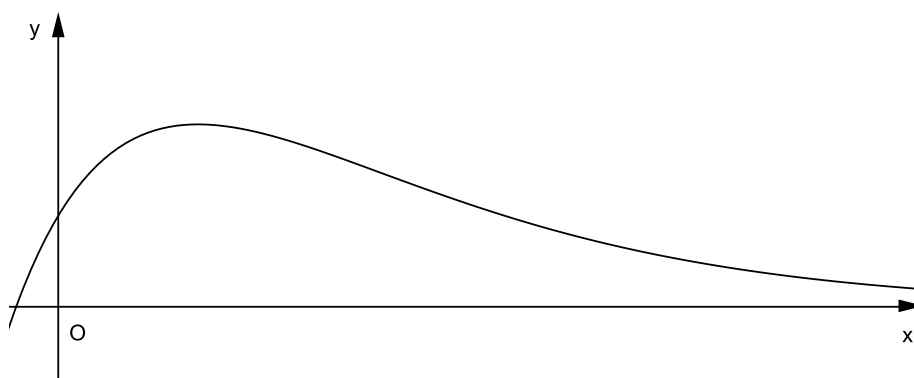
$$\lambda_{1,2} = -a \pm i\sqrt{b^2 - a^2},$$

což je dvojice komplexně sdružených kořenů. Označíme-li $\sqrt{b^2 - a^2} = \omega > 0$, je obecné řešení tvaru

$$y(x) = c_1e^{-ax} \cos \omega x + c_2e^{-ax} \sin \omega x.$$

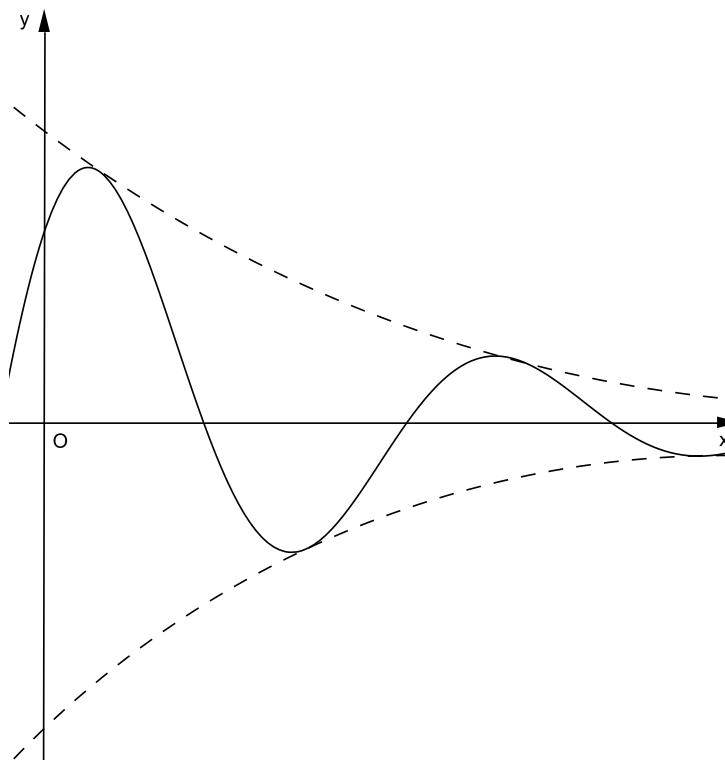
Analogicky jako u harmonického oscilátoru lze tento výsledek upravit na tvar

$$y(x) = Ae^{-ax} \sin(\omega x + \varphi), A \geq 0.$$



Obrázek 2.12: Kriticky tlumené kmity

Jde o periodické kmity, které se nazývají *slabě tlumené* (ovšem sama funkce $Ae^{-ax} \sin(\omega x + \varphi)$ není pro $a \neq 0$ periodická!).



Obrázek 2.13: Slabě tlumené kmity

Rovnice (2.24) popisující vlastní kmity lineárního oscilátoru je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Rovnici řešíme tak, že napíšeme příslušnou charakteristickou rovnici a vypočteme její kořeny. Množinu řešení, která tvoří fundamentální systém rovnice, pak určíme způsobem popsaným dříve. Rovnici lineárního oscilátoru lze řešit i pomocí Laplaceovy transformace. Její užití si ukážeme u buzených kmitů.

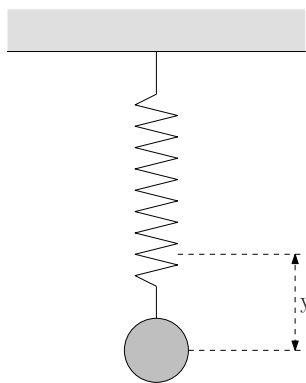
• **Modely vedoucí na rovnici lineárního oscilátoru^[9]**

1) Kmity pružiny

Uvažujme pružinu o tuhosti $k > 0$, na níž je zavěšena kulička o hmotnosti $m > 0$. Vychýlením z rovnovážné polohy začne kulička kmitat. Předpokládejme dále, že na pohyb působí odpor, který je úměrný okamžité rychlosti. Necht' součinitel odporu je $c \geq 0$. Označme $y(t)$ výchylku z rovnovážné polohy v čase t . Předpokládáme-li, že jde o malé kmity, plyne z druhého Newtonova zákona, že

$$m\ddot{y} = -c\dot{y} - ky \implies \ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0;$$

přítom \dot{y} je okamžitá rychlost a \ddot{y} je okamžité zrychlení. Označíme-li $a = \frac{c}{2m}$, $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$, dostáváme pro $y(t)$ rovnici (2.24).



Obrázek 2.14: Kmity pružiny

2) Matematické kyvadlo

Uvažujme kuličku o hmotnosti $m > 0$ zavěšenou na vlákně délky $l > 0$, jehož hmotnost i účinky jsou zanedbatelné. Vychýlením z rovnovážné polohy začne kulička kmitat (v rovině). Označme $\varphi(t)$ úhlovou výchylku z rovnovážné polohy v čase t měřenou v radiánech. Na kuličku působí gravitační síla mg , kde g je gravitační konstanta. Její složka odpovídající směru tečny ke kružnici je $-mg\sin\varphi$. Označíme-li délku oblouku na kružnici odpovídající úhlu φ jako s , je $s = l\varphi$, a tedy $\ddot{s} = \frac{d^2(l\varphi)}{dt^2} = l\ddot{\varphi}$. Z Newtonova zákona pak máme

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi.$$

Rovnici upravíme a dostáváme nelineární obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

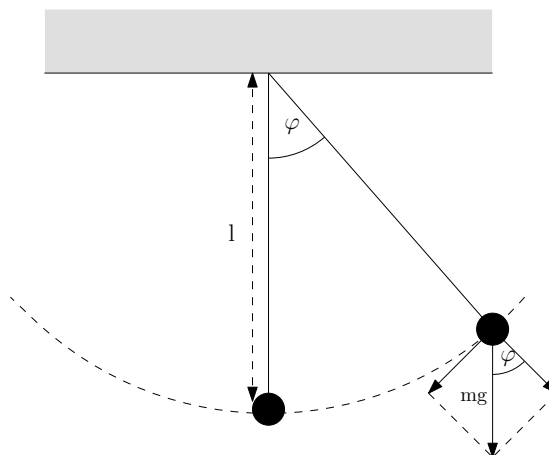
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Pro malé výchylky ($|\varphi| < 5^\circ$) lze $\sin\varphi$ nahradit se zanedbatelnou chybou hodnotou φ . Po této linearizaci má tedy rovnice tvar

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Označíme-li $\sqrt{\frac{g}{l}} = b$, dostáváme pro φ rovnici (2.24), kde $a = 0$.

Kdybychom uvažovali i odpor prostředí, dostali bychom obdobně jako u pružiny rovnici (2.24), kde $a > 0$.



Obrázek 2.15: Matematické kyvadlo

3) Elektrický obvod

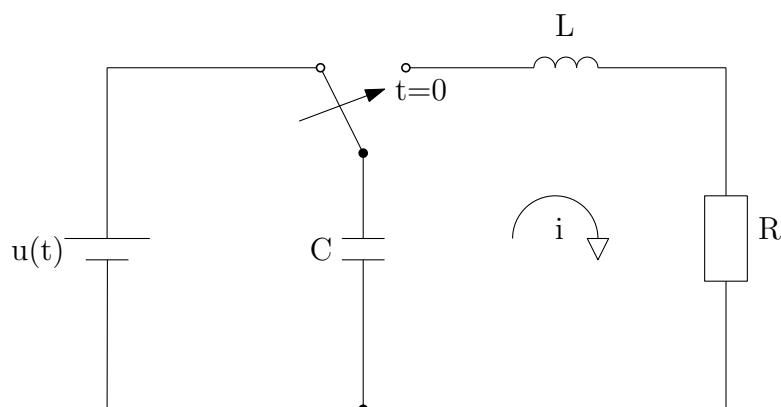
Uvažujme elektrický obvod, v němž je rezistor o odporu $R > 0$ ohmů a cívka o indukčnosti $L > 0$ henry. V čase $t = 0$ je k obvodu připojen kondenzátor o kapacitě $C > 0$ faradů nabitý na hodnotu $U(0)$. Označme $I(t)$ proud v ampérech, který obvodem prochází v čase t . Podle tzv. konstitučních zákonů, což jsou vztahy mezi proudem a napětím na prvcích obvodu, je napětí na cívce, rezistoru a kondenzátoru při průchodu proudem $I(t)$ postupně $L\dot{I}(t)$, $RI(t)$ a $\frac{1}{C} \int_0^t I(s) ds + U(0)$. Pomocí druhého Kirchhoffova zákona, který říká, že algebraický součet všech napětí na libovolném uzavřeném obvodu je roven nule, dostaneme

$$L\dot{I}(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(s) ds + U(0) = 0$$

a po derivaci a úpravě

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \implies \ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0.$$

Označíme-li $a = \frac{R}{2L}$, $b = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, dostaneme pro I rovnici (2.24).



Obrázek 2.16: Elektrický obvod

• **Netlumené harmonické kmity**^[13]

Pohybová rovnice netlumených harmonických kmitů je rovnice tvaru

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \quad (2.25)$$

Tato rovnice je zvláštním případem rovnice (2.24) pro $a = 0$ a $b = \omega$, který jsme rozebírali již dříve. Funkce $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ vyhovující této diferenciální rovnici určuje okamžitou výchylku netlumeného harmonického pohybu. Veličina ω se nazývá úhlová frekvence pohybu. S periodou pohybu T , jež udává dobu, za kterou se uskuteční jeden úplný kmit, souvisí vztahem $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Rovnice (2.25) má obecnou platnost, tj. platí pro libovolné harmonické kmity. Najdeme-li veličinu V , která splňuje diferenciální rovnici tvaru (2.25), tj. $\frac{d^2V}{dt^2} + kV = 0$, k je konstanta, pak se veličina V harmonicky mění s časem, platí $V = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$ a periodu této změny určíme porovnáním s obecnou rovnicí (2.25). Tedy

$$\omega^2 = k, \text{ odtud } \frac{4\pi^2}{T^2} = k, T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

• **Různé úlohy vedoucí na rovnici lineárního oscilátoru**

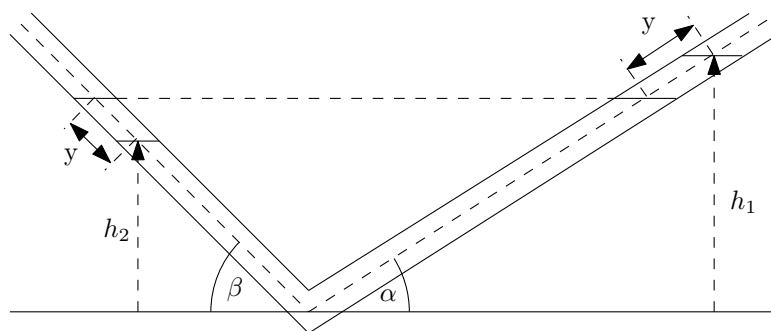
Skleněná trubice^[13]

Ve skleněné trubici konstantního průřezu je kapalina hustoty ρ , délka sloupce kapaliny je $l = 1,0$ m. Úhly $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Vychýlíme-li sloupec z rovnovážné polohy, začne kmitat. Stanovte dobu kmitu tohoto pohybu. Zanedbejte vnitřní tření a kapilární síly.

Řešení

Označme průřez trubice S . Kmitavý pohyb způsobuje síla, která je rovna hydrostatické tlakové síle

$$S(h_1 - h_2)\rho g = S\rho g(y \sin \alpha + y \sin \beta).$$



Obrázek 2.17: Skleněná trubice

Jelikož tato síla působí vždy proti vychýlení kapaliny, je pohybová rovnice

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Sg\rho y(\sin \alpha + \sin \beta),$$

a jelikož hmotnost kapaliny je $m = S\rho l$, je po krácení

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{l}(\sin \alpha + \sin \beta)y = 0.$$

To je však diferenciální rovnice harmonických kmitů.

Proto

$$\omega^2 = \frac{g}{l}(\sin \alpha + \sin \beta)$$

a doba kmitů T je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(\sin \alpha + \sin \beta)}}.$$

Pro dané hodnoty je $T \doteq 5,8$ s.

Tělísko v kanálu^[13]

V myšleném pokusu je do přímého kanálu, vedeného středem Země, puštěno malé tělísko. Popište pohyb tělíska za předpokladu, že Země je homogenní koule. Pohyb Země neuvažujte.

Řešení

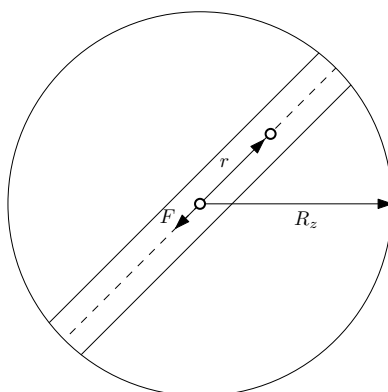
Intenzita gravitačního pole uvnitř Země ve vzdálenosti $r < R_z$ je $K = \frac{a_g}{R_z} r$, kde a_g je gravitační zrychlení na povrchu Země, R_z je poloměr Země.

Hmotnost tělíska označíme m . Jelikož intenzita silového pole je $\vec{K} = \frac{\vec{F}}{m}$, je síla působící na tělísko uvnitř kanálu rovna

$$F = mK = m \frac{a_g}{R_z} r.$$

Vektorově pak

$$\vec{F} = -m \frac{a_g}{R_z} \vec{r},$$



Obrázek 2.18: Tělísko v kanálu

a tedy pohybová rovnice má tvar

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{a_g}{R_z} r = 0. \quad (2.26)$$

Rovnice (2.26) je pohybovou rovnicí harmonického pohybu. To tedy znamená, že tělísko v uvedeném pokusu by kmitalo kolem středu Země s periodou, kterou obdržíme porovnáním rovnic (2.25), (2.26).

$$\omega^2 = \frac{a_g}{R_z}, T = 2\pi \sqrt{\frac{R_z}{a_g}}.$$

Dosazením za $R_z = 6,37 \cdot 10^6$ m, $a_g = 9,81$ ms⁻² obdržíme $T = 5060$ s. Největší rychlost má tělísko ve středu Země, a to

$$v_{max} = \omega R_z = \sqrt{\frac{a_g}{R_z}} R_z = \sqrt{a_g R_z} \doteq 7,9 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1},$$

což je první kosmická rychlost.

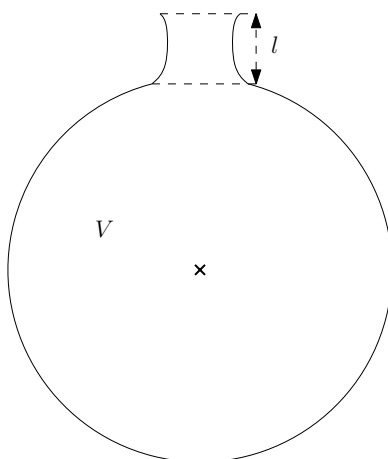
Helmholtzův rezonátor^[13]

Stanovte vlastní kmity Helmholtzova rezonátoru. Je to nádoba tvaru koule o objemu V se širokým hrdlem o světlem průřezu S . Délka hrdla je l .

Řešení

Dopadají-li na otevřený rezonátor zvukové vlny, rozkmitá se vzduch (hustoty ρ) v rezonátoru. Hrdlo vytváří zátku. Tlakové změny jsou rychlé, takže stlačování vzduchu uvnitř rezonátoru můžeme považovat za adiabatické. Posune-li se vzduch v hrdle o hmotnosti $m = \rho S l$ o délku Δy z rovnovážné polohy, změní se tlak vzduchu v nádobě o hodnotu Δp . Z rovnice adiabaty $pV^\kappa = \text{konst.}$ plyne diferenciací

$$\begin{aligned} dp \cdot V^\kappa + p \kappa V^{\kappa-1} dV &= 0, \\ dp &= -\kappa p \frac{dV}{V} = -\kappa p \frac{S dy}{V}. \end{aligned}$$



Obrázek 2.19: Helmholtzův rezonátor

Při posunu o Δy tedy pro změnu tlaku vzduchu platí

$$\Delta p = -\kappa p \frac{S}{V} \Delta y.$$

V dalším budeme místo Δy psát pro přehlednost zápisu y .

Změně tlaku odpovídá síla

$$F = S\Delta p = -\kappa p \frac{S^2}{V} y$$

a tedy kmity vzduchu v rezonátoru lze popsat rovnicí:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\kappa p \frac{S^2}{V} y, \\ \rho S l \frac{d^2 y}{dt^2} + \kappa p \frac{S^2}{V} y &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \kappa \frac{pS}{\rho l V} y &= 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Porovnáním rovnice (2.27) s obecnou diferenciální rovnicí harmonických kmitů je

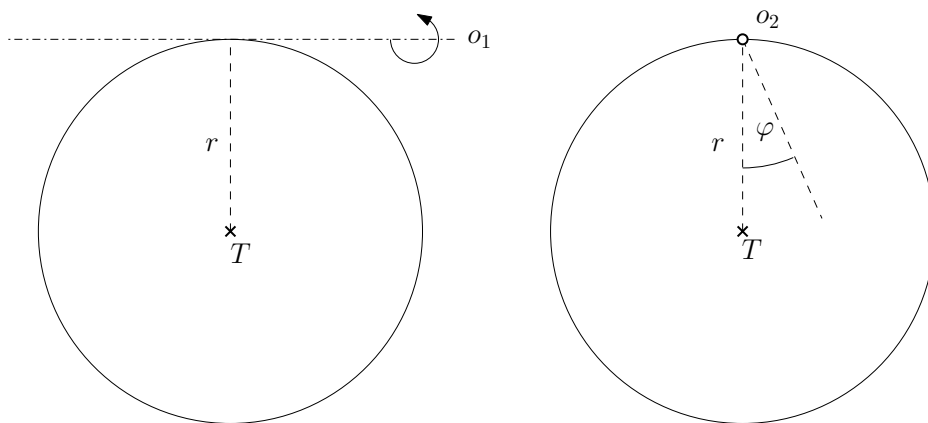
$$\omega^2 = \frac{\kappa p S}{\rho l V}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

a doba kmitu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho l V}{\kappa p S}}.$$

Rotační pohyb tělesa^[13]

Kružnice z homogenního tenkého drátu o poloměru r , hmotnosti m koná malé kyvadlové kmity kolem vodorovné osy. V jednom případě leží osa v rovině kruhu, v druhém případě je k ní kolmá. Jaký je poměr period T_1 a T_2 těchto kmitů?



Obrázek 2.20: Rotační pohyb tělesa

Řešení

V obou případech je moment tíhové síly při vychýlení drátěné kružnice o úhel φ roven

$$M = mgr \sin \varphi.$$

Pro malé φ je $\sin \varphi = \varphi$, a tedy

$$M = -mgr\varphi.$$

Znaménko minus znamená, že φ měříme v opačném směru, než působí moment M .

Vyjdeme z pohybové rovnice pro rotační pohyb tělesa $M = I\varepsilon$, kde I je moment setrvačnosti drátěné kružnice vzhledem k ose otáčení charakterizující rozložení hmoty tělesa vzhledem k této ose a úhlové zrychlení ε je druhou časovou derivací úhlu φ .

Můžeme tedy psát $M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Pohybová rovnice pohybu drátěné kružnice pak je

$$\begin{aligned} I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgr\varphi &= 0, \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgr}{I}\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Rovnice (2.28) je opět diferenciální rovnicí harmonického pohybu vzhledem k veličině φ , tj. $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \psi)$. Porovnáním s diferenciální rovnicí harmonického pohybu je pak

$$\omega^2 = \frac{mgr}{I}$$

a odtud doba kmitu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}},$$

kde I je moment setrvačnosti kružnice vzhledem k dané ose otáčení.

Pro kmity kolem osy o_1 je doba kmitu

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{mgr}},$$

I_1 je moment setrvačnosti vzhledem k ose o_1 .

Podobně pro kmity kolem osy o_2 je doba kmitu

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{mgr}},$$

I_2 je moment setrvačnosti drátěné kružnice k ose o_2 .

Hledaný poměr je

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}.$$

BUZENÉ KMITY^[9]

Podobně jako vyšetřování rovnice (2.24) vede vyšetřování nehomogenní rovnice tvaru

$$y'' + 2ay' + b^2y = f(x)$$

na tzv. buzené kmity. Zde ovšem výsledek podstatně závisí na konkrétním tvaru budícího „členu“ $f(x)$.

Jak vidíme, rovnice popisující kmitání je vždy diferenciální rovnicí druhého řádu. Takové rovnice řešíme pomocí metody neurčitých koeficientů nebo variací konstant. V některých případech je však řešení příliš zdlouhavé, a proto užíváme ještě další metodu řešení, a to pomocí Laplaceovy transformace.

Příklad 1^[autor]

Těleso o hmotnosti 1 kg je zavěšené na pružině, jejíž tuhost k je 100 Nm^{-1} . Těleso začne po vychýlení z rovnovážné polohy kmitat. Po celou dobu kmitání působí na oscilátor vnější síla $f(t) = 2 \cos 10t$. Sestavte příslušnou diferenciální rovnici a nalezněte řešení $y(t)$ za počátečních podmínek $y(0) = 0$ a $\dot{y}(0) = 100$. Odpor prostředí a případné tření zanedbejte.

Řešení

Neuvažujeme-li odpor prostředí a tření, je kmitání popsáno rovnicí

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = f(t).$$

Dosazením za k , m a $f(t)$ ze zadání dostáváme příslušnou diferenciální rovnici

$$\ddot{y} + 100y = 2 \cos 10t,$$

tuto rovnici nyní vyřešíme pomocí Laplaceovy transformace. Laplaceovou transformací tedy dostáváme

$$p^2 \mathcal{L}(y)(p) - 100 + 100 \mathcal{L}(y)(p) = 2 \mathcal{L}(\cos 10t)(p),$$

takže

$$(p^2 + 100) \mathcal{L}(y)(p) = \frac{2p}{p^2 + 100} + 100,$$

$$\mathcal{L}(y)(p) = \frac{2p}{(p^2 + 100)^2} + \frac{100}{p^2 + 100}.$$

A zpětnou transformací nakonec dostaneme řešení úlohy ve tvaru

$$y(t) = \frac{1}{10} t \sin 10t + 10 \sin 10t.$$

Z tvaru funkce $y(t)$, jež je řešením úlohy, vidíme, že těleso zavěšené na pružině bude pokračovat v kmitavém pohybu a amplituda výchylky jeho pohybu s rostoucím časem poroste.

Příklad 2^[autor]

Řešte předchozí příklad za předpokladu, že pohyb je brzděn odporem prostředí a třením. Souhrnná hodnota součinitele odporu c těchto jevů byla experimentálně stanovena na 25.

Řešení

V případě, kdy uvažujeme vliv odporových sil, je kmitavý pohyb popsán rovnicí

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = f(t).$$

Dosažením za c , m , k a $f(t)$ dostáváme

$$\ddot{y} + 25\dot{y} + 100y = 2 \cos 10t.$$

Ukážeme si, jak lze tuto rovnici vyřešit užitím Laplaceovy transformace.

Laplaceovou transformací tedy dostáváme

$$p^2 \mathcal{L}(y)(p) - 100 + 25p \mathcal{L}(y)(p) + 100 \mathcal{L}(y)(p) = 2 \mathcal{L}(\cos 10t)(p),$$

takže

$$(p^2 + 25p + 100) \mathcal{L}(y)(p) = \frac{2p}{p^2 + 100} + 100,$$

$$\mathcal{L}(y)(p) = \frac{2p}{(p^2 + 100)(p^2 + 25p + 100)} + \frac{100}{p^2 + 25p + 100} =$$

$$= \frac{2p}{(p^2 + 100)(p + 5)(p + 20)} + \frac{100}{(p + 5)(p + 20)}.$$

Každý ze sčítanců nyní rozložíme na parciální zlomky. Rozkladem prvního členu dostaneme

$$\frac{2p}{(p^2 + 100)(p + 5)(p + 20)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 100} + \frac{C}{p + 5} + \frac{D}{p + 20},$$

$$2p = (Ap + B)(p + 5)(p + 20) + C(p^2 + 100)(p + 20) + D(p^2 + 100)(p + 5).$$

Dosazením $p = -5$ dostáváme

$$-10 = 1875C, \text{ tedy } C = -\frac{2}{375}$$

a dosazením $p = -20$ dostaneme

$$-40 = -7500D, \text{ tedy } D = \frac{2}{375}.$$

Nakonec porovnáme koeficienty u p^3

$$0 = A + C + D, \text{ odtud } A = 0$$

a porovnáním koeficientů u p^2

$$0 = 25A + B + 20C + 5D, \text{ tedy } B = \frac{2}{25}.$$

Rozkladem druhého členu dostáváme

$$\frac{100}{(p + 5)(p + 20)} = \frac{E}{p + 5} + \frac{F}{p + 20},$$

$$100 = E(p + 20) + F(p + 5).$$

Dosazením $p = -5$ dostaneme

$$100 = 15E, \text{ tedy } E = \frac{100}{15}$$

a porovnáním koeficientů u p

$$0 = E + F, \text{ odtud } F = -E \text{ a } F = -\frac{100}{15}.$$

Rozkladem na parciální zlomky jsme nakonec dostali

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y)(p) &= \frac{2p}{(p^2 + 100)(p + 5)(p + 20)} + \frac{100}{(p + 5)(p + 20)} = \\ &= \frac{2}{25} \frac{1}{p^2 + 100} - \frac{2}{375} \frac{1}{p + 5} + \frac{2}{375} \frac{1}{p + 20} + \frac{100}{15} \frac{1}{p + 5} - \frac{100}{15} \frac{1}{p + 20} = \\ &= \frac{2}{25} \frac{1}{p^2 + 100} + \frac{2498}{375} \frac{1}{p + 5} - \frac{2498}{375} \frac{1}{p + 20}. \end{aligned}$$

Odtud zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení úlohy ve tvaru

$$y(t) = \frac{1}{125} \sin 10t + \frac{2498}{375} e^{-5t} - \frac{2498}{375} e^{-20t}.$$

Funkce e^{-t} se limitně blíží nule již pro malé hodnoty t . Z tvaru funkce $y(t)$ popisující kmitání tělesa lze tedy usoudit, že pohyb vybuzený vnější silou byl v poměrně krátkém čase zbrzděn odporem prostředí a třením. Vzhledem k členu $\frac{1}{125} \sin 10t$, jenž je součástí řešení, těleso pak nadále kmitalo s velmi nízkou amplitudou výchylky.

Příklad 3^[11, autor]

Elektrický obvod je tvořen sériovým zapojením cívky o indukčnosti $L = 10$ H a kondenzátoru o kapacitě $C = 0,1$ F. V takovém obvodu se náboj, proud a napětí mění harmonicky a říkáme, že obvod kmitá. Obvod je navíc podroben za pomoci vnějšího zdroje vynuceným kmitům

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{pro } t > \pi, \end{cases}$$

které působí jen na počátku a pak ustanou. Sestavte příslušnou diferenciální rovnici a nalezněte řešení $I(t)$ za počátečních podmínek $I(0) = 1$ a $\dot{I}(0) = 1$. Odpor drátů a součástek spojených v obvodu zanedbejte.

Řešení

Kmitý obvodu s nulovým odporem popisuje rovnice

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC} I = f(t).$$

Dosazením za L a C ze zadání dostáváme příslušnou diferenciální rovnici

$$\ddot{I} + I = f(t).$$

Funkci $f(t)$ lze zapsat pomocí Heavisideovy funkce $H(t)$ a posunuté Heavisideovy funkce $H(t - \pi)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} f(t) &= t[H(t) - H(t - \pi)] = tH(t) - [(t - \pi) + \pi]H(t - \pi) = \\ &= tH(t) - (t - \pi)H(t - \pi) - \pi H(t - \pi). \end{aligned}$$

Je-li totiž $H(t)$ funkce, která je nulová pro $t < 0$ a rovna jedné pro $t > 0$, pak funkce $H(t - \pi)$ je rovna nule pro $t < \pi$ a rovna jedné pro $t > \pi$.

Z obrazu Heavisideovy funkce a věty 13 pak plyne

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-\pi p} - \frac{\pi}{p} e^{-\pi p}.$$

Nyní použijeme Laplaceovu transformaci na diferenciální rovnici

$$p^2 \mathcal{L}(I)(p) - p - 1 + \mathcal{L}(I)(p) = \mathcal{L}(f(t))(p),$$

tedy

$$(p^2 + 1)\mathcal{L}(I)(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-\pi p} - \frac{\pi}{p}e^{-\pi p} + p + 1,$$

$$\mathcal{L}(I)(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)} - \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}e^{-\pi p} - \frac{\pi}{p(p^2 + 1)}e^{-\pi p} + \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}.$$

První a třetí člen rozložíme na parciální zlomky. Rozkladem prvního členu dostáváme

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 1},$$

$$1 = Ap(p^2 + 1) + B(p^2 + 1) + (Cp + D)p^2.$$

Dosazením $p = 0$ dostaneme $B = 1$. Porovnáme koeficienty u p^2

$$0 = B + D, \text{ odtud } D = -1.$$

Porovnáním koeficientů u p je $A = 0$ a nakonec porovnáním u p^3 dostáváme

$$0 = A + C, \text{ tedy } C = 0.$$

Rozkladem třetího členu dostaneme

$$\frac{\pi}{p(p^2 + 1)} = \frac{E}{p} + \frac{Fp + G}{p^2 + 1},$$

$$\pi = E(p^2 + 1) + (Fp + G)p.$$

Dosazením $p = 0$ dostáváme $E = \pi$. Porovnáme koeficienty u p^2

$$0 = E + F, \text{ tedy } F = -\pi$$

a nakonec porovnáním u p je $G = 0$.

Takže rozkladem na parciální zlomky jsme dostali

$$\mathcal{L}(I)(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1} - \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1} \right) e^{-\pi p} - \left(\frac{\pi}{p} - \frac{\pi p}{p^2 + 1} \right) e^{-\pi p} +$$

$$+ \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-\pi p} + \frac{1}{p^2 + 1}e^{-\pi p} - \frac{\pi}{p}e^{-\pi p} + \frac{\pi p}{p^2 + 1}e^{-\pi p} + \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Inverzní transformací dostáváme řešení úlohy pro $t \geq 0$ ve tvaru

$$I(t) = tH(t) - (t - \pi)H(t - \pi) + \sin(t - \pi)H(t - \pi) - \pi H(t - \pi) +$$

$$+ \pi \cos(t - \pi)H(t - \pi) + \cos t = tH(t) - tH(t - \pi) - \sin t H(t - \pi) - \pi \cos t H(t - \pi) +$$

$$+ \cos t = (t + \cos t)H(t) - (t + \sin t + \pi \cos t)H(t - \pi),$$

což můžeme také zapsat ve tvaru

$$I(t) = \begin{cases} t + \cos t & \text{pro } 0 \leq t \leq \pi \\ \cos t - \sin t - \pi \cos t & \text{pro } t > \pi. \end{cases}$$

Neřešené příklady

1)^[autor] Příklad 1 a 2 řešte i pomocí standardních metod - metody variace konstanty a metody neurčitých koeficientů. Diskutujte, která z použitých metod je nejvhodnější.

2)^[autor] Příklad 3 řešte pomocí navazující standardní metody. Taková úloha se nejprve řeší na jednotlivých intervalech a při tom se dopočítávají počáteční podmínky pro další interval. Diskutujte vhodnost této metody řešení.

3)^[9, autor] Buzené kmity lineárního oscilátoru jsou popsány rovnicí

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2 + 1}.$$

Nalezněte obecné řešení $y(t)$.

(Řešte pomocí variace konstant.)

4)^[9, autor] Buzené kmity lineárního oscilátoru jsou popsány rovnicí

$$y'' - 6y' + 9y = 2t^2 - t + 3.$$

Nalezněte obecné řešení $y(t)$.

(Řešte metodou neurčitých koeficientů.)

2.5 Vlnění

Napnutá struna^[10]

Uvažujte tenkou elastickou strunu napnutou ve směru osy x . Výchylka $u \equiv u(x, t)$ struny (ve směru kolmém k ose x) bude funkcí polohy x a času t . (Poloha x a čas t zde vystupují jako nezávislé proměnné.) Prodloužení (výchylka) struny mezi body x a $x + dx$ je εdx . Nalezněte pohybovou rovnici pro tento případ.

Řešení

Prodloužení (výchylka) εdx struny mezi body x a $x + dx$ je dáno rozdílem

$$\varepsilon dx = u(x + dx, t) - u(x, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

Veličina $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ je relativní prodloužení. Z teorie pružnosti je známo, že elastická síla f působící na jednotkový objem elastického tělesa je přímo úměrná relativnímu prodloužení, tj. $f = E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$. To je speciální případ tzv. Hookova zákona; konstanta úměrnosti $E > 0$ se nazývá Youngův modul pružnosti.

Podle Newtonova zákona je síla rovna součinu hmotnosti a zrychlení. Hmotnost jednotkového objemu je hustota ρ , kterou zde budeme považovat za konstantní; zrychlení je $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, takže

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

resp.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.29)$$

kde

$$c \equiv \left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Rovnici typu (2.29) označujeme jako *vlnovou rovnici*, jejíž trojrozměrné zobecnění má tvar

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2.30)$$

Rovnicemi tohoto typu se popisuje šíření zvuku, šíření elektromagnetických signálů a řady dalších jevů.

Vlnová rovnice^[10]

Nyní se budeme chvíli věnovat vlnové rovnici. Tato parciální diferenciální rovnice hraje ve fyzice důležitou roli.

V jednorozměrném případě se jedná o rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.31)$$

kde $u \equiv u(x, t)$ je hledaná funkce dvou nezávislých proměnných x a t , c je konstanta. Vlnovou rovnici můžeme přepsat v očividně ekvivalentním tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned}$$

Rovnici (2.31) tedy jistě splníme, když u bude vyhovovat alespoň jedné ze dvou rovnic prvního řádu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (2.32)$$

Tyto rovnice přejdou jedna v druhou formální záměnou $c \rightarrow -c$.

Z (2.32) je vidět výhodnost zavedení nových proměnných

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Podle pravidel o derivování složené funkce máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial \xi} + c \frac{\partial u}{\partial \eta}.\end{aligned}$$

Rovnice (2.32) tak přejdou v jednoduchou soustavu

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Je-li $u \equiv u(\xi, \eta)$ pak z první rovnice plyne, že u nezávisí na η , a je tedy libovolnou funkcí ξ , tj. $u = f_1(\xi)$. Obdobně z druhé rovnice plyne $u = f_2(\eta)$. Vlnovou rovnici proto splňuje libovolná funkce tvaru

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (2.33)$$

kde f_1, f_2 jsou libovolné (dvakrát diferencovatelné) funkce. Prímým dosazením se přesvědčíme, že (2.33) splňuje rovnici (2.31) identicky při libovolných funkcích f_1, f_2 .

Vysvětlíme si fyzikální význam řešení (2.33). Poněvadž oba typy řešení se formálně liší pouze záměnou $c \leftrightarrow -c$, zvolíme $f_2 \equiv 0$, takže je

$$u = f_1(x - ct).$$

V teorii vlnění se argument $x - ct$ nazývá *fází vlny*. O funkci f_1 budeme předpokládat, že každé hodnotě argumentu ξ přísluší právě jedna hodnota $u = f_1(\xi)$. Necht' v nějakém bodě x_0 a v čase t_0 má fáze hodnotu $x_0 - ct_0$. Ve všech bodech x a čase t spojených rovnicí $x - ct = x_0 - ct_0$ bude fáze stejná, jako byla v bodě x_0 a v čase t_0 . Místa stejné fáze (a tedy i místa stejných hodnot u) nazýváme *vlnoplochy*. V daném případě jsou tedy vlnoplochy určeny rovnicí

$$x = x_0 + c(t - t_0).$$

Rovinu (y, z) v trojrozměrném prostoru určuje $x = \text{konst.}$ Místa stejných fází jsou tedy roviny posouvající se v prostoru rychlostí $\frac{dx}{dt} = c$ v kladném směru osy x . Tím je také vysvětlen fyzikální význam parametru c : je to *rychlost přemístování stejné fáze* v prostoru. Řešení $f_2(x + ct)$ odpovídá rovinným vlnoplochám pohybujícím se rychlostí c v záporném směru osy x .

Neřešené příklady^[autor]

Dokažte, že (2.33) je skutečně řešením vlnové rovnice (2.31).

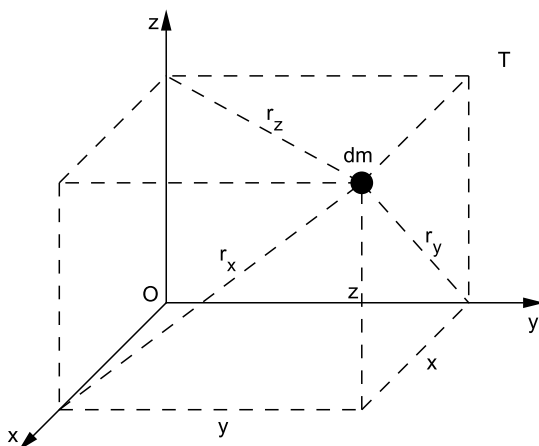
Kapitola 3

Užití integrálního počtu

3.1 Momenty setrvačnosti^[8]

Pohyb tělesa ovlivňuje rozložení hmotnosti, které charakterizují momenty setrvačnosti. Poněvadž jejich hodnoty jsou funkcí geometrických a hmotnostních parametrů tělesa, říká se jim také geometricko-hmotnostní charakteristiky. Jejich hodnoty lze určit nezávisle na pohybu tělesa.

Při řešení pohybu těles mají základní fyzikální význam osové momenty setrvačnosti. Uvažujme s tělesem T pevně spojený souřadnicový systém O, x, y, z . V bodě tělesa o souřadnicích x, y, z uvažujeme bodové těleso elementární hmotnosti dm .



Obrázek 3.1: Těleso T

Osový moment setrvačnosti tělesa T hmotnosti m k ose x, y, z je definován vztahem

$$I_x = \int_{m(T)} r_x^2 dm, I_y = \int_{m(T)} r_y^2 dm, I_z = \int_{m(T)} r_z^2 dm,$$

ve kterém se integrace provádí přes celé těleso T o celkové hmotnosti m . r_x, r_y, r_z představují vzdálenosti bodu tělesa od osy x, y a z . Vyjádříme-li jejich hodnoty pomocí souřadnic, dostaneme:

$$I_x = \int_{m(T)} (y^2 + z^2) dm, I_y = \int_{m(T)} (x^2 + z^2) dm, I_z = \int_{m(T)} (x^2 + y^2) dm. \quad (3.1)$$

Jak je patrné z rovnic (3.1) je rozměr momentů setrvačnosti $[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$. Momenty setrvačnosti jsou vždy kladné.

Osové momenty setrvačnosti těles lze počítat podle vztahů, které byly odvozeny v matematice. Poněvadž se jedná o geometricko-hmotnostní charakteristiky prostorových útvarů, je obecné řešení ve tvaru trojných integrálů:

$$I_x = \int_x \int_y \int_z (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \quad (3.2)$$

$$I_y = \int_x \int_y \int_z (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \quad (3.3)$$

$$I_z = \int_x \int_y \int_z (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \quad (3.4)$$

kde $\rho(x, y, z)$ je hustota materiálu.

U rotačních těles s osou rotace např. z lze s výhodou použít při výpočtu momentů setrvačnosti k této ose válcových souřadnic. Pak rovnice (3.4) přejde na tvar

$$I_z = \int_r \int_\varphi \int_z r^3 \rho(r, \varphi, z) \, dr d\varphi dz. \quad (3.5)$$

Při výpočtu homogenních těles je hustota konstantní a proto lze ρ vytknout před integrál.

Osové momenty můžeme určit použitím rovnic (3.2), (3.3) a (3.4). Pro snadnější výpočet osových momentů setrvačnosti technických těles zavádíme rovinné momenty setrvačnosti:

moment setrvačnosti k rovině xy

$$I_{xy} = \int_{m(T)} z^2 \, dm, \quad (3.6)$$

moment setrvačnosti k rovině xz

$$I_{xz} = \int_{m(T)} y^2 \, dm, \quad (3.7)$$

moment setrvačnosti k rovině yz

$$I_{yz} = \int_{m(T)} x^2 \, dm \quad (3.8)$$

a polární moment setrvačnosti

$$I_p = \int_{m(T)} r_p^2 \, dm = \int_{m(T)} (x^2 + y^2 + z^2) \, dm. \quad (3.9)$$

Porovnáním integrálů v rovnicích (3.1) a rovnicích (3.6), (3.7) a (3.8) lze osové momenty setrvačnosti vyjádřit pomocí rovinných momentů setrvačnosti:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}.$$

Podobně lze vyjádřit polární moment setrvačnosti pomocí rovinných momentů setrvačnosti

$$I_p = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz}$$

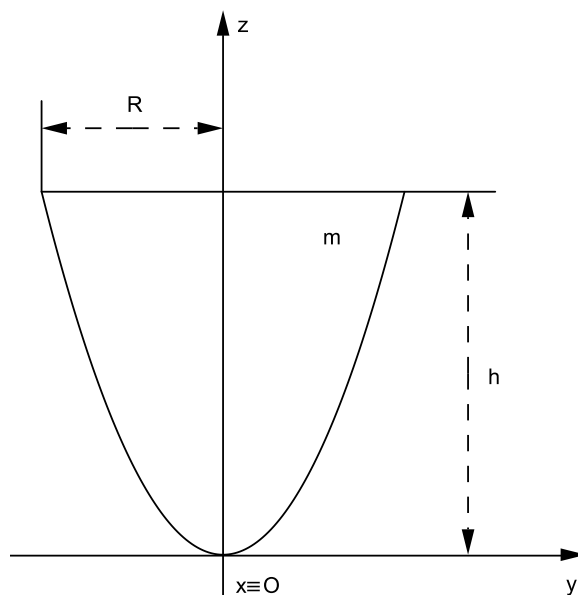
nebo pomocí osových momentů setrvačnosti

$$I_p = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z).$$

Rovinné momenty setrvačnosti a polární moment setrvačnosti nemají fyzikální význam, poněvadž se nevyskytují samy o sobě v pohybových rovnicích. Na několika příkladech si ukážeme jejich použití.

Rotační paraboloid^[8]

Určete moment setrvačnosti homogenního rotačního paraboloidu hmotnosti m k jeho ose rotace.



Obrázek 3.2: Rotační paraboloid

Řešení

Použitím rovnice (3.5) pro konstantní hustotu dostaneme vztah:

$$I_z = \rho \int_0^h \int_0^y \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr dz = 2\pi\rho \int_0^h \int_0^y r^3 dr dz = 2\pi\rho \int_0^h \frac{y^4}{4} dz. \quad (3.10)$$

Rotační paraboloid vznikne rotací paraboly o rovnici $y^2 = 2pz$ kolem osy z .

Dosažením okrajových hodnot ($y = R, z = h$) dostaneme: $2p = \frac{R^2}{h}$ a tedy $y^2 = \frac{R^2}{h}z$. Dosažením do rovnice (3.10) obdržíme:

$$I_z = 2\pi\rho \frac{R^4}{4h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{6}\pi\rho R^4 h. \quad (3.11)$$

Hustota je dána vztahem

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (3.12)$$

kde objem V části paraboloidu určíme ze vztahu:

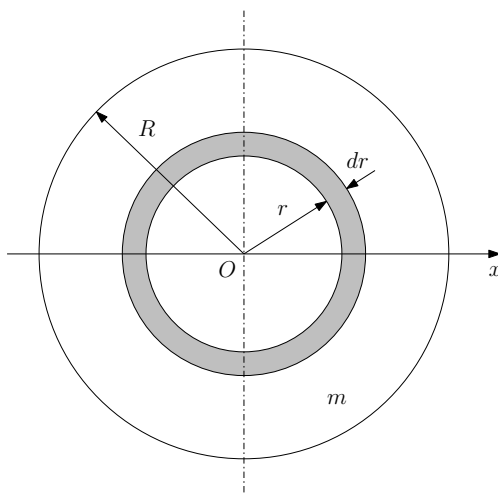
$$V = \int_0^h \pi y^2 dz = \pi \frac{R^2}{h} \int_0^h z dz = \frac{1}{2} \pi R^2 h. \quad (3.13)$$

Dosazením rovnice (3.13) do rovnice (3.12) a (3.11) dostaneme

$$I_z = \frac{1}{3} m R^2.$$

Koule^[8]

Určete moment setrvačnosti homogenní koule hmotnosti m o poloměru R k ose procházející jejím středem.



Obrázek 3.3: Koule

Řešení

Osu procházející středem koule označme x . Poněvadž koule je souměrná ke všem osám procházejícím jejím středem, platí

$$I_x = I_y = I_z$$

a polární moment setrvačnosti k jejímu středu je

$$I_p = \frac{3}{2} I_x \text{ čili } I_x = \frac{2}{3} I_p. \quad (3.14)$$

U koule, jakožto středově souměrného tělesa, lze vytknout element hmotnosti, jehož každý bod má ke středu O stejnou vzdálenost. Je tím kulová skořepina poloměru r a tloušťky dr . Její elementární hmotnost je:

$$dm = \rho dV = \rho \cdot A \cdot dr = 4\pi r^2 dr,$$

kde A je plocha kulové skořepiny.

Polární moment bude:

$$I_p = \int_{m(T)} r^2 dm = 4\pi\rho \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\rho R^5.$$

Dosazením do rovnice (3.14) získáme osový moment setrvačnosti:

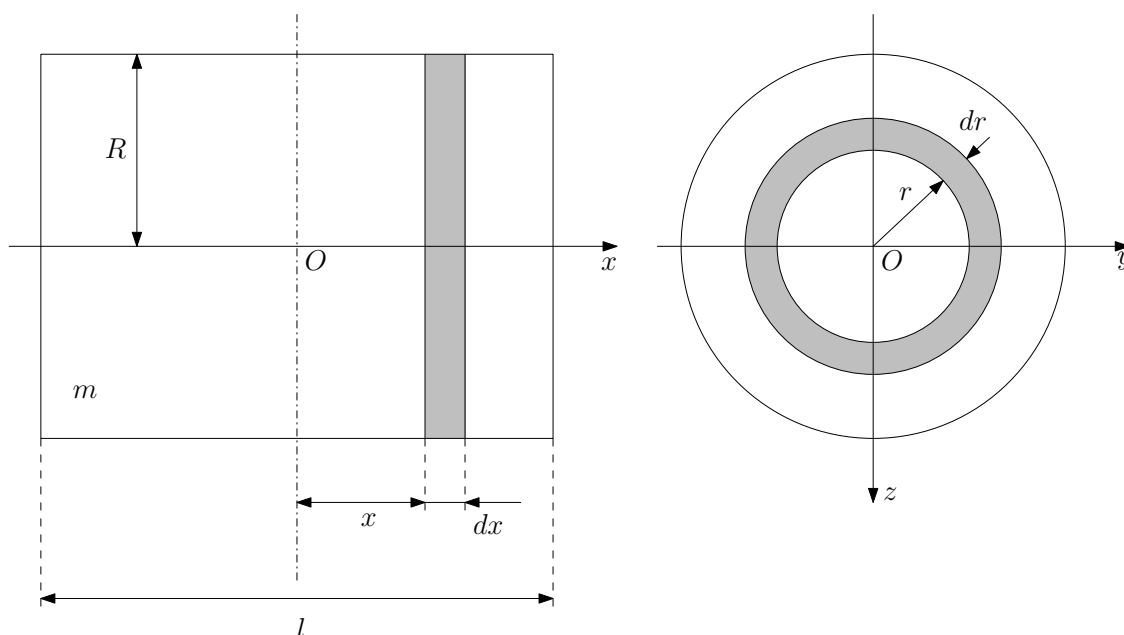
$$I_x = \frac{8}{15}\pi\rho R^5.$$

Dosazením za $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ obdržíme:

$$I_x = \frac{2}{5}mR^2.$$

Válec^[8]

Určete moment setrvačnosti homogenního válce poloměru R , délky l a hmotnosti m k ose rotace x a k ose na ní kolmé, procházející středem hmotnosti válce.



Obrázek 3.4: Válec

Řešení

Moment setrvačnosti k ose rotace x válce určíme z rovnice (3.1), kam za elementární hmotnost dosadíme hmotnost válcové skořepiny s osou totožnou s osou x válce poloměru r , tloušťky dr a hustoty ρ :

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot 2\pi r \cdot l dr.$$

Osový moment setrvačnosti bude:

$$I_x = \int_{m(T)} r_x^2 dm = 2\pi\rho l \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho l R^4$$

a dosazením za hustotu

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 l}$$

dostaneme

$$I_x = \frac{1}{2}mR^2. \quad (3.15)$$

Nyní určíme moment setrvačnosti k ose y . Poněvadž nelze zvolit vhodný element, jehož všechny body by měly k ose y stejnou vzdálenost, určíme moment k ose y z rovinných momentů setrvačnosti:

$$I_y = I_{xy} + I_{yz}. \quad (3.16)$$

Pro výpočet I_{yz} lze jako element zvolit kruhovou desku poloměru R , tloušťky dx rovnoběžnou s rovinou yz ve vzdálenosti x :

$$I_{yz} = \int_{m(T)} x^2 dm = \pi R^2 \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} \pi R^2 \rho l^3 = \frac{1}{12} ml^2. \quad (3.17)$$

Nyní je nutno určit moment setrvačnosti k rovině xy . Vyjdeme z definice momentu setrvačnosti k ose x :

$$I_x = I_{xy} + I_{xz} = 2I_{xy},$$

poněvadž válec je osově souměrný. Bude tedy s využitím rovnice (3.15) platit

$$I_{xy} = \frac{1}{2}I_x = \frac{1}{4}mR^2 \quad (3.18)$$

a dosazením rovnic (3.17) a (3.18) do rovnice (3.16) obdržíme:

$$I_y = I_z = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2. \quad (3.19)$$

Neřešené příklady^[autor]

Jak se změní výsledek pro tenké kotouče, u nichž je $l \ll R$, a jak pro dlouhé, tenké, homogenní tyče, u nichž je $l \gg R$?

Závěr

Závěrem bych chtěla podotknout, že tato práce zdaleka nepokrývá veškerý výčet matematických modelů používaných ve fyzice. Řadu dalších modelů, jako např. rovnici vedení tepla či rovnici kontinuity lze nalézt v [1]. Tuto velmi obsáhlou publikaci doporučuji zájemcům, neboť právě tato kniha mi byla motivací k napsání této práce.

Seznam použité literatury

- [1] Borrelli R. L., Coleman C. S.: *Differential equations: a modeling perspective*, John Wiley Sons, New York, 1998.
- [2] Čihák P., Čerych J., Kopáček J.: *Příklady z matematiky pro fyziky V.*, MATFYZPRESS, Praha, 2003.
- [3] Durand G.: *Jak porozumím počtu integrálnímu*, Nakladatelství Vladimír Orel, Praha, 1931.
- [4] Filipčuková A.: *Bakalářská práce*, Brno, 2011.
- [5] Fulford G., Forrester P., Jones A.: *Modelling with differential and difference equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: *Fyzika*, Vutium-Prometheus, Brno-Praha, 2000.
- [7] Kalas J., Kuben J.: *Integrální počet funkcí více proměnných*, Masarykova univerzita, Brno, 2009.
- [8] Kratochvíl C., Slavík J.: *Mechanika těles Dynamika*, PC-DIR, spol. s r. o.-Nakladatelství, Brno, 1997.
- [9] Kuben J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Vojenská akademie, Brno, 1998.
- [10] Kvasnica J.: *Matematický aparát fyziky*, Academia, Praha, 1989.
- [11] Nováková E., Hyánková M., Průcha L.: *Laplaceova transformace - studijní text pro cvičení v předmětu „Matematika - 2“*
- [12] Pírko Z., Veit J.: *Laplaceova transformace*, SNTL-ALFA, Praha-Bratislava, 1972.
- [13] Ungermann Z.: *Matematika a řešení fyzikálních úloh*, SPN, Praha, 1990.