MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Bakalářská práce

Brno,2007

Michal Cífka

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval prof. RNDr. Miroslavu Bartuškovi, DrSc. za cenné rady, připomínky a čas, který mi věnoval.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Miroslava Bartuška, DrSc. a s použitím uvedené literatury.

V Brně 25.5.2007

....

Michal Cífka

Úvod

Křivkový integrál je pojem důležitý zejména kvůli jeho využití ve fyzice, mechanice a v geometrii. Definuje se jím např. práce síly po křivočaré dráze a také se jím vyjadřuje tok vektoru křivkou. Tato praktická využití probereme v kapitole věnované aplikaci křivkového integrálu 2.druhu, ale nejdříve přikročíme k samotné definici křivkového integrálu a jeho členění.

K definici křivkového integrálu využijeme několik pojmů vztahujících se k problematice integrálního počtu, které sesumarizujeme v úvodní kapitole. Ve druhé kapitole se budeme zabývat křivkovým integrálem 1.druhu; velký prostor věnujeme především jeho vlastnostem a aplikacím. V poslední kapitole podrobně probereme křivkový integrál 2.druhu, vzájemný vztah křivkových integrálů 1. a 2.druhu a na závěr také Greenovu větu, s jejíž pomocí lze převádět křivkový integrál 2.druhu po uzavřené křivce na dvojný integrál.

Obsah

Kapitola 1

Úvodní pojmy

Na úvod si uvedeme několik základních pojmů a definic vztahujících se k problematice integrálního počtu, resp. křivkového integrálu, bez kterých se v dalším výkladu neobejdeme. Jejich hlubší analýzu lze najít v doporučené literatuře uvedené na konci práce, zejména pak v publikacích [1, 4].

1.1 Topologické zobrazení

Definice 1.1.1. Buď $M \subset \mathbb{E}^m$ a $N \subset \mathbb{E}^n$ neprázdné množiny. F je zobrazení množiny M na množinu N, bod x_0 je libovolným bodem množiny M. Řekneme, že zobrazení F je **spojité v bodě** x_0, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý bod $x \in M$, pro nějž je $\rho_1(x, x_0) < \delta$, je také $\rho_2[F(x), F(x_0)] < \varepsilon$. V případě, že je zobrazení F spojité ve všech bodech množiny M, jedná se o **spojité zobrazení** množiny M na množinu N.

Poznámka. Výrazem $\rho_1(x, x_0)$, je definována metrika(vzdálenost bodů x, x_0). Více v textech o metrických prostorech(např.[3]).

Zobrazení množiny M na množinu N je tedy dáno systémem n funkcí m proměnných:

$$\begin{aligned}
&y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m)\\
&y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m)\\
&\vdots\\
&y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m)
\end{aligned} \tag{*}$$

Tímto systémem rovnic je každému bodu $[x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m] \subset M$ přiřazen bod $[f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)] \subset N$.Spojité zobrazení množiny M na nějakou podmnožinu množiny $\mathbb{E}^1$ nazýváme **spojitou funkcí** definovanou na množině M.

Věta 1.1. *Buď F zobrazení množiny $M \subset \mathbb{E}^m$ na množinu $N \subset \mathbb{E}^n$ dané systémem funkcí (*). Pak je toto zobrazení **spojité**, právě když funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jsou spojité v množině M.*

Definice 1.1.2. Buď F opět zobrazení množiny $M \subset \mathbb{E}^m$ na množinu $N \subset \mathbb{E}^n$ a nechť M, N jsou neprázdné množiny. Zobrazení F se nazývá **topologické zobrazení** množiny M na množinu N, jestliže ma F tyto vlastnosti:

- F je prosté
- F je spojité
- F^{-1} je spojité(F^{-1} je inverzní zobrazení F)

Tvrzení. O množině N říkáme, že je topologickým obrazem množiny M při zobrazení F. Zřejmě je také M topologickým obrazem množiny N. Dvě množiny, z nichž jedna je topologickým obrazem druhé, nazýváme **homeomorfní**. Jsou-li dány dva uzavřené intervaly, pak jsou vždy homeomorfní. Jinak řečeno; topologický obraz určitého uzavřeného intervalu je topologickým obrazem kteréhokoliv uzavřeného intervalu.

Definice 1.1.3. Topologický obraz uzavřeného intervalu ležící v $\mathbb{E}^n$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$, se nazývá **oblouk**(přesněji jednoduchý nebo Jordanův). Krajními body oblouku nazýváme obrazy krajních bodů intervalu.

Definice 1.1.4. Nechť jsou $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ spojité funkce a nechť zobrazení přiřazující bodu $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ bod $[\varphi(t), \psi(t)]$ je prosté. Potom množina všech bodů $[\varphi(t), \psi(t)]$ pro $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ je oblouk. Dané vyjádření oblouku nazýváme **parametrické**.

Poznámka. Skutečně; našimi rovnicemi je podle Věty 1. dáno spojité zobrazení intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ na jeho podmnožinu v $\mathbb{E}^2$ a toto zobrazení je topologické.

Definice 1.1.5. Máme-li dány dvě kružnice, pak jsou vždy homeomorfní. Takže topologický obraz jisté kružnice je topologickým obrazem jakékoliv jiné kružnice. Topologický obraz kružnice, která leží v $\mathbb{E}^n, n = 2, 3, \ldots$, se nazývá **uzavřená křivka**($F(\alpha) = F(\beta)$ pro $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$).

Příklad 1. Nechť jsou $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ dvě funkce spojité v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Nechť hodnotám $t = \alpha, t = \beta$ odpovídá tentýž bod; jinak nechť různým hodnotám parametru t náleží různé body v $\mathbb{E}^2$. Představme si nyní, že interval $\langle\alpha, \beta\rangle$ svineme do kružnice tak, že body α, β splynou. Pak jsou k různým bodům kružnice přiřazeny různé body v $\mathbb{E}^2$. Naše rovnice tedy dávají spojitý a prostý obraz kružnice podle Věty 1.1. a tento obraz je topologický podle Definice 1.1.2..Naše rovnice tedy vyjadřují uzavřenou křivku; toto vyjádření podle Definice 1.1.4. nazýváme parametrické.

Poznámka. Oblouky a uzavřené křivky nazýváme jednoduše **křivkami**.

Definice 1.1.6. Buď C křivka, $C_1, C_2, \ldots, C_p$ takové oblouky, že $C = \bigcup_{i=1}^{p} C_i$ a nechť libovolné dva oblouky C_i, C_j, kde $i \neq j$, mají společné nejvýše krajní body. Pak říkáme, že systém oblouků $C_1, C_2, \ldots, C_p$ je **dělením křivky** C.

Definice 1.1.7. Buď C křivka a D její dělení s dílky $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Číslo

$$\max_{1 \leq i \leq p} \{d(C_i)\}$$

se nazývá **norma dělení** D a značíme ji $\nu(D)$.

Poznámka. Číslo d představuje v této definici vzdálenost v Euklidovské metrice; velikost jednotlivých dílků C_i. Normou dělení tedy nazveme největší dílek C_i při dělení D.

Definice 1.1.8. Buď C křivka a $\{D_n\}$ posloupnost jejích dělení. Je-li

$$\lim_{n \to \infty} \nu(D_n) = 0$$

říkáme, že daná **posloupnost dělení je nulová**(posloupnost norem různých dělení jde limitně do nuly - normy jsou čím dál menší).

Definice 1.1.9. Otevřená množina G v $\mathbb{E}^n$ se nazývá **n-rozměrná oblast**, jestliže k libovolným dvěma různým bodům $x, y \in G$ existuje oblouk C tak, že x, y jsou jeho krajními body a křivka $C \subset G$.

Věta 1.2. *(Jordanova) Buď C uzavřená křivka v $\mathbb{E}^2$. Potom množina $\mathbb{E}^2 - C$ je tvořena sjednocením dvou dvojrozměrných oblastí, z nichž jedna je omezená - vnitřek křivky C; druhá je neomezená - vnějšek křivky C. Křivka C je pak hranicí svého vnitřku a vnějšku.*

Poznámka. Dvourozměrná oblast G se nazývá **jednoduše souvislá**, jestliže je její částí vnitřek každé uzavřené křivky C, pro niž je $C \subset G$.

1.2 Orientace

Chceme-li orientovat uzavřený interval $\langle \alpha, \beta \rangle$, znamená to uspořádat jej buď podle velikosti jeho čísel anebo obráceně. Potom je jedno z čísel α, β prvním a druhé posledním prvkem intervalu.

Definice 1.2.1. Buď $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ parametrické vyjádření křivky C. Budeme předpokládat, že interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ je uspořádán podle velikosti svých čísel. Přeneseme-li toto uspořádání na křivku, můžeme říci, že křivka je orientována **souhlasně s daným parametrickým vyjádřením**. Přeneseme-li na křivku opačné uspořádání intervalu, je křivka orientován nesouhlasně s daným parametrickým vyjádřením.

Orientovat kružnici znamená udat na ní smysl oběhu proti, anebo ve směru oběhu hodinových ručiček.Podobně lze orientovat i orientovanou uzavřenou křivku v rovině(při orientaci proti směru oběhu hodinových ručiček leží vnitřek na levé straně křivky, při opačné orientaci na pravé).
Orientovat uzavřený kruh znamená orientovat všechny uzavřené křivky na něm buď ve směru nebo proti směru oběhu hodinových ručiček.

Poznámka. Při stanovení orientace kružnice či uzavřené křivky budeme považovat orientaci proti směru oběhu hodinových ručiček za kladnou, orientaci proti směru oběhu za zápornou.

Příklad 2. Buď dán oblouk s parametrickým vyjádřením $x = a\cos t, y = b\sin t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Při souhlasné orientaci s daným parametrickým vyjádřením je bod $[a, 0]$ prvním bodem a bod $[0, b]$ posledním bodem oblouku.

$$t = 0: \qquad \begin{aligned} x &= a \cdot \cos 0 = a \\ y &= b \cdot \sin 0 = 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow [a, 0]$$

$$t = \frac{\pi}{2}: \qquad \begin{aligned} x &= a \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ y &= b \cdot \sin \frac{\pi}{2} = b \end{aligned} \qquad \Rightarrow [0, b]$$

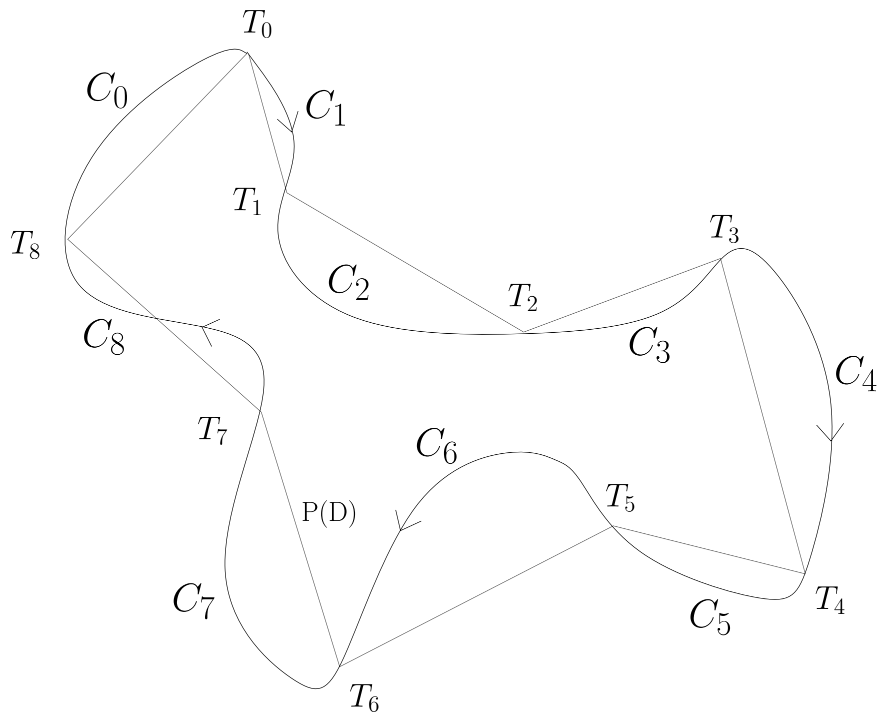
Poznámka. Poznamenejme, že orientací uzavřené křivky C je dána současně orientace pro všechny oblouky ležící na C. Křivka C je totiž topologickým obrazem orientované kružnice K, oblouky na C jsou topologickými obrazy oblouků na K. je-li L oblouk na K, pak existuje bod $x \in K - L$. Snadno se zjistí, že orientaccí na K je definováno uspořádání na L a tedy i na křivce C. Tuto orientaci oblouku ležícího na C nazýváme **orientací indukovanou orientací uzavřené křivky** C.

Definice 1.2.2. Mějme navzájem různé body $T_0, T_1, \ldots, T_p$ v rovině. Pak sjednocení orientovaných úseček $\overline{T_0T_1}, \overline{T_1T_2}, \ldots, \overline{T_{p-1}T_p}$nazveme **lomenou čarou** a označíme ji $T_0T_1 \ldots T_p$.

Tvrzení. Buď C orientovaný oblouk, D jeho dělení. Předpokládejme, že orientace oblouku C udává toto pořadí dílků dělení: $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Označme T_{i-1}, T_i první a poslední bod oblouku $C_i (i = 1, 2, \ldots, p)$. Body $T_0, T_1, \ldots, T_p$ nazveme dělícími body dělení D. Je zřejmé, že dělícími body je dělení orientovaného oblouku určeno.

Definice 1.2.3. Nechť jsou $T_0, T_1, \ldots, T_p$ navzájem různé body v rovině. Pak sjednocení orientovaných úseček $\overline{T_0T_1}, \overline{T_1T_2}, \ldots, \overline{T_{p-1}T_p}, \overline{T_pT_0}$ nazveme **uzavřenou lomenou čarou** a označíme ji $T_0T_1 \ldots T_pT_0$.

Tvrzení. Buď C uzavřená orientovaná křivka, D její dělení. Opět předpokládejme, že orientace křivky C udává toto pořadí dílků dělení: $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_p$. Označíme T_{i-1}, T_i první a poslední bod oblouku C_i pro $i = 1, 2, \ldots, p$. Prvním a posledním bodem oblouku C_0 jsou tedy body T_p, T_0(viz obr.1).Tyto body nazveme dělícími body dělení D. Je zřejmé, že dělícími body je zase naopak určeno dělení uzavřené orientované křivky. Uzavřenou lomenou čáru $T_0T_1 \ldots T_pT_0$ označíme $P(D)$.(viz obr.1.1)



Obrázek 1.1: Uzavřená lomená čára $P(D)$

1.3 Hladká křivka

Věta 1.3. *Buď C oblouk s parametrickým vyjádřením $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Nechť funkce $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ mají v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojité derivace $\varphi'(t), \psi'(t)$ a nechť matice*

$$(\varphi'(t), \psi'(t))$$

*má hodnost 1 pro každé $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Jinak řečeno; pro každý bod $t \in (\alpha, \beta)$ je alespoň jedna z uvedených derivací různá od nuly. V bodě $t = \alpha$ musí existovat derivace zprava, v bodě $t = \beta$ derivace zleva. Pak řekneme, že C je **hladký oblouk** v $\mathbb{E}^2$.*

Poznámka. Hladký oblouk v prostoru $\mathbb{E}^3$ se definuje analogicky. V tomto případě parametrizace je zobrazení intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ reprezentováno třemi funkcemi $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ a tedy jejich matice derivací

$$(\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t))$$

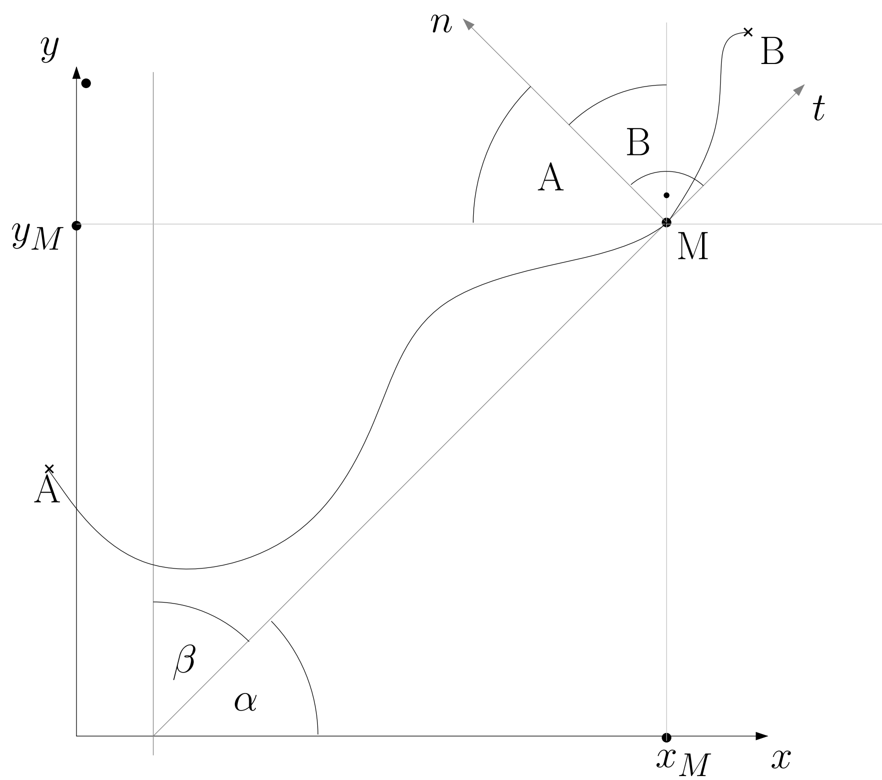
má pro každé $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ hodnost 1.

Příklad 3. Oblouk s parametrickým vyjádřením $x = a \sin t, y = b \cos t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je hladký, neboť funkce $\varphi(t) = a \sin t, \psi(t) = b \cos t$ mají v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ spojité derivace $\varphi'(t) = a \cos t, \psi'(t) = -b \sin t$, které nejsou v žádném bodě intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ současně rovny nule.

Definice 1.3.1. Buď C křivka. Nechť $C_1, C_2, \ldots, C_p$ je systém hladkých křivek oblouků, které tvoří dělení křivky C. Pak řekneme, že křivka C je **po částech hladká** a oblouky $C_1, C_2, \ldots, C_p$ nazýváme jejími hladkými částmi.

Definice 1.3.2. Buď C hladká orientovaná křivka, bod P její bod o souřadnicích $[x, y]$. Bodem P veďme tečnu t. Směrové úhly orientované tečny orientovaného oblouku v bodě o souřadnicích $[x, y]$ budeme vždy značit $\alpha(x, y), \beta(x, y)$. Vedeme-li bodem P přímku kolmou k tečně v tomto bodě, nazveme ji **normálou** v tomto bodě. Normálu orientujeme tak, že úhel od orientované tečny k orientované normále je $+\frac{\pi}{2}$. Takto orientovanou normálu v bodě P nazveme **orientovanou normálou** v tomto bodě a její směrové úhly označíme $A(x, y), B(x, y)$.(viz obr.1.2) Zřejmě platí

$$\cos A(x, y) = -\cos\beta(x, y), \cos B(x, y) = \cos\alpha(x, y).$$



Obrázek 1.2: Orientovaná tečna a normála

Definice 1.3.3. Jestliže je C hladký orientovaný oblouk s parametrickým vyjádřením $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ a jestliže jeho bod P má parametr t, pak pro jeho směrový úhel α příslušný k orientované tečně v bodě P platí

$$\cos\alpha(t) = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}}$$

při souhlasné orientaci s daným parametrickým vyjádřením(při orientaci nesouhlasné bude před zlomkem znaménko minus). Odvození tohoto vyjádření můžeme najít v [1].

1.4 Aproximace křivek lomenými čarami

Definice 1.4.1. Buď P lomená čára. Její **délkou** rozumíme součet délek jejích úseček (označíme ji $L(P)$). Buď C křivka s libovolnou orientací. Pak ke každému dělení D křivky C patří lomená čára, případně uzavřená lomená čára $P(D)$.

Definice 1.4.2. Označme $\mathfrak{D}$ množinu všech dělení křivky C. Uvažujme nyní o množině $L[P(D)], D \in \mathfrak{D}$ (množina délek lomených čar při různých děleních), která je definována takto:v případě, že je shora omezená, klademe

$$L(C) = \sup_{D \in \mathfrak{D}} L[P(D)].$$

Není-li shora omezená, klademe $L(C) = +\infty$. Číslo $L(C)$ nazýváme **délkou křivky** C**.** Je-li $L(C) < +\infty$, říkáme, že daná křivka C je **retifikace schopná.**

Poznámka. Z definice délky křivky je vidět,že délka není závislá na tom kterou z orientací křivky použijeme.

Poznámka. Je-li K křivka schopná retifikace a C oblouk, který je částí K, je oblouk C retifikace schopen.

Věta 1.4. *Buď C křivka, $D1, D2$ dvě její dělení. Nechť dělení $D2$ je* ***zjemněním*** *dělení $D1$, tj. každý dílek dělení $D2$ je částí některého dílku dělení $D1$. Pak*

$$L[P(D2)] \geq L[P(D1)].$$

Poznámka. Důkaz plyne z trojúhelníkové nerovnosti a je rozpracován v [1].

Věta 1.5. *Buď C křivka. Nechť dále křivky $C1, C2$ tvoří její dělení. Pak*

$$L(C) = L(C1) + L(C2).$$

Věta 1.6. *Buď C uzavřená orientovaná po částech hladká křivka, $\delta > 0$ libovolné číslo. Pak existuje dělení D křivky C o normě menší než δ tak, že $P(D)$ je uzavřená orientovaná křivka.*

Věta 1.7. *Buď C oblouk s parametrickým vyjádřením $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Nechť funkce $\varphi(t), \psi(t)$ mají v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojité derivace $\varphi'(t), \psi'(t)$. Pak je oblouk C retifikace schopen a pro jeho délku platí*

$$L(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Dle předchozí věty lze počítat i délky křivek po částech hladkých.

Příklad 4. Výpočet délky křivky dané parametricky takto: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, a > 0$.

$$L(C) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\left(a\cos^3 t\right)'^2 + (a\sin^3 t)'^2}\, \mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\sin t\cos^2 t)^2 + (3a\cos t\sin^2 t)^2}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^4 t + 9a^2\cos^2 t\sin^4 t}\, \mathrm{d}t = 3a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(\sin^2 t\cos^2 t)\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}}\, \mathrm{d}t =$$

$$= 3a\int\limits_0^{\pi/2} \sin t\cos t\, \mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} \sin t = x \\ \cos t\, \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| \Rightarrow 3a\int\limits_0^{1} x\, \mathrm{d}x = 3a\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = 3a \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}\, a.$$

Délka křivky je $\frac{3}{2}\, a$.

Příklad 5. Výpočet délky křivky v E^3 zadané parametricky takto:$x = a\cos t, y = a\sin t$, $z = bt, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0, b > 0$

$$L(C) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(a\cos t)'^2 + (a\sin t)'^2 + (bt)'^2}\, \mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, \mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1} + b^2}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}t = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot [t]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Délka křivky je $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

Kapitola 2

Křivkový integrál 1.druhu

K definici křivkového integrálu prvního druhu využijeme několik tvrzení z předchozí kapitoly a také předpokládáme znalost teorie Riemannova integrálu.
Pro větší názornost budeme formulovat následující výklad pouze v souvislosti s dvourozměrným prostorem $\mathbb{R}^2$. Z našich úvah však bude bude bezprostředně vidět, jak lze transformovat uvedené věty v libovolném n-rozměrném prostoru.

2.1 Definice křivkového integrálu 1.druhu

Definice 2.1.1. Buď C hladká (po částech hladká) křivka v rovině s krajními body $A, B(C = \widehat{AB})$. Dále uvažujme ohraničenou reálnou funkci $f = f(x, y)$, jejíž definiční obor obsahuje křivku C, tzn. funkce $f = f(x, y)$ je definována v každém bodě křivky C. Nechť D je dělení křivky C dané dělícími body $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$. Délku i-tého oblouku $\widehat{A_{i-1}A_i}$ označíme $\triangle(l_i)$.

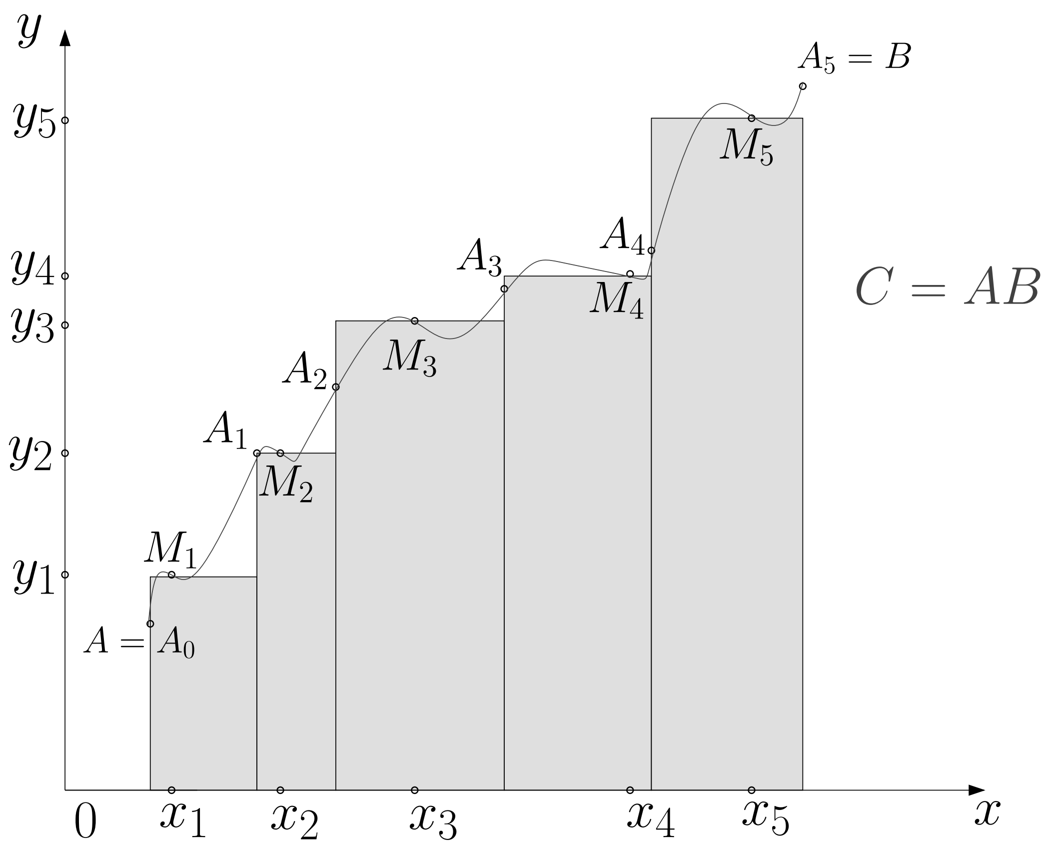
Definice 2.1.2. Nechť $M_i = (x_i, y_i)$ jsou takové body, že $M_i \in \widehat{A_{i-1}A_i}, i = 1, 2, \ldots, n$. Bod M_i nazýváme **reprezentantem** i-tého oblouku dělení D křivky $C(M_i$ je libovolným bodem oblouku $\widehat{A_{i-1}A_i})$.

Definice 2.1.3. Analogicky s teorií Riemannova integrálu definujeme číslo

$$S(D, \mathbb{M}, f) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\triangle(l_i)$$

jako **intergální součet** příslušný k dělení D, výběru reprezentantů $\mathbb{M} = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$ a funkci f na křivce C.(viz obr.2.1)

Poznámka. Tomuto integrálnímu součtu říkáme přesněji integrální součet 1.druhu.



Obrázek 2.1: Integrální součet 1.druhu

Věta 2.1. *Uvažujme nulovou posloupnost dělení* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *křivky* C *a také definujme* $\mathbb{M}^n$ *jako libovolný výběr reprezentantů příslušných dílkům dělení* D_n*. Jestliže pro každou nulovou posloupnost* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *mají posloupnosti integrálních součtů* $\{S(D_n, \mathbb{M}^n, f)\}_{n=1}^{\infty}$ *konečnou limitu nezávislou na výběru reprezentantů* $\{\mathbb{M}^n\}$ *a dělení* $\{D_n\}$*, pak číslo*

$$\lim_{n\to\infty} S(D_n, \mathbb{M}^n, f)$$

nazýváme ***křivkovým integrálem 1.druhu*** *funkce* f *po křivce* C *a značíme jej*

$$\int\limits_C f(x, y)\,\mathrm{d}s.$$

Poznámka. Křivkové integrály po hladkých křivkách nezávisí na parametrickém vyjádření těchto oblouků (tzn., že křivkové integrály vypočtené užitím libovolných dvou parametrických vyjádření jsou si rovny). Odtud se snadno odvodí, že integrály po křivkách po částech hladkých nezávisí ani na způsobu dělení v hladké části ani na parametrickém vyjádření těchto hladkých částí.

2.2 Základní vlastnosti křivkových integrálů 1.druhu

Věta 2.2. *Nechť C je orientovaná křivka, $f_1(x,y), f_2(x,y)$ jsou funkce spojité na C a c_1, c_2 jsou nějaké konstanty. Nechť dále existují křivkové integrály $\int\limits_C f_1(x,y)\,\mathrm{d}s$ a $\int\limits_C f_2(x,y)\,\mathrm{d}s$. Pak existuje také křivkový integrál $\int\limits_C [c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)]\,\mathrm{d}s$ a platí*

$$\int\limits_C [c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)]\,\mathrm{d}s = c_1 \int\limits_C f_1(x,y)\,\mathrm{d}s + c_2 \int\limits_C f_2(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

Integrál je tedy lineární vzhledem k integrandu.

Věta 2.3. *Nechť C je orientovaná křivka skládající se z orientovaných křivek C_1 a C_2, přičemž poslední bod křivky C_1 je počátečním bodem křivky C_2. Nechť $f(x,y)$ je funkce spojitá na C a dále nechť existují integrály $\int\limits_{C_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s$ a $\int\limits_{C_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s$. Pak existuje také integrál $\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s$ a platí*

$$\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{C_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{C_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

Integrál je aditivní k integrační cestě.

Poznámka. Zřejmě pak pro p disjunktních částí křivky C platí

$$\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{C_i} f(x,y)\,\mathrm{d}s, i = 1, 2, \ldots, p.$$

Věta 2.4. *Nechť C je orientovaná křivka. Nechť křivka $\overline{C}$ vznikne z křivky C změnou orientace. Dále nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na C a existuje křivkový integrál $\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s$. Pak existuje také křivkový integrál $\int\limits_{\overline{C}} f(x,y)\,\mathrm{d}s$ a platí*

$$\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\overline{C}} f(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

Integrál nezávisí na orientaci ke křivce C.

Poznámka. Je-li křivka C zadána předpisem $C = \widehat{AB}$, pak zřejmě platí

$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\widehat{BA}} f(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

Věta 2.5. *Nechť $C = \widehat{AB}$ je orientovaná křivka definovaná parametricky $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Funkce $\varphi(t), \psi(t)$ jsou spojité a $\varphi'(t), \psi'(t)$ jsou po částech spojité na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Dále předpokládejme, že $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pak platí*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

kde $A = [\varphi(\alpha), \psi(\alpha)]$ a $B = [\varphi(\beta), \psi(\beta)]$.

Poznámka. V n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ by měla tato věta tvar

$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

kde $(x_i)_{i=1}^n = (\varphi_i(t))_{i=1}^n, t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ je parametrické zadání křivky $C = \widehat{AB}$.

Věta 2.6. *Nechť je $C = \widehat{AB}$ hladká křivka definovaná rovnicí $y = g(x)$, kde $x \in \langle a, b \rangle$. Předpokládejme dále, že funkce $g(x)$ je spojitá a funkce $g'(x)$ je po částech spojitá na C. Potom z Věty 2.5. plyne*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{a}^{b} f(x, g(x)) \cdot \sqrt{1 + g'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 6. Vypočtěte $\int\limits_C xy\,\mathrm{d}s$, kde C je hladký orientovaný oblouk o parametrickém vyjádření $x = r\cos t, y = r\sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle, r > 0$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_C xy\,\mathrm{d}s &= \int\limits_0^{\pi} r\cos t \cdot r\sin t \cdot \sqrt{(r\cos t)'^2 + (r\sin t)'^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= r^2 \int\limits_0^{\pi} \cos t \sin t \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = r^2 \int\limits_0^{\pi} \cos t \sin t \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \\
&= r^2 \int\limits_0^{\pi} \cos t \sin t \sqrt{r^2 \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}}\,\mathrm{d}t = r^3 \int\limits_0^{\pi} \cos t \sin t\,\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} \sin t = x \\ \cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right| \Rightarrow \\
&\Rightarrow r^3 \int\limits_0^{0} x\,\mathrm{d}x = r^3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^0 = 0.
\end{aligned}$$

2.3 Aplikace křivkového integrálu 1.druhu

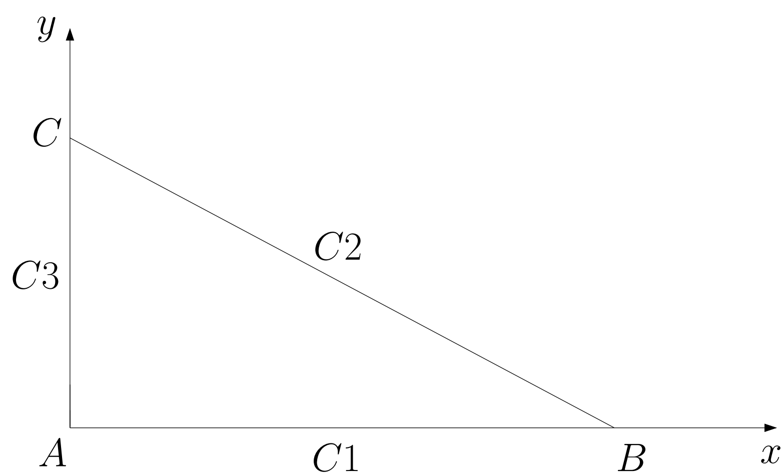
Křivkový integrál 1.druhu využíváme především v geometrii a v mechanice. Jak jsme již uvedli v Kapitole 1 Úvodní pojmy, je-li křivka C po částech hladká, můžeme její délku $L(C)$ vypočítat podle vzorce $L(C) = \int\limits_C \mathrm{d}s$.

Poznámka. Je-li křivka zadána předpisem $C : y = f(x), x \in \langle a, b\rangle$, pak pro její délku platí

$$L(C) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Definice 2.3.1. Křivkovým integrálem $P(C) = \int\limits_C f(x, y)\ \mathrm{d}s$ lze definovat plošný obsah válcové plochy nad rovinnou křivkou C od souřadnicové roviny xy; je shora ukončený plochou $z = f(x, y)$.

Příklad 7. Spočti křivkový integrál $P(C) = \int\limits_C (x + y)\ \mathrm{d}s$, je-li křivka C určena vrcholy $A = [0, 0], B = [2, 0], C = [0, 1]$.(viz obr.2.2)



Obrázek 2.2: Trojúhelník ABC

a) $x = t, y = 0, t \in \langle 0, 2\rangle$,
$P(C_1) = \int\limits_0^2 (t + 0) \cdot \sqrt{t'^2 + 0'^2}\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^2 t\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2$,

b) $y = -\frac{x}{2} + 1$,
$P(C_2) = \int\limits_0^2 (x + (-\frac{x}{2} + 1)) \cdot \sqrt{1 + (-\frac{x}{2} + 1)'^2}\ \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 (\frac{x}{2} + 1) \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\ \mathrm{d}x =$

$$= \int_0^2 (\tfrac{x}{2}+1)\cdot \tfrac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^2 + [x]_0^2\right) = \tfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot(1+2) = \tfrac{3\sqrt{5}}{2}\,,$$

c) $x = 0, y = t, t \in \langle 0,1\rangle$,
$P(C_3) = \int_0^1 (0+t)\cdot\sqrt{0'^2+t'^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}$,
$\mathbf{P(C)} = P(C_1)+P(C_2)+P(C_3) = 2 + \tfrac{3\sqrt{5}}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5+3\sqrt{5}}{2}$.

Další kategorií, kterou definujeme pro křivkový integrál 1.druhu a která nachází své uplatnění zejména v mechanice, je tzv. **hmotnost** rovinné křivky C. Značíme ji $m(C)$ a v $\mathbb{R}^2$ ji počítáme takto:

$$m(C) = \int_C \mu(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

kde $\mu(x,y)$ je hustota rovinné křivky $C = \widehat{AB}$ v libovolném bodě $[x,y]$ křivky C.

Poznámka. Analogicky lze samozřejmě odvodit formuli i v prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$m(C) = \int_C \mu(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}s.$$

Hmotnost křivky se využívá nejvíce při výpočtu souřadnic **těžiště** $T = [x_0,y_0]$ křivky C (v $\mathbb{R}^2$). Souřadnice x_0, y_0 spočítáme takto:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_C x\cdot\mu(x,y)\,\mathrm{d}s, \qquad y_0 = \frac{1}{m}\int_C y\cdot\mu(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

kde integrály na pravé straně jsou příslušné **statické momenty**. Statický moment vzhledem k ose x označujeme S_x, k ose y jej značíme S_y.
Z předchozích tvrzení tedy vidíme, že pro statické momenty platí

$$S_x = \int_C y\cdot\mu(x,y)\,\mathrm{d}s, \qquad S_y = \int_C x\cdot\mu(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

Souřadnice těžiště $T = [x_0,y_0]$ jsou tedy

$$x_0 = \frac{S_y}{m}\,, \qquad y_0 = \frac{S_x}{m}\,.$$

Pro křivku v rovině danou grafem funkce $y = f(x), x \in \langle a, b\rangle$ je tedy hmotnost

$$m(C) = \int_a^b \mu(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Pro statický moment vzhledem k ose x, popřípadě k ose y, platí

$$S_x = \int_a^b y \cdot \mu(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x, \qquad S_y = \int_a^b x \cdot \mu(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Pro rovinnou křivku danou parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ je vzorec pro hmotnost

$$m(C) = \int_\alpha^\beta \mu(t) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, \mathrm{d}t$$

a pro příslušné statické momenty

$$S_x = \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \mu(t) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, \mathrm{d}t, \qquad S_y = \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cdot \mu(t) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, \mathrm{d}t.$$

Poslední aplikací křivkového integrálu 1.druhu, kterou si zde uvedeme, je výpočet **momentů setrvačnosti** vzhledem k ose x, resp. k ose y:

$$I_x = \int_C y^2 \cdot \mu(x, y)\, \mathrm{d}s, \qquad I_y = \int_C x^2 \cdot \mu(x, y)\, \mathrm{d}s.$$

Pro rovinnou křivku zadanou grafem funkce $y = f(x), a \leq x \leq b$ je tedy

$$I_x = \int_a^b y^2 \cdot \mu(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x, \qquad I_y = \int_a^b x^2 \cdot \mu(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Pro rovinnou křivku danou parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ platí

$$I_x = \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \cdot \mu(t) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, \mathrm{d}t, \qquad I_y = \int_\alpha^\beta \varphi^2(t) \cdot \mu(t) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, \mathrm{d}t.$$

Poznámka. Při výpočtu momentů setrvačnosti vzhledem k počátku je vzdálenost v kartézských souřadnicích rovna $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ (viz. Pythagorova věta).

Příklad 8. Urči souřadnice těžiště $T = [x_0, y_0]$ rovinné křivky (oblouku cykloidy) dané parametricky $\varphi(t) = x = a \cdot (t - \sin t), \psi(t) = y = a \cdot (1 - \cos t), t \in \langle 0, \pi \rangle, \mu(x, y) = 1$.

Pro výpočet souřadnic těžiště potřebujeme nejdříve spočítat hmotnost křivky $m(C)$.

$$m(C) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mu(t) \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\ \mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\pi} 1 \cdot \sqrt{(at - a\sin t)'^2 + (a - a\cos t)'^2}\ \mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\ \mathrm{d}t = a \cdot \int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\ \mathrm{d}t =$$
$$= \sqrt{2}a \cdot \int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{1 - \cos t}\ \mathrm{d}t = \sqrt{2}a \cdot \int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{2\sin^2 \tfrac{t}{2}}\ \mathrm{d}t = 2a \int\limits_{0}^{\pi} \sin \tfrac{t}{2}\ \mathrm{d}t =$$
$$= 2a \cdot \left[-2\cos \tfrac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 2a \cdot 2 = 4a,$$

$\mathbf{T} = [\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}]$,

$$x_0 = \tfrac{1}{4a} \int\limits_{0}^{\pi} a \cdot (t - \sin t) \cdot 2a \cdot \sin \tfrac{t}{2}\ \mathrm{d}t = \tfrac{a}{2} \left(\underbrace{\int\limits_{0}^{\pi} t \cdot \sin \frac{t}{2}\ \mathrm{d}t}_{J_1} - \underbrace{\int\limits_{0}^{\pi} \sin t \cdot \sin \frac{t}{2}\ \mathrm{d}t}_{J_2} \right),$$

$$J_1 = \int\limits_{0}^{\pi} t \cdot \sin \tfrac{t}{2}\ \mathrm{d}t = \left[-2\cos \tfrac{t}{2} + 4\sin \tfrac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 4,$$
$$J_2 = \int\limits_{0}^{\pi} \sin t \cdot \sin \tfrac{t}{2}\ \mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\pi} 2 \cdot \sin^2 \tfrac{t}{2} \cdot \cos \tfrac{t}{2}\ \mathrm{d}t = 4 \cdot \left[\frac{\sin^3 \frac{t}{2}}{3}\right]_0^{\pi} = \tfrac{4}{3},$$

$$x_0 = \tfrac{a}{2} \cdot (4 - \tfrac{4}{3}) = \tfrac{a}{2} \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{4a}{3},$$
$$y_0 = \tfrac{1}{4a} \int\limits_{0}^{\pi} a \cdot (1 - \cos t) \cdot 2a \cdot \sin \tfrac{t}{2}\ \mathrm{d}t = \tfrac{a}{2} \int\limits_{0}^{\pi} (1 - \cos t) \cdot \sin \tfrac{t}{2}\ \mathrm{d}t = \tfrac{a}{2} \int\limits_{0}^{\pi} 2\sin^2 \tfrac{t}{2} \cdot \sin \tfrac{t}{2}\ \mathrm{d}t =$$
$$= a \int\limits_{0}^{\pi} \sin^3 \tfrac{t}{2}\ \mathrm{d}t = a \cdot \tfrac{4}{3} = \tfrac{4a}{3}\ ,$$

$\mathbf{T} = \left[\frac{\mathbf{4a}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{4a}}{\mathbf{3}}\right]$.

Souřadnice těžiště jsou $T = \left[\frac{4a}{3}, \frac{4a}{3}\right]$.

Kapitola 3

Křivkový integrál 2.druhu

3.1 Definice křivkového integrálu 2.druhu

Podobně jako při definici křivkového integrálu 1.druhu uvažujeme rovinnou křivku $C = \widehat{AB}$, která je hladká(po částech hladká). Nechť jsou dále $P = P(x, y)$ a $Q = Q(x, y)$ funkce spojité na otevřené množině obsahující křivku C.

Buď D libovolné dělení křivky C dané dělícími body $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$. Délka i-tého oblouku $\widehat{A_{i-1}A_i}$ opět značíme $\triangle(l_i)$. Stejně tak označme body $M_i = [x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jako reprezentanty i-tého oblouku $\widehat{A_{i-1}A_i}$ při dělení D křivky C.

Navíc ale uvažujme orientaci křivky C - může být pouze dvojí - je-li souhlasně orientována s daným parametrickým vyjádřením, klademe $\varepsilon = 1$, je-li orientována nasouhlasně s daným parametrickým vyjádřením, pak je $\varepsilon = -1$.

Uvažujme nyní integrální součty příslušné k dělení D, výběru reprezentantů $\mathbb{M}$ a funkcím P, Q na křivce C:

$$S(D, \mathbb{M}, P) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i) \cdot \triangle x_i,$$

kde $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$,

$$S(D, \mathbb{M}, Q) = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i) \cdot \triangle y_i,$$

kde $\triangle y_i = y_i - y_{i-1}, i = 1, \ldots, n$.

Dále uvažujme nulovou posloupnost dělení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ křivky C. Jestliže existují pro libovolnou posloupnost dělení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ a libovolný výběr odpovídajících reprezentantů $\mathbb{M}^{(k)}$ konečné limity těchto dvou integrálních součtů, nezávisejících na výběru dělení či výběru reprezentantů, nazýváme je **křivkové integrály 2.druhu** funkcí P a Q po křivce C a označujeme je

$$\lim_{k\to\infty} S(D_k, \mathbb{M}^k, P) = \int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{k\to\infty} S(D_k, \mathbb{M}^k, Q) = \int\limits_C Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Číslo $\int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_C Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ značíme $\int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ a nazýváme ho **obecný křivkový integrál 2.druhu** přes křivku C.

3.2 Základní vlastnosti křivkového integrálu 2.druhu

U všech uvedených vlastností budeme předpokládat, že křivka C je orientovaná, funkce $P(x,y), Q(x,y)$ jsou reálné a spojité na C a c_1, c_2 jsou konstanty. Nechť dále existují křivkové integrály $\int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x$ a $\int\limits_C Q(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Pak existuje také křivkový integrál $\int\limits_C [c_1 \cdot P(x,y)\,\mathrm{d}x + c_2 \cdot Q(x,y)\,\mathrm{d}y]$.

Věta 3.1. *Křivkový integrál 2.druhu je lineární vzhledem k integrandu. Platí tedy*

$$\int\limits_C [c_1 \cdot P(x,y)\,\mathrm{d}x + c_2 \cdot Q(x,y)\,\mathrm{d}y] = c_1 \cdot \int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + c_2 \cdot \int\limits_C Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Věta 3.2. *Je-li C orientovaná křivka skládající se ze souhlasně orientovaných křivek C_1 a C_2, přičemž poslední bod křivky C_1 je prvním bodem křivky C_2, pak je křivkový integrál 2.druhu aditivní vzhledem k integrační cestě a platí*

$$\int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{C_1} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{C_2} P(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int\limits_C Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{C_1} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{C_2} Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{C_1} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{C_2} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Analogicky pro křivku C s dílky $C_1, C_2, \ldots, C_p$ platí

$$\int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{C_i} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Změna orientace křivky $C = \widehat{AB}$ (narozdíl od křivkového integrálu 1.druhu) indukuje v křivkovém integrálu 2.druhu změnu znaménka; křivkový integrál 2.druhu tedy závisí na orientaci ke křivce C.

Věta 3.3. *Platí tedy*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = -\int\limits_{\widehat{BA}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Věta 3.4. *Nechť je $C = \widehat{AB}$ hladká křivka definovaná parametricky $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ a o funkcích $\varphi(t), y = \psi(t)$ předpokládáme, že jsou spojité. Jestliže $\varphi'(t), \psi'(t)$ jsou po částech spojité na intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ a $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ na intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, pak platí:*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \varepsilon \cdot \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)]\,\mathrm{d}t,$$

kde $\varepsilon = +1$, jestliže je křivka C orientována souhlasně s daným parametrickým vyjádřením; $\varepsilon = -1$, jestliže je křivka C orientována nesouhlasně.

Věta 3.5. *Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a funkce $f'(x)$ je po částech spojitá. Je-li $C = \widehat{AB}$ hladká křivka definovaná rovnicí $y = f(x), x \in \langle a, b\rangle$, pak z předchozí věty plyne*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \varepsilon \int\limits_{a}^{b} [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 9. Vypočti integrál $\int\limits_C [(x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y]$, kde křivka C je parabola $y = x^2, x \in \langle -1, 1\rangle$; křivka je orientována ve směru růstu proměnné $x(\varepsilon = +1)$.

$y = f(x) = x^2,$

$f'(x) = 2x,$

$$\varepsilon \int\limits_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x)]\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x + (x^4 - 2x^3) \cdot 2x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x + (2x^5 - 4x^4)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} (2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\tfrac{x^6}{3} - \tfrac{4x^5}{5} - \tfrac{x^4}{2} + \tfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = -\tfrac{14}{15}\,.$$

Příklad 10. Vypočti integrál $\int\limits_C x^2\ \mathrm{d}x - xy\ \mathrm{d}y$, kde C je hladká křivka o parametrickém vyjádření $x = r\cdot\cos t, y = r\cdot\sin t, t\in\langle 0,\pi\rangle, r>0$, orientovaná souhlasně s daným parametrickým vyjádřením.

$\varepsilon\cdot\int\limits_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)]\ \mathrm{d}t \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_0^\pi [r^2\cos^2 t\cdot(-r\sin t) - r\cos t\cdot r\sin t\cdot r\cos t]\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^\pi(-r^3\sin t\cos^2 t - r^3\sin t\cos^2 t)\ \mathrm{d}t =$

$= \int\limits_0^\pi(-2r^3\sin t\cos^2 t)\ \mathrm{d}t = -2r^3\cdot\int\limits_0^\pi\sin t\cos^2 t\ \mathrm{d}t = \left|\begin{matrix}\cos t = z\\ -\sin t\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}z\end{matrix}\right| = +2r^3\cdot\int\limits_1^{-1} z^2\ \mathrm{d}z =$

$= 2r^3\cdot\left[\frac{z^3}{3}\right]_1^{-1} = 2r^3\cdot(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3}\cdot r^3.$

Příklad 11. Vypočtěte integrál $\int\limits_C y^2\ \mathrm{d}x - x^2\ \mathrm{d}y$, kde C je úsečka s prvním bodem $[0,1]$ a posledním bodem $[1,0]$.

$$\begin{aligned}y &= ax+b\\ 1 &= a\cdot 0+b\\ 0 &= a\cdot 1+b \implies \mathbf{y = -x+1},\end{aligned}$$

$\int\limits_0^1[(-x+1)^2 - x^2\cdot\underbrace{(-1)}_{f'(x)}]\ \mathrm{d}x = \int\limits_0^1(x^2-2x+1+x^2)\ \mathrm{d}x = \int(2x^2-2x+1)\ \mathrm{d}x =$

$= \left[\frac{2x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 + 1 = \frac{2}{3}\ .$

Příklad 12. Vypočti integrál $\int\limits_C y\ \mathrm{d}x + z\ \mathrm{d}y + x\ \mathrm{d}z$, kde C je křivka zadána parametricky $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, t\in\langle 0,2\pi\rangle, a>0, b>0$, orientovaná souhlasně s tímto parametrickým vyjádřením.

$\int\limits_0^{2\pi}[a\sin t\cdot(-a\sin t) + bt\cdot a\cos t + a\cos t\cdot b]\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi}(\underbrace{-a^2\sin^2 t}_{I_1} + \underbrace{abt\cdot\cos t}_{I_2} + \underbrace{ab\cos t}_{I_3})\ \mathrm{d}t,$

$\mathbf{I_1} = -a^2\cdot\boxed{\int\limits_0^{2\pi} sin^2 t\ \mathrm{d}t} = -a^2\cdot\int\limits_0^{2\pi}\sin t\cdot\sin t\ \mathrm{d}t = \left|\begin{matrix}u=\sin t & v'=\sin t\\ u'=\cos t & v=-\cos t\end{matrix}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow -a^2\left([-\cos t\cdot\sin t]_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\ \mathrm{d}t\right) =$

$= -a^2\left([-\cos t\cdot\sin t]_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi}\ \mathrm{d}t - \boxed{\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\ \mathrm{d}t}\right) \Rightarrow -a^2\left[\frac{-\sin t\cos t}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} =$

$= -a^2\pi,$

$$\mathbf{I_2} = ab \cdot \int\limits_0^{2\pi} t \cos t \; \mathrm{d}t \Rightarrow \begin{vmatrix} u = t & v' = \cos t \\ u' = 1 & v = \sin t \end{vmatrix} \Rightarrow ab \left(\underbrace{[t \sin t]_0^{2\pi}}_{0} - \int\limits_0^{2\pi} \sin t \; \mathrm{d}t \right) =$$

$$= ab \, [\cos t]_0^{2\pi} = ab \cdot (1 - 1) = 0,$$

$$\mathbf{I_3} = ab \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos t \; \mathrm{d}t = ab \cdot [\sin t]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\mathbf{I_1} + \mathbf{I_2} + \mathbf{I_3} = -a^2\pi + 0 + 0 = -a^2\pi.$$

3.3 Vztah křivkového integrálu 1. a 2.druhu

Věta 3.6. *Buď $C = \widehat{AB}$ hladká orientovaná křivka, funkce $P(x, y), Q(x, y)$ spojité na otevřené množině obsahující C. Pak platí*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x, y) \; \mathrm{d}x + Q(x, y) \; \mathrm{d}y = \int\limits_{\widehat{AB}} [P(x, y) \cdot \cos \alpha(M) + Q(x, y) \cdot \sin \alpha(M)] \; \mathrm{d}s,$$

kde $\alpha(M) = \alpha(x_M, y_M)$ je úhel mezi orientovanou tečnou ke hladké křivce $C = \widehat{AB}$ v bodě $M = [x_M, y_M]$ a nezápornou částí osy x.

Poznámka. Protože zřejmě platí $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \beta$, lze v některé literatuře najít tuto větu ve tvaru

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x, y) \; \mathrm{d}x + Q(x, y) \; \mathrm{d}y = \int\limits_{\widehat{AB}} [P(x, y) \cdot \cos \alpha(M) + Q(x, y) \cdot \sin \beta(M)] \; \mathrm{d}s,$$

kde úhly $\alpha(M), \beta(M)$ jsou směrové úhly orientované tečny orientovaného oblouku v bodě $M = [x_M, y_M]$ (viz. Kapitola 1 Úvodní pojmy).

Důkaz. K důkazu využijeme Definici 1.3.3.

$$\int\limits_C [P(x, y) \cdot \cos \alpha(x_M, y_M) + Q(x, y) \cdot \cos \beta(x_M, y_M)] \; \mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \{P[\varphi(t), \psi(t)] \cdot \cos \alpha[\varphi(t), \psi(t)] + Q[\varphi(t), \psi(t)] \cdot \cos \beta[\varphi(t), \psi(t)]\} \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \; \mathrm{d}t =$$

$$= \varepsilon \int\limits_\alpha^\beta \{P[\varphi(t), \psi(t)] \cdot \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \cdot \psi'(t)\} \; \mathrm{d}t = \int\limits_C P(x, y) \; \mathrm{d}x + Q(x, y) \; \mathrm{d}y. \qquad \square$$

3.4 Aplikace křivkového integrálu 2.druhu

V této subkapitole si uvedeme nejznámější a nejčastěji používané aplikace křivkového integrálu 2.druhu, některé další zajímavé aplikace můžeme nalézt v literatuře uvedené na konci práce, zejména pak v [5, 6].

Věta 3.7. *Buď G nějaká oblast; v ní nechť na hmotný bod $E = [x, y] \in G$ působí síly o složkách $P(x, y)$ a $Q(x, y)$. Nechť tyto složky $P(x, y), Q(x, y)$ jsou spojitými funkcemi v G. Buď dále C orientovaný a po částech hladký oblouk ležící v G. Potom práce, která se vykoná, přejde-li hmotný bod $E = [x, y]$ po křivce C z jejího prvního bodu do posledního bodu, se definuje jako*

$$\int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Definice 3.4.1. Buď dána oblast $G \subset \mathbb{R}^2$, přes kterou proudí kapalina. Nechť v G leží hladký orientovaný oblouk C. **Tokem kapaliny přes oblouk** C rozumíme množství kapaliny, které proteče obloukem C za jednotku času ve směru orientované normály; označíme jej $T(C)$.

Poznámka. Tok je aditivní funkcí oblouku - je-li $C \subset G$ hladký orientovaný oblouk a tvoří-li orientované oblouky C_1, C_2 jeho dělení, pak je $T(C) = T(C_1) + T(C_2)$.

Tvrzení. Řekneme, že v bodě $F = [x_0, y_0] \in G$ má tok složky rychlosti P, Q, jestliže pro libovolný hladký orientovaný oblouk C, procházející bodem F, jehož orientovaná normála má směrové úhly A, B, existuje ke každému $\varepsilon > 0$,$\delta > 0$ tak, že pro každý oblouk $C' \subset C \cap K(F; \delta)$ platí

$$\left| \frac{T(C')}{L(C')} - (P \cdot \cos A + Q \cdot \cos B) \right| < \varepsilon.$$

Věta 3.8. *Buď $G \subset \mathbb{R}^2$ oblast, $P(x, y), Q(x, y)$ dvě spojité funkce v G; nechť jsou tyto funkce složkami rychlosti toku v G. Buď dále C hladký orientovaný oblouk v G. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolný bod $[x, y] \in C$ a pro libovolný oblouk $C' \subset C \cap K(x, y; \delta)$ platí*

$$\left| \frac{T(C')}{L(C')} - (P(x, y) \cdot \cos A + Q(x, y) \cdot \cos B) \right| < \varepsilon.$$

Věta 3.9. *Buď $G \subset R^2$ oblast, $P(x, y), Q(x, y)$ dvě spojité funkce v G. Nechť jsou to složky rychlosti toku v G. Buď C hladký orientovaný oblouk ležící v G. Potom pro tok platí*

$$T(C) = \int_C [P(x, y) \cdot \cos A + Q(x, y) \cdot \cos B]\,\mathrm{d}s.$$

Poznámka. Podle vztahů uvedených v Kapitole 1 Úvodní pojmy a podle Věty 3.6. lze psát tento vztah také

$$T(C) = \int\limits_C [-P(x,y)\cdot\cos\beta(x,y) + Q(x,y)\cdot\cos\alpha(x,y)]\ \mathrm{d}s = \int\limits_C Q(x,y)\ \mathrm{d}x - P(x,y)\ \mathrm{d}y,$$

což nám velmi zjednoduší výpočet velikosti toku $T(C)$. Tento vzorec lze ještě převést za užití směrových úhlů A, B orientované normály na tvar

$$T(C) = \int\limits_C Q(x,y)\ \mathrm{d}x - P(x,y)\ \mathrm{d}y = \int\limits_C [P(x,y)\cdot\cos A(x,y) + Q(x,y)\cdot\cos B(x,y)]\ \mathrm{d}s.$$

Příklad 13. Buď C oblouk o parametrickém vyjádření $x = r\cos t, y = r\sin t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, orientovaný souhlasně s daným parametrickým vyjádřením. Buď dán tok o složkách rychlosti $P(x,y) = x, Q(x,y) = y$. Vypočtěte tok kapaliny obloukem C.

$$T(C) = \int\limits_C Q(x,y)\ \mathrm{d}x - P(x,y)\ \mathrm{d}y = \int\limits_C y\ \mathrm{d}x - x\ \mathrm{d}y = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [r\sin t\cdot(-r\sin t) - r\cos t\cdot\cos t]\ \mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-r^2\sin^2 t - r^2\cos^2 t)\ \mathrm{d}t = -r^2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}\ \mathrm{d}t = r^2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}t =$$
$$= -r^2\cdot[t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}r^2.$$

Velikost toku kapaliny je $\frac{\pi}{2}r^2$.

3.5 Greenova věta a její aplikace

Greenova věta vyjadřuje vztah mezi křivkovým integrálem 2.druhu po uzavřené křivce C a dvojným integrálem přes množinu M, jejíž hranici křivka C tvoří.

Věta 3.10 (Greenova). *Buď N otevřená množina, $P(x,y), Q(x,y)$ dvě funkce, které zde mají spojité parciální derivace $P_y = (x,y), Q_x = (x,y)$. Dále buď C uzavřená, po částech hladká křivka ležící v N i se svým vnitřkem orientovaná proti směru oběhu hodinnových ručiček; M je množina všech bodů uvnitř a na křivce C. Pak platí*

$$\int\limits_C P(x,y)\ \mathrm{d}x + Q(x,y)\ \mathrm{d}y = \iint\limits_M [Q_x(x,y) - P_y(x,y)]\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Vzhledem k důležitosti Greenovy věty si zde uvedeme i základní myšlenky jejího důkazu.

Důkaz. 1. Nechť je M trojúhelník a křivka C je její hranicí. Ukážeme, že Greenova věta pro tento speciální případ platí. Omezíme se na případ, kdy žádná ze stran trojúhelníka není rovnoběžná s některou ze souřadných os; tyto zvláštní případy se proberou podobně. Označme vrcholy trojúhelníka $[x_i, y_i], (i = 1, 2, 3)$. Volme označení tak, že $x_1 < x_3 < x_2$ a stranu ležící proti vrcholu $[x_i, y_i]$ označme C_i. Jsou dvě možnosti; $[x_3, y_3]$ je nad nebo pod C_3. Vezměme třeba druhý případ, první se probere podobně. C_3 je tedy grafem jisté lineární funkce $y = \phi_2(x), C_1 \cup C_2$ je grafem jisté funkce $y = \phi_1(x)$. Platí tedy

$$-\iint\limits_M P_y(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int\limits_{x_1}^{x_2}[\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} P_y(x,y)\ \mathrm{d}y]\ \mathrm{d}x = -\int\limits_{x_1}^{x_2}\{P\left[x, \phi_2(x)\right] - P\left[x, \phi_1(x)\right]\}\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x^2} P\left[x, \phi_1(x)\right]\ \mathrm{d}x - \int\limits_{x_1}^{x_2} P\left[x, \phi_2(x)\right]\ \mathrm{d}x.$$

První integrál je zřejmě $\int\limits_{C_1 \cup C_2} P(x,y)\ \mathrm{d}x$, druhý $\int\limits_{C_3} P(x,y)\ \mathrm{d}x$.

Celkem tedy máme $-\iint\limits_M P_y(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_C P(x,y)\ \mathrm{d}x$.

Podobně se ukáže $\iint\limits_M Q_x(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_C Q(x,y)\ \mathrm{d}y$.

Sečtením obou rovnic plyne tvrzení Greenovy věty pro trojúhelník.

2. Buď nyní C uzavřená lomená čára, která je uzavřenou křivkou. Pak lze M rozdělit na konečný počet trojúhelníků; pro každý z nich podle 1. Greenova věta platí. Sečtením a užitím Vět 3.2. a 3.3. dokážeme tvrzení Greenovy věty pro tento případ.

3. Obecný případ je podrobně dokázán v [1] a vzhledem ke své délce a náročnosti ho zde nebudeme uvádět.

$\square$

Příklad 14. Vypočtěte $\int\limits_C -x^2y\ \mathrm{d}x + xy^2\ \mathrm{d}y$, kde C je křivka s parametrickým vyjádřením $x = r\cos t, y = r\sin t, t \in \langle 0, 2\pi\rangle, r > 0$. Křivka C je orientovaná proti směru oběhu hodinových ručiček.

Užitím Greenovy věty

$$\int\limits_C P(x,y)\ \mathrm{d}x + Q(x,y)\ \mathrm{d}y = \iint\limits_M \left[Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right]\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dostaneme

$$\int\limits_C P(x,y)\ \mathrm{d}x + Q(x,y)\ \mathrm{d}y = \int\limits_C -x^2y\ \mathrm{d}x + xy^2\ \mathrm{d}y = \iint\limits_M (\underbrace{y^2}_{P_y} + \underbrace{x^2}_{Q_x})\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

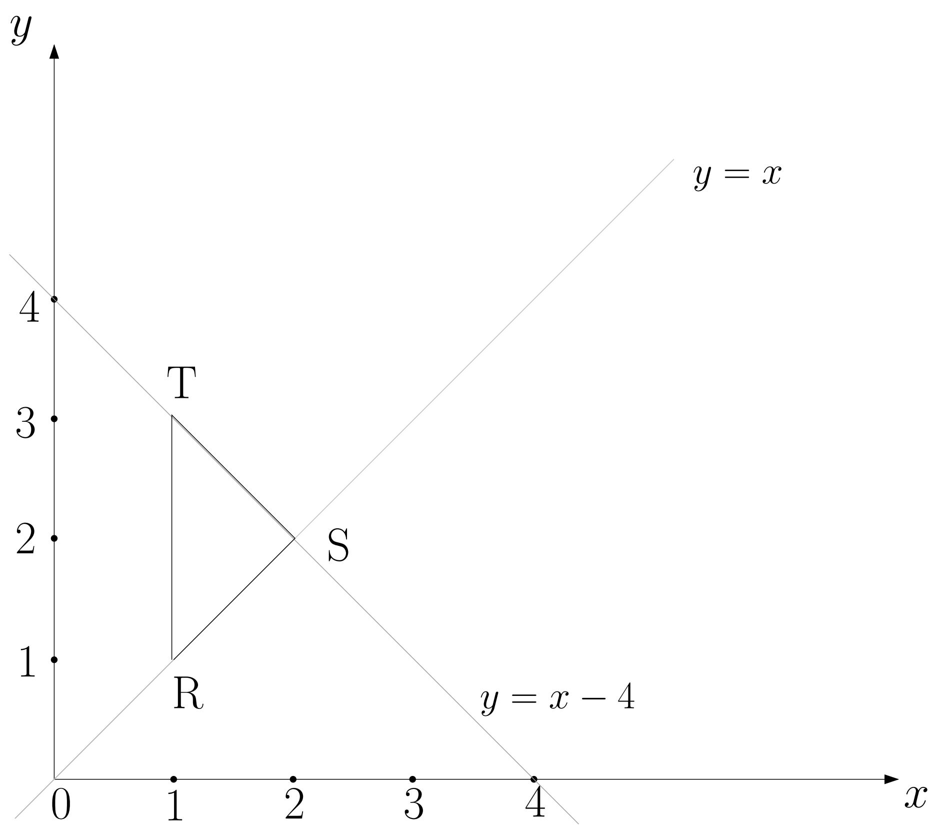
$$= \int\limits_0^{2\pi}[\int\limits_0^r(\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi)\cdot\rho\ \mathrm{d}\rho]\ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi}[\int\limits_0^r \rho^3\ \mathrm{d}\rho]\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r\ \mathrm{d}\varphi = \frac{r^4}{4}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\ \mathrm{d}\varphi = \frac{r^4}{4}\cdot[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}r^4.$$

Příklad 15. Vypočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C 2(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x+y)^2\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je obvod trojúhelníku s kladnou orientací a s vrcholy $R = [1,1], S = [2,2]$, $T = [1,3]$. (viz obr.3.1)



Obrázek 3.1: Trojúhelník RST

Výpočet provedeme dvěma způsoby; nejprve přímo pomocí Greenovy věty, poté rozložením trojúhelníku RST na jednotlivé úsečky.

Výpočet pomocí Greenovy věty:

$$P(x,y) = 2(x^2+y^2)\,, \qquad Q(x,y) = (x+y)^2\,,$$
$$P_y = 4y\,, \qquad Q_x = 2(x+y)\,,$$
$$I = \iint_M (2x + 2y - 4y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 [\int_x^{4-x} 2\cdot(x-y)\,\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_1^2 \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_x^{4-x}\,\mathrm{d}x =$$

$= \int\limits_1^2 (16x - 4x^2 - 16)\ \mathrm{d}x = \left[8x^2 - \frac{4x^3}{3} - 16x\right]_1^2 = -\frac{4}{3}$.

Výpočet pomocí rozložení trojúheníku na jednotlivé úsečky:

$I(C_1)$: přímka TR má rovnici $x = 1, \mathrm{d}x = 0$, takže
$I(C_1) = \int\limits_3^1 (1 + y^2)\ \mathrm{d}y = \left[\frac{(1+y)^3}{3}\right]_3^1 = -\frac{56}{3}$.

$I(C_2)$: přímka RS má rovnici $y = x, \mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, takže
$I(C_2) = \int\limits_1^2 (4x^2 + 4x^2)\ \mathrm{d}x = \frac{56}{3}$.

$I(C_3)$: přímka ST má rovnici $y = 4 - x, \mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, takže
$I(C_3) = \int\limits_2^1 [2 \cdot (x^2 + 16 - 8x + x^2) - (x + 4 - x^2)^2]\ \mathrm{d}x = \int\limits_2^1 (4x^2 - 16x + 32 - 16)\ \mathrm{d}x =$
$= \left[\frac{4x^3}{3} - 8x^2 + 16x\right]_2^1 = -\frac{4}{3}$.

$\mathbf{I(C) = I(C_1) + I(C_2) + I(C_3)} = -\frac{56}{3} + \frac{56}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$.

Vidíme, že oba výsledky jsou stejné, ale výpočet podle Greenovy věty je značně kratší.

Věta 3.11. *Buď C po částech hladká uzavřená křivka orientovaná proti směru oběhu hodinových ručiček a nechť M je množina všech bodů uvnitř a na křivce C. Pak platí*

$$\mathrm{m}(M) = \frac{1}{2} \int\limits_C x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x,$$

kde $\mathrm{m}(M)$ *je* ***míra množiny*** *M.*

Poznámka. Její definici a vlastnosti zde uvádět nebudeme, tento důležitý pojem integrálního počtu můžeme nalézt podrobněji rozpracovaný např. v [1, 2].

Důkaz. Důkaz je zřejmý a plyne přímo z Greenovy věty.

$\frac{1}{2} \int\limits_C x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \iint\limits_M 2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{m}(M)$. □

Literatura

[1] Miroslav Novotný: *Integrální počet*,Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1963

[2] František Jirásek, Stanislav Čipera, Milan Vacek: *Sbírka řešených příkladů z matematiky II.*, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1989

[3] Zuzana Došlá, Ondřej Došlý: *Metrické prostory*, Vydavatelství Masarykovy University v Brně, 2000

[4] Vítězslav Novák: *Integrální počet v R*, Vydavatelství Masarykovy University v Brně, 2001

[5] http://mat.fsv.cvut.cz/zindulka

[6] http://mat.fsv.cvut.cz/ma3g