MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2016 **MICHAL MALČÍK**

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Teorie a využití násobného integrálu

Bakalářská práce

Michal Malčík

Vedoucí práce: Mgr. Petr Hasil, Ph.D. **Brno 2016**

Bibliografický záznam

Autor:	Michal Malčík Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Teorie a využití násobného integrálu
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
Akademický rok:	2015/2016
Počet stran:	viii + 37
Klíčová slova:	Dvojný integrál; Trojný integrál; Fubiniova věta; Substituce; Aplikace integrálního počtu

Bibliographic Entry

Author:	Michal Malčík Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Theory and applications of multiple integral
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial and Insured Mathematics
Supervisor:	Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
Academic Year:	2015/2016
Number of Pages:	viii + 37
Keywords:	Double integral; Triple integral; Fubini's theorem; Substitutions; Applications of integral calculus

Abstrakt

Obsahem této bakalářské práce jsou integrály funkcí více proměnných. Práce je rozdělena do dvou kapitol. První pojednává o dvojném integrálu, jeho výpočtu a transformacích. Ve druhé kapitole zmiňujeme trojný a n-násobný integrál, jejich výpočet a transformace. Závěr každé kapitoly je věnován aplikacím zmíněných integrálů. V obou kapitolách je uvedena teorie, která je doplněna příklady.

Abstract

The subject of this bachelor thesis are multiple integrals. The text is divided into two chapters. The first one deals with double integrals, their calculations and transformations.In the second chapter we mention triple and multiple integrals, also their calculations and transformations. Conclusion of each chapter is devoted to applications of the mentioned integrals. Each chapter contains a theory, which is illustrated by examples.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2015/2016

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Student: Michal Malčík

Program: Matematika

Obor: Finanční a pojistná matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Téma práce: Teorie a využití násobého integrálu

Téma práce anglicky: Theory and applications of multiple integral

Oficiální zadání:
Náplní práce je popis teorie a využití násobných integrálů včetně transformací. Důraz by měl být kladen na dimenzi 2 a 3, ale popsáno by mělo být i chování a vlastnosti v obecné konečné dimenzi. Práce by měla být doplněna příklady s podrobným popisem jejich řešení.

Literatura:
BUCK, R. Creighton. *Advanced calculus*. 3d ed. Long Grove: Waveland Press, 2003. x, 622 p. ISBN 1-57766-302-0.

KALAS, Josef a Jaromír KUBEN. *Integrální počet funkcí více proměnných*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2009. 278 s. ISBN 978-80-210-4975-8.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: Mgr. Petr Hasil, Ph.D.

Datum zadání práce: 28. 5. 2015

V Brně dne: 20. 10. 2015

Souhlasím se zadáním (podpis, datum): 4. 11. 2015

Malčík
.....
Michal Malčík
student

.....
Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
vedoucí práce

v.z.
.....
prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Poděkování

Rád bych poděkoval Mgr. Petru Hasilovi, Ph.D. za jeho čas, ochotu a trpělivost, se kterými vedl mou bakalářskou práci, a také za cenné rady a připomínky k ní.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 26. května 2016 .....

Michal Malčík

Obsah

Úvod ..... **viii**

Kapitola 1. Dvojný integrál **1**
1.1 Dvojný integrál na intervalu 1
1.2 Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^2$ 3
1.3 Dvojný integrál na měřitelné množině 4
1.4 Transformace dvojných integrálů 7
1.5 Aplikace dvojného integrálu 11
1.5.1 Obsah (míra) plochy 11
1.5.2 Aplikace dvojných integrálů v mechanice 13
1.5.3 Elektrický náboj 14
1.5.4 Střední hodnota a pravděpodobnost 15
1.5.5 Ekonomická aplikace 17

Kapitola 2. Trojný a *n*-rozměrný integrál **20**
2.1 Trojný integrál na intervalu 20
2.2 Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^3$ 21
2.3 Trojný integrál na měřitelné množině 22
2.4 Transformace trojných integrálů 24
2.5 Aplikace trojného integrálu 28
2.5.1 Objem (míra) tělesa 28
2.5.2 Aplikace trojného integrálu v mechanice 29
2.5.3 Elektrický náboj 31
2.5.4 Střední hodnota a pravděpodobnost 32
2.6 *n*-rozměrný integrál 33

Závěr **36**

Seznam použité literatury **37**

Úvod

Cílem této bakalářské práce je popis teorie a využití násobných integrálů. Kromě teorie by text měl obsahovat i příklady s jejich řešením.

Práce slouží jako podpůrný text pro výuku dvojného, trojného a n-rozměrného integrálu. Pojem integrálu známe například z kurzu matematické analýzy. Pro studium tohoto textu se předpokládá základní znalost diferenciál počtu a Riemannova integrálu v $\mathbb{R}$.

Tato bakalářská práce je rozdělena do dvou kapitol. V první kapitole se zabýváme dvojným integrálem, jeho teorií a využitím. Pro snadnější pochopení začínáme vysvětlovat problematiku na nižších dimenzích. Základní teoretické vlastnosti můžeme následně aplikovat na řadu příkladů, které jsou součástí textu. Velký důraz je zde kladen na řešení příkladů pomocí Fubiniovy věty a transformací. V závěru této kapitoly se věnujeme aplikacím dvojného integrálu. Zde můžeme vidět, jaké je praktické využití této problematiky i v jiných oborech než jen v matematické analýze. Ve druhé kapitole se věnujeme trojným a n-rozměrným integrálům. Zde postupujeme obdobně jako v předchozí kapitole. Nejprve vysvětlíme potřebnou teorii na trojném integrálu. Poté uvedeme několik příkladů, kde tyto teoretické poznatky aplikujeme. Dále se zmiňujeme o aplikacích trojného integrálu, který uplatňujeme například geometrii, fyzice nebo pravděpodobnosti. Konec kapitoly je věnován n-rozměrným integrálům.

Pro lepší názornost a srozumitelnost je text doplněn řadou obrázků, které lépe uvádí čtenáře do problematiky. Tyto ilustrace byly vytvořeny pomocí programu GeoGebra a Maple. Celá práce je sepsána sázecím programem LaTeX. Teorii k této problematice jsme převážně čerpali z [1], [2], [5], [7] a [8]. Dále si zde uvedeme zajímavé odkazy pro tuto problematiku, které se budou čtenáři velmi hodit při studiu [10], [11] a [12] .

Kapitola 1

Dvojný integrál

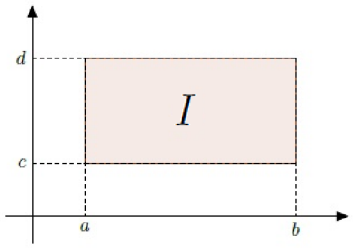
1.1 Dvojný integrál na intervalu

Ze základního kurzu matematické analýzy víme, jak se budoval jednoduchý Riemannův integrál. Pro tvorbu dvojného Riemannova integrálu budeme postupovat analogicky. Připomeňme, že jednoduchý integrál nám určoval obsah plochy pod křivkou. Budeme tedy požadovat, aby hodnota dvojného integrálu odpovídala objemu tělesa pod grafem nezáporné funkce. Zdroje k této teorii jsme čerpali z [1], [2], [5], [7], a [8].

Můžeme přistoupit k prvnímu pojmu, který poté použijeme pro samotnou konstrukci dvojného integrálu.

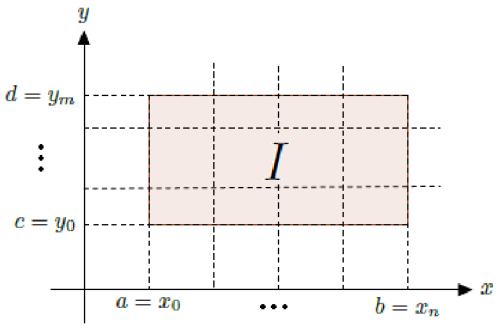
1 Definice. Intervalem v rovině neboli dvourozměrným intervalem budeme rozumět množinu I, která je kartézským součinem dvou intervalů $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$. Tedy $I = I_1 \times I_2$.

Poznámka. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že se jedná o uzavřený nedegenerovaný interval, jenž lze psát také ve tvaru $I = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$, kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ a $a < b, c < d$ (obr. 1.1).



Obrázek 1.1: Interval v rovině

Nechť $I = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ je interval v $\mathbb{R}^2$ a nechť $D_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$; $D_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ jsou dělení intervalů $\langle a,b\rangle$ a $\langle c,d\rangle$ (obr. 1.2). Nyní označme $I_{lk} = \langle x_{l-1}, x_l\rangle \times \langle y_{k-1}, y_k\rangle$ jako systém obdélníků, kde $l \in \{1,\ldots,n\}$ a $k \in \{1,\ldots,m\}$. Systém obdélníků $I_{lk} : l = 1,\ldots,n; k = 1,\ldots,m$ se nazývá dělení obdélníku I a značí se



Obrázek 1.2: Dělení dvourozměrného intervalu

$D = D_x \times D_y$. Označme $\lambda(I_{lk}) = (x_l - x_{l-1}) \cdot (y_k - y_{k-1})$ obsah jednotlivých obdélníků I_{lk}.

Pro každé dělení D na intervalu I definujeme součty

$$s(D,f) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \inf_{(x,y)\in I_{lk}} f(x,y) \cdot \lambda(I_{lk}),$$
$$S(D,f) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sup_{(x,y)\in I_{lk}} f(x,y) \cdot \lambda(I_{lk}).$$

Výraz $s(D,f)$ nazýváme dolním součtem a $S(D,f)$ nazýváme horním součtem. Pomocí součtů můžeme definovat dolní a horní integrál funkce f na intervalu I

$$\underline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sup_D \{s(D,f)\} \qquad \text{dolní integrál,}$$
$$\overline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \inf_D \{S(D,f)\} \qquad \text{horní integrál.}$$

2 Definice. Jestliže platí rovnost

$$\underline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\iint_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

řekneme, že f je Riemannovsky integrovatelná na množině I, a jejich společnou hodnotu nazveme dvojný Riemannův integrál a značíme jej

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Funkci f nazýváme integrand a množinu I integrační obor.

Věta 1.1.1 (O existenci dvojného integrálu). *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $I = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Pak f je integrovatelná na I.*

Důkaz. Důkaz k této větě je uvedený v [2]. □

Věta 1.1.2 (Fubiniova věta). *Buď* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *spojitá funkce na obdélníku* $I = \langle a,b\rangle \times \times \langle c,d\rangle$, *pak platí*

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Důkaz této věty můžeme najít v [9]. □

Poznámka. Pro spojitou funkci tedy nezáleží, zda integrujeme nejprve dle proměnné x nebo dle proměnné y.

1.2 Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^2$

V této podkapitole se budeme zabývat měřitelnými množinami. Budeme chtít přiřadit nějaké množině nezáporné číslo tak, aby odpovídalo velikosti této množiny (budeme hledat „obsah“ takových množin).

3 Definice. Mějme množinu $M \in \mathbb{R}$. Definujeme charakteristickou funkci množiny M předpisem

$$\chi_M(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x,y] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x,y] \notin M. \end{cases}$$

4 Definice. Řekneme, že omezená množina M je (Jordanovsky) měřitelná, je-li funkce $\chi_M(x,y)$ Riemanovsky integrovatelná na uzavřeném intervalu $J \in \mathbb{R}^2$. Pak se číslo

$$m(M) = \iint_I \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

nazývá (Jordanovou) mírou množiny M.

Poznámka. Pojem a definici Jordanovsky měřitelné množiny dále nalezneme v [7].

Poznámka (Geometrická interpretace míry množiny). Mějme měřitelnou množinu M a J uzavřený interval v $\mathbb{R}^2$, tak že platí $M \subseteq I$. Zvolme $D = D_x \times D_y$. Povšimněme si, že

$$s(D,f) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \inf_{(x,y)\in J_{lk}} \chi_M(x,y)\cdot\lambda(I_{lk})$$

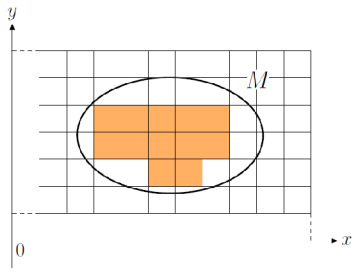
je součet obsahů všech obdélníků I_{lk}, které leží uvnitř M (obr. 1.3). A také

$$S(D,f) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \sup_{(x,y)\in J_{lk}} \chi_M(x,y)\cdot\lambda(I_{lk})$$

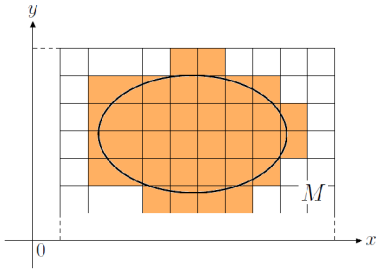
je součet obsahů všech obdélníků I_{lk}, které mají s množinou M nějaký průnik (obr. 1.4).

Pro míru množiny M tedy platí

$$m(M) = \inf_D(S(D)) = \sup_D(s(D)).$$



Obrázek 1.3: $s(D,f)$



Obrázek 1.4: $S(D,f)$

Věta 1.2.1 (Vlastnosti měřitelných množin).

1. *Každá podmnožina v $\mathbb{R}^2$, která má jen konečný počet bodů, má míru 0.*
2. *Každý omezený interval v $\mathbb{R}^2$ je měřitelnou množinou.*
3. *Je-li M měřitelná, pak $m(M) \geq 0$.*
4. *Jsou-li A, B měřitelné množiny, pak jejich sjednocení $A \cup B$, jejich průnik $A \cap B$ a jejich rozdíl $A \setminus B$ jsou též měřitelné.*
5. *Jsou-li A, B měřitelné disjunktní množiny ($A \cap B = \emptyset$), pak $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.*
6. *Jsou-li A, B měřitelné množiny s vlastností $A \subseteq B$, pak $m(A) \leq m(B)$.*
7. *Omezená množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná právě tehdy, když její hranice má míru 0.*

Důkaz. Důkaz je uvedený v [7]. □

1.3 Dvojný integrál na měřitelné množině

Na následujících stranách se podíváme, jak bude vypadat dvojný integrál na těchto množinách.

5 Definice. Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ neprázdná měřitelná množina a f ohraničená funkce na M. Funkce f je Riemannovsky integrovatelná na množině M, je-li funkce $f \cdot \chi_M$ definovaná

$$(f \cdot \chi_M)(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{pro } [x,y] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x,y] \notin M \end{cases}$$

integrovatelná na obdélníku $I \subseteq M$. Dvojný Riemannův integrál funkce f na množině M je číslo definované vztahem

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_I (f \cdot \chi_M)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Věta 1.3.1 (Vlastnosti dvojného integrálu). *Nechť spojité funkce f a g jsou integrovatelné na $M \subseteq \mathbb{R}^2$, kde M je měřitelná množina. Pak platí*

1. *Pro každé* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *je*
$$\iint_M c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c_1 \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + c_2 \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
2. *Je-li* $f(x,y) \le g(x,y)$ *pro* $\forall (x,y) \in M$, *je*
$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
3.
$$\left| \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right| \le \iint_M |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
4. *Je-li* $M = M_1 \cup M_2$ *a platí* $m(M_1 \cap M_2) = 0$ *(měřitelné množiny* M_1 *a* M_2 *jsou navzájem disjunktní), je*
$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
5. *Má-li měřitelná množina míru 0* $(m(M) = 0)$ *je*
$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$
6. *Je-li funkce* f *spojitá na uzavřené množině* M, *pak* f *je na této množině* M *integrovatelná.*

Důkaz. Důkaz této věty můžeme najít v [5]. □

Věta 1.3.2 (Fubiniova věta). *Buď funkce* f *integrovatelná na množině* M, *kde*
$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a,b \rangle \wedge \varphi(x) \le y \le \psi(x) \right\},$$
kde φ *a* ψ *jsou spojité funkce na* $\langle a,b \rangle$ *tak, že* $\varphi(x) \le \psi(x)$ *pro každé* $x \in \langle a,b \rangle$. *Potom*
$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

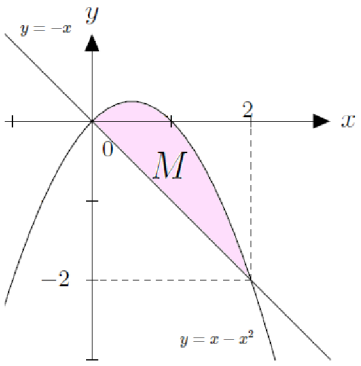
Důkaz. Důkaz této věty najdeme v [8]. □

Poznámka. Díky této větě můžeme dvojný integrál převádět na dva jednorozměrné integrály. Integrál $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ nazýváme dvojný integrál a integrál $\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$ budeme nazývat dvojnásobný.

Pomocí tohoto aparátu můžeme řešit nejrůznější příklady.

1.3.1 Příklad. Vypočítejme $\iint_M xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, kde M je množina daná $M : y = -x,\ y = x - x^2$.

Řešení. Při počítání postupuje následovně. Vypočítáme meze integrace, načrtneme graf množiny M (obr. 1.5) a dosadíme meze do integrálů, které posléze vypočítáme
$$\int_0^2 x \left[\int_{-x}^{x-x^2} y\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-x}^{x-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^2 -x^4 + \frac{x^5}{2} \mathrm{d}x = \left[\frac{-x^5}{5} + \frac{x^6}{12} \right]_0^2 = -\frac{16}{15}.$$



$$M: \quad \begin{array}{l} 0 \le x \le 2, \\ -x \le y \le x - x^2. \end{array}$$

Obrázek 1.5: Množina M

Poznámka. Pokud máme integrand tvaru součinu $f(x)g(y)$, kde f je spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$ a g je spojitá funkce na $\langle c,d\rangle$, můžeme výpočet zjednodušit jako

$$\iint_M f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y.$$

1.3.2 Příklad. Vypočítejme $\iint_M y\cos(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, kde M je množina tvaru $M: \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

Řešení.

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\,\mathrm{d}y \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

1.3.3 Příklad. Vypočítejme $\iint_M \frac{x^2}{3+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde M je množina tvaru $M: \langle 0,3\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

Řešení.

$$\int_0^3 \int_0^1 \frac{x^2}{3+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left[\frac{x^2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}}\right]_0^1 \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}.$$

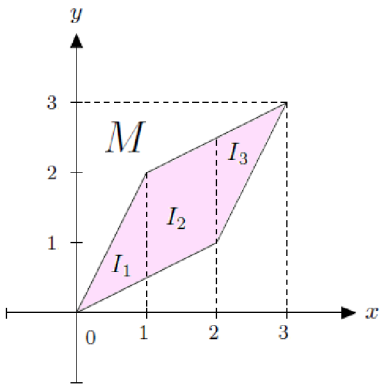
Poznámka. Někdy je lepší zaměnit pořadí integrování. V případě, kdy nám po integraci dle první proměnné vyjde velmi složitá funkce, zkusíme pořadí zaměnit a zkontrolujeme, zda nebude výpočet snadnější. Takovým trikem si můžeme výrazně usnadnit výpočet.

1.3.4 Příklad. Vypočítejme $\iint_M (2x^2+2y^2-5xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je množina ohraničená křivkami $M: 2y = x+3$, $2y = x$, $y = 2x$, $y = 2x-3$.

Řešení. Nejprve si načrtneme množinu integrace. Z obrázku (obr. 1.6) zjistíme, že množinu M bude třeba rozdělit na tři disjunktní oblasti.
Nejprve provedeme integraci na I_1

$$I_1 = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{2x} (2x^2+2y^2-5xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{5xy^2}{2} + 2x^2y\right]_{\frac{x}{2}}^{2x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 -\frac{27x^3}{24}\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{9}{32},$$



$$I_1: \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ \frac{x}{2} \le y \le 2x. \end{cases}$$

$$I_2: \quad \begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ \frac{x}{2} \le y \le \frac{x}{2} + 1{,}5. \end{cases}$$

$$I_3: \quad \begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ 2x - 3 \le y \le \frac{x+3}{2}. \end{cases}$$

Obrázek 1.6: Množina M

poté na I_2

$$I_2 = \int_1^2 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+3}{2}} (2x^2 + 2y^2 - 5xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{5xy^2}{2} + 2x^2y\right]_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+3}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^2 \frac{9}{4} - \frac{27x}{8}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{9x}{4} - \frac{27x^2}{8}\right]_1^2 = -\frac{45}{16}$$

a konečně na I_3

$$I_3 = \int_2^3 \int_{2x-3}^{\frac{x+3}{2}} (2x^2 + 2y^2 - 5xy)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{5xy^2}{2} + 2x^2y\right]_{2x-3}^{\frac{x+3}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_2^3 \frac{9x^3 - 135x + 162}{8}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{9x(x^3 - 30x + 72)}{32}\right]_2^3 = -\frac{117}{32}.$$

Celkový výsledek bude součtem těchto mezikroků

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{9}{32} - \frac{45}{16} - \frac{117}{32} = -\frac{27}{4}.$$

1.4 Transformace dvojných integrálů

V praxi se mnohdy stává, že množina M je zadána velmi náročně, což vede k potížím a velmi složitým výpočtům. Díky substituci jsme schopni přeměnit integrační obor tak, aby se nám výpočet zjednodušil (a to i za cenu, kdy se nám zkomplikuje integrand). Potřebná teorie k této podkapitole je uvedena v [5]. Připomeňme si, jak vypadala substituční metoda u jednorozměrného integrálu.

Věta 1.4.1. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a funkce φ je spojitá na intervalu $\langle \alpha,\beta\rangle$, přičemž $\varphi(t) \in (a,b)$ pro každé $t \in \langle \alpha,\beta\rangle$, a φ má na tomto intervalu spojitou první derivaci φ'. Pak platí*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

U dvourozměrného integrálu postupujeme následovně.

Věta 1.4.2. *Mějme funkce g a h definované na množině $B \subseteq \mathbb{R}^2$ a $F : B \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení, které přiřazuje bodu $[u,v] \in B$ bod $F(u,v) = [g(u,v),h(u,v)]$. Pak, když existuje otevřená množina $\Omega \supseteq B$ taková, že funkce g a h lze rozšířit na Ω tak, že obě tyto funkce mají spojité derivace prvního řádu dle proměnných u a v, zobrazení F je diferencovatelné na množině B.*

Pokud jsou podmínky z této definice splněné, potom determinant

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial h(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial h(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}$$

nazveme jakobiánem zobrazení $F : B \to \mathbb{R}^2$. Jakobián budeme značit $J(u,v)$.

Poznámka. Pro snadnější zápis dále budeme používat

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial h(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial h(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix}.$$

Věta 1.4.3 (Substituce dvojného integrálu). *Mějme uzavřenou měřitelnou množinu $B \subseteq \subseteq \mathbb{R}^2$ a otevřenou množinu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ a nechť $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je prosté regulární zobrazení, tj. jeho jakobián je různý od nuly v každém bodě množiny Ω, takové, že platí $F(u,v) = = [g(u,v),h(u,v)]$ pro všechny body $[u,v] \in B$. Dále nechť funkce f proměnných x a y je spojitá na množině $A = F(B)$. Pak platí*

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B f(g(u,v),h(u,v))|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

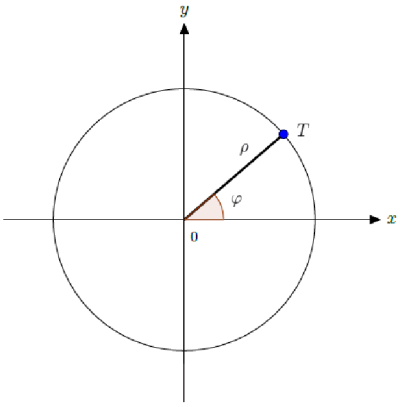
Tato metoda nám může pomoci při řešení nejrůznějších problémů. Představíme si základní typy transformací (tab. 1.1).

Tabulka 1.1: Přehled nejběžnějších transformací v $\mathbb{R}^2$

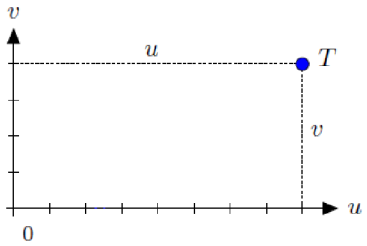
Transformace	Translace	Dilatace	Polární souřadnice	Eliptické souřadnice
Rovnice	$x = u + a$ $y = v + b$	$x = au$ $y = bv$	$x = \rho cos\varphi$ $y = \rho sin\varphi$	$x = a\rho cos\varphi$ $y = b\rho sin\varphi$
Jakobián zobrazení	1	ab	ρ	$ab\rho$

Jednou z nejužitečnějších substitucí je transformace do polárních souřadnic. Tuto substituci si blíže představíme.

Poznámka. Používáme ji, když množina M obsahuje části kružnic. Z obrázku (1.7) lze vidět, že ρ značí vzdálenost bodu T od počátku soustavy souřadnic a úhel φ svírá vektor ρ s kladnou poloosou x.



Obrázek 1.7: Bod T ve starých souřadnicích x a y



Obrázek 1.8: Bod T v nových souřadnicích u a v

Tato transformace je tvaru

$$x = \rho cos\varphi,$$
$$y = \rho sin\varphi,$$

kde $\rho \geq 0$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Vyjádříme si jakobián tohoto zobrazení

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi \\ h_\rho & h_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho.$$

Dostaneme vyjádření dvojného integrálu v polární souřadnicích

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi,)|J(\rho,\varphi)|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Uvedeme výpočty jakobiánů zbylých transformací.
Translace (posunutí)

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dilatace (změna měřítka)

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab.$$

Eliptické souřadnice

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi \\ h_\rho & h_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = ab\rho.$$

Obecně se jedná o velmi užitečný aparát. Výše uvedené transformace veličin nemusíme využívat pokaždé. Při řešení příkladů si sami můžeme vytvořit substituci, která bude nejlépe vyhovovat našemu případu. Toto počítání však vyžaduje trochu zručnosti.

1.4.1 Příklad. Vypočítejme $\iint_M (2x^2 + 2y^2 - 5xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je množina ohraničená křivkami $2y = x+3$, $2y = x$, $y = 2x$, $y = 2x-3$.

Řešení. Tento příklad jsme již vypočítali. Nyní si ukážeme řešení tohoto příkladu pomocí vlastní substituce.

$$M: \quad \begin{aligned} 0 \le 2y - x \le 3, \\ -3 \le y - 2x \le 0. \end{aligned}$$

Můžeme použít substituci $u = 2y - x$, $v = y - 2x$ a vypočítáme jakobián zobrazení. Víme, že

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - (-4) = 3$$

a náš požadovaný jakobián je tvaru $J_\varphi = -\frac{1}{3}$. Nyní upravíme integrand

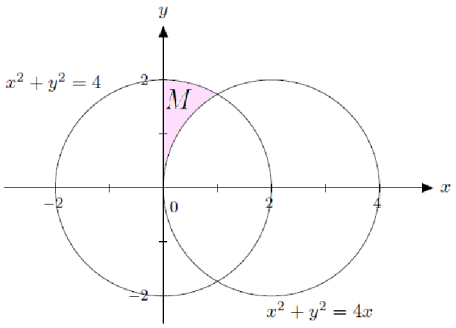
$$2x^2 + 2y^2 - 5xy = 2y^2 - 4xy - xy + 2x^2 = 2y(y - 2x) - x(y - 2x) = (2y - x)(y - 2x).$$

Po substituci bude dvojný integrál tvaru

$$\begin{aligned} \iint_M uv \left|J_\varphi\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}\int_{0}^{3} (uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}\left[v\frac{u^2}{2}\right]_0^3 \mathrm{d}v = \\ &= \frac{3}{2}\int_{-3}^{0} v\,\mathrm{d}v = \frac{3}{2}\left[\frac{v^2}{2}\right]_{-3}^{0} = -\frac{27}{4}. \end{aligned}$$

1.4.2 Příklad. Vypočítejme $\iint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je množina ohraničená křivkami $x^2 + y^2 = 4; x^2 + y^2 = 4x; y \ge 0; x \ge 0$.

Řešení. Příklad budeme řešit pomocí transformace do polárních souřadnic. Načrtneme si graf a určíme meze.



Obrázek 1.9: Množina M

$$M: \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \\ 4\cos\varphi \le \rho \le 2. \end{aligned}$$

Použijeme substituci

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned}$$

a jakobián tohoto zobrazení je $J(\rho, \varphi) = \rho$. Provedeme výpočet

$$\begin{aligned} \iint_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{4\cos\varphi}^{2} \rho\, sin\varphi\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{4\cos\varphi}^{2}\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{(64\cos^3\varphi - 8)\sin\varphi}{3}\,\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{16\cos^4\varphi - 8\cos\varphi}{3}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Poznámka. Nejčastější chybou při počítání je, že zapomeneme po transformaci přidat jakobián. Před začátkem integrování je dobré si důkladně zkontrolovat, zda jsme jakobián nevynechali.

1.5 Aplikace dvojného integrálu

Zatím jsme se zabývali teorií dvojného integrálu a uvedli jsme pár příkladů. Avšak toto téma má mnohem širší využití než jen v analýze. My si ukážeme další aplikace, a to kupříkladu fyzikální, kde se tato teorie využívá hlavně v mechanice. Dále pak využití v pravděpodobnosti a podíváme se, jak lze tento integrál užít i v ekonomii. Vztahy potřebné pro tuto část jsme čerpali z [5], [3], [4] a [6] .

1.5.1 Obsah (míra) plochy

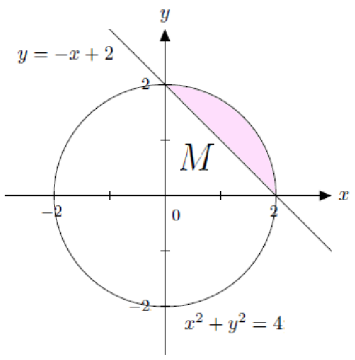
Jedná se o geometrickou aplikaci dvojného integrálu. Má široké využití v matematice a také ve fyzice. Aplikaci užíváme tehdy, když chceme spočítat obsah nějaké uzavřené plochy.
Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelnou množinou. Pak pro výpočet obsahu (míry) plochy M platí vztah

$$m(M) = \iint_M 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Praktické využití si ukážeme na následujícím příkladu.

1.5.1 Příklad. Vypočítejme obsah plochy ohraničené křivkami $x^2+y^2 = 4$, $y = -x+2$.

Řešení. Při počítání aplikací postupujeme zcela analogicky, jako by se jednalo o běžný příklad.



Určíme si meze:

$$M: \quad \begin{array}{c} 0 \le x \le 2, \\ 2-x \le y \le \sqrt{4-x^2}. \end{array}$$

Obrázek 1.10: Množina M

Můžeme tedy přistoupit k samotnému počítání obsahu. Z teorie již víme, že pokud chceme

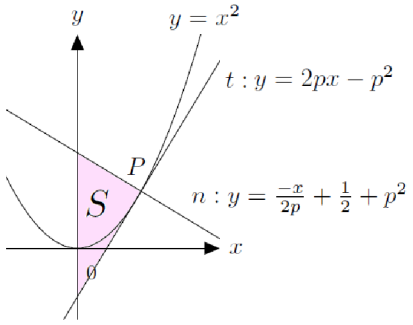
vypočítat obsah, integrand se nám musí rovnat 1

$$\iint_M 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 [y]_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}-2+x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{4\arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}+x^2-4x}{2}\right]_0^2 = \pi-2.$$

Ukážeme i druhý příklad, kde pomocí této teorie elegantně řešíme náš zadaný problém.

1.5.2 Příklad. Zjistěme bod P, který leží na grafu funkce $y=x^2$ tak, aby obsah trojúhelníku ohraničeném osou y, tečnou a normálou v daném bodě byl roven $\frac{17}{2}$.

Řešení. Bod P, který leží na grafu výše zmíněné funkce, bude mít souřadnice $[p,p^2]$. Uvedeme si vzorce pro tečnu t a normálu n



$$t: \quad y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$$
$$y-p^2 = 2p(x-p) \Rightarrow y = 2px-p^2$$
$$n: \quad y-y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$
$$y-p^2 = \frac{-1}{2p}(x-p) \Rightarrow y = \frac{-x}{2p}+\frac{1}{2}+p^2.$$

Obrázek 1.11: Obsah trojúhelníku

Obsah plochy ohraničené křivkami vypočítáme jako dvojný integrál s integrandem rovným číslu 1

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^p \left[\int_{2px-p^2}^{\frac{-x}{2p}+\frac{1}{2}+p^2} 1\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{17}{2}$$
$$\int_0^p \frac{-x}{2p}+\frac{1}{2}+p^2-(2px-p^2)\,\mathrm{d}x = \frac{17}{2}$$
$$\left[-\frac{x^2}{4p}+2p^2x+\frac{x}{2}-x^2p\right]_0^p = \frac{17}{2}$$
$$4p^3+p = 34 \Rightarrow p = 2.$$

Získáme bod $P=[2,4]$.

1.5.2 Aplikace dvojných integrálů v mechanice

Nyní se budeme věnovat fyzikálním aplikacím, které jsou využívány v mnoha praktických příkladech z oblasti mechaniky. Mezi ně patří výpočet hmotnosti rovinné desky A, moment setrvačnosti nebo výpočet těžiště. Představíme si vzorce pro výpočet jednotlivých charakteristik.

Představme si tenkou rovinnou desku, která má zanedbatelný třetí rozměr. Tuto desku můžeme chápat jako uzavřenou měřitelnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^2$ s plošnou hustotou. Plošnou hustotu bereme jako nezápornou integrovatelnou funkci o dvou proměnných $\rho(x,y)$.

1. Pro výpočet hmotnosti $m(A)$ používáme vzorec
$$m(A) = \iint_A \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad [kg].$$
2. Pro výpočet statických momentů vzhledem k osám užíváme
$$S_x(A) = \iint_A y\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad [kg\cdot m],$$
$$S_y(A) = \iint_A x\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad [kg\cdot m].$$
3. Pro výpočet těžiště rovinné desky A platí vzorec
$$T(A) = \left[\frac{S_y(A)}{m(A)}, \frac{S_x(A)}{m(A)}\right].$$
4. Momenty setrvačnosti tenké desky vzhledem k osám
$$I_x(A) = \iint_A y^2\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad [kg\cdot m^2],$$
$$I_y(A) = \iint_A x^2\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad [kg\cdot m^2].$$

Poznámka. Je-li plošná hustota $\rho(x,y)$ konstantní řekneme, že rovinná deska je homogenní.

Podívejme se na příklad, kde využíváme první tři vzorce .

1.5.3 Příklad. Vypočítejme těžiště homogenní desky $A : x = 2,\ y = x,\ xy = 1$.

Řešení. Nejprve si spočítáme hmotnost desky A. Určíme meze pro integrování.
$$A: \quad \begin{matrix} 1 \le x \le 2, \\ \dfrac{1}{x} \le y \le x. \end{matrix}$$
Pro výpočet použijeme vzorec z definice. Jedná se homogenní desku s plošnou hustotou $\rho = 1$
$$m(A) = \iint_A 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 [y]_{\frac{1}{x}}^{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - [\ln x]_1^2 = \frac{3-2\ln 2}{2}.$$

Dále vypočítáme statické momenty

$$S_x(A) = \iint_A y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_1^2 \frac{x^4-1}{2x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4+3}{6x}\right]_1^2 = \frac{11}{12},$$
$$S_y(A) = \iint_A x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 [xy]_{\frac{1}{x}}^{x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_1^2 x^2 - 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{4}{3}.$$

A konečně spočteme těžiště dle vzorce

$$T(A) = \left[\frac{S_y(A)}{m(A)}, \frac{S_x(A)}{m(A)}\right] = \left[\frac{11}{18-12\ln 2}, \frac{8}{9-6\ln 2}\right].$$

Uvedeme si další příklad, kde tentokrát budeme využívat poslední vzorec.

1.5.4 Příklad. Máme desku $A : \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$ s konstantní hustotou. Vypočítejme momenty setrvačnosti.

Řešení. Homogenní deska A je plocha mezi soustřednými kružnicemi. Díky symetrii platí, že $I_x(A) = I_y(A)$ a my můžeme počítat jen jeden z případů. Použijeme jeden vzorec z definice $I_x(A) = \iint_A y^2 \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Provedeme substituci

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

a po dosazení do vzorce a přidání Jakobiánu dostaneme výraz

$$I_x(A) = \iint_A y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho =$$
$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{1}{2}(-\sin\varphi\cos\varphi + \varphi)\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right] \cdot \pi = \frac{15\pi}{4}.$$

1.5.3 Elektrický náboj

Další velmi zajímavou fyzikální aplikací je výpočet elektrického náboje rozloženého na desce. Elektrický náboj je fyzikální veličinou, která nám vyjadřuje velikost schopnosti působit elektrickou silou.

Představme si tenkou rovinnou desku. Tuto desku můžeme chápat jako uzavřenou měřitelnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^2$ s plošnou hustotou elektrického náboje. Plošnou hustotu elektrického náboje bereme jako nezápornou integrovatelnou funkci o dvou proměnných $\sigma(x,y)$. Celkový elektrický náboj rozložený na desce A je tvaru

$$Q(A) = \iint_A \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad [C].$$

1.5.5 Příklad. Vypočítejme celkový elektrický náboj rozložený na tenké desce A tvaru obdélníku zadanou jako $A : 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq 1$, je-li plošná hustota elektrického náboje $\sigma(x,y) = \ln x$.

Řešení. Desku si můžeme představit jako stěnu kondenzátoru. Chceme zjistit její celkový náboj. Dosadíme do vzorce a provedeme výpočet

$$Q(A) = \iint_A \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^e \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = [x\ln x - x]_1^e \cdot [y]_0^1 = \\ = [e - e - (0-1)] \cdot (1-0) = 1.$$

1.5.4 Střední hodnota a pravděpodobnost

Kromě geometrických a fyzikálních aplikací má dvojný integrál i velké zastoupení v pravděpodobnosti. Ukážeme si několik využití v této matematické disciplíně.

Již víme z kurzů Pravděpodobnost a statistika I a Pravděpodobnost a statistika II, co znamená náhodná veličina X a co značí její hustota. Připomeneme si několik základních vztahů, které dále budeme využívat.

Nechť máme náhodnou veličinu X, která je absolutně spojitého typu. Pak základní vlastnosti hustoty $f(x)$ jsou

$$f(x) \geq 0 \text{ pro } \forall x \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Chceme-li spočítat pravděpodobnost, že náhodná veličina X leží v intervalu $\langle a,b\rangle$, dostaneme vztah

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Jestliže má náhodná veličina X spojité rozdělení pravděpodobnosti, pak je pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$P(X = x) = 0.$$

Tedy nezáleží zda píšeme $<$ nebo $\leq$.

Dvojný integrál používáme v případě, kdy máme dvě náhodné veličiny X a Y absolutně spojitých typů. Pro jejich sdruženou (simultánní) hustotu pravděpodobnosti $f(x,y)$ nám platí vztah

$$f(x,y) \geq 0 \text{ pro } \forall x,y \text{ a } \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

Pokud budeme chtít vypočítat pravděpodobnost, že náhodné veličiny X a Y se realizují v obdélníkové oblasti $I = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$, dostaneme výraz

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Kromě určení pravděpodobnosti se integrál využívá i pro získání středních hodnot spojitých náhodných veličin. Zde budeme využívat jednu z vlastností sdružené hustoty pravděpodobnosti a to, že marginální (okrajová) hustota se ze sdružené hustoty dostane integrací dle „druhé“ proměnné

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Vzorec pro střední hodnotu náhodné veličiny X, když známe sdruženou hustotu $f(x,y)$, dostaneme ze vztahu

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Obdobně dostaneme vzorec pro střední hodnotu náhodné veličiny Y

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tyto poznatky můžeme využít v následujícím příkladě.

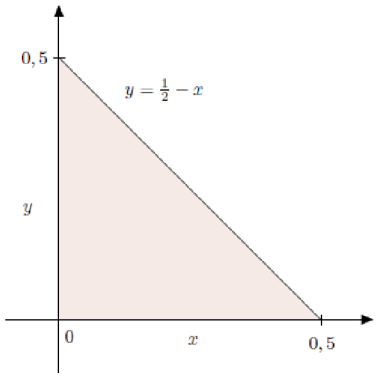
1.5.6 Příklad. Ve městě působí dvě taxikářské společnosti. Nechť náhodná veličina X udává denní využívanost společnosti A a náhodná veličina Y udává denní využívanost společnosti B. Po čase radnice města určila sdruženou hustotu těchto náhodných veličin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{3y^2}{4} & \text{pro } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jaká je pravděpodobnost, že se současně využívají obě společnosti méně než polovinu dne? Vypočítejme střední hodnoty obou náhodných veličin.

Řešení. Nejprve si určíme jak bude vypadat pravděpodobnost $P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = P(X+Y \le \frac{1}{2})$.

Nerovnost $X + Y \le \frac{1}{2}$ si můžeme graficky znázornit na obrázku 1.12 .



Obrázek 1.12: Znázornění oblasti

Po dosazení do vzorce nám vyjde

$$P(X+Y \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}-x} \frac{3x}{2} + \frac{3y^2}{4} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{y^3}{4} + \frac{3xy}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}-x} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{8x^3+36x^2-18x-1}{32} \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2x^4+12x^3-9x-x}{32}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{256}.$$

Nyní si spočítáme střední hodnoty

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 x\left[\frac{3x}{2}+\frac{3y^2}{4}\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{xy^3}{4}+\frac{3yx^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{4}+\frac{3x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{8}+\frac{y^3}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{8},$$
$$EY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 y\left[\frac{3x}{2}+\frac{3y^2}{4}\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{3y^4}{16}+\frac{3y^2x}{4}\right]_0^1 \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \frac{3}{16}+\frac{3x}{4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3x}{16}+\frac{3x^2}{8}\right]_0^1 = \frac{9}{16}.$$

1.5.5 Ekonomická aplikace

Jako další využití můžeme uvést i ekonomické aplikace. Poznatky k tomuto odstavci byly hlavně čerpány z [6]. Jedná se o aplikace pro teoretické modely trhu, které se využívají v oblastech mikroekonomie. Vysvětlíme si potřebnou teorii na příkladě.

Představme si trh s jablky. Na tomto trhu můžeme potkat dva typy lidí. Kupující (poptávající), kteří si chtějí pořídit jablka a proti nim stojí lidé, kteří se jablka snaží prodat. Těm budeme říkat prodávající (nabízející). Definujeme trh jak skupinu kupujících a poptávajících určitého statku nebo služby.

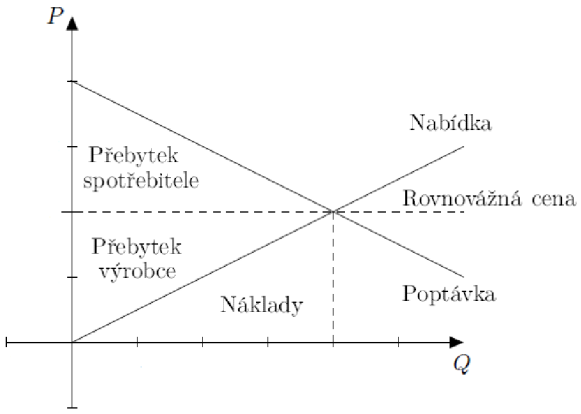
Jablko nám bude stát určitou rovnovážnou cenu. Termín rovnovážná cena si vysvětlíme později. Můžeme si všimnout, že pokud by jablka byla za nižší cenu, poptávající byl by ochoten nakoupit větší množství. Tento jev nám graficky znázorňuje poptávková křivka. Ta reprezentuje vztah mezi cenou určitého statku a poptávaným množstvím. Tato křivka bude mít klesající trend (při nižší ceně nakoupíme větší množství). Na druhé straně pokud by jablka stála více, prodávající by byl ochoten prodávat větší množství takových jablek. Tento fakt můžeme graficky prezentovat jako nabídkovou křivku. Nabídková křivka nám znázorňuje vztah mezi cenou statku a nabízeným množstvím. Tahle křivka bude mít tedy rostoucí trend (při vyšší ceně bych rád prodal větší množství). Nyní si tedy můžeme definovat rovnovážnou cenu jako cenu, při které je nabízené a poptávané množství stejné.

Uvažujme o Karlovi, kterému jablka velmi chutnají. Byl by ochoten za kilo jablek zaplatit až 10 korun. Přijde na trh a zjistí, že jablka lze pořídit za 5 korun. Ve výsledku ušetří. Můžeme definovat přebytek spotřebitele jako množství peněz, které je kupující ochoten zaplatit, snížené o množství peněz, které skutečně zaplatí (rovnovážná cena).

Uvažujme též o Marii, která taková jablka prodává. Marie má velké sady a tak ji nějakou dobu trvá, než všechna jablka očeše. Má tedy s tímto statkem spojené určité náklady.

Náklady můžeme definovat jako hodnotu všeho, čeho se prodávající musí vzdát, aby vytvořil statek. Marie si spočítala, že vypěstovat jedno jablko ji stojí 2 koruny. Pokud tento produkt prodá za vyšší cenu, bude mít na této transakci určitý výdělek.

Definujeme poslední termín a to přebytek výrobce, jako množství peněz, které výrobce získá, mínus náklady vynaložené na výrobu statku.

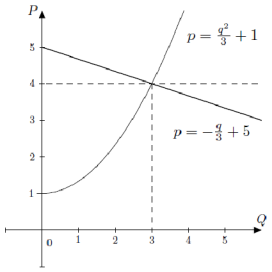


Obrázek 1.13: Přebytek výrobce a spotřebitele

1.5.7 Příklad. Agentura zjistila, že trh s novým výrobkem má poptávkovou funkci tvaru $p = -\frac{q}{3} + 5$ a nabídkovou funkci tvaru $p = \frac{q^2}{3} + 1$. Zjistěme přebytek spotřebitele a přebytek výrobce.

Řešení. Nejprve si určíme rovnovážnou cenu.

$$\frac{-q}{3} + 5 = \frac{q^2}{3} + 1$$
$$q^2 + q - 12 = 0$$



Obrázek 1.14: Trh

Po výpočtu kvadratické rovnice dostaneme dva kořeny 3 a -4. Nás bude zajímat jen kladný kořen. Po dosazení do poptávkové funkce dostaneme rovnovážnou cenu $p = 4$. Přebytek spotřebitele můžeme počítat jako obsah plochy mezi poptávkovou funkcí a rovnovážnou cenou. Obdobně přebytek výrobce můžeme počítat jako obsah plochy mezi na-

bídkovou funkcí a rovnovážnou cenou. Přebytek výrobce si označme jako *PS*. Dostaneme

$$PS = \int_1^4 \int_0^{\sqrt{3y-3}} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^4 [x]_0^{\sqrt{3y-3}} \,\mathrm{d}y = \int_1^4 \sqrt{3y-3}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \left[\frac{2(3y-3)^{\frac{3}{2}}}{9}\right]_1^4 = 6.$$

Přebytek spotřebitele si označme jako *CS*, pak dostaneme

$$CS = \int_4^5 \int_0^{15-3y} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_4^5 [x]_0^{15-3y} \,\mathrm{d}y = \int_4^5 15-3y\,\mathrm{d}y =$$
$$= \left[15y - \frac{3y^2}{2}\right]_4^5 = \frac{3}{2}.$$

Kapitola 2

Trojný a n-rozměrný integrál

V kapitole 1 jsme si představili dvojný integrál. Podobně jako v první části budeme postupovat i v budování integrálu funkcí konečného počtu proměnných. Teorii budeme aplikovat na trojný integrál. Pro tvorbu vyšších integrálů bychom postupovali zcela analogicky. Nejprve si definujeme trojný integrál na trojrozměrném intervalu. Dále zavedeme pojem měřitelné množiny v $\mathbb{R}^3$ a pokusíme se zkonstruovat integrál na těchto množinách. Poznatky k této kapitole jsme čerpali z [1], [2], [5] a [8]. Důkazy k uvedeným větám jsou jsou velmi podobné jako u vět ke dvojnému integrálu, jen způsob zápisu je poněkud komplikovanější.

2.1 Trojný integrál na intervalu

Přistoupíme k prvnímu pojmu. Obdobně jako u dvojného integrálu definujeme interval a jeho dělení.

6 Definice. Intervalem v prostoru neboli trojrozměrným intervalem budeme rozumět množinu I, která je kartézským součinem tří intervalů $I_1, I_2, I_3 \subseteq \mathbb{R}$. Tedy $I = I_1 \times I_2 \times I_3$.

Poznámka. Dále budeme interval I nazývat také kvádrem.

I nadále budeme předpokládat, že se jedná o uzavřený nedegenerovaný interval, jenž můžeme psát jako $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \langle a_3, b_3 \rangle$, kde $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{R}$ a $a_i < b_i$. Nechť $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \langle a_3, b_3 \rangle$ je interval v $\mathbb{R}^3$. Mějme systém kvádrů $I_{lkj} : l = = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m, j = 1 \ldots p$, který budeme nazývat dělení kvádru I a budeme jej značit $D = D_x \times D_y \times D_z$ tak, že $D_x : a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b_1$; $D_y : a_2 = y_0 < y_1 < < \cdots < y_m = b_2$ a $D_z : a_3 = z_0 < z_1 < \cdots < z_p = b_3$. Označme $\lambda(I_{lkj}) = (x_l - x_{l-1}) \cdot (y_k - - y_{k-1}) \cdot (z_j - z_{j-1})$ objem kvádru I_{lkj}. Ke každému dělení D intervalu I definujeme součty

$$s(D,f) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} \inf_{(x,y,z) \in I_{lkj}} f(x,y,z) \cdot \lambda(I_{lkj}) \qquad \text{dolní součet,}$$

$$S(D,f) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} \sup_{(x,y,z) \in I_{lkj}} f(x,y,z) \cdot \lambda(I_{lkj}) \qquad \text{horní součet.}$$

Definujeme dolní a horní trojný Riemannův integrál funkce f na intervalu I

$$\underline{\iiint_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \sup_D \{s(D,f)\} \qquad \text{dolní integrál,}$$

$$\overline{\iiint_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \inf_D \{S(D,f)\} \qquad \text{horní integrál.}$$

Můžeme říci, že funkce f je na I Riemannovsky integrovatelná, pokud platí rovnost

$$\underline{\iiint_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \overline{\iiint_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Tuto společnou hodnotu nazveme Riemannův integrál a značíme jej

$$\iiint_I f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Jako u dvojného integrálu, funkci f budeme nazývat integrandem a množinu I integračním oborem.

Poznámka. Je-li funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ na uzavřeném intervalu $I = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \times \langle a_3, b_3\rangle$ spojitá. Pak f je na tomto intervalu I integrovatelná.

Díky využití následující věty, se nám výpočet trojných integrálů velmi usnadní.

Věta 2.1.1 (Fubiniova věta). *Buď* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *spojitá funkce na kvádru* $I = \langle a_1, b_1\rangle \times \times \langle a_2, b_2\rangle \times \langle a_3, b_3\rangle$ *pak platí*

$$\begin{aligned}\iiint_I f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_3}^{b_3} f\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_3}^{b_3}\left[\int_{a_2}^{b_2} f\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x = \\ &= \int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_3}^{b_3}\left[\int_{a_1}^{b_1} f\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y = \int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_3}^{b_3} f\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \\ &= \int_{a_3}^{b_3}\left[\int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_1}^{b_1} f\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z = \int_{a_3}^{b_3}\left[\int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2} f\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Můžeme tedy vidět, že nezáleží na pořadí integrování.

2.2 Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^3$

Uvedli jsme si, jak počítat trojný integrál na intervalu. Ne vždy máme jako integrační obor takový útvar. Mnohdy je oblast integrace zadána jako složitější množina. Podíváme se, jak bychom postupovali v tomto případě. Nejprve si definujeme charakteristickou funkci.

7 Definice. Buď $M \subseteq \mathbb{R}^3$ množinu. Definujeme charakteristickou funkci množiny M předpisem

$$\chi_M(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x,y,z] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x,y,z] \notin M. \end{cases}$$

8 Definice. Řekneme, že omezená množina M je (Jordanovsky) měřitelná, je-li funkce $\chi_M(x,y,z)$ Riemanovsky integrovatelná na uzavřeném intervalu $J \in \mathbb{R}^3$. Pak se číslo

$$m(M) = \iiint_I \chi_M(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

nazývá (Jordanovou) mírou množiny M.

Poznámka. Tuto míru $m(M)$ můžeme chápat jako objem tělesa.

Poznámka. Geometrická interpretace míry množin $m(M)$ je analogická, jako v případě míry množiny v $\mathbb{R}^2$. Jen přidáme další dimenzi. Taktéž vlastnosti měřitelných množin jsou shodné jako v $\mathbb{R}^2$. Tyto vlastnosti jsou již uvedeny ve větě 1.2.1 .

2.3 Trojný integrál na měřitelné množině

Po zavedení výše uvedených pojmů budeme zkoumat, jak vypadá trojný integrál na těchto množinách.

9 Definice. Buď $M \subseteq \mathbb{R}^3$ neprázdná měřitelná množina a f ohraničená funkce na M. Funkce f je Riemannovsky integrovatelná na množině M, je-li funkce $f \cdot \chi_M$ definovaná

$$(f \cdot \chi_M)(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{pro } [x,y,z] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x,y,z] \notin M \end{cases}$$

je integrovatelná na libovolném kvádru $I \subseteq M$. Trojný Riemannův integrál funkce f na množině M je číslo definované rovností

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_I (f \cdot \chi_M)(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Věta 2.3.1 (Vlastnosti trojného integrálu). *Nechť máme spojité funkce f a g, které jsou integrovatelné na $M \subseteq \mathbb{R}^3$, kde M je měřitelná množina. Pak platí*

1. *Pro každé $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ je*

$$\iiint_M c_1 f + c_2 g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = c_1 \iiint_M f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + c_2 \iiint_M g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

2. *Je-li $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ pro $\forall (x,y,z) \in M$, je*

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \le \iiint_M g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

3. $$\left| \iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right| \le \iiint_M |f(x,y,z)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

4. *Je-li $M = M_1 \cup M_2$ a platí $m(M_1 \cap M_2) = 0$ (měřitelné množiny M_1 a M_2 jsou navzájem disjunktní), je*

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{M_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_{M_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

5. *Má-li měřitelná množina míru 0 ($m(M) = 0$) je*

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0.$$

6. *Je-li funkce f spojitá na uzavřené množině M, pak f je na této množině M integrovatelná.*

Uvedeme nyní definici elementární množiny vzhledem k rovině xy, kterou dále budeme používat u Fubiniovy věty.

10 Definice. Nechť

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in M \wedge \Phi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\right\},$$

kde množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina v $\mathbb{R}^2$ a funkce $\Phi(x,y)$ a $\Psi(x,y)$ jsou na M spojité, pro něž platí

$$\Phi(x,y) \le \Psi(x,y) \text{ pro každé } (x,y) \in M.$$

Pak Ω nazveme elementární množinou v $\mathbb{R}^3$. Stejným způsobem bychom definovali elementární množinu vzhledem k rovině xz, jako

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in M \wedge \Phi(x,z) \le y \le \Psi(x,z)\right\}$$

a elementární množinu vzhledem k rovině yz v $\mathbb{R}^3$

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in M \wedge \Phi(y,z) \le x \le \Psi(y,z)\right\}.$$

Věta 2.3.2 (Fubiniova věta). *Nechť*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in M \wedge \Phi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\right\}$$

je elementární množina v $\mathbb{R}^3$ vzhledem k rovině xy, kde Φ a Ψ jsou spojité funkce na M, pro něž platí $\Phi(x,y) \le \Psi(x,y)$ pro každé $(x,y) \in M$ a M je též elementární množina. Je-li funkce f spojitá na Ω, pak

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_M \left[\int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dále pokud máme M elementární množinu vzhledem k ose x (viz definice elementární množiny v rovině 1.3.2)

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\},$$

kde funkce φ a ψ jsou spojité na $\langle a,b\rangle$ a platí $\varphi(x) \le \psi(x)$ pro všechny $x \in \langle a,b\rangle$, potom

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Definice elementární množiny vzhledem k ose x je analogická s definicí elementární množiny vzhledem k rovině xy.

Poznámka. V případě změny pořadí proměnných bychom získali dalších pět vzorců. Tyto vzorce jsou uvedeny v [5].

2.3.1 Příklad. Vypočítejme $\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde funkce je zadána jako $f(x,y,z) = xy^2 - \frac{z}{y}$ a množina $M : \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle \times \langle 0,2\rangle$.

Řešení. Příklad počítáme klasicky. Integrační obor je v tomto případě kvádr. Nemusíme tedy dále určovat meze, jen dosadíme do vzorce

$$\begin{aligned}\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1\int_1^2\int_0^2 xy^2 - \frac{z}{y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_1^2 \left[xy^2z - \frac{z^2}{2y}\right]_0^2 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1\int_1^2 2xy^2 - \frac{2}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[2x\frac{y^3}{3} - 2\ln|\,y\,|\right]_1^2 \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \frac{15x}{3} - 2\ln|\,2\,|\,\mathrm{d}x = \left[\frac{15x^2}{6} - 2x\ln|\,2\,|\right]_0^1 = \frac{15}{6} - 2\ln|\,2\,|.\end{aligned}$$

2.4 Transformace trojných integrálů

Ne u všech příkladů lze získat výsledek tak snadno. Často jsou oblasti, přes které integrujeme, zadány velmi složitými funkcemi. Uvedeme si několik základních transformací, které nám mohou výpočet značně usnadnit. Nejprve si shrneme potřebnou teorii, které je blíže uvedená v [5].

11 Definice. Buď $B \subseteq \mathbb{R}^3$ otevřená množina a g, h, k funkce diferencovatelné na B tak, že $x = g(u,v,w)$, $y = h(u,v,w)$, $z = k(u,v,w)$. Nechť F je zobrazení, které každému bodu $[u,v,w] \in B$ přiřadí bod $[g(u,v,w), h(u,v,w), k(u,v,w)] \in F(B)$. Řekneme, že zobrazení F je spojitě diferencovatelné, jestliže funkce g, h, k mají na B spojité parciální derivace prvního řádu dle všech tří proměnných.

Je-li $F : B \to \mathbb{R}^3$ spojitě diferencovatelné zobrazení v B, potom determinant

$$J = \begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix}$$

nazveme jakobiánem zobrazení F.

Věta 2.4.1 (O substituci ve trojném integrálu). *Nechť máme uzavřenou měřitelnou množinu $B \subseteq \mathbb{R}^3$, otevřenou množinu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ a platí $B \subseteq \Omega$. Nechť $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ je regulární zobrazení s jakobiánem J takové, že platí $F(u,v,w) = [g(u,v,w), h(u,v,w), k(u,v,w)]$ pro všechny body $[u,v,w] \in B$. Nechť je navíc funkce f proměnných x, y a z spojitá na množině $A = F(B)$. Pak platí*

$$\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_B f(g(u,v,w), h(u,v,w), k(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

Tabulka 2.1: Přehled nejběžnějších transformací v $\mathbb{R}^3$

Transformace	Translace	Dilatace	Válcové souřadnice	Sférické souřadnice
Rovnice	$x=u+a$ $y=v+b$ $z=w+c$	$x=au$ $y=bv$ $z=cw$	$x=\rho\cos\varphi$ $y=\rho\sin\varphi$ $z=z$	$x=\rho\cos\varphi\sin\vartheta$ $y=\rho\sin\varphi\sin\vartheta$ $z=\rho\cos\vartheta$
Jakobián zobrazení	1	abc	ρ	$-\rho^2\sin\vartheta$

Poznámka. Zobrazení F je regulární právě tehdy, když jakobián zobrazení J je různý od nuly.

Můžeme si představit základní typy transformací (tab. 2.1).
Uvedeme výpočty jakobiánů. Translace (posunutí)

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Dilatace (změna měřítka)

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc.$$

Válcové (cylindrické) souřadnice

$$J(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi & g_z \\ h_\rho & h_\varphi & h_z \\ k_\rho & k_\varphi & k_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho.$$

Sférické (kulové) souřadnice

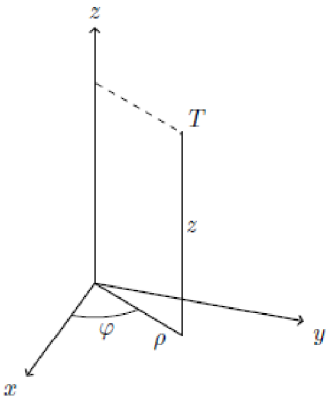
$$\begin{aligned} J(\rho,\varphi,z)&=\begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi & g_\vartheta \\ h_\rho & h_\varphi & h_\vartheta \\ k_\rho & k_\varphi & k_\vartheta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -\rho\sin\vartheta \end{vmatrix}= \\ &=-\rho^2\cos\varphi^2\sin\vartheta^3-\rho^2\sin\varphi^2\cos\vartheta^2\sin\vartheta-\rho^2\cos\varphi^2\cos\vartheta^2\sin\vartheta- \\ &-\rho^2\sin\varphi^2\sin\vartheta^3=-\rho^2\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Protože geometrický význam translace a dilatace je zřejmý (jedná se o posunutí a změnu měřítka), můžeme si uvést geometrické významy válcových a sférických souřadnic.

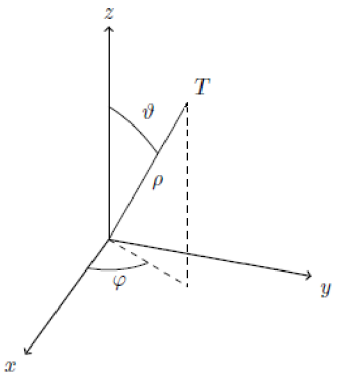
Bod T, který má souřadnice $[x,y,z]$, chceme vyjádřit pomocí válcových souřadnic. Nejprve promítneme bod T do podstavné roviny xy. Nyní bude mít tento kolmý průmět souřadnice $[x,y,0]$. Tento bod můžeme vyjádřit pomocí polárních souřadnic, jako $[\rho,\varphi,0]$ (viz sekce 1.4). A bod T, kterému přidáme jen souřadnici na ose z, dostaneme jako $[\rho,\varphi,z]$.

Vzdálenost ρ náleží intervalu $\langle 0,\infty)$ a velikost úhlu φ volíme z intervalu $\langle 0,2\pi)$. Souřadnice z nám zůstává stejná, tedy $z \in \mathbb{R}$. Tím jsme získali bod T popsaný v cylindrických souřadnicích (obr. 2.1).

Chceme bod T, který má souřadnice $[x,y,z]$, vyjádřit pomocí sférických souřadnic. Vzdálenost bodu T od počátku soustavy souřadnic si označíme jako ρ. Tuto úsečku promítneme do souřadné roviny xy. Úhel φ nám vyjadřuje velikost, kterou svírá osa x a kolmý průmět vzdálenosti ρ. A konečně ϑ určuje velikost úhlu, kterou se svírá osa z a vzdálenost ρ. Vzdálenost ρ náleží intervalu $\langle 0,\infty)$ a velikosti úhlů obvykle volíme v intervalu $\varphi \in \langle 0,2\pi)$ a $\vartheta \in \langle 0,\pi\rangle$. Nyní můžeme popsat bod T pomocí nových sférických souřadnic jako $[\rho,\varphi,\vartheta]$ (obr. 2.2).



Obrázek 2.1: Geometrický význam cylindrických souřadnic



Obrázek 2.2: Geometrický význam sférických souřadnic

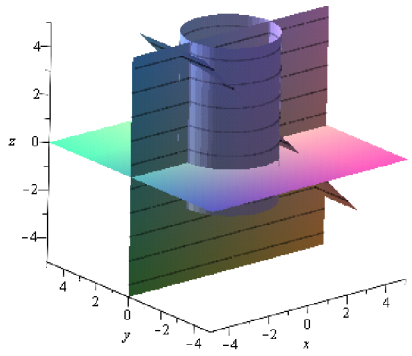
Poznámka. Transformaci do cylindrických souřadnic volíme v případě, že integrační obor nám popisuje část válcové plochy. Substituci do sférických souřadnic volíme v případě, že těleso, přes které integrujeme, obsahuje část koule.

2.4.1 Příklad. Pomocí substituce vypočítejme trojný integrál funkce $f(x,y,z) = x^2+y^2+z$ přes množinu danou $M : x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ z \leq -x+2,\ z \geq 0$.

Řešení. Při počítání budeme postupovat klasicky. Máme za úkol pomocí substituce spočítat integrál. Vzhledem k tvaru množiny (obr. 2.3) zvolíme substituci do válcových souřadnic. Provedeme substituci a přepočítáme meze.

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, & 0 &\leq \rho \leq 2,\\ y &= \rho\sin\varphi, & 0 &\leq \varphi \leq \pi,\\ z &= z. & 0 &\leq z \leq -\rho\cos\varphi+2. \end{aligned}$$

Meze jsme získali dosazením nových proměnných do zadané množiny M. Z prvních dvou nerovností si můžeme všimnout, že se jedná o válec o poloměru 2, který je půlený rovinou $y = 0$. Odtud jsme zvolili meze pro ρ a φ. Mez pro proměnnou z získáme pouhým dosazením do zbylých nerovností.



Obrázek 2.3: Množina M

Důležité je nezapomenout na jakobián $J(\rho,\varphi,z)=\rho$. Provedeme substituci integrandu a po zavedení nových proměnných dostaneme integrand ve tvaru $f(x,y,z)=x^2+y^2+$ $+z \Rightarrow f(\rho,\varphi,z)=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+z=\rho^2+z$. Můžeme tedy přejít k počítání

$$I=\int_0^2\int_0^{\pi}\int_0^{-\rho\cos\varphi+2}(\rho^2+z)\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho.$$

Tento integrál rozdělíme na dva a výsledek dostaneme jako součet těchto dvou integrálů. První integrál

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^2\int_0^{\pi}\int_0^{-\rho\cos\varphi+2}\rho^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\int_0^2\int_0^{\pi}\left[\rho^3 z\right]_0^{-\rho\cos\varphi+2}\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\\&=\int_0^2\rho^3\int_0^{\pi}-\rho\cos\varphi+2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\int_0^2\rho^3\left[-\rho\sin\varphi+2\varphi\right]_0^{\pi}\mathrm{d}\rho=\\&=\int_0^2 2\pi\rho^3\,\mathrm{d}\rho=2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2=8\pi\end{aligned}$$

a druhý integrál

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^2\int_0^{\pi}\int_0^{-\rho\cos\varphi+2}\rho z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\int_0^2\int_0^{\pi}\left[\rho\frac{z^2}{2}\right]_0^{-\rho\cos\varphi+2}\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\\&=\int_0^2\rho\int_0^{\pi}(-\rho\cos\varphi+2)^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\int_0^2\rho\int_0^{\pi}\frac{\rho^2\cos^2\varphi-4\rho\cos\varphi+4}{2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho=\\&=\int_0^2\rho\left[\frac{\rho^2}{4}(\sin\varphi\cos\varphi+\varphi)-2\rho\sin\varphi+2\varphi\right]_0^{\pi}\mathrm{d}\rho=\int_0^2\rho(\frac{\rho^2}{4}\pi+2\pi)\,\mathrm{d}\rho=\\&=\pi\left[\frac{\rho^4}{16}+2\rho\right]_0^2=5\pi.\end{aligned}$$

Sečtením těchto integrálů získáme výsledek jako

$$I=I_1+I_2=8\pi+5\pi=13\pi.$$

2.4.2 Příklad. Pomocí vhodné substituce vypočítejme trojný integrál funkce $f(x,y,z) = y$ přes množinu danou $M : x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2+z^2 \geq 1, z \geq 0$.

Řešení. Tuto úlohu řešíme obdobně jako předchozí příklad. Integrační obor je množina tvaru soustředných polokoulí, volíme tedy substituci do sférických souřadnic. Provedeme substituci a přepočítáme meze.

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\sin\vartheta, & 1 &\leq \rho \leq 2,\\ y &= \rho\sin\varphi\sin\vartheta, & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi,\\ z &= \rho\cos\vartheta. & 0 &\leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Meze pro proměnou φ jsme určili z prvních dvou nerovností zadané množiny M. Jedná se o soustředné koule a my chceme, aby proměnná φ, která nám popisuje úhel, vyplnila celou kružnici. Meze pro novou proměnnou ϑ získáme dosazením do poslední nerovnosti. Výraz $\cos\vartheta \geq 0$ platí pro ϑ z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a meze u proměnné ρ jsme zjistili úpravou výrazu

$$\begin{gathered} 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\\ 1 \leq \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \rho^2\cos^2\vartheta \leq 4\\ 1 \leq \rho^2\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + \rho^2\cos^2\vartheta \leq 4\\ 1 \leq \rho^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq \rho \leq 2. \end{gathered}$$

Nesmíme zapomenout na jakobián. U transformace do sférických souřadnic bereme v úvahu jakobián $J(\rho,\varphi,\vartheta) = -\rho^2\sin\vartheta$. Dosadíme do vzorce a počítáme integrál

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\sin\varphi\sin\vartheta\cdot(\rho^2\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho =\\ &= \int_1^2 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\cdot\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =\\ &= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2\cdot[-\cos\varphi]_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[-\cos\vartheta\sin\vartheta+\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$

2.5 Aplikace trojného integrálu

Představíme si některé užitečné aplikace trojného integrálu. Jako u dvojného integrálu mají i tyto hojné užití v geometrii, fyzice a také pravděpodobnosti. V následujících stránkách si ukážeme jak vypočítat objem a hmotnost tělesa, statické momenty, momenty setrvačnosti, elektrický náboj, pravděpodobnost a střední hodnotu tří náhodných veličin. Teorii pro tuto kapitolu jsme čerpali z [5], [3] a [4] .

2.5.1 Objem (míra) tělesa

Jedná se velmi užitečnou geometrickou aplikaci. Nejprve si uvedeme vzorec, pomocí něhož tento objem počítáme. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je měřitelnou množinou. Pak pro výpočet ob-

jemu (míry) tělesa M platí vztah

$$m(M) = \iiint_M 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Ukážeme si příklad, kde tento vzorec využíváme.

2.5.1 Příklad. Vypočítejme objem koule o poloměru r.

Řešení. Ze střední školy známe vzorec pro výpočet objemu koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, kde r nám značí poloměr. Pokusíme se dojít ke stejnému výsledku pomocí trojného integrálu. Výpočet si trochu usnadníme tím, že kouli rozpůlíme souřadnou rovinou xy a výsledný objem dostaneme jako dvojnásobek námi vypočítaného integrálu. Nejprve provedeme substituci do sférických souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\sin\vartheta, & 0 &\le \rho \le r, \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\vartheta, & 0 &\le \varphi \le 2\pi, \\ z &= \rho\cos\vartheta. & 0 &\le \vartheta \le \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vypočítáme integrál

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} = \iiint_M 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\ &= \int_0^r \rho^2 \,\mathrm{d}\rho \cdot \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \\ &= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^r \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^3}{3} 2\pi. \end{aligned}$$

Výsledný objem získáme jako dvojnásobek vypočítaného integrálu

$$V = 2 \cdot \frac{r^3}{3} 2\pi = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2.5.2 Aplikace trojného integrálu v mechanice

Uvedeme několik fyzikálních aplikací z oblasti mechaniky. Nejprve si představme vzorce, které dále použijeme pro výpočty. Představme si model tělesa. Tento model můžeme chápat jako uzavřenou měřitelnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^3$ s objemovou hustotou. Tuto objemovou hustotu bereme jako nezápornou integrovatelnou funkci o třech proměnných $\rho(x,y,z)$.

1. Pro výpočet hmotnosti modelu tělesa A používáme vzorec

$$m(A) = \iiint_A \rho(x,y,z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad [kg].$$

2. Pro výpočet statických momentů vzhledem k souřadným rovinám užíváme vzorce

$$\begin{aligned} S_{xy}(A) &= \iiint_A z\,\rho(x,y,z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad [kg \cdot m], \\ S_{xz}(A) &= \iiint_A y\,\rho(x,y,z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad [kg \cdot m], \\ S_{yz}(A) &= \iiint_A x\,\rho(x,y,z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad [kg \cdot m]. \end{aligned}$$

3. Pro výpočet těžiště modelu tělesa A platí vzorec

$$T(A) = \left[\frac{S_{yz}(A)}{m(A)}, \frac{S_{xz}(A)}{m(A)}, \frac{S_{xy}(A)}{m(A)}\right].$$

4. Pro momenty setrvačnosti modelu tělesa A vzhledem k osám

$$\begin{aligned} I_x(A) &= \iiint_A (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad [kg\cdot m^2],\\ I_y(A) &= \iiint_A (x^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad [kg\cdot m^2],\\ I_z(A) &= \iiint_A (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad [kg\cdot m^2]. \end{aligned}$$

Poznámka. Má-li model tělesa A konstantní objemovou hustotu, řekneme, že těleso je homogenní.

2.5.2 Příklad. Zjistěme těžiště modelu tělesa A, pokud známe jeho objemovou hustotu $\rho(x,y,z) = xz$. Model tělesa A je ohraničený funkcemi $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$.

Řešení. Abychom byli schopni zjistit polohu těžiště tělesa, nejprve si musíme spočítat jeho hmotnost. Určíme si meze a hmotnost vypočítáme dosazením do příslušného vzorce

$$\begin{aligned} 0 &\le z \le xy,\\ 0 &\le y \le x^2,\\ 0 &\le x \le 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(A) &= \iiint_A \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{xy} xz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =\\ &= \int_0^1\int_0^{x^2}\left[x\frac{z^2}{2}\right]_0^{xy}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^{x^2} x\frac{x^2y^2}{2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =\\ &= \int_0^1\left[x^3\frac{y^3}{6}\right]_0^{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x^9}{6}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{10}}{60}\right]_0^1 = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

Dále budeme potřebovat zjistit statické momenty. Statický moment vzhledem k souřadné rovině xy

$$\begin{aligned} S_{xy}(A) &= \iiint_A z\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{xy} xz^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =\\ &= \int_0^1\int_0^{x^2}\left[x\frac{z^3}{3}\right]_0^{xy}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^{x^2} x\frac{x^3y^3}{3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =\\ &= \int_0^1\left[x^4\frac{y^4}{12}\right]_0^{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x^{12}}{12}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{13}}{156}\right]_0^1 = \frac{1}{156}. \end{aligned}$$

Statický moment vzhledem k souřadné rovině xz

$$S_{xz}(A) = \iiint_A y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{xy} xzy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ = \cdots = \frac{1}{96}.$$

Statický moment vzhledem k souřadné rovině yz

$$S_{yz}(A) = \iiint_A x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{xy} x^2z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ = \cdots = \frac{1}{66}.$$

Polohu těžiště tedy získáme dosazením

$$T(A) = \left[\frac{S_{yz}(A)}{m(A)}, \frac{S_{xz}(A)}{m(A)}, \frac{S_{xy}(A)}{m(A)}\right] = \left[\frac{60}{66}, \frac{60}{96}, \frac{60}{156}\right] = \\ = \left[\frac{10}{11}, \frac{5}{8}, \frac{5}{13}\right].$$

2.5.3 Elektrický náboj

S elektrickým nábojem jsme se již setkali v dřívější kapitole. Ukážeme si, jak budeme postupovat, když přidáme další dimenzi.

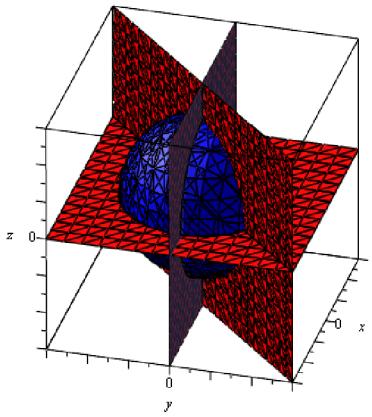
Představme si model tělesa. Tento model můžeme chápat jako uzavřenou měřitelnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^3$ s objemovou hustotou elektrického náboje. Objemovou hustotu elektrického náboje bereme jako nezápornou integrovatelnou funkci o třech proměnných $\sigma(x,y,z)$.
Pak pro celkový elektrický náboj rozložený na modelu A máme vzorec

$$Q(A) = \iiint_A \sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad [C].$$

2.5.3 Příklad. Spočítejme celkový elektrický náboj rozložený na modelu tělesa A, který má hustotu tvaru $\sigma(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Model tělesa je ohraničený plochami $x^2+y^2+ \\ +z^2 \leq a^2, y = x, z = 0, y = 0$.

Řešení. Příklad počítáme dosazením do vzorce. Pro snadnější počítání integrálu zavedeme substituci do sférických souřadnic. Na obrázku 2.4 je také vidět oblast, přes kterou integrujeme. Provedeme substituci a určíme nové meze

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\sin\vartheta, \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \\ z &= \rho\cos\vartheta. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} O \leq \rho &\leq a, \\ 0 \leq \varphi &\leq \frac{\pi}{4}, \\ 0 \leq \vartheta &\leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Obrázek 2.4: Model tělesa A

Tyto charakteristiky dosadíme do vzorce pro výpočet elektrického náboje. Nesmíme zapomenout na jakobián transformace $J(\rho,\varphi,\vartheta) = -\rho^2 sin\vartheta$. Výsledek získáme vyjádřením integrálu

$$\begin{aligned} Q(A) &= \iiint_A \sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\rho^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \\ &= \int_0^a \rho^4\,\mathrm{d}\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^a \cdot [\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{a^5}{20}\pi. \end{aligned}$$

2.5.4 Střední hodnota a pravděpodobnost

Mějme tři náhodné veličiny X, Y a Z absolutně spojitých typů, které mají sdruženou hustotu $f(x,y,z)$, pro kterou platí

$$f(x,y,z) \geq 0 \text{ pro } \forall x,y,z \text{ a } \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 1.$$

Chceme-li spočítat pravděpodobnost, že náhodné veličiny X, Y a Z se realizují na kvádru $I = \langle a_1,b_1\rangle \times \langle a_2,b_2\rangle \times \langle a_3,b_3\rangle$, používáme vztah

$$P(a_1 \leq X \leq b_1, a_2 \leq Y \leq b_2, a_3 \leq Z \leq b_3) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Jako u dvojného integrálu si uvedeme vzorce pro výpočet středních hodnot náhodných veličin X, Y a Z. Užitím podobného triku pro výpočet střední hodnoty EZ z předchozí

kapitoly, dostaneme vzorce pro případ, kdy máme tři náhodné veličiny

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$EY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} zf(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

2.5.4 Příklad. Vypočítejme střední hodnotu náhodné veličiny X, známe-li náhodný vektor, který je zadán hustotou pravděpodobnosti

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2}\left[\sin(x+z)+y\right] & \text{pro } 0 \le x \le \pi,\ 0 \le z \le \pi,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení.

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} x(\sin(x+z)+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left[xy\sin(x+z)+\frac{y^2}{2}x\right]_0^1 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(x+z)+\frac{x}{2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

Integrál si pro snadnější počítání rozdělíme na součet dvou integrálů. První integrál

$$I_1 = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(x+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\left[-x\cos(x+z)\right]_0^{\pi}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} 2x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi^2}\left[2x\sin x+2\cos x\right]_0^{\pi} = -\frac{8}{\pi^2}$$

a druhý integrál

$$I_2 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\left[xz\right]_0^{\pi}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{x^2\pi}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Střední hodnotu získáme součtem těchto dvou integrálů

$$EX = -\frac{8}{\pi^2}+\frac{\pi}{2}.$$

2.6 *n*-rozměrný integrál

Doposud jsme se zabývali jen případy, kdy $n = 2$ nebo $n = 3$. V této podkapitole si ukážeme, jak by se budoval n-rozměrný integrál. Při jeho konstrukci budeme postupovat zcela analogicky, jako to bylo u dvojného a trojného integrálu. Nejprve bychom si definovali n-rozměrný interval I tak, že $I = \langle a_1,b_1\rangle \times \langle a_2,b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n,b_n\rangle$. Mějme systém $I_{l_1,\cdots,l_n} : l_1 = 1,\ldots,n_1;\ldots;l_n = 1,\ldots,n_m$, který budeme nazývat dělení intervalu I a

budeme jej značit $D = D_{x_1} \times D_{x_2} \times \cdots \times D_{x_n}$ tak, že $D_{x_1} : a_1 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n_1} = b_1, D_{x_2} : a_2 = y_0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_{n_2} = b_2, \cdots$. Dále $\lambda(I_{l_1,\cdots,l_n}) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ označíme jako míru intervalu I. Ke každému dělení D intervalu I definujeme součty

$$s(D,f) = \sum_{I_{l_1,\cdots,l_n} \in D} \inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in I} f(x_1,\ldots,x_n) \cdot \lambda(I_{l_1,\cdots,l_n}) \qquad \text{dolní součet,}$$

$$S(D,f) = \sum_{I_{l_1,\cdots,l_n} \in D} \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in I} f(x_1,\ldots,x_n) \cdot \lambda(I_{l_1,\cdots,l_n}) \qquad \text{horní součet.}$$

12 Definice. Pokud $s(D,f) = S(D,f)$, nazveme tuto hodnotu Riemannovým integrálem na intervalu I a budeme jej značit

$$\int \cdots \int_I f(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Věta 2.6.1. *Je-li funkce f spojitá na $I = \langle a_1,b_1\rangle \times \langle a_2,b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n,b_n\rangle$ dostaneme*

$$\int \int \cdots \int_I f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \\ = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_n \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1.$$

Integrál na pravé straně můžeme nazvat n-násobným integrálem. Nezáleží na pořadí, ve kterém integraci postupně provádíme.

Definujeme si měřitelnou množinu a n-rozměrný Riemannův integrál na těchto množinách.

13 Definice. Buď $M \subseteq R^n$ množinu. Definujeme charakteristickou funkci množiny M předpisem

$$\chi_M(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x_1,x_2,\ldots,x_n] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x_1,x_2,\ldots,x_n] \notin M. \end{cases}$$

Pak pro jakoukoliv tuto množinu M a funkci f definovanou ve všech bodech M, můžeme uvažovat funkci $f \cdot \chi_M$, jako funkci definovanou na celém I. Riemannův integrál funkce f na množině M definujeme jako

$$\int \cdots \int_M f(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int \cdots \int_I f \cdot \chi_M \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Dále si zavedeme pojem elementární množiny, který budeme využívat pro formulaci Fubiniovy věty.

14 Definice. Množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tvaru

$$\begin{aligned} \Omega = \{(x_1,\ldots,x_n)\} \in \mathbb{R}^n; a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ f_1(x_1) \leq x_2 \leq g_1(x_1) \\ f_2(x_1,x_2) \leq x_2 \leq g_2(x_1,x_2) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \leq x_n \leq g_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}), \end{aligned}$$

kde $a_1,b_1 \in \mathbb{R}$ a $a_1 < b_1$ a pro všechna $i = 1,\ldots,n-1$ jsou funkce f_i a g_i spojité a splňující $f_i \leq g_i$. Tuto množinu budeme nazývat elementární množinou.

Věta 2.6.2. *Nechť funkce f je Riemannovsky integrovatelná na množině Ω, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ značí elementární množinu. Pak*

$$\int\int\cdots\int_{\Omega} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \\ = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{f_1(x_1)}^{g_1(x_1)}\left(\cdots\left(\int_{f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{g_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_n\right)\cdots\right)\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1.$$

Uvedeme si příklad, kde tento integrál využíváme.

2.6.1 Příklad. Vypočítejme integrál

$$\int_0^1\int_0^{x_1}\int_0^{x_1+x_2}\int_0^{x_1+x_2+x_3}\int_0^{x_1+x_2+x_3+x_4} 1\,\mathrm{d}x_5\,\mathrm{d}x_4\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1.$$

Řešení. Můžeme si všimnout, že chceme vypočítat míru pětirozměrného modelu, který je zadán nerovnostmi $0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le x_1, 0 \le x_3 \le x_1+x_2, 0 \le x_4 \le x_1+x_2+x_3, 0 \le \\ \le x_5 \le x_1+x_2+x_3+x_5$. Přistupme k samotnému počítání

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\int_0^{x_1}\int_0^{x_1+x_2}\int_0^{x_1+x_2+x_3}\int_0^{x_1+x_2+x_3+x_4} 1\,\mathrm{d}x_5\,\mathrm{d}x_4\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1\int_0^{x_1}\int_0^{x_1+x_2}\int_0^{x_1+x_2+x_3} [x_5]_0^{x_1+x_2+x_3+x_4}\,\mathrm{d}x_4\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1\int_0^{x_1}\int_0^{x_1+x_2}\int_0^{x_1+x_2+x_3} x_1+x_2+x_3+x_4\,\mathrm{d}x_4\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1\int_0^{x_1}\int_0^{x_1+x_2}\left[x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4+\frac{x_4^2}{2}\right]_0^{x_1+x_2+x_3}\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1\int_0^{x_1}\int_0^{x_1+x_2}\frac{3}{2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1\int_0^{x_1}\left[\frac{3}{2}\left(x_1^2x_3+x_2^2x_3+\frac{x_3^3}{3}\right)+3\left(x_1x_2x_3+x_1\frac{x_3^2}{2}+x_2\frac{x_3^2}{2}\right)\right]_0^{x_1+x_2}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1\int_0^{x_1}\frac{3}{2}\left(\frac{11x_1^3}{6}+\frac{11x_2^3}{6}+7x_1^2x_2+7x_1x_2^2\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1\left[\frac{3}{2}\left(\frac{11x_1^3x_2}{6}+\frac{11x_2^4}{24}+\frac{7x_1^2x_2^2}{2}+\frac{7x_1x_2^3}{3}\right)\right]_0^{x_1}\mathrm{d}x_1 = \\
&= \int_0^1\frac{3}{2}\left(\frac{11x_1^4}{6}+\frac{11x_1^4}{24}+\frac{7x_1^4}{2}+\frac{7x_1^4}{3}\right)\mathrm{d}x_1 = \\
&= \left[\frac{3}{2}\left(\frac{11x_1^5}{30}+\frac{11x_1^5}{120}+\frac{7x_1^5}{10}+\frac{7x_1^5}{15}\right)\right]_0^1 = \frac{39}{16}.
\end{aligned}$$

Většinou se s takovými integrály nesetkáme, neboť řešení bývá mnohdy zdlouhavé a velmi nepřehledné.

Závěr

V této bakalářské práci jsme se věnovali vícenásobným integrálům. Práci jsme rozdělili do dvou kapitol. V první jsme se zabývali dvojným integrálem a ve druhé kapitole jsme se věnovali trojným a n-rozměrným integrálům.

Představili jsme si teorii, kterou jsme doplnili řešenými příklady. Ukázali jsme, jak tyto příklady řešit pomocí Fubiniovy věty. Dále jsme se věnovali substitucím. U dvojného integrálu to byly převážně substituce do polárních souřadnic a u trojného integrálu se jednalo o substituce do sférických a cylindrických souřadnic.

Závěr každé kapitoly byl věnován aplikacím této problematiky. Uvedli jsme použití i v jiných vědních oblastech, jako například v geometrii, fyzice, pravděpodobnosti a ekonomii.

Seznam použité literatury

[1] BUCK, Robert. *Advanced calculus*. 3. vyd. Long Grove: Waveland Press, 2003, x, 622 s. International series in pure and applied mathematics. ISBN 15-776-6302-0.

[2] DANĚČEK, Josef, Oldřich DLOUHÝ a Oto PŘIBYL. *Matematika II: studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou studia*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006, 53 s. ISBN 80-7204-453-2.

[3] DEMIDOVIČ, Boris Pavlovič. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003, 460 s. ISBN 807-200-587-1.

[4] FORBELSKÁ, Marie a Jan KOLÁČEK. *Pravděpodobnost a statistika I.* 1. vyd. Brno: Elportál, 2013. ISBN 978-80-210-6710-3.

[5] KALAS, Josef a Jaromír KUBEN. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Brno: Masarykova univerzita, 2009, vi, 272 s. ISBN 978-80-210-4975-8.

[6] MANKIW, Nicholas. *Zásady ekonomie*. Překlad Milan Sojka. Praha: Grada, 1999, 763 s. Profesionál. ISBN 978-80-716-9891-3.

[7] RÁB, Miloš. *Zobrazení a Riemannův integrál v E^n*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988.

[8] SLOVÁK, Jan, Martin PANÁK a Michal BULANT. *Matematika drsně a svižně*. Brno: Masarykova univerzita, 2013. ISBN 978-80-210-6307-5.

[9] *A Simpler Approach to Integration and the Fubini Theorem* [online]. 2005, **112**(1) [cit. 2016-05-18]. Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/30037384.

[10] *Integrální počet funkcí více proměnných* [online]. 2009, **2009**(1) [cit. 2016-05-18]. Dostupné z: http://is.muni.cz/elportal/?id=845824.

[11] *Matematické výpočty online (MAW)* [online]. [cit. 2016-05-18]. Dostupné z: http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=csform=integral2.

[12] *Multivariable Calculus Online* [online]. [cit. 2016-05-18]. Dostupné z: http://math.etsu.edu/multicalc/prealpha/.