

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2020

ADÉLA BUMBÁLKOVÁ

**MASARYKOVA
UNIVERZITA**
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Sférická geometrie

Diplomová práce

Adéla Bumbálková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.

Brno 2020

Bibliografický záznam

| | |
|--------------------------|--|
| Autor: | Bc. Adéla Bumbálková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky |
| Název práce: | Sférická geometrie |
| Studijní program: | Matematika |
| Studijní obor: | Učitelství matematiky pro střední školy Učitelství geografie a kartografie pro střední školy |
| Vedoucí práce: | prof. RNDr. Josef Janyška, DSc. |
| Akademický rok: | 2019/2020 |
| Počet stran: | ix + 44 |
| Klíčová slova: | sféra; sférická geometrie; sférická trigonometrie; sférický trojúhelník; studijní text; ortodroma |

Bibliographic Entry

Author: Bc. Adéla Bumbálková
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Spherical Geometry

Degree Programme: Mathematics

Field of Study: Upper Secondary School Teacher Training in Mathematics
Upper Secondary School Teacher Training in Geography and
Cartography

Supervisor: prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.

Academic Year: 2019/2020

Number of Pages: ix + 44

Keywords: sphere; spherical geometry; spherical trigonometry; spherical
triangle; textbook; ortodrome

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá sférickou geometrií a trigonometrií. Má sloužit jako studijní text k danému tématu. Obsahem je historický vývoj disciplíny, definice základních pojmů, základní vztahy sférické trigonometrie, řešení sférických trojúhelníků a na závěr aplikace poznatků v geografických příkladech.

Abstract

This thesis focuses on spherical geometry and trigonometry. It is intended as a textbook of this theme. The thesis contains the historical progress of the discipline, definitions of basic terms, basic formulas of spherical trigonometry, solutions of spherical triangles and the last part concludes with applications in geographical examples.

ZADÁNÍ
DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2019/2020

| | |
|-------------------|---|
| Ústav: | Ústav matematiky a statistiky |
| Studentka: | Bc. Adéla Bumbálková |
| Program: | Matematika |
| Obor: | Učitelství matematiky pro střední školy Učitelství geografie a kartografie pro střední školy |

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s názvem:

| | |
|-------------------------------|--------------------|
| Název práce: | Sférická geometrie |
| Název práce anglicky: | Spherical geometry |
| Jazyk závěrečné práce: | |

Oficiální zadání:

Diplomant/diplomantka vytvoří studijní text na téma sférická geometrie.

Literatura:

Metaphors we teach by : how metaphors shape what we do in classrooms. Edited by Ken Badley - Harro W. Van Brummelen. Eugene, Oregon: Wipf & Stock, 2012. x, 157. ISBN 9781620320143.

PROVAZNÍKOVÁ, Marie. *Spherical Trigonometry with Quaternions.* In *Sborník 26. konference o geometrii a počítačové grafice.* 2006. vyd. České Budějovice: JU v Českých Budějovicích, 2006. s. 207-212, 6 s. ISBN 80-7040-902-9.

KELLS, Lyman M., Willis F. KERN a James R. BLAND. *Spherical trigonometry with naval and military applications.* 1st ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1942. xi, 118 s.

SMART, W. M. *Text-book on spherical astronomy.* Cambridge: The University Press, 1936. xii, 430 s.

Glen Van Brummelen, *Heavenly Mathematics, The Forgotten Art of Spherical Trigonometry,* Princeton Univ. Press 2013

| | |
|----------------------------|---------------------------------|
| Vedoucí práce: | prof. RNDr. Josef Janyška, DSc. |
| Datum zadání práce: | 2. 10. 2017 |
| V Brně dne: | 12. 12. 2019 |

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

.....
Bc. Adéla Bumbálková
studentka

.....
prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
vedoucí práce

.....
prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a sta-
tistiky

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala vedoucímu práce prof. RNDr. Josefu Janyškovi, DSc., za jeho trpělivost, doporučení a cenné připomínky a také za čas, který mi věnoval. Poděkování patří také mé rodině a přátelům za jejich láskyplnou podporu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 6. ledna 2020

.....
Adéla Bumbálková

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | ix |
| Kapitola 1. Historický vývoj sférické geometrie | 1 |
| 1.1 Počátky | 1 |
| 1.2 Období antického Řecka | 1 |
| 1.3 Období úpadku antického Řecka | 3 |
| 1.4 Rozvoj v západní Evropě | 3 |
| 1.5 18. a 19. století | 4 |
| 1.6 20. století a současnost | 6 |
| Kapitola 2. Základní pojmy | 7 |
| 2.1 Kulová plocha | 7 |
| 2.2 Hlavní a vedlejší kružnice | 7 |
| 2.3 Přímka, úsečka | 8 |
| 2.3.1 Délka s -úsečky, sférická vzdálenost | 8 |
| 2.4 Diametrálně protilehlé body | 9 |
| 2.5 Sférický dvojúhelník | 9 |
| 2.6 Sférický trojúhelník | 9 |
| 2.6.1 Polární trojúhelník | 11 |
| 2.7 Sférická kružnice | 11 |
| Kapitola 3. Sférická trigonometrie | 12 |
| 3.1 Vlastnosti sférických trojúhelníků | 12 |
| 3.1.1 Určenost sférických trojúhelníků | 14 |
| 3.2 Základní vztahy pro sférické trojúhelníky | 15 |
| 3.2.1 Sinová věta | 15 |
| 3.2.2 Kosinová věta pro stranu | 17 |
| 3.2.3 Kosinová věta pro úhel | 18 |
| 3.2.4 Vztahy v pravouhlém sférickém trojúhelníku | 19 |
| 3.3 Řešení sférických trojúhelníků | 21 |
| 3.3.1 Zadání SSS | 22 |
| 3.3.2 Zadání UUU | 23 |
| 3.3.3 Zadání SUS | 24 |
| 3.3.4 Zadání USU | 24 |

| | |
|---|-----------|
| 3.3.5 Zadání v pravoúhlém trojúhelníku | 25 |
| Kapitola 4. Aplikace v geografii | 27 |
| 4.1 Slovníček geografických pojmů | 27 |
| 4.2 Délka rovnoběžky a 1° zeměpisné délky | 30 |
| 4.3 Vzdálenost dvou míst na Zemi | 31 |
| 4.4 Souřadnice obzorníkové a rovníkové | 36 |
| Závěr | 42 |
| Seznam použité literatury | 43 |
| Seznam převzatých obrázků | 45 |

Úvod

Sféra (kulová plocha) je z historického pohledu pravděpodobně nejstudovanějším geometrickým objektem. Úkazy na nebeské obloze zajímaly lidstvo už v nejstarších dobách a z pozorování a bádání postupně vznikala sférická trigonometrie. Základy sférické geometrie a trigonometrie položili pro astronomické účely řeční astronomové. Rovinnou trigonometrii pěstovali jen jako pomocnou disciplínu pro výpočty tabulek tětiv a k odvozování pouček sférické geometrie.

A právě sférickou geometrií, která už odnepaměti fascinovala lidstvo a v podstatě se jí oproti dnešní době dostávalo větší pozornosti než geometrii rovinné, se zabývá tato práce. Znalost základů sférické geometrie a trigonometrie je nezbytná pro hlubší studium astronomie, určování polohy družic a kosmických objektů či v celé řadě dalších oborů přírodovědného a technického směru.

Cílem této práce je podat přehled základních pojmů sférické geometrie a nejdůležitějších pouček sférické trigonometrie. Dále také ukázat řešení sférických trojúhelníků, tedy jak pomocí zadaných prvků sférického trojúhelníka určit prvky zbývající, a aplikaci poznatků na příkladech, se kterými se setkávají (nejen) studenti geografických oborů.

Práce je členěná do čtyř kapitol. V první z nich je popsán historický vývoj sférické geometrie společně s vývojem geometrií neeuklidovských, mezi které sférická geometrie patří. Druhá kapitola je přehledem základních pojmů a objektů na sféře. Ve třetí kapitole jsou uvedeny základy sférické trigonometrie a obecné řešení sférických trojúhelníků včetně řešených ukázkových příkladů. Nakonec, ve čtvrté kapitole nalezneme aplikované příklady z oblasti studia planety Země, opět včetně řešených příkladů.

Práce má sloužit jako studijní text k tématu sférické geometrie a je určena čtenářům se znalostmi pouze středoškolského učiva matematiky, především planimetrie a trigonometrie. Tomu odpovídají i formulace a obsah práce.

Kapitola 1

Historický vývoj sférické geometrie

1.1 Počátky

Počátky sférické geometrie, stejně tak jako celé geometrie potažmo celé matematiky, sahají až do 2. tisíciletí př. n. l., do starověkého Babylonu a Egypta. Zde se vyvíjela na základě praktických úkolů a potřeb, ať už při stavbách, vyměřování pozemků nebo jakékoli výrobě. Řešení těchto úkolů vycházelo ze zkušeností a pozorování. V té době se nezabývali obecnými úvahami a důkazy, ale důležité bylo „jak se to počítá“.

Geometrická ornamentika se začala vyvíjet již v mladší době kamenné, a to především na hrnčířských a košíkářských výrobcích, později u výrobků z kovu. Zajímavé geometrické vzory se dále vyskytly například na uměleckých předmětech nejstarších období Mezopotámie.

Úzce spjata byla sférická geometrie především s astronomií, o kterou se lidé zajímali už odnepaměti. Již u velmi primitivních kmenů se setkáváme s určitým dělením času, se kterým jsou spojeny poznatky o pohybu Slunce, Měsíce a hvězd. Později z astronomie pramenily některé znalosti o vlastnostech koule.

1.2 Období antického Řecka

Koncem 2. tisíciletí před n. l. se v oblasti Středoziemního moře odehrály významné ekonomické a politické změny. Značně se zmenšila moc Babyloňanů a Egyptanů a do popředí se dostaly nové národy: Židé, Asyřané, Foiničané a Řekové. Právě starověcí Řekové pro nás mají největší význam, jelikož se u nich poprvé setkáváme s geometrií jako s abstraktní vědou. Veškeré poučky nebyly sestavovány pouze na základě pozorování a zkušenosti, jako tomu bylo doposud, ale byly logicky odvozovány. Řečtí matematikové měli uspořádaný systém znalostí rovinné geometrie, ve kterém se uplatňoval princip logického odvozování nové skutečnosti z již známých předpokladů. Byl tak vytvořen základ axiomatiky.

Významnými osobnostmi té doby, z pohledu sférické geometrie, byli *Euklides* (3. stol. př. n. l.), *Menelaos* (1. stol. n. l.) a také *Ptolemaios* (2. stol. n. l.).

Souborné dílo celé řecké matematiky s názvem *Základy* se vytvářelo již od 6. století př. n. l. Dokončeno však bylo až Euklidem kolem roku 300 př. n. l. Euklidovy *Základy*

(řecky Stoicheia) jsou tvořeny 13 knihami, ve kterých je shrnuta geometrie (planimetrie a stereometrie), aritmetika, teorie čísel a geometrická algebra. Celou matematiku se Euklides v díle snaží vyložit axiomaticky – tedy na základě logického systému axiomů, postulátů a tvrzení. Geometrii odvozuje celkem z 9 axiomů, 5 postulátů a 23 definic.

Pět Euklidových postulátů zní:

1. Dvěma body lze vždy vést jedinou přímku.
2. Úsečku lze neomezeně prodloužit.
3. Z libovolného středu lze libovolným poloměrem sestavit kružnici.
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně přímky, kde je součet menší.



Obr. 1.1: Euklides

Právě pátý Euklidův postulát, dnes známý jako postulát o rovnoběžkách, který se už na první pohled liší od ostatních svou délkou a komplikovaností, měl zásadní vliv na pozdější vznik neeuklidovských geometrií, k nimž sférická geometrie také patří. Právě pro jeho složitost se v průběhu historie mnozí matematikové snažili dokázat jeho závislost na předchozích postulátech.

Počátky sférické trigonometrie nalzáme u Menelaa z Alexandrie v jeho díle *Sférika*, jemuž za základ posloužily práce řeckého astronoma *Hipparcha* (2. století př. n. l.). Ve své práci, z níž se zachovala jen část jednající právě o sférické trigonometrii, Menelaos popisuje geometrii na kulové ploše včetně diskuse sférického trojúhelníka. Dílo dále obsahuje Menelaovu větu pro trojúhelníky a její rozšíření na kulovou plochu.

Dalším významným dílem tohoto období byla Ptolemaiova *Velká sbírka*, známější pod arabským názvem *Almagest*, která vznikla kolem roku 150 n.l. Tímto Ptolemaios dovršil řeckou trigonometrii a uzavřel dílo Hipparchovo a Menelaovo. Ptolemaios ve sbírce mimo jiné připomíná, že už v 8. století př. n. l. Babyloňané vyvinuli souřadný systém pro nebeskou sféru¹. Tyto souřadnice se používaly přibližně o 2000 let dříve než kartézské souřadnice. Dílo také obsahuje trigonometrii, formule pro sinu a kosinu součtu a rozdílu dvou úhlů, a počátky sférické geometrie. Ve svém dalším díle, *Planisphaerium*, Ptolemaios rozebírá stereografickou projekci² a v díle *Geographia* je určována poloha měst na Zemi pomocí délky a šířky zemské sféry.

¹její poloměr byl nekonečný, středem byla Země a promítala se na ni poloha nebeských těles

²zobrazení kulové plochy do tečné roviny z bodu, který leží na kulové ploše

1.3 Období úpadku antického Řecka

S úpadkem řecké společnosti se střediska matematického bádání přesouvají na východ. Centrem studia matematiky se tak stává Indie a také Mezopotámie. Arabští učenci vycházeli z děl Apollónia, Archiméda, Euklida a Ptolemaia. Zabývali se zejména astronomií, v níž se objevovala trigonometrie a dosahovali vrcholných výsledků i v oboru sférické trigonometrie.

Důležitou osobností této doby byl v arabském světě astronom *al-Battání* (9. stol.), který již znal kosinovou větu pro sférický trojúhelník a ve svém díle také popsal značnou část trigonometrie. Později další arabský astronom *Abu-I-Vafá* (10. stol.) odvodil sinovou větu sférické trigonometrie.

Zmínku si zaslouží také perský astronom a filosof *Omar Chajjám* (11. stol.). Ten mimo jiné studoval Euklida a nahradil jeho pátý postulát (postulát o rovnoběžkách) řadou jiných předpokladů (tímto způsobem se později vytvářela neeuklidovská geometrie).

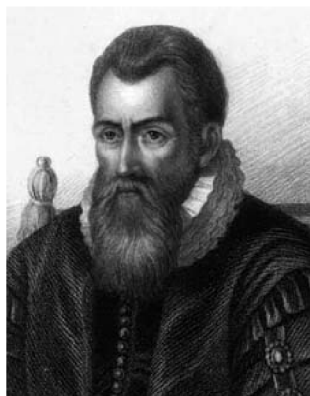
Významnou roli sehrál i Peršan *Nasireddin Tusi* (13. stol.), který napsal samostatnou učebnici rovinné a sférické trigonometrie.

V této době kromě astronomie sílil význam sférické geometrie také pro námořní plavbu. Poznatky ze sférické trigonometrie se totiž využívaly při lodní navigaci.

1.4 Rozvoj v západní Evropě

Počátkem druhého tisíciletí našeho letopočtu se v oblasti Španělska a Sicílie učenci seznamují s arabskou vědou. Díky tomu se tak zprostředkovaně dostávají i k významným řeckým pracím. Navíc vývoj v západní Evropě natolik postoupil, že nyní již bylo možné získané poznatky a vědomosti správně využít. Na přelomu 1. a 2. tisíciletí také ve španělské Cordobě vzniká první středisko astronomů.

Po zániku byzantské říše v roce 1453 se mnoho řeckých učenců uchýlilo do západních měst. Centry vědeckého života a studia matematiky se v té době stala Itálie a města střední Evropy, jako např. Vídeň, Praha a Norimberk, kde se na univerzitách studovaly původní řecké texty.



Obr. 1.2: J. Napier

Vůdčím matematikem 15. století byl *Johannes Müller* (1436–1476). Jeho hlavní dílo *De triangulis omnimodus libri quinque* je systematickým úvodem do trigonometrie a mimo jiné obsahuje i sinovou větu pro sférické trojúhelníky. Protože v té době ještě nebyla známa matematická symbolika, veškeré věty jsou v této práci vyjádřeny pouze slovně. Od té doby se trigonometrie stala vědou zcela nezávislou na astronomii.

V 16. století skotský matematik *John Napier* (1550–1617) objevil přirozené logaritmy, čímž došlo ke zjednodušení některých matematických výpočtů. Napier se také velmi zajímal o sférickou geometrii. Shrnul všechny vzorce pro řešení pravoúhlého sférického trojúhelníka v důmyslné pravidlo a objevil dvě z tzv. analogií o sférickém trojúhelníku. Další dvě později objevil *Henry Briggs* (1556–1630), jehož jméno souvisí s objevem dekadických logaritmů.

1.5 18. a 19. století

Předním matematikem 18. a 19. století byl bezesporu *Leonhard Euler* (1707–1783). Svými objevy významně přispěl snad ve všech odvětvích matematiky, která v té době existovala. Ve sférické trigonometrii používal systematické značení úhlů a stran sférického trojúhelníka, což ji značně zpřehlednilo a zjednodušilo. Dodnes používaná forma zápisu a chápání trigonometrických hodnot jako poměrů pochází z Eulerova díla *Introductio in analysin infinitorum*. V této knize také algebraicky vyšetřuje křivky a plochy, a proto bychom ji mohli považovat za první učebnici analytické geometrie.

Po Eulerovi ve sférické trigonometrii úspěšně pracovali Švéd *A. Lexell* (1740–1784) a také francouzští učenci *J. Delambre* (1749–1822) a *A. M. Legendre* (1752–1833).



Obr. 1.3: L. Euler

Na přelomu 18. a 19. století se začala rodit neeuklidovská geometrie. Už od euklidovské doby se mnozí matematici zabývali otázkou pátého postulátu a snažili se dokázat jeho závislost na čtyřech předchozích. Mnozí během svých zkoumání také zjistili velmi zajímavé výsledky. Mezi nimi například *G. Saccheri* (1667–1733), *J. H. Lambert* (1728–1777) nebo *A. M. Legendre*. Girolamo Saccheri z předpokladu negace či naopak platnosti pátého postulátu vyvodil tzv. hypotézy tupého, ostrého nebo pravého úhlu. Přijetím negace postulátu dokonce sám odvodil některá tvrzení dnešní neeuklidovské geometrie. Nejen Saccheri ale i mnozí další však své objevy vyvozené z negace pátého postulátu zavrhl, jelikož příliš odporovaly tehdejšímu způsobu myšlení a zkušenostem z reálného světa.



Obr. 1.4: C. F. Gauss

Otázku pátého postulátu se podařilo vyřešit až v 19. století. Prvním, kdo byl přesvědčen o jeho nezávislosti na zbylých postulátech byl německý matematik *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855). Toto zjištění znamenalo, že ostatní geometrie založené na volbě jiného postulátu byly logicky možné. Gauss však nikdy žádný ze svých výsledků nezveřejnil, zřejmě kvůli poměrům v tehdejší době – ze strachu z nepochopení a ztráty svého postavení. Problematiku důkazu pátého postulátu hodnotil jen v několika dopisech přátelům.

Oficiálně se tak o vyřešení otázky pátého postulátu, a tedy i vznik neeuklidovské geometrie, zasloužili dva pánové – Rus *Nikolaj Ivanovič Lobačevskij* (1792–1856) a Maďar *János Bolyai* (1802–1860).

Jako první se svými myšlenkami na veřejnost vystoupil mladý matematik Lobačevskij ve své práci *O načalach geometrii* tištěné roku 1829 v ruštině. Seznámilo se s ní však příliš málo lidí. Ani pozdější německé vydání nepřineslo o mnoho víc čtenářů, přestože o práci



Obr. 1.5: N. I. Lobačevskij



Obr. 1.6: J. Bolyai

projevil zájem i Gauss (veřejně však myšlenku nepodpořil). Jak velký je význam objevu neeuklidovské geometrie se ukázalo až po r. 1860, tedy po jeho smrti.

Nezávisle na Lobačevském publikoval výsledky své práce v roce 1832 mladý Bolyai, jako dodatek knihy svého otce pod názvem *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*. Ani jeho práci se však nedostalo příliš velké pozornosti, a tak ještě několik let zůstala neeuklidovská geometrie nesrozumitelnou vědeckou tematikou. Zklamáný Bolyai se pak úplně přestal matematikou zabývat.

Z neeuklidovských geometrií však Lobačevskij i Bolyai objevili pouze jednu, dnes nazývanou hyperbolická geometrie. V této geometrii je součet vnitřních úhlů trojúhelníka menší než úhel přímý. Je však podstatné si promyslet, jestli existuje i taková geometrie, ve které by byl součet vnitřních úhlů trojúhelníka větší než úhel přímý. I taková geometrie opravdu existuje. Lze v ní sestrojít i trojúhelník, který má všechny vnitřní úhly pravé, rovnoběžky v ní neexistují a přímky mají konečnou délku. Tuto geometrii označujeme jako eliptickou a o její důkladné prostudování se zasloužil německý matematik *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (1826–1866).



Obr. 1.7: G. F. B. Riemann

Riemann byl první, kdo neeuklidovské geometrii zcela porozuměl a prozkoumal vzájemné vztahy jednotlivých neeuklidovských geometrií, které dnes souhrnně nazýváme Riemannovy geometrie. Jedním z jejich speciálních případů je i sférická geometrie.

Neeuklidovská geometrie se doposud zabývala pouze zakřivenou dvojrozměrnou plochou. Riemann tedy jako první ukázal možnost zkoumání zakřivených prostorů o jakémkoliv počtu rozměrů. V jeho teorii mohl být prostor různě zkroucený a zdeformovaný, s různou křivostí v každém bodě a mohl být souvislý i děrovaný. Všechny dosavadní geometrie, Euklidova, Gaussova, Lobačevského i Bolyaie, tak byly jistými případy Riemannových geometrií.

Se svými poznatky vystoupil Riemann v roce 1854 při své habilitační přednášce *O hypotézách tvořících základy geometrie*.

Do vývoje neeuklidovské geometrie významně zasáhl i německý matematik *Felix Klein* (1849–1925) a to tím, že rozdělil geometrie na základě studia grup. Pomocí grupové terminologie ukázal vzájemné vztahy a souvislosti jednotlivých geometrií. Podle Kleina se dnes také užívá pro Lobačevského geometrii označení hyperbolická a pro Riemannovu označení eliptická geometrie.

1.6 20. století a současnost

Na přelomu 19. a 20. století došlo ke zpřesňování geometrie na základě nových poznatků. Ty se prohlubovaly a vznikaly jejich důsledné axiomatické systémy. Pokračovatelem Lobačevského byl například německý matematik *David Hilbert* (1862–1943). V roce 1899 vyšla jeho kniha *Základy geometrie*, která sice nemá přímou souvislost se sférickou geometrií, ale uvedené myšlenky lze použít při aplikaci jak na rovinou, tak na prostorovou geometrii.

Ve 20. století došlo k další specializaci jednotlivých odvětví matematiky. Vzhledem k rozsáhlosti vědecké matematiky ji ani není možné dále studovat v celkovém objemu. V novodobých dějinách se ve sférické geometrii už neobjevuje nic převratného, nového, pouze se dotváří a zpřesňuje dříve objevené.

Význam geometrie na kulové ploše však nezmizel. V dnešní době se sférická geometrie uplatňuje zejména v praxi – v astronomii, letecké a lodní navigaci, robotice a dalších.

Kapitola 2

Základní pojmy

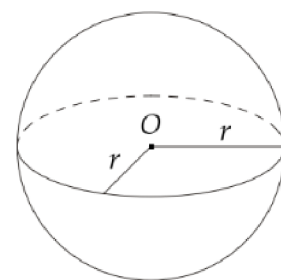
V této kapitole se seznámíme se základními pojmy sférické geometrie. Jejich znalost a pochopení je předpokladem pro pochopení následujících kapitol této práce. Všechny důležité pojmy jsou v textu vyznačeny kurzívou.

2.1 Kulová plocha

Kulová plocha, neboli sféra, je klíčovým pojmem sférické geometrie. Definujeme ji jako množinu všech bodů prostoru, které mají od pevně zvoleného bodu O , tzv. středu kulové plochy, konstantní vzdálenost rovnou danému poloměru r ($r > 0$). Zjednodušeně můžeme říct, že kulová plocha tvoří povrch koule.

Symbolicky lze tuto definici zapsat následovně:

$$\{X \in E_3; |OX| = r, r \in R^+, O \in E_3 \text{ pevně zvolený}\}.$$



Obr. 2.1: Kulová plocha

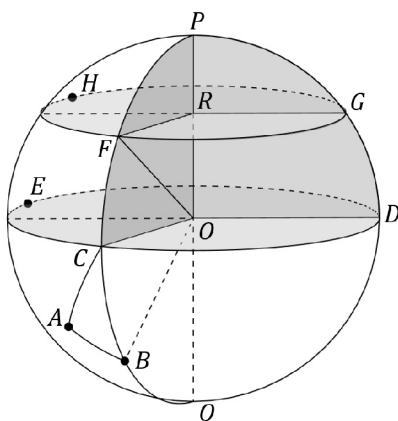
Kulovou plochu s poloměrem $r = 1$ označujeme názvem *jednotková kulová plocha*.

2.2 Hlavní a vedlejší kružnice

Libovolná rovina, která prochází středem O kulové plochy, protíná kulovou plochu v kružnici k . Takto vzniklou kružnici nazýváme *hlavní kružnice*. Hlavní kružnice je tedy každá kružnice na sféře, jejíž střed je ve středu kulové plochy. Na zeměkouli je to například rovník. Na obrázku 2.2 je znázorněna např. hlavní kružnice určená body CDE .

Jakákoliv jiná rovina, která protíná kulovou plochu, avšak neprochází středem O kulové plochy, také protne sféru v kružnici. Takto vzniklá kružnice se nazývá *vedlejší kružnice*. Vedlejší kružnice je tedy kružnice vzniklá řezem roviny, která neprochází středem kulové plochy. Na zeměkouli jsou to například obratníky. Na obrázku 2.2 je znázorněna vedlejší kružnice FGH se středem v bodě R .

Na jednotkové kulové ploše je poloměr libovolné hlavní kružnice roven $r = 1$, všechny vedlejší kružnice pak mají poloměr $r < 1$.



Obr. 2.2: Objekty na sféře

2.3 Přímka, úsečka

Na kulové ploše zjevně neexistují přímky a úsečky, pokud si je představíme jako „rovné čáry“, které známe z euklidovské geometrie. Pokud však vezmeme povrch Země jako kulovou plochu, určitě si dokážete představit, že se vydáte na cestu po „rovné čáře“. Kdybyste byli schopní neomezeně pokračovat, vaše cesta by kolem Země obkroužila kružnici. Avšak ne každá kružnice se dá považovat za „rovnou“ cestu. Například kdybyste se vydali proti směru hodinových ručiček po kružnici ve stálé vzdálenosti 1 m od severního pólu, vlastně byste stále zatáčeli doleva.

Jako *přímku* tedy ve sférické geometrii považujeme hlavní kružnici. *Úsečkou* je potom kratší část hlavní kružnice mezi dvěma body (kruhový oblouk). Označujeme *s-přímku*, resp. *s-úsečka*.

Stejně jako v rovinné geometrii je i *s-úsečka* nejkratší¹ spojnici dvou bodů na sféře a *s-přímku* získáme nekonečným prodloužením *s-úsečky* na obě strany. Každé dva body kulové plochy určují alespoň jednu *s-přímku* (více o určenosti *s-přímek* v části 2.4).

2.3.1 Délka *s-úsečky*, sférická vzdálenost

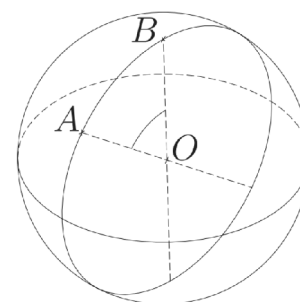
Mějme dány body A, B na kulové ploše se středem O . Řekli jsme si, že jejich nejkratší spojnici je *s-úsečka*, tedy kratší oblouk hlavní kružnice, která těmito body prochází.

S-úsečka AB odpovídá kruhovému oblouku mezi body A a B , který přísluší středovému úhlu $\sphericalangle AOB$ (viz obr. 2.3). Proto je *délka s-úsečky* AB rovna délce kruhového oblouku AB . Udává se v jednotkách délky.

Pro výpočet délky *s-úsečky* AB na sféře o poloměru r lze tedy využít známý vzorec z rovinné geometrie pro délku kruhového oblouku:

$$d(A, B) = |\sphericalangle AOB| \cdot \frac{2\pi r}{360^\circ},$$

kde $|\sphericalangle AOB|$ je velikost příslušného středového úhlu.

Obr. 2.3: Délka *s-úsečky*

¹Důkaz lze najít např. v [4, str. 13].

Pojmem *sférická vzdálenost* bodů A a B na kulové ploše rozumíme velikost středového úhlu (menší než 180°), který přísluší oblouku AB hlavní kružnice.

2.4 Diametrálně protilehlé body

Dva body kulové plochy, které leží přímo proti sobě, nazýváme *diametrálně protilehlé body*. Jsou to body, které dělí s -přímku na dvě shodné s -úsečky. Například na obr. 2.2 body P a Q , na zeměkouli jsou příkladem severní a jižní pól.

Diametrálně protilehlé body určují na sféře nekonečně mnoho s -přímek, neboli prochází jimi nekonečně mnoho hlavních kružnic (např. severním a jižním pólem na zeměkouli prochází nekonečně mnoho poledníků). Dva body, které nejsou diametrálně protilehlé pak určují s -přímku jednoznačně. V případě, že bychom ztotožnili diametrálně protilehlé body, získali bychom stejnou situaci jako v euklidovské rovině – jedním bodem lze vést nekonečně mnoho přímek, avšak dva body určují přímku jednoznačně².

Navíc, každé dvě s -přímky se protínají v diametrálně protilehlých bodech. Důsledkem je, že ve sférické geometrii neexistují rovnoběžné přímky.

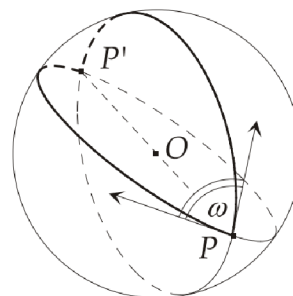
2.5 Sférický dvojúhelník

Zajímavým faktem sférické geometrie je, že lze sestavit sférický polygon, který má pouze dvě strany.

Tento tvar se nazývá *sférický dvojúhelník* a tvoří ho menší část kulové plochy ohraničená oblouky dvou hlavních kružnic. Sférický dvojúhelník má dva vrcholy, kterými jsou diametrálně protilehlé body (na obrázku 2.4 body P, P'), a dvě strany tvořené hlavními polokružnicemi.

Strany dvojúhelníka spolu svírají úhel ω , resp. ω' u vrcholu P' , který nazýváme *sférický úhel*. Je roven úhlu, který spolu svírají tečny k daným stranám sestojené ve vrcholu dvojúhelníka. Úhly ω a ω' odpovídají stejným hlavním polokružnicím, proto jsou shodné.

Jelikož strany sférického dvojúhelníka jsou vždy hlavní polokružnice, délka každé z nich bude vždy rovna πr .



Obr. 2.4: Sférický dvojúhelník

2.6 Sférický trojúhelník

Pozoruhodnější a rozmanitější tvary než sférické dvojúhelníky jsou sférické trojúhelníky.

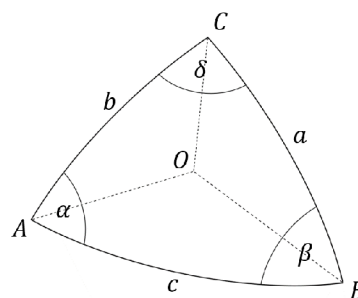
Jsou-li dány tři různé body na sféře, které neleží na jedné s -přímce (tj. hlavní kružnici), dokážeme vždy sféru rozpůlit tak, že všechny tři body budou ležet na stejné polosféře. Spojíme-li pak tyto body oblouky hlavních kružnic (ležících na této polosféře), získáme tvar zvaný *sférický trojúhelník*. Sférický trojúhelník je tedy menší část kulové plochy vymezená oblouky tří různých hlavních kružnic, tj. třemi s -úsečkami.

²Právě ztotožnění diametrálně protilehlých bodů vede k eliptické neeuklidovské rovině.

Na obrázku 2.2 (i 2.5) vymezují oblouky hlavních kružnic, které prochází body A , B a C , sférický trojúhelník ABC . Body A , B , C nazýváme *vrcholy* trojúhelníka.

Jeho *strany* jsou oblouky (s -úsečky) $BC = a$, $CA = b$ a $AB = c$. Častěji však stranami sférického trojúhelníka rozumíme úhlové velikosti těchto oblouků, tj. velikosti středových úhlů příslušných těmto obloukům ($\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COA$ a $\sphericalangle AOB$), udané ve stupních nebo obloukové míře. Spojením „velikost strany“ budeme tedy v následujícím textu rozumět velikost příslušného středového úhlu. Délka strany (v jednotkách délky) je pak závislá na poloměru dané sféry a odpovídá délce s -úsečky (výpočet v části 2.3.1).

Sférický trojúhelník má dále tři *úhly*, jimiž jsou sférické úhly $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ a $\sphericalangle BCA = \gamma$, které spolu svírají strany trojúhelníka. Úhel α (β , γ) nazýváme *protějším* ke straně a (b , c). Úhly β a γ jsou úhly *přilehlé* ke straně a atp.



Obr. 2.5: Sférický trojúhelník

Dělení sférických trojúhelníků

Podobně jako v rovině lze sférické trojúhelníky rozdělit do několika skupin (pro speciální případy velikostí stran, úhlů atp.). Zejména rozlišujeme trojúhelníky:

- **rovnostranné** – všechny strany \triangle mají stejnou velikost;
- **rovnoramenné** – dvě strany \triangle mají stejnou velikost, nazývají se *ramena*, třetí strana se nazývá *základna*;
- **pravouhlé** – (alespoň) jeden úhel v \triangle je pravý, strana ležící proti pravému úhlu se nazývá *přepona*, zbývající dvě strany se nazývají *odvěsny*;
- **polární** – ke každému sférickému trojúhelníku existuje trojúhelník polární, jeho konstrukce a vlastnosti jsou blíže popsány v části 2.6.1.



Obr. 2.6: Sférický trojúhelník se dvěma a třemi pravými úhly

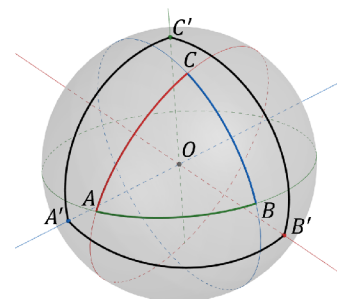
Co se týče trojúhelníků, je specifíkem sférické geometrie také fakt, že oproti rovinné geometrii lze sestavit i trojúhelník, který má dva nebo i všechny tři úhly pravé. Příklad trojúhelníka se dvěma pravými úhly získáme například na zeměkouli volbou dvou bodů

na rovníku, přičemž strana jimi určená musí mít velikost různou od 90° , a jako třetí bod vybereme jeden z pólů (obr. 2.6 vlevo). Dostaneme tak rovnoramenný trojúhelník, jehož ramena tvoří části poledníků a úhly přilehlé k základně jsou pravé. Provedeme-li stejnou volbu bodů, tedy pól a dva body na rovníku, které nyní budou určovat stranu o velikosti právě 90° , dostaneme sférický trojúhelník, jehož všechny tři úhly jsou pravé (obr. 2.6 vpravo). Zároveň tím získáme rovnostranný trojúhelník s velikostí stran rovnou 90° .

2.6.1 Polární trojúhelník

Hlavní kružnice určuje rovinu, která prochází středem O kulové plochy. Kolmice sestrojená k této rovině v bodě O protne kulovou plochu ve dvou (diametrálně protilehlých) bodech. Tyto body nazýváme *póly* dané kružnice. Pro ilustraci si pod hlavní kružnicí můžeme na Zemi představit rovník, póly jsou pak severní a jižní pól. Na obr. 2.2 jsou např. póly hlavní kružnice CDE body P a Q .

Mějme dán sférický trojúhelník ABC . Nechť C' je pól hlavní kružnice vzniklé prodloužením strany AB , který leží na stejné polosféře jako bod C . Stejně tak mějme body A' a B' . Pak trojúhelník $A'B'C'$ nazýváme *polární trojúhelník* k trojúhelníku ABC .



Obr. 2.7: Polární trojúhelník

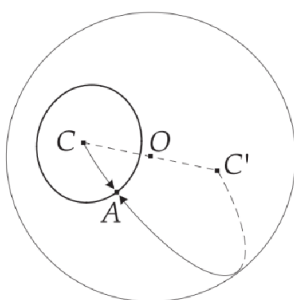
Platí také tvrzení: Polární trojúhelník k polárnímu trojúhelníku je původní trojúhelník. Tedy je-li trojúhelník $A'B'C'$ polární k trojúhelníku ABC , pak je trojúhelník ABC polární k trojúhelníku $A'B'C'$.

Dále také platí, že strany polárního trojúhelníka jsou doplňkem do 180° úhlů původního trojúhelníka a úhly polárního trojúhelníka jsou doplňkem do 180° stran původního trojúhelníka. Je tedy:

$$a' = 180^\circ - \alpha, b' = 180^\circ - \beta, c' = 180^\circ - \gamma \text{ a } \alpha' = 180^\circ - a, \beta' = 180^\circ - b, \gamma' = 180^\circ - c.$$

2.7 Sférická kružnice

Sférická kružnice (*s-kružnice*) je množina všech bodů na sféře, které mají od daného bodu C na sféře stejnou sférickou vzdálenost ρ .



Obr. 2.8: s-kružnice

Bod C se nazývá sférický střed kružnice, vzdálenost ρ nazýváme sférický poloměr kružnice.

Všechny body s-kružnice se středem v bodě C mají zároveň stejnou vzdálenost i od diametrálně protilehlého bodu C' . Je-li poloměr s-kružnice se středem v bodě C roven ρ , pak od bodu C' mají všechny body s-kružnice vzdálenost $\rho' = 180^\circ - \rho$.

Kapitola 3

Sférická trigonometrie

Slovo trigonometrie znamená v překladu měření trojúhelníků. Na střední škole se snad všichni setkali s trigonometrií rovinnou. Nyní se však budeme zabývat trigonometrií sférickou, která řeší vztahy mezi prvky sférického trojúhelníka. V praxi se poznatky sférické trigonometrie využívají například v geodézii, kartografii či astronomii. V této kapitole nejprve uvedeme některé vlastnosti sférických trojúhelníků, základní věty, které se pro výpočty využívají, a na závěr si ukážeme jejich využití na konkrétních příkladech.

3.1 Vlastnosti sférických trojúhelníků

Ještě než začneme odvozovat důležité vztahy a věty pro řešení sférických trojúhelníků, uvedeme si, a následně i odůvodníme, některé z vlastností sférických trojúhelníků. I přesto, že se tyto vlastnosti v mnohém liší od vlastností rovinných trojúhelníků, budeme při jejich zdůvodňování vycházet zejména ze znalostí z rovinné geometrie.

Pro prvky $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sférického trojúhelníka ABC platí:

1. *Součet velikostí libovolných dvou stran je větší než velikost strany třetí.*

$$a < b + c, b < a + c, c < a + b$$

Stejně jako v rovinné geometrii tedy platí trojúhelníková nerovnost.

2. *Součet velikostí všech stran je menší než 360° .*

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ$$

3. *Součet velikostí všech úhlů je větší než 180° a zároveň menší než 540° .*

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$$

4. *Velikost každého z prvků trojúhelníka je větší než 0° a zároveň menší než 180° .*
5. *Proti větší straně trojúhelníka leží větší úhel. Proti shodným stranám trojúhelníka leží shodné úhly.*

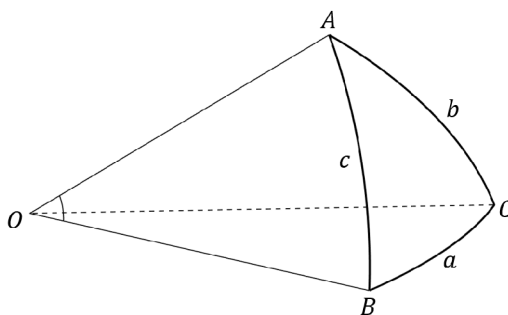
Bude-li například strana a větší než strana b , pak i úhel α bude větší než úhel β atp.

6. Je-li součet dvou stran větší než 180° , je i součet protilehlých úhlů větší než 180° .
 Je-li součet dvou stran roven 180° , pak i součet protějších úhlů je roven 180° .

Na následujících řádcích si ukážeme platnost výše zmíněných, a pro nás klíčových, vlastností 1–4. Důkazy vlastností 5 a 6 lze najít např. v [7, str. 25] a [7, str. 28].

- add 1. Velmi jednoduchým způsobem zdůvodníme platnost vztahů $a < b + c$, $b < a + c$,
 $c < a + b$.

Mějme dán sférický trojúhelník ABC , viz obrázek 3.1. Využijeme úhlů u bodu O , které odpovídají stranám daného trojúhelníka ($\sphericalangle AOB = c$, $\sphericalangle BOC = a$, $\sphericalangle COA = b$). Představme si, že hranu OA necháme „spadnout“ do roviny OBC tak, že bod O zůstane na místě a bod A přemístíme dolů, mezi body B a C . Součet úhlů $\sphericalangle AOB$ a $\sphericalangle COA$ nyní odpovídá úhlu $\sphericalangle BOC$. Pokud budeme chtít bod A vrátit na své původní místo, je zřejmé, že se úhly $\sphericalangle AOB$ a $\sphericalangle COA$ budou zvětšovat, a tedy i jejich součet bude větší než velikost úhlu $\sphericalangle BOC$. Proto $|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle COA| > |\sphericalangle BOC|$, resp. $b + c > a$. Obdobně pro zbývající dvě strany.



Obr. 3.1: Sférický trojúhelník

- add 2. Otázka zní, jaký je nejmenší a největší možný součet velikostí všech stran sférického trojúhelníka? Co se týče minima, sférický trojúhelník může být tak malý, jak jen ho dokážeme nakreslit, proto je dolní hranicí 0° a podrobněji se budeme nyní zabývat jen největším možným součtem.

Na první pohled by se mohlo zdát, že každá strana sférického trojúhelníka může mít maximální velikost 360° . Definicí sférického trojúhelníka v kapitole 2.6 („Sférický trojúhelník je menší část kulové plochy vymezená oblouky tří různých hlavních kružnic.“) jsme však určili, že stranami jsou s -úsečky, tedy kratší spojnice dvou bodů. Proto je maximální velikost každé strany 180° . Při snaze zkonstruovat sférický trojúhelník s maximálními rozměry $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ byste však brzy zjistili, že se k nim neblížíte ani zdaleka.

Využijeme opět obrázek 3.1. Body A , B , C nyní spojíme rovnými čarami. Dostaneme tak čtyřstěn $OABC$. Stěny OAB , OBC , OAC čtyřstěnu tvoří trojúhelníky. Ty mají celkem 9 vnitřních úhlů a součet jejich velikostí je $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Součet velikostí těch dvou úhlů, které leží u vrcholu A (označme je úhly u A),

je určitě větší než úhel u vrcholu A v rovinném trojúhelníku ABC (označme ho $\angle A$), tedy $|\sphericalangle OAB| + |\sphericalangle OAC| > |\sphericalangle BAC|$ (ze stejného důvodu jako v add 1., promítnutím bodu O do roviny ABC). To samé platí i pro dvojice úhlů u vrcholu B , resp. u vrcholu C (označme je podobně), tedy $|\sphericalangle OBA| + |\sphericalangle OBC| > |\sphericalangle ABC|$, resp. $|\sphericalangle OCA| + |\sphericalangle OCB| > |\sphericalangle ACB|$. Proto platí:

$$\begin{aligned} \text{Součet stran sférického } \triangle ABC &= \text{součet úhlů u vrcholu } O \text{ v čtyřstěnu } OABC = \\ &= 540^\circ - (\text{úhly u } A + \text{úhly u } B + \text{úhly u } C) < \\ &< 540^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C) = \\ &= 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ \end{aligned}$$

Odvodili jsme horní hranici pro součet stran sférického trojúhelníka, $a + b + c < 360^\circ$.

add 3. K odvození vztahu pro součet vnitřních úhlů α, β, γ sférického trojúhelníka ABC využijeme poznatky o polárních trojúhelnících. Z vlastnosti 2 víme, že pro strany a', b', c' polárního trojúhelníka $A'B'C'$ platí $0^\circ < a' + b' + c' < 360^\circ$. Dále z části 2.6.1 víme, že pro velikosti jeho stran platí $a' = 180^\circ - \alpha, b' = 180^\circ - \beta, c' = 180^\circ - \gamma$.

Dosazením těchto vztahů do zmíněné nerovnosti a upravením dostaneme:

$$\begin{aligned} 0^\circ < a' + b' + c' < 360^\circ & \text{ dosadíme za } a', b', c' \\ 0^\circ < (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) < 360^\circ & \\ 0^\circ < 540^\circ - \alpha - \beta - \gamma < 360^\circ & \quad / - 540^\circ \\ -540^\circ < -\alpha - \beta - \gamma < -180^\circ & \quad / \cdot (-1) \\ 540^\circ > \alpha + \beta + \gamma > 180^\circ & \end{aligned}$$

Získáváme tak dokazovaný vztah $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$.

add 4. Plyne z definice sférického trojúhelníka v 2.6.

3.1.1 Určenost sférických trojúhelníků

Sférický trojúhelník je určen danými prvky, např. stranami a, b a úhlem γ , jestliže existuje sférický $\triangle ABC$, který má tyto prvky (tj. má strany o velikosti a, b a úhel o velikosti γ). Existuje-li jiný sférický trojúhelník, který má stejné prvky jako $\triangle ABC$, pak jsou tyto trojúhelníky shodné (přitom záleží na pořadí vrcholů).

Aby libovolně zvolené prvky určovaly sférický trojúhelník, je potřeba splnění určitých podmínek. Ve všech případech nyní předpokládáme prvky, které splňují vlastnost 4. Pak je sférický trojúhelník jednoznačně určen:

1. třemi stranami (a, b, c), jestliže splňují vlastnosti 1 a 2; (SSS)
2. třemi úhly (α, β, γ), jestliže splňují vlastnost 3 a zároveň platí nerovnosti $\alpha + \beta < \gamma + 180^\circ, \beta + \gamma < \alpha + 180^\circ, \gamma + \alpha < \beta + 180^\circ$; (UUU)
3. dvěma stranami a úhlem, který svírají (např. a, b, γ); (SUS)
4. dvěma úhly a stranou, ke které přiléhají (např. α, β, c). (USU)

Další věty o určenosti sférických trojúhelníků lze najít například v [7, str. 84].

3.2 Základní vztahy pro sférické trojúhelníky

Podobně jako u rovinných trojúhelníků, i pro prvky sférických trojúhelníků platí určité vzájemné vztahy. V této části si uvedeme tři základní z nich platné pro obecné sférické trojúhelníky, které pak doplníme o vztahy platné ve sférických trojúhelnících pravouhlých. Využití těchto vztahů na příkladech následuje v části 3.3.

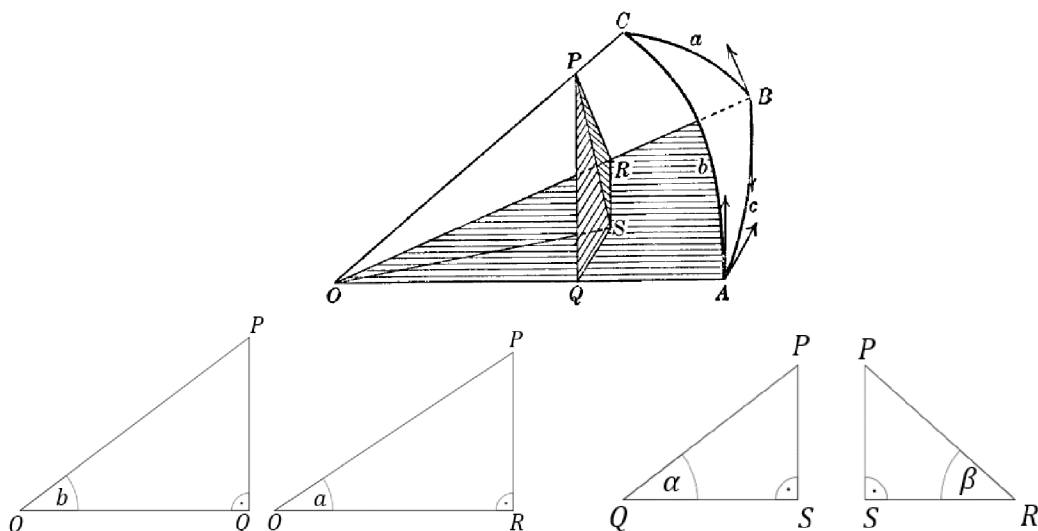
3.2.1 Sinová věta

V rovinné trigonometrii má sinová věta pro obecný trojúhelník ABC tvar

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}, \quad \text{neboli} \quad a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma,$$

tj. poměr stran je roven poměru sinů protilehlých úhlů. Odvoďme nyní znění této věty pro sférické trojúhelníky.

Mějme dán sférický trojúhelník ABC a střed kulové plochy O . Spojme střed O s vrcholy trojúhelníka a na přímce OC zvolme libovolný bod P . Z bodu P spusťme kolmici na OA , patu kolmice označme Q , a dále kolmici na OB , patu kolmice označme R . V rovině OAB veďme bodem Q kolmici na OA a bodem R kolmici na OB . Tyto dvě kolmice se protnou v bodě S . Bod S spojme s bodem P . Získáme situaci jako na obrázku 3.2 nahoře.



Obr. 3.2: Odvození – sinová věta

Prvním krokem je dokázat, že PS je kolmá na rovinu OAB . Dle konstrukce, OQ je zároveň kolmá na PQ i na QS , proto OQ je kolmá na celou rovinu PQS , a tedy je OQ kolmá i na PS , která leží v této rovině. Stejně tak je i OR kolmá na PS . Tím pádem je PS kolmá zároveň k OQ i OR , a proto je kolmá ke každé přímce ležící v rovině OQR (resp. OAB). Je tedy PS kolmá k SQ i SR a trojúhelníky $\triangle PQS$ a $\triangle PRS$ jsou pravouhlé s pravým úhlem při vrcholu S .

V $\triangle PQS$ odpovídá úhel $\sphericalangle PQS$ sférickému úhlu u vrcholu A ($\sphericalangle PQS = \alpha$) a podobně v $\triangle PRS$ odpovídá úhel $\sphericalangle PRS$ sférickému úhlu u vrcholu B ($\sphericalangle PRS = \beta$). Také v $\triangle POR$ platí $\sphericalangle POR = \sphericalangle COB = a$ a v $\triangle POQ$ platí $\sphericalangle POQ = \sphericalangle COA = b$.

S využitím rovinné trigonometrie dostáváme z pravoúhlých trojúhelníků

$$\begin{aligned}\triangle PQS: \quad \sin \alpha &= \frac{|PS|}{|PQ|} \Rightarrow |PS| = |PQ| \cdot \sin \alpha, \\ \triangle PRS: \quad \sin \beta &= \frac{|PS|}{|PR|} \Rightarrow |PS| = |PR| \cdot \sin \beta,\end{aligned}$$

odkud porovnáním pravých stran rovnic dostáváme

$$|PQ| \cdot \sin \alpha = |PR| \cdot \sin \beta. \quad (3.1)$$

Z trojúhelníků $\triangle POQ$ a $\triangle POR$ vyjádříme $|PQ|$ a $|PR|$

$$\begin{aligned}\sin a &= \frac{|PR|}{|OP|} \Rightarrow |PR| = |OP| \cdot \sin a \\ \sin b &= \frac{|PQ|}{|OP|} \Rightarrow |PQ| = |OP| \cdot \sin b\end{aligned}$$

a jejich dosazením do rovnice (3.1) obdržíme

$$|OP| \cdot \sin b \cdot \sin \alpha = |OP| \cdot \sin a \cdot \sin \beta,$$

po úpravě

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}.$$

Cyklickou záměnou získáme vztahy

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}, \quad \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Odvozený vztah nazýváme **sférická sinová věta**.

Jsou-li a, b, c strany a α, β, γ úhly sférického trojúhelníka, pak platí:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Sférickou sinovou větu lze vyjádřit také ve tvaru

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma,$$

odkud pro některé možná jasněji vyplývá její význam, že poměr sinů stran sférického trojúhelníka je roven poměru sinů protilehlých úhlů.

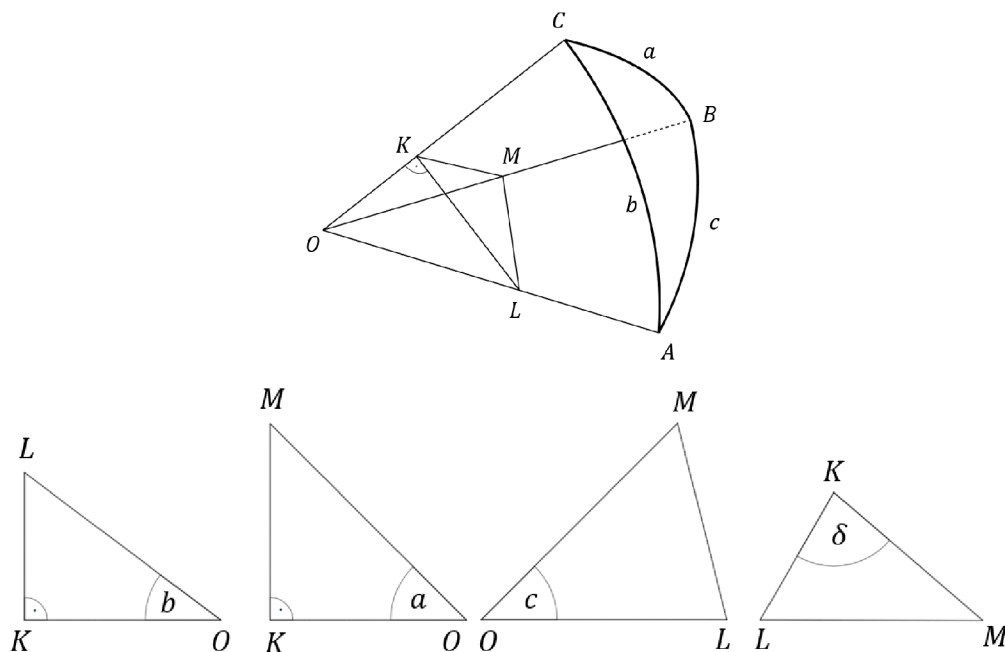
3.2.2 Kosinová věta pro stranu

K odvození kosinové věty pro sférický trojúhelník využijeme také tvar kosinové věty pro rovinné trojúhelníky. Připomeňme si proto, že v obecném rovinném trojúhelníku ABC platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

Mějme opět dán sférický trojúhelník ABC , střed kulové plochy O a spojnice středu O s vrcholy trojúhelníka. Na přímce OC nyní zvolme libovolný bod K a veďme jím rovinu kolmou k OC . Průsečík této roviny a přímkou OA označme L , průsečík s přímkou OB označme M . Spojme body L a M . Máme nyní situaci jako na obr. 3.3 nahoře.

Získali jsme dva obecné trojúhelníky $\triangle OLM$ a $\triangle KLM$ a dva pravoúhlé trojúhelníky $\triangle OLK$ a $\triangle OMK$ s pravým úhlem u vrcholu K . V $\triangle OLM$ odpovídá úhel při vrcholu O straně c sférického trojúhelníka ABC ($\sphericalangle MOL = c$), v $\triangle OLK$ je úhel při vrcholu O shodný se sférickou stranou b ($\sphericalangle KOL = b$), v $\triangle OMK$ odpovídá úhel při vrcholu O sférické straně a ($\sphericalangle KOM = a$) a v $\triangle KLM$ je úhel při vrcholu K roven sférickému úhlu γ ($\sphericalangle MKL = \gamma$).



Obr. 3.3: Odvození – kosinová věta

Nyní využijeme kosinovou větu rovinné trigonometrie. Podle ní v $\triangle KLM$, resp. $\triangle OLM$ platí:

$$|LM|^2 = |KL|^2 + |KM|^2 - 2 \cdot |KL| \cdot |KM| \cdot \cos \gamma, \text{ resp.}$$

$$|LM|^2 = |MO|^2 + |LO|^2 - 2 \cdot |MO| \cdot |LO| \cdot \cos c.$$

Porovnáním pravých stran rovnic dostaneme:

$$|KL|^2 + |KM|^2 - 2 \cdot |KL| \cdot |KM| \cdot \cos \gamma = |MO|^2 + |LO|^2 - 2 \cdot |MO| \cdot |LO| \cdot \cos c.$$

Upravíme a využijeme platnost Pythagorovy věty v $\triangle OMK$ a $\triangle OLK$:

$$2 \cdot |MO| \cdot |LO| \cdot \cos c = \underbrace{|MO|^2 - |KM|^2}_{|KO|^2} + \underbrace{|LO|^2 - |KL|^2}_{|KO|^2} + 2 \cdot |KL| \cdot |KM| \cdot \cos \gamma$$

$$2 \cdot |MO| \cdot |LO| \cdot \cos c = 2 \cdot |KO|^2 + 2 \cdot |KL| \cdot |KM| \cdot \cos \gamma.$$

Rovnici vydělíme 2 a velikostmi stran MO , LO . Získané poměry stran nahradíme odpovídajícími goniometrickými funkcemi úhlů v $\triangle OLK$ a $\triangle OMK$:

$$\cos c = \underbrace{\frac{|KO|}{|MO|}}_{\cos a} \cdot \underbrace{\frac{|KO|}{|LO|}}_{\cos b} + \underbrace{\frac{|KL|}{|LO|}}_{\sin b} \cdot \underbrace{\frac{|KM|}{|MO|}}_{\sin a} \cdot \cos \gamma.$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Odvozený vztah nazýváme **sférická kosinová věta pro stranu**. Cyklickou záměnou obdržíme vyjádření pro zbylé strany.

Jsou-li a , b , c strany a α , β , γ úhly sférického trojúhelníka, pak platí:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta,$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

3.2.3 Kosinová věta pro úhel

Na rozdíl od jediného tvaru kosinové věty v rovinné trigonometrii (až na cyklické záměny), lze ve sférické trigonometrii vyjádřit kosinovou větu nejen pro strany (viz 3.2.2), ale také pro úhly.

K jejímu odvození využijeme vlastností polárních trojúhelníků. Nechť $A'B'C'$ je polární sférický trojúhelník k trojúhelníku ABC . Pak pro jeho prvky podle kosinové věty pro stranu platí:

$$\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos \alpha'.$$

Vyjádríme-li strany trojúhelníka $A'B'C'$ pomocí úhlů trojúhelníka ABC (viz 2.6.1) dostaneme:

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta) \cdot \sin(\pi - \gamma) \cdot \cos(\pi - a).$$

Úpravami pomocí součtových vzorců a vyjádřením $\cos \pi = -1$ a $\sin \pi = 0$ dostaneme tvar

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a.$$

Vynásobením rovnice číslem -1 získáme rovnost, která se nazývá **sférická kosinová věta pro úhel**.

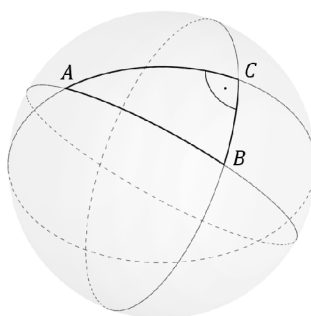
Jsou-li a, b, c strany a α, β, γ úhly sférického trojúhelníka, pak platí:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a, \\ \cos \beta &= -\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos b, \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c.\end{aligned}$$

3.2.4 Vztahy v pravoúhlém sférickém trojúhelníku

Předchozí tři věty platí obecně pro libovolné sférické trojúhelníky, včetně pravoúhlých. Avšak díky tomu, že je $\sin 90^\circ = 1$ a $\cos 90^\circ = 0$, velmi se pro tento typ trojúhelníků zjednoduší.

Mějme pravoúhlý sférický $\triangle ABC$ s pravým úhlem u vrcholu C , tedy $\gamma = 90^\circ$. Pak dostaneme předchozí věty v následujících tvarech.



Obr. 3.4: Pravoúhlý sférický trojúhelník

Sinová věta pro pravoúhlý trojúhelník:

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}.$$

Neboli po úpravě a jednotlivě: $\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha$ a $\sin b = \sin c \cdot \sin \beta$.

Kosinová věta pro stranu pravoúhlého trojúhelníka:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

Tento tvar kosinové věty se označuje jako **sférická Pythagorova věta**.

Kosinová věta pro úhel v pravoúhlém trojúhelníku:

$$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos a, \quad \cos \beta = \sin \alpha \cdot \cos b.$$

Důsledek: Má-li sférický trojúhelník dva pravé úhly, např. γ a β , potom $\sin \beta = 1$ a z kosinové věty pro úhel α dostáváme $\cos \alpha = \cos a$, odkud pro úhly v intervalu 0° – 180° je $\alpha = a$ (tj. zbývající úhel trojúhelníka je shodný s protilehlou stranou).

Názorně to lze vidět například na obr. 2.6. Vlevo je sférický trojúhelník se dvěma pravými úhly (u vrcholu A a vrcholu B). Tečny sestrojené ke stranám AC a BC ve vrcholu C trojúhelníka leží v rovině rovnoběžné s rovinou AOB . Proto úhel, který tyto tečny svírají, tj. úhel při vrcholu C trojúhelníka, je shodný s úhlem $\sphericalangle AOB$, tj. stranou AB trojúhelníka. Podobně i na obrázku vpravo.

Pro odvěsny v pravoúhlých trojúhelnících také platí následující **věta**:

Odvěsna pravoúhlého trojúhelníka a úhel k ní protilehlý jsou zároveň úhly ostré nebo zároveň tupé nebo zároveň pravé.

Neperovo pravidlo

Pomocí tohoto pravidla lze mechanicky získat všechny vztahy, které jsou potřebné k řešení pravoúhlého sférického trojúhelníka, a to včetně vztahů výše zmíněných. Tedy, známe-li libovolné dva prvky pravoúhlého sférického trojúhelníka (mimo pravý úhel), pomocí Neperova pravidla dokážeme dopočítat všechny jeho zbývající prvky.

Neperovo pravidlo¹ zní:

Zapišme na obvod kruhu prvky pravoúhlého sférického trojúhelníka tak, jak následují za sebou ve směru hodinových ručiček, přičemž vynechme pravý úhel a místo odvěsen a , b pišme jejich doplňky do 90° ($90^\circ - a$, $90^\circ - b$). Pak se kosinus kteréhokoli prvku rovná součinu sinů protilehlých prvků nebo součinu kotangent prvků sousedních.

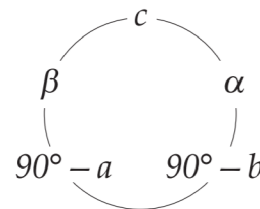
Prakticky tedy nejprve zapíšeme např. přeponu c , pak (ve směru hodinových ručiček) úhel α , následně $90^\circ - b$, $90^\circ - a$ a na závěr úhel β , čímž získáme schéma viz vpravo.

Pak například:

$$\cos \beta = \sin \alpha \cdot \sin (90^\circ - b) = \cotg c \cdot \cotg (90^\circ - a),$$

$$\cos c = \sin (90^\circ - b) \cdot \sin (90^\circ - a) = \cotg \alpha \cdot \cotg \beta,$$

$$\cos (90^\circ - b) = \sin \beta \cdot \sin c = \cotg (90^\circ - a) \cdot \cotg \alpha \quad \text{atp.}$$



3.3 Řešení sférických trojúhelníků

Při řešení sférických trojúhelníků se budeme zabývat tím, jak u daného trojúhelníka určit všechny prvky, tedy velikosti jeho stran a úhlů. Jak dále uvidíme, dopočítat prvky sférického trojúhelníka je o něco náročnější než u trojúhelníků euklidovských, ačkoli podobně jako tam potřebujeme znát tři prvky, abychom mohli určit zbývající.

Postupně rozebereme čtyři základní zadání sférického trojúhelníka a postup při jejich řešení. V následující kapitole pak tyto postupy aplikujeme na konkrétních příkladech z praxe. Zbývá možná zadání a jejich řešení lze najít například v [7, str. 84] nebo v [1, str. 25].

Ve všech případech, tak jako doposud, počítejme se sférickým $\triangle ABC$, jehož strany jsou a , b , c a úhly α , β , γ a předpokládejme, že splňují nutné podmínky řešitelnosti, resp. určenosti. Případné odchylky ve výsledcích u řešených příkladech mohou být způsobeny zaokrouhlováním při výpočtech.

Pro výpočty ještě připomeňme, že z rovinné trigonometrie pro úhel α platí:

$$\begin{aligned} \cotg \alpha &= \frac{1}{\tg \alpha}; & \sin (90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha; & \cos (90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha; \\ \sin (180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha; & \cos (180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹Toto pravidlo ve svém díle popsal matematik John Napier (i Neper; 1550–1617), obr. 1.2. na str. 3.

3.3.1 Zadání SSS

Známe velikost tří stran sférického trojúhelníka (a, b, c), úkolem je dopočítat všechny jeho úhly (α, β, γ).

K řešení využijeme kosinové věty pro strany:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha.$$

Úpravou dostaneme vztah:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

do kterého už stačí jen dosadit známé hodnoty. Obdobně pro zbývající úhly:

$$\cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}, \quad \cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}.$$

Úloha má právě jedno řešení, podobně jako v euklidovské geometrii, kde tři strany určují trojúhelník jednoznačně.

Příklad 3.1. Jsou dány úhly $a = 56^\circ 40'$, $b = 83^\circ 14'$, $c = 114^\circ 30'$. Existuje-li sférický trojúhelník se stranami a, b, c , určete jeho úhly.

Řešení:

Strany a, b, c splňují vlastnosti 1, 2 i 4, a tedy podle bodu 1. v části 3.1.1 existuje jediný sférický trojúhelník (až na polohu) o stranách a, b, c .

Jeho úhly α, β, γ získáme dosazením zadaných hodnot do upravených tvarů kosinové věty pro stranu.

Pro úhel α :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \\ \cos \alpha &= \frac{\cos 56^\circ 40' - \cos 83^\circ 14' \cdot \cos 114^\circ 30'}{\sin 83^\circ 14' \cdot \sin 114^\circ 30'} \\ \cos \alpha &= \frac{0,5495 - 0,1178 \cdot (-0,4147)}{0,993 \cdot 0,91} \\ \cos \alpha &= 0,6622 \\ \alpha &= \underline{\underline{48^\circ 32'}}. \end{aligned}$$

Obdobně pro β a γ :

$$\begin{aligned} \cos \beta &= 0,4547 & \cos \gamma &= -0,5779 \\ \beta &= \underline{\underline{62^\circ 57'}}, & \gamma &= \underline{\underline{125^\circ 18'}}. \end{aligned}$$

Správnost výsledků můžeme ověřit například platností vlastností 4, 5 nebo 6. Jelikož pro strany trojúhelníka platí $a < b < c$, pak i úhly musí splňovat $\alpha < \beta < \gamma$, což v našem případě odpovídá.

3.3.2 Zadání UUU

Jsou dány tři úhly sférického trojúhelníka (α , β , γ), máme zjistit velikost jeho stran (a , b , c). K vyřešení využijeme kosinové věty pro úhly:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a.$$

Úpravou dostaneme vztah:

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma},$$

kam stačí jen dosadit zadané hodnoty. Obdobně pro zbývající strany:

$$\cos b = \frac{\cos \beta + \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}, \quad \cos c = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Úloha má právě jedno řešení, na rozdíl od euklidovské geometrie, kde je třemi úhly dán trojúhelník až na velikost jeho stran, tj. tři (resp. dva) úhly v rovině určují nekonečně mnoho podobných trojúhelníků.

Příklad 3.2. Jsou dány úhly $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 150^\circ$. Existuje-li sférický trojúhelník s úhly α , β , γ , určete jeho strany.

Řešení:

Úhly α , β , γ splňují podmínky bodu 2. v části 3.1.1, a proto existuje jediný sférický trojúhelník (až na polohu) s úhly α , β , γ .

Strany a , b , c získáme dosazením zadaných hodnot do upravených tvarů kosinové věty.

Pro stranu a :

$$\begin{aligned} \cos a &= \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} \\ \cos a &= \frac{\cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \cos 150^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 150^\circ} \\ \cos a &= \frac{0,7071 + 0,5 \cdot (-0,866)}{0,866 \cdot 0,5} \\ \cos a &= 0,633 \\ a &= \underline{\underline{50^\circ 43' 42''}}. \end{aligned}$$

Obdobně pro b a c :

$$\begin{aligned} \cos b &= -0,3178 & \cos c &= -0,8369 \\ b &= \underline{\underline{108^\circ 31' 54''}}, & c &= \underline{\underline{146^\circ 48' 36''}}. \end{aligned}$$

3.3.3 Zadání SUS

Máme zadány dvě strany a úhel, který svírají, např. strany a , b a úhel γ .
Známe tedy tři prvky z kosinové věty pro stranu:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$$

a přímo dosazením do rovnice získáme velikost strany c . Tímto už známe všechny tři strany trojúhelníka a úlohu můžeme dále řešit podle zadání SSS (viz část 3.3.1).

Úloha má právě jedno řešení, podobně jako v euklidovské geometrii, kde dvě strany a úhel mezi nimi jednoznačně určují trojúhelník.

Příklad 3.3. Jsou dány úhly $a = 74^\circ 14'$, $b = 57^\circ 28'$, $\gamma = 83^\circ 21'$. Existuje-li sférický trojúhelník se stranami a , b a úhlem γ , určete jeho zbývající stranu c a úhly α a β .

Řešení:

Prvky a , b a γ splňují vlastnost 4, tudíž podle bodu 3. v části 3.1.1 existuje jediný sférický trojúhelník (až na polohu) o stranách a , b a úhlu γ .

Stranu c získáme přímo dosazením zadaných hodnot do kosinové věty pro stranu:

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \\ \cos c &= \cos 74^\circ 14' \cdot \cos 57^\circ 28' + \sin 74^\circ 14' \cdot \sin 57^\circ 28' \cdot \cos 83^\circ 21' \\ \cos c &= 0,2717 \cdot 0,5378 + 0,9624 \cdot 0,8431 \cdot 0,1158 \\ \cos c &= 0,2401 \\ c &= \underline{\underline{76^\circ 6'}}. \end{aligned}$$

Nyní známe velikost všech tří stran trojúhelníka a ve výpočtu pokračujeme podle zadání SSS (viz část 3.3.1). Dostaneme:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 0,1742 & \cos \beta &= 0,5058 \\ \alpha &= \underline{\underline{79^\circ 58'}}, & \beta &= \underline{\underline{59^\circ 37'}}. \end{aligned}$$

3.3.4 Zadání USU

Známe velikost dvou úhlů a strany, ke které přiléhají, např. strana a a úhly β a γ .
Podobně jako v předchozím případě známe tři prvky, které můžeme dosadit do známého vztahu. Přímo z kosinové věty pro úhel tedy dopočítáme zbývající úhel α :

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a.$$

Tímto jsme získali velikost posledního úhlu a dále můžeme úlohu řešit podle zadání UUU (viz část 3.3.2).

Úloha má právě jedno řešení, podobně jako v euklidovské geometrii, kde velikost strany a velikost úhlů k ní přilehlých jednoznačně určují trojúhelník.

Příklad 3.4. Jsou dány úhly $a = 51^\circ 41'$, $\beta = 38^\circ 58'$, $\gamma = 107^\circ 47'$. Existuje-li sférický trojúhelník s úhly β , γ a stranou a , určete jeho zbývající úhel α a strany b a c .

Řešení:

Prvky a , β a γ splňují vlastnost 4, a proto podle bodu 4. v části 3.1.1 existuje jediný sférický trojúhelník (až na polohu) se stranou a a úhly β a γ .

Zbývající úhel α získáme přímo dosazením zadaných hodnot do kosinové věty pro úhel:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a \\ \cos \alpha &= -\cos 38^\circ 58' \cdot \cos 107^\circ 47' + \sin 38^\circ 58' \cdot \sin 107^\circ 47' \cdot \cos 51^\circ 41' \\ \cos \alpha &= -0,7775 \cdot (-0,3054) + 0,6289 \cdot 0,9522 \cdot 0,62 \\ \cos \alpha &= 0,6087 \\ \alpha &= \underline{\underline{52^\circ 30'}}.\end{aligned}$$

Nyní známe velikost všech tří úhlů trojúhelníka a ve výpočtu pokračujeme podle zadání UUU (viz část 3.3.2). Dostaneme:

$$\begin{aligned}\cos b &= 0,7831 & \cos c &= 0,3364 \\ b &= \underline{\underline{38^\circ 27'}}, & c &= \underline{\underline{70^\circ 21'}}.\end{aligned}$$

3.3.5 Zadání v pravoúhlém trojúhelníku

Nechť je nyní v trojúhelníku ABC úhel $\gamma = 90^\circ$, strana c je přepona, strany a , b jsou odvěsny a α , β zbývající úhly.

Při řešení pravoúhlých trojúhelníků můžeme použít stejné postupy jako u obecných trojúhelníků, které jsme si ukázali v částech 3.3.1–3.3.4. Mnohdy je však výhodnější a jednodušší využít Neperovo pravidlo. Na následujícím příkladě si ukážeme jak na to.

Příklad 3.5. Jsou dány odvěsny $a = 29^\circ 09'$ a $b = 65^\circ 44'$ pravoúhlého sférického trojúhelníka. Existuje-li takový trojúhelník, určete jeho zbývající prvky c , α , β .

Řešení:

Takový trojúhelník podle bodu 3. v části 3.1.1 existuje jediný.

Příklad vyřešíme pomocí Neperova pravidla. Nejprve dopočítáme přeponu c z jeho první části (kosinus prvku je roven součinu sinů protilehlých prvků):

$$\begin{aligned}\cos c &= \sin(90^\circ - a) \cdot \sin(90^\circ - b) \\ \cos c &= \sin(90^\circ - 29^\circ 09') \cdot \sin(90^\circ - 65^\circ 44') \\ \cos c &= \sin 60^\circ 51' \cdot \sin 24^\circ 16' \\ \cos c &= 0,8733 \cdot 0,411 \\ \cos c &= 0,3589 \\ c &= \underline{\underline{68^\circ 58'}}.\end{aligned}$$

Úhly α a β nyní postupně vyjádříme pomocí Neperova pravidla například takto:

$$\cos \alpha = \cotg (90^\circ - b) \cdot \cotg c$$

$$\cos \alpha = \cotg (90^\circ - 65^\circ 44') \cdot \cotg 68^\circ 58'$$

$$\cos \alpha = \cotg 24^\circ 16' \cdot \cotg 68^\circ 58'$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 24^\circ 16'} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 68^\circ 58'}$$

$$\cos \alpha = 2,2182 \cdot 0,3845$$

$$\cos \alpha = 0,8529$$

$$\alpha = \underline{\underline{31^\circ 28'}}$$

$$\cos \beta = \sin \alpha \cdot \sin (90^\circ - b)$$

$$\cos \beta = \sin \alpha \cdot \cos b$$

$$\cos \beta = \sin 31^\circ 28' \cdot \cos 65^\circ 44'$$

$$\cos \beta = 0,522 \cdot 0,411$$

$$\cos \beta = 0,2145$$

$$\beta = \underline{\underline{77^\circ 36'}}$$

Kapitola 4

Aplikace v geografii

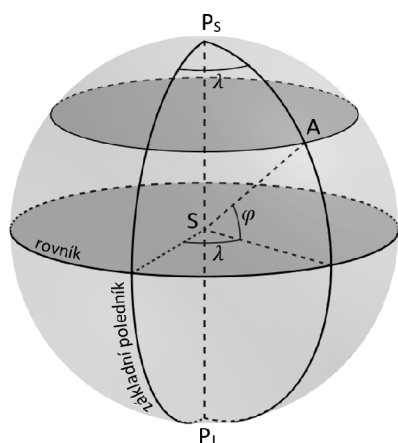
Významnou funkci mají poznatky ze sférické geometrie a trigonometrie při výpočtech na zemském povrchu či na nebeské sféře. Jejich uplatnění tak najdeme i ve vědách jako je např. geografie, astronomie nebo geodézie. V následujícím textu naleznete několik řešených příkladů, na kterých si ukážeme praktické využití poznatků popisovaných v této práci. Záměrně jsou vybrány příklady, se kterými se setkávají i vysokoškolští studenti geografie.

Při výpočtech považujeme Zemi za kouli o poloměru $r_z = 6371$ km. Využijeme i vzorce (3.2) rovinné trigonometrie uvedené v úvodu kapitoly 3.3, a také se předpokládá znalost pojmů rovnoběžka, poledník, rovník, zemská osa a severní a jižní pól.

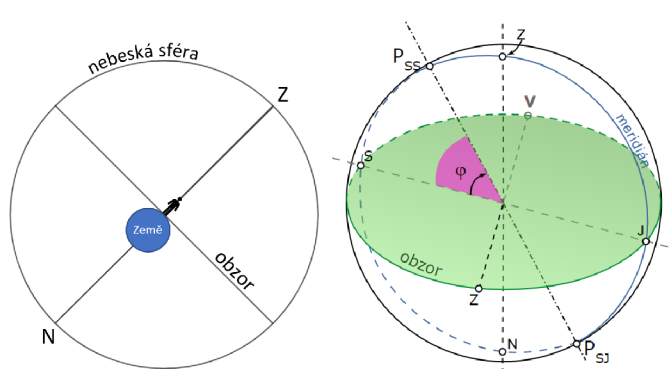
4.1 Slovníček geografických pojmů

Ještě než se pustíme do řešení praktických příkladů, uvedeme si zde několik pojmů, se kterými se budeme při výpočtech setkávat.

| | |
|---|---|
| ortodroma | nejkratší spojnice dvou bodů na sféře (např. na povrchu Země), tj. s -úsečka |
| loxodroma | spojnice dvou bodů na sféře, která protíná všechny poledníky pod stejným úhlem |
| zeměpisné souřadnice | udávají polohu daného místa na povrchu Země (obr. 4.1); = zeměpisná šířka (φ), zeměpisná délka (λ) |
| zeměpisná šířka φ | sférická vzdálenost daného místa od rovníku; místa nad rovníkem mají severní šířku (0° – 90° s. š.), místa pod rovníkem mají jižní šířku (0° – 90° j. š.); zeměpisné šířce φ je rovna také výška světového pólu nad obzorem (viz obr. 4.2 vpravo) |
| zeměpisná délka λ | sférický úhel, který svírá místní poledník s nultým poledníkem; místa směrem na východ od nultého poledníku mají východní délku (0° – 180° v. d.), místa směrem na západ mají západní délku (0° – 180° z. d.) |

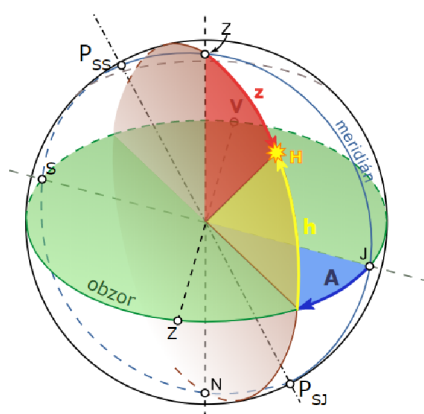


Obr. 4.1: Zeměpisné souřadnice

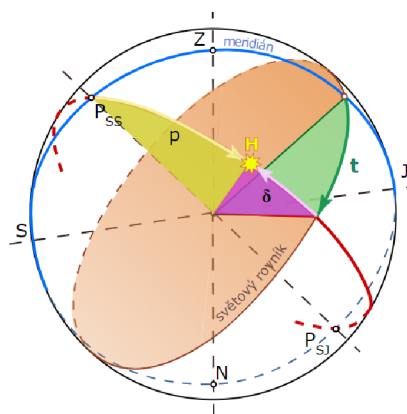


Obr. 4.2: Nebeská sféra – obzor

| | |
|--|---|
| nebeská sféra | myšlená kulová plocha, na kterou se promítají tělesa ve Vesmíru, jejím středem je pozorovatel na povrchu Země (obr. 4.2) |
| obzor | hlavní kružnice na nebeské sféře, ve které vodorovná rovina vedená místem pozorovatele protne nebeskou sféru (vodorovná z pohledu pozorovatele); meridián protne obzor v severním (S) a jižním (J) bodě obzoru, hlavní kružnice kolmá k meridiánu a k obzoru protne obzor ve východním (V) a západním (Z) bodě obzoru (obr. 4.2) |
| zenit Z | neboli nadhlavník, je bod nad pozorovatelem, ve kterém kolmice k rovině obzoru vedená místem pozorovatele protne nebeskou sféru |
| nadir N | neboli podnožník, je bod diametrálně protilehlý k zenitu Z |
| světové póly P_{SS}, P_{SJ} | průsečíky zemské osy s nebeskou sférou; severní světový pól P _{SS} a jižní světový pól P _{SJ} |
| meridián | neboli místní poledník, je hlavní kružnice na nebeské sféře procházející zenitem, nadírem a světovými póly |
| výšková kružnice | hlavní kružnice na nebeské sféře procházející zenitem, nadírem a danou hvězdou |
| výška nad obzorem h | sférická vzdálenost dané hvězdy (bodu) od obzoru; měří se na výškové kružnici; nabývá hodnot od 0° do -90° pro hvězdu pod obzorem a od 0° do +90° pro hvězdu nad obzorem; jinak řečeno je to výškový úhel, pod jakým se díváme směrem na hvězdu měřený od vodorovné roviny |
| zenitová vzdálenost z | sférická vzdálenost zenitu a dané hvězdy; měří se na výškové kružnici od zenitu směrem k hvězdě; nabývá hodnot od 0° (hvězda v zenitu) do 180° (hvězda v nadíru) a platí $z + h = 90^\circ$ |



Obr. 4.3: Obzorníkové souřadnice



Obr. 4.4: Rovníkové souřadnice

| | |
|--------------------------------------|--|
| světový rovník | hlavní kružnice na nebeské sféře, ve které nebeskou sféru protíná rovina zemského rovníku |
| azimut A | sférický úhel mezi meridiánem a výškovou kružnicí; jinak řečeno je to úhel, pod kterým se dívám na hvězdu (měřený od místního poledníku k poledníku dané hvězdy) |
| – astronomický | měří se od jižního bodu obzoru směrem k západnímu; nabývá hodnot 0° – 360° (jih 0° , západ 90° , sever 180° , východ 270°); |
| – topografický | měří se od severního bodu obzoru směrem k východnímu, slouží např. k určování směru pochodu, nejčastěji měřen buzolou |
| deklinální kružnice | hlavní kružnice na nebeské sféře procházející danou hvězdou a světovými póly |
| deklinace δ | sférická vzdálenost hvězdy od světového rovníku; měří se na deklinální kružnici; nabývá hodnot od -90° pro P_{SJ} do $+90^{\circ}$ pro P_{SS} |
| hodinový úhel t | sférický úhel mezi meridiánem a deklinální kružnicí; měří se od meridiánu směrem k deklinální kružnici; udává se v hodinách 0–24 h nebo ve stupních 0° – 360° ; v podstatě je to úhel daný rozdílem zeměpisných délek polohy pozorovatele a dané hvězdy |
| pólová vzdálenost p | sférická vzdálenost dané hvězdy od severního svět. pólu P_{SS} ; nabývá hodnot od 0° (hvězda na severním pólu) do 180° (hvězda na jižním pólu) a platí $\delta + p = 90^{\circ}$ |
| rovníkové souřadnice | = deklinace (δ), hodinový úhel (t), pólová vzdálenost (p); základní rovina je dána světovým rovníkem |
| obzorníkové souřadnice | = výška nad obzorem (h), azimut (A), zenitová vzdálenost (z); základní rovina je dána obzorem |

4.2 Délka rovnoběžky a 1° zeměpisné délky

Délka rovnoběžky

Rovnoběžka je kružnice spojující místa na Zemi se stejnou zeměpisnou šířkou. Rovina určená danou rovnoběžkou je rovnoběžná s rovinou rovníku. Délka rovnoběžek se zmenšuje od rovníku směrem k pólům (pro póly je rovna 0).

Určení délky libovolné rovnoběžky na Zemi je vlastně výpočtem délky vedlejší kružnice na sféře. Výpočet vychází z obr. 4.5 a využije se při něm převážně znalostí z euklidovské geometrie.

Označme r_z – poloměr Země a r_φ – poloměr dané rovnoběžky o zeměpisné šířce φ . Délka o_r rovníku, resp. libovolné hlavní kružnice na Zemi, je rovna obvodu kružnice o poloměru r_z a podobně délka dané rovnoběžky o_φ je rovna obvodu kružnice s poloměrem r_φ , tedy

$$\begin{aligned} o_r &= 2\pi r_z & (4.1) \\ \text{a } o_\varphi &= 2\pi r_\varphi. \end{aligned}$$

Vyjádříme r_φ pomocí funkce kosinus úhlu φ z pravoúhlého trojúhelníka (viz obr. 4.5). Je tedy

$$\cos \varphi = \frac{r_\varphi}{r_z} \quad \text{odkud} \quad r_\varphi = r_z \cdot \cos \varphi.$$

Dosazením za r_φ do rovnice pro obvod o_φ dostaneme vyjádření pro délku rovnoběžky o zeměpisné šířce φ :

$$o_\varphi = 2\pi r_z \cdot \cos \varphi. \quad (4.2)$$

Příklad 4.1. Určete délku rovníku a délku rovnoběžky pro 50° zeměpisné šířky.

Řešení:

Pro výpočet stačí pouze dosadit do rovnic (4.1) a (4.2), kde $r_z = 6371$ km a $\varphi = 50^\circ$.

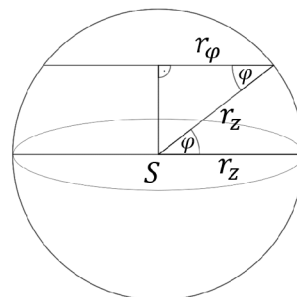
Délka rovníku:

$$o_r = 2\pi r_z = 2 \cdot \pi \cdot 6371 \doteq \underline{\underline{40030 \text{ km}}}.$$

Délka rovnoběžky 50° :

$$o_\varphi = 2\pi r_z \cdot \cos \varphi = 2 \cdot \pi \cdot 6371 \cdot \cos 50^\circ = 2 \cdot \pi \cdot 6371 \cdot 0,6428 \doteq \underline{\underline{25731 \text{ km}}}.$$

Odpověď: Délka rovníku je přibližně 40 030 km a délka rovnoběžky pro 50° zeměpisné šířky je asi 25 731 km.



Obr. 4.5: Délka rovnoběžky

Určení 1° zeměpisné délky

Geografové se setkávají také s výpočty délky rovnoběžky mezi dvěma sousedními poledníky (o rozdílu 1° z. d.) pro danou zeměpisnou šířku. Tzn. určit, jakou vzdálenost ujdou, jestliže se vydám např. po rovnoběžce 50° s. š. od poledníku 14° v. d. k poledníku 15° v. d. (Uvědomme si však, že se pro danou zeměpisnou šířku nejedná o nejkratší možnou trasu mezi danými poledníky, neboť rovnoběžka není hlavní kružnice.)

Jelikož libovolná kružnice přísluší středovému úhlu o velikosti 360°, délku 1° zjistíme jednoduše vydělením délky dané rovnoběžky hodnotou 360.

$$d(1^\circ) = \frac{o_\varphi}{360} = \frac{2\pi r_z \cdot \cos \varphi}{360} \quad \text{popř. po zkrácení} \quad d(1^\circ) = \frac{\pi r_z \cdot \cos \varphi}{180} \quad (4.3)$$

K následujícím výpočtům je pro nás velmi užitečné znát délku 1° na rovníku, resp. délku 1° na libovolné hlavní kružnici na zeměkouli:

$$d(1^\circ) = \frac{o_z}{360} = \frac{2\pi r_z}{360} = \frac{40030}{360} \doteq \underline{\underline{111,2 \text{ km}}} \quad (4.4)$$

Obecně na sféře o poloměru r získáme délku 1° na s -přímce, resp. s -úsečce výpočtem

$$d(1^\circ) = \frac{2\pi r}{360}.$$

Příklad 4.2. Určete vzdálenost 1° zeměpisné délky pro 40° zeměpisné šířky.

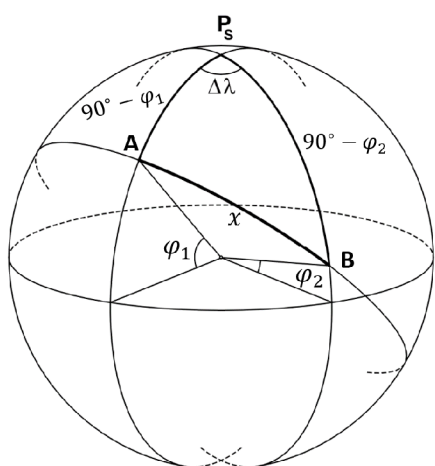
Řešení:

Do vzorce (4.3) pro výpočet délky 1° z. d. dosadíme za $r_z = 6371 \text{ km}$ a $\varphi = 50^\circ$:

$$d(1^\circ) = \frac{2\pi r_z \cdot \cos \varphi}{360} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371 \cdot \cos 40^\circ}{360} = \frac{40030 \cdot 0,766}{360} \doteq \underline{\underline{85,2 \text{ km}}}.$$

Odpověď: Jeden stupeň má na rovnoběžce se zeměpisnou šířkou 40° délku asi 85,2 km.

4.3 Vzdálenost dvou míst na Zemi



Obr. 4.6: Výpočet vzdáleností

Nejkratší vzdáleností dvou míst na zemském povrchu je ortodroma, tedy část hlavní kružnice (s -úsečka). Určení vzdálenosti dvou míst na zeměkouli tedy odpovídá určení délky s -úsečky.

K výpočtu vzdálenosti dvou míst A a B na zeměkouli, jejichž poloha je dána zeměpisnými souřadnicemi $A[\varphi_1, \lambda_1]$ a $B[\varphi_2, \lambda_2]$, využíváme sférický trojúhelník, jehož vrcholy jsou daná místa A a B a severní pól P_S (obr. 4.6).

Strana AP_S má pak velikost $90^\circ - \varphi_1$, strana BP_S má velikost $90^\circ - \varphi_2$ a úhel při vrcholu P_S je dán rozdílem zeměpisných délek $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Délka strany AB, označme ji x , dopočtena v délkových jednotkách, je pak hledanou vzdáleností daných míst.

Ve sférickém trojúhelníku ABP_S tedy známe dvě strany a úhel, který svírají. Zbývající stranu x dopočítáme z kosinové věty pro stranu (viz zadání SUS, kap. 3.3.3)

$$\cos x = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cdot \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1) \cdot \sin(90^\circ - \varphi_2) \cdot \cos \Delta\lambda, \quad (4.5)$$

kteřou můžeme také upravit (za použití vzorců (3.2)) do tvaru

$$\cos x = \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \Delta\lambda.$$

V závěru stačí velikost x vypočtenou ve stupních vynásobit délkou 1° hlavní kružnice na zeměkouli (viz rovnice (4.4)) a získáme výslednou vzdálenost míst A a B v kilometrech. Konkrétní řešení si ukážeme na příkladech dále.

Existují ještě dva speciální případy polohy dvou bodů na Zemi, resp. výpočtu jejich vzdálenosti. První z nich je, pokud oba body A i B leží na rovníku (zeměpisná šířka obou míst je $\varphi_1 = \varphi_2 = 0^\circ$). V tomto případě určíme délku x jako rozdíl $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ zeměpisných délek daných míst. Výsledná vzdálenost míst A a B je pak rovna

$$d(A, B) = \frac{2\pi r_z \cdot \Delta\lambda}{360}.$$

V druhém případě leží oba dva body na stejném poledníku (zeměpisná délka obou míst je shodná $\lambda_1 = \lambda_2$). Délku x určíme jako rozdíl $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ zeměpisných šířek obou míst. Ve výsledku je potom vzdálenost míst A a B

$$d(A, B) = \frac{2\pi r_z \cdot \Delta\varphi}{360}.$$

Příklad 4.3. Vypočítejte, jaká je nejkratší vzdálenost Paříže ($48^\circ 50'$ s. š., $2^\circ 20'$ v. d.) a Brna ($49^\circ 12'$ s. š., $16^\circ 37'$ v. d.).

Řešení:

Daná města společně se severním pólem P_S tvoří sférický trojúhelník. Stranu PB tohoto trojúhelníka (označme ji x) vypočítáme pomocí kosinové věty pro stranu:

$$\cos x = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cdot \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1) \cdot \sin(90^\circ - \varphi_2) \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Dosazením $\varphi_1 = 48^\circ 50'$, $\varphi_2 = 49^\circ 12'$, $\lambda_1 = 2^\circ 20'$, $\lambda_2 = 16^\circ 37'$ dostáváme:

$$\cos x = \cos 41^\circ 10' \cdot \cos 40^\circ 48' + \sin 41^\circ 10' \cdot \sin 40^\circ 48' \cdot \cos 14^\circ 17'$$

$$\cos x = 0,7528 \cdot 0,757 + 0,6583 \cdot 0,6534 \cdot 0,9691$$

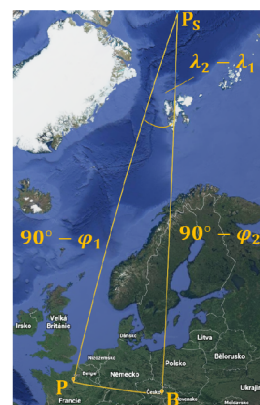
$$\cos x = 0,9867$$

$$x = 9^\circ 21' = 9,35^\circ.$$

Sférickou vzdálenost daných míst vynásobíme délkou 1° (viz rovnice (4.4)), a získáme:

$$d(B, P) = x \cdot 111,2 = 9,35 \cdot 111,2 \doteq \underline{1040 \text{ km}}.$$

Odpověď: Nejkratší vzdálenost mezi Brnem a Paříží je 1 040 km.



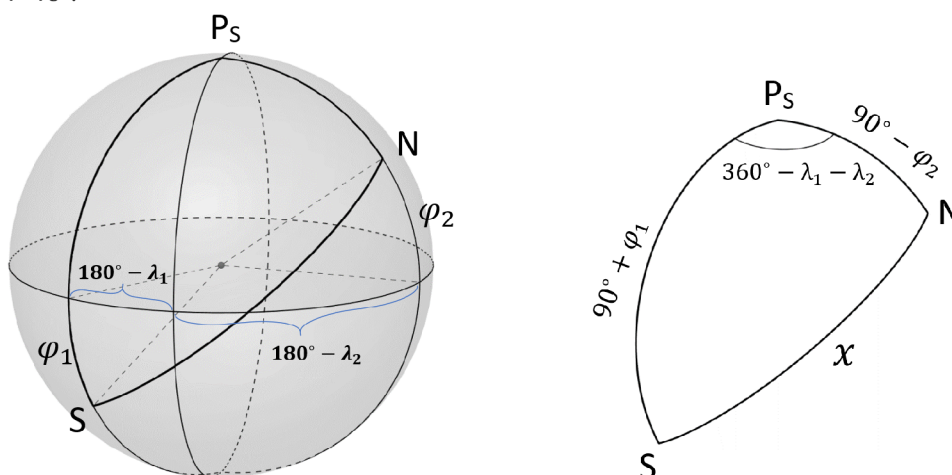
Obr. 4.7: Brno – Paříž

Příklad 4.4. Určete leteckou vzdálenost měst Sydney ($33^{\circ}51'$ j. š., $151^{\circ}13'$ v. d.) a New York ($40^{\circ}43'$ s. š., $73^{\circ}59'$ z. d.).

Řešení:

Daná města společně se severním pólem P_S tvoří sférický trojúhelník, jehož jednu stranu $SN = x$ máme vypočítat.

Označme $\varphi_1 = 33^{\circ}51'$, $\varphi_2 = 40^{\circ}43'$, $\lambda_1 = 151^{\circ}13'$, $\lambda_2 = 73^{\circ}59'$. Strana $P_S S$ má délku $90^{\circ} + \varphi_1 = 90^{\circ} + 33^{\circ}51' = 123^{\circ}51'$ a strana $P_S N$ má délku $90^{\circ} - \varphi_2 = 90^{\circ} - 40^{\circ}43' = 49^{\circ}17'$. Úhel při vrcholu P_S je roven $360^{\circ} - \lambda_1 - \lambda_2 = 360^{\circ} - 151^{\circ}13' - 73^{\circ}59' = 134^{\circ}48'$.



Obr. 4.8: Sférický trojúhelník $P_S S N$

Velikost x vypočítáme pomocí kosinové věty pro stranu:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos 123^{\circ}51' \cdot \cos 49^{\circ}17' + \sin 123^{\circ}51' \cdot \sin 49^{\circ}17' \cdot \cos 134^{\circ}48' \\ \cos x &= 0,6523 \cdot (-0,557) + 0,7579 \cdot 0,8305 \cdot (-0,7046) \\ \cos x &= -0,8068 \\ x &= 143^{\circ}47' = 143,78^{\circ}. \end{aligned}$$

Sférickou vzdálenost daných míst vynásobíme délkou 1° (viz rovnice (4.4)) a získáme:

$$d(S, N) = x \cdot 111,2 = 143,78 \cdot 111,2 \doteq \underline{\underline{15988 \text{ km}}}.$$

Odpověď: Vzdálenost mezi Sydney a New Yorkem je přibližně 15 988 km.

Poznámka: V geografické praxi je konvenčním zvykem při výpočtech udávat kladné hodnoty úhlů pro severní šířky a východní délky, a záporné hodnoty úhlů pro jižní šířky a západní délky. Tímto se postup výpočtu mírně zjednodušuje, neboť není třeba až tak přemýšlet nad polohou daných míst a do vzorce (4.5) stačí pouze správně dosadit kladné nebo záporné hodnoty úhlů.

Pozor je třeba dát pouze u výpočtu úhlu $\Delta\lambda$, který často tímto způsobem vychází větší než 180° a tedy neodpovídá úhlu v daném sférickém trojúhelníku. Správná hodnota úhlu u vrcholu P_S je v tomto případě $360^{\circ} - |\Delta\lambda|$. Při výpočtu vzdáleností, kde se používá funkce

kosinus nám to však nevdá, neboť hodnota cos je pro oba úhly shodná. Pro jiné výpočty je však třeba mít toto na paměti a počítat s příslušným úhlem menším než 180°.

V každém případě je vhodné mít představu, jak reálně vypadá trojúhelník, ve kterém počítáme.

Ukažme si ještě jednou postup výpočtu s tímto poznatkem. Do kosinové věty pro stranu x budeme dosazovat za $\varphi_1 = -33^\circ 51'$, $\varphi_2 = 40^\circ 43'$, $\lambda_1 = 151^\circ 13'$, $\lambda_2 = -73^\circ 59'$:

$$\cos x = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cdot \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1) \cdot \sin(90^\circ - \varphi_2) \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\cos x = \cos(90^\circ - (-33^\circ 51')) \cdot \cos(90^\circ - 40^\circ 43') +$$

$$+ \sin(90^\circ - (-33^\circ 51')) \cdot \sin(90^\circ - 40^\circ 43') \cdot \cos(151^\circ 13' - (-73^\circ 59'))$$

$$\cos x = \cos 123^\circ 51' \cdot \cos 49^\circ 17' + \sin 123^\circ 51' \cdot \sin 49^\circ 17' \cdot \cos 225^\circ 12'$$

⋮

$$x = 143^\circ 47' \quad \text{a dále viz předchozí postup.}$$

Příklad 4.5. Skupina dobrodružných vědců se vydává lodí nejkratší cestou z Tokia ($35^\circ 40'$ s. š., $139^\circ 45'$ v. d.) do výzkumné stanice na Antarktidě ($63^\circ 48'$ j. š., $57^\circ 53'$ z. d.). Jak dlouho jim potrvá plavba, pluje-li loď průměrnou rychlostí 15 námořních mil¹ za hodinu? (1 NM = 1852 m)

Řešení²:

Nejkratší cestu z Tokia (T) na antarktickou výzkumnou stanici (A) vypočítáme jako délku ortodromy mezi těmito místy. Opět využijeme sférický trojúhelník, jehož vrcholy tvoří daná místa a severní pól P_S .

Velikost strany TA = x trojúhelníka vypočítáme pomocí kosinové věty pro stranu:

$$\cos x = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cdot \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1) \cdot \sin(90^\circ - \varphi_2) \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Dosažením $\varphi_1 = 35^\circ 40'$, $\varphi_2 = -63^\circ 48'$, $\lambda_1 = 139^\circ 45'$, $\lambda_2 = -57^\circ 53'$ dostáváme:

$$\cos x = \cos 54^\circ 20' \cdot \cos 153^\circ 48' + \sin 54^\circ 20' \cdot \sin 153^\circ 48' \cdot \cos(-197^\circ 38')$$

$$\cos x = 0,5831 \cdot (-0,8973) + 0,8124 \cdot 0,4415 \cdot (-0,953)$$

$$\cos x = -0,865$$

$$x = 149^\circ 53' = 149,89^\circ.$$

Potom vzdálenost daných míst:

$$d(T, A) = x \cdot 111,2 = 149,89 \cdot 111,2 \doteq \underline{\underline{16668 \text{ km}}}.$$

Abychom určili, jak dlouho loď popluje, vydělíme vzdálenost míst průměrnou rychlostí lodi, přičemž rychlost lodi je $15 \text{ NM/h} = 15 \cdot 1852 \text{ m/h} = 27780 \text{ m/h} = 27,78 \text{ km/h}$:

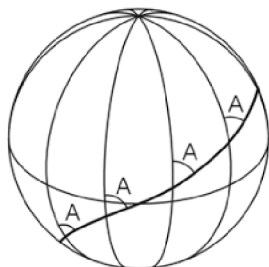
$$\frac{16668}{27,78} = 600 \text{ h} = \underline{\underline{25 \text{ dní}}}.$$

Odpověď: Plavba lodí z Tokia na antarktickou výzkumnou stanici potrvá 25 dní.

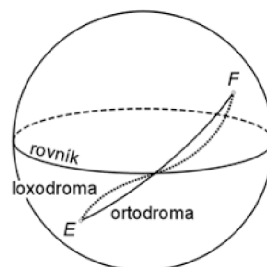
¹Námořní míle (NM) je jednotka délky používaná převážně v námořní a letecké dopravě. 1 NM je rovna délce oblouku hlavní kružnice na zemském povrchu, jehož středový úhel je 1'. 1 NM = 1852 m.

²Při výpočtu využijeme poznámku z předchozího příkladu (4.4).

Příklad 4.6. Jak dlouho by vědcům trvala plavba v příkladu 4.5, kdyby tuto cestu absolvovali ve středověku, kdy se lodě neplavily po ortodromách, ale po loxodromách³?



Obr. 4.9: Loxodroma



Obr. 4.10: Vztah ortodromy a loxodromy

Řešení:

Odvození vzorců pro výpočet délky loxodromy vyžaduje znalosti nad rámec těch středškolských, proto si je nyní uvedeme bez důkazu.

Pro délku l_{AB} loxodromy mezi místy A a B platí vztah

$$l_{AB} = \frac{r_z \cdot |(\varphi_2 - \varphi_1)^\circ|}{\cos A} \cdot \frac{\pi}{180^\circ},$$

pro který nejprve potřebujeme určit azimut A (úhel, který v každém bodě svírá loxodroma s místním poledníkem) z rovnice

$$\operatorname{tg} A = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot M}{\log \left[\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_2}{2} + 45^\circ \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_1}{2} + 45^\circ \right)} \right]} \cdot \frac{\pi}{180^\circ},$$

kde $M = 0,434$ je konstanta vycházející z integrace při odvozování vztahu.

Pokud $(\lambda_2 - \lambda_1) > 180^\circ$, je potřeba v rovnici místo úhlu $(\lambda_2 - \lambda_1)$ použít úhel $360^\circ - |\lambda_2 - \lambda_1|$, který svírají místní poledníky a je menší než 180° .⁴

Pro místa T a A tedy nejprve určíme azimut dosažením hodnot z předchozího příkladu:

$$\varphi_1 = 35^\circ 40', \quad \varphi_2 = -63^\circ 48', \quad \lambda_1 = 139^\circ 45', \quad \lambda_2 = -57^\circ 53',$$

kde namísto $\lambda_2 - \lambda_1 = -57^\circ 53' - 139^\circ 45' = -197^\circ 38'$ použijeme úhel $360^\circ - |\lambda_2 - \lambda_1| = 360^\circ - 197^\circ 38' = 162^\circ 22'$. Je potom:

$$\operatorname{tg} A = \frac{162^\circ 22' \cdot 0,434}{\log \left[\frac{\operatorname{tg} 13^\circ 6'}{\operatorname{tg} 62^\circ 50'} \right]} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{70,4671}{\log(0,1194)} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = -1,332, \quad \text{odkud}$$

$$A = -53^\circ 6'.$$

³Ačkoli loxodroma není nejkratší spojnicí dvou bodů na sféře, resp. na zemském povrchu, byly loxodromické cesty pro svou jednoduchost v minulosti využívány při námořní plavbě i v letecké navigaci. Jejich význam klesl díky rozvoji moderních navigačních systémů (GPS apod.).

⁴viz poznámka u příkladu 4.4

Pro délku loxodromy mezi Tokiem a antarktickou výzkumnou stanicí pak platí:

$$l_{TA} = \frac{6371 \cdot 99^{\circ}28'}{\cos -53^{\circ}6'} \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{633702,13}{0,6004} \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}} \doteq \underline{18421 \text{ km.}}$$

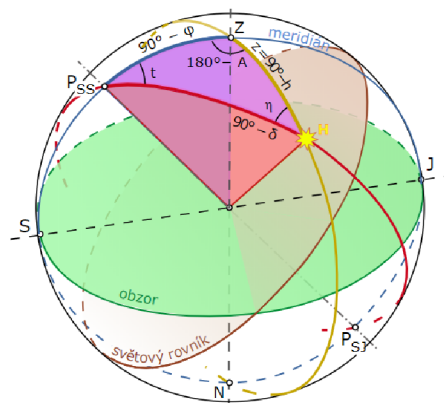
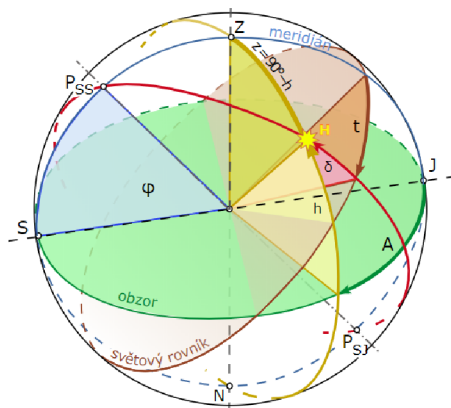
Délka plavby po loxodromě by potom trvala:

$$\frac{18421}{27,78} = 663,1 \text{ h} \doteq \underline{27,6 \text{ dní.}}$$

Odpověď: Loxodroma je mezi danými místy o 1 753 km delší než ortodroma, plavba po ní by tedy trvala přibližně o 2 a půl dne déle.

4.4 Souřadnice obzorníkové a rovníkové

Podobně jako polohu místa na zeměkouli určujeme zeměpisnými souřadnicemi, polohu objektů na nebeské sféře určujeme pomocí souřadnic obzorníkových nebo rovníkových (jejich definice v části 4.1).



Obr. 4.11: Obzorníkové a rovníkové souřadnice Obr. 4.12: Nautický trojúhelník

Pro výpočty na nebeské sféře je důležitý sférický trojúhelník, který nazýváme *nautický trojúhelník* (vybarven fialově na obr. 4.12). Jeho vrcholy jsou severní světový pól P_{SS} , zenit Z pozorovacího místa se zeměpisnou šířkou φ a hvězda H (resp. objekt na nebeské sféře).

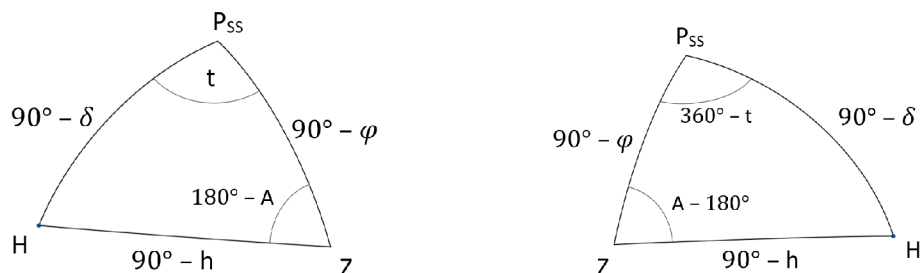
Strana $P_{SS}Z$ trojúhelníka je rovna $90^{\circ} - \varphi$ (neboť výška pólu P_{SS} nad obzorem je rovna zeměpisné šířce φ), strana ZH má velikost $90^{\circ} - h$ (neboť je rovna zenitové vzdálenosti hvězdy H) a strana $P_{SS}H$ je $90^{\circ} - \delta$ (neboť sférická vzdálenost pólu P_{SS} od světového rovníku je 90° a sférická vzdálenost hvězdy H od světového rovníku je rovna deklinaci δ) – viz také obr. 4.11.

Úhly nautického trojúhelníka souvisí s hodinovým úhlem t a azimutem A . Vzhledem k tomu, že se oba měří od 0° do 360° , budeme rozlišovat dva případy (obr. 4.13):

Je-li hvězda H na západní polovině nebeské sféry, odpovídá úhel při vrcholu P_{SS} hodinovému úhlu t a úhel při vrcholu Z je roven doplňku azimutu A do 180° , tedy $180^{\circ} - A$.

Je-li hvězda H na východní polovině nebeské sféry, potom je úhel při vrcholu P_{SS} roven $360^\circ - t$ a úhel při vrcholu Z má velikost $A - 180^\circ$.

Úhel při vrcholu H, označený na obr. 4.12 jako η , je tzv. paralaktický úhel, který však při většině praktických výpočtů není potřeba, proto se jím nebudeme dále zabývat.



Obr. 4.13: Nautický trojúhelník pro hvězdu na západě a na východě

Jestliže jsou dány tři z úhlů φ , A , h , t , δ , potom lze zbývající dva úhly z nautického trojúhelníka dopočítat. Zejména pak můžeme z obzorníkových souřadnic hvězdy (resp. objektu na nebeské sféře) vypočítat její souřadnice rovníkové a naopak.

Příklad 4.7. Z pozorovacího místa o zeměpisné šířce φ byl změřen azimut A a výška h hvězdy. Určete hodinový úhel t a deklinaci δ hvězdy.

Řešení:

Výpočet provedeme na základě nautického trojúhelníka, pro případ, kdy $0^\circ \leq A \leq 180^\circ$, tedy kdy se hvězda nachází na západní polovině nebeské sféry. Nautický trojúhelník je v tomto případě jednoznačně určen dvěma stranami ($90^\circ - \varphi$ a $90^\circ - h$) a úhlem, který spolu svírají ($180^\circ - A$).

Deklinaci δ určíme z kosinové věty pro stranu $90^\circ - \delta$

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - h) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - h) \cdot \cos(180^\circ - A),$$

kteřou lze, pomocí vzorců (3.2), přepsat ve tvaru

$$\sin \delta = \sin \varphi \cdot \sin h - \cos \varphi \cdot \cos h \cdot \cos A.$$

Hodinový úhel t můžeme dopočítat ze sinové věty:

$$\frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(180^\circ - A)} = \frac{\sin(90^\circ - h)}{\sin t},$$

kteřou opět využitím vzorců (3.2) vyjádříme jako

$$\frac{\cos \delta}{\sin A} = \frac{\cos h}{\sin t} \quad \text{odkud} \quad \sin t = \frac{\cos h \cdot \sin A}{\cos \delta}.$$

Dostali jsme tak vztahy pro „převod“ obzorníkových souřadnic na souřadnice rovníkové.

Příklad 4.8. Je znám hodinový úhel t a deklinace hvězdy δ . Určete její azimut A a výšku h v pozorovacím místě o zeměpisné šířce φ .

Řešení:

Při výpočtu opět vyjdeme z nautického trojúhelníka pro případ, kdy se hvězda nachází na západní polovině nebeské sféry, tedy kdy $0^\circ \leq t \leq 180^\circ$. Trojúhelník je v tomto případě opět jednoznačně určen dvěma stranami ($90^\circ - \varphi$ a $90^\circ - \delta$) a úhlem, který spolu svírají (t). Výšku hvězdy h určíme z kosinové věty pro stranu $90^\circ - h$

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos(t)$$

kteřou lze, pomocí vzorců (3.2), vyjádřit ve tvaru

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t.$$

Azimut A lze vypočítat ze sinové věty:

$$\frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(180^\circ - A)} = \frac{\sin(90^\circ - h)}{\sin t},$$

odkud úpravou jako v předchozím příkladě vyjádříme

$$\sin A = \frac{\cos \delta \cdot \sin t}{\cos h}.$$

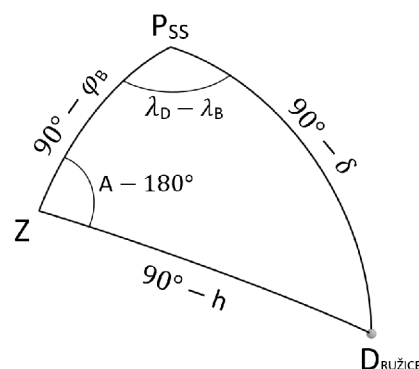
Dostali jsme tak vztahy pro „převod“ rovníkových souřadnic na souřadnice obzorníkové.

Příklad 4.9. Jedna z nejpoužívanějších družic pro satelitní vysílání v ČR, družice Astra 3, je umístěna nad rovníkem na poledníku $23,5^\circ$ v. d. ve výšce zhruba 36 000 km od povrchu Země. Jakým směrem je třeba nastavit v Brně ($49,2^\circ$ s. š., $16,6^\circ$ v. d.) satelitní anténu na její příjem?

Řešení:

Určit nasměrování satelitní antény znamená zjistit, o kolik stupňů ji musíme zvednout oproti vodorovné rovině a o kolik stupňů ji otočit k východu nebo západu vzhledem k jižnímu či severnímu směru. Družice Astra 3 v tomto případě tedy nahrazuje hvězdu H a naším úkolem je zjistit její obzorníkové souřadnice – výšku nad obzorem (h) a azimut (A).

Vyjdeme z nautického trojúhelníka pro hvězdu na východní polokouli. Jelikož je družice umístěna nad rovníkem, její deklinace je nulová, $\delta = 0^\circ$. Strana $P_{SS}D$ je pak $90^\circ - \delta = 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$. Úhel při severním světovém pólu P_{SS} je roven rozdílu zeměpisných délek mezi družicí a místem příjmu (Brnem), tj. $360^\circ - t = \lambda_D - \lambda_B = 23,5^\circ - 16,6^\circ = 6,9^\circ$. Strana $P_{SS}Z$ nautického trojúhelníka je rovna $90^\circ - \varphi_B = 90^\circ - 49,2^\circ = 40,8^\circ$. Strana ZD má velikost $90^\circ - h$, odkud potřebujeme vypočíst výšku h . Dále vzhledem



Obr. 4.14: Nautický trojúhelník – družice Astra 3

k tomu, že bychom v reálu pravděpodobně měřili azimut pomocí buzoly, budeme počítat s azimutem topografickým (tj. měříme od severního bodu obzoru). Pak je v našem trojúhelníku úhel při zenitu Z roven hledanému azimutu A.

Výpočet odpovídá převodu rovníkových souřadnic na obzorníkové, a tedy můžeme postupovat podle příkladu 4.8. Známe dvě strany sférického trojúhelníka a úhel, který svírají. Nejprve tedy dopočítáme zbývající stranu trojúhelníka (tj. zjistíme výšku družice nad obzorem h) z kosinové věty pro stranu:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi_B) \cdot \cos 90^\circ + \sin(90^\circ - \varphi_B) \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos(\lambda_D - \lambda_B)$$

odkud použitím vzorců 3.2

$$\sin h = \sin \varphi_B \cdot \underbrace{\cos 90^\circ}_0 + \cos \varphi_B \cdot \underbrace{\sin 90^\circ}_1 \cdot \cos(\lambda_D - \lambda_B)$$

$$\sin h = \cos \varphi_B \cdot \cos(\lambda_D - \lambda_B)$$

$$\sin h = \cos 49,2^\circ \cdot \cos 6,9^\circ$$

$$\sin h = 0,6534 \cdot 0,9928$$

$$\sin h = 0,6487$$

$$h \doteq \underline{\underline{40,4^\circ}}.$$

Azimut A dopočítáme ze sinové věty:

$$\frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin A} = \frac{\sin(90^\circ - h)}{\sin(360^\circ - t)}$$

odkud úpravou a použitím vzorců 3.2

$$\sin A = \frac{\sin 90^\circ \cdot \sin(\lambda_D - \lambda_B)}{\cosh}$$

$$\sin A = \frac{1 \cdot \sin 6,9^\circ}{\cos 40,4^\circ}$$

$$\sin A = \frac{0,1201}{0,7615}$$

$$\sin A = 0,1577$$

$$A \doteq \underline{\underline{171^\circ}}.$$

Poznámka: Při výpočtu úhlu z funkce sinus dostáváme v intervalu od 0° do 180° dvě možná řešení. Je třeba vždy jako řešení vybrat to, které odpovídá vlastnostem sférických trojúhelníků a také logicky možným řešením daného příkladu. Např. pro $\sin A = 0,1577$ jsou řešeními úhly $A = 9^\circ$ a $A = 171^\circ$. V daném sférickém trojúhelníku leží úhel A oproti největší straně, proto musí být největším vnitřním úhlem (což by teoreticky mohlo platit i pro $A = 9^\circ$). Zároveň však musí být součet vnitřních úhlů větší než 180° , což lze splnit jedině volbou $A = 171^\circ$. Navíc poloha družice vzhledem k Brnu je přibližně JV směrem, proto hodnota azimutu A musí být od 90° do 180° .⁵

Odpověď: Satelitní anténu v Brně je třeba naklonit přibližně o $40,4^\circ$ vzhůru od vodorovné roviny (obzoru) a vytočit o úhel 171° od severního bodu obzoru ve směru k východu.

⁵Pro topografický azimut je sever = 0° , východ = 90° , jih = 180° , západ = 270° .

Příklad 4.10. Jak se změní nastavení satelitní antény na příjem vysílání z družice Astra 3 z předchozího příkladu (4.9), budeme-li ji nastavovat v Praze (50° s. š., $14,5^\circ$ v. d.)? A jak tomu bude v Ostravě ($49,8^\circ$ s. š., $18,25^\circ$ v. d.)?

Řešení:

Postup výpočtu je shodný s předchozím příkladem, pouze se změní rozměry sférického trojúhelníka, ve kterém počítáme.

Pro Prahu bude úhel při severním světovém pólu P_{SS} opět roven rozdílu zeměpisných délek družice a místa příjmu, tj. $\lambda_D - \lambda_P = 23,5^\circ - 14,5^\circ = 9^\circ$. Strana $P_{SS}Z$ je v tomto případě rovna $90^\circ - \varphi_P = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. Pozice družice se nezměnila, proto deklinace $\delta = 0^\circ$ a strana $P_{SS}D$ má velikost 90° . Potřebujeme vypočítat výšku h (ze strany $ZD = 90^\circ - h$) a azimut A (tj. úhel při zenitu Z).

Pro výšku h v Praze platí:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - h) &= \cos(90^\circ - \varphi_P) \cdot \cos 90^\circ + \sin(90^\circ - \varphi_B) \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos(\lambda_D - \lambda_B) \\ \sin h &= \cos \varphi_B \cdot \cos(\lambda_D - \lambda_B) \\ \sin h &= \cos 50^\circ \cdot \cos 9^\circ \\ \sin h &= 0,6349 \\ h &\doteq \underline{\underline{39,4^\circ}}.\end{aligned}$$

Azimut je potom:

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{\sin(\lambda_D - \lambda_P)}{\cosh} \\ \sin A &= \frac{\sin 9^\circ}{\cos 39,4^\circ} \\ \sin A &= 0,2024 \\ A &\doteq \underline{\underline{168^\circ}}.\end{aligned}$$

Pro Ostravu dostaneme úhel při P_{SS} roven $\lambda_D - \lambda_O = 23,5^\circ - 18,25^\circ = 5,25^\circ$. Strana $P_{SS}Z$ je $90^\circ - \varphi_O = 90^\circ - 49,8^\circ = 40,2^\circ$. Deklinace je opět $\delta = 0^\circ$, tedy strana $P_{SS}D$ má velikost 90° . Potřebujeme opět vypočítat výšku h (ze strany $ZD = 90^\circ - h$) a azimut A (tj. úhel při zenitu Z).

V Ostravě platí pro výšku h :

$$\begin{aligned}\sin h &= \cos \varphi_O \cdot \cos(\lambda_D - \lambda_O) \\ \sin h &= \cos 49,8^\circ \cdot \cos 5,25^\circ \\ \sin h &= 0,6427 \\ h &\doteq \underline{\underline{40^\circ}}.\end{aligned}$$

Azimut je potom:

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{\sin(\lambda_D - \lambda_O)}{\cosh} \\ \sin A &= \frac{\sin 5,25^\circ}{\cos 40^\circ} \\ \sin A &= 0,1194 \\ A &\doteq \underline{\underline{173^\circ}}.\end{aligned}$$

Odpověď: Satelitní anténu v Praze je třeba naklonit přibližně o $39,4^\circ$ vzhůru od vodorovné roviny (obzoru) a vytočit o úhel 168° od severního bodu obzoru ve směru k východu. Pro anténu v Ostravě je to přibližně o 40° vzhůru od obzoru pod azimutem 173° .

Na výsledcích předchozích dvou příkladů si můžeme všimnout, že změna sklonu a úhlu otočení antény je úměrná rozdílu zeměpisných šířek a délek jednotlivých míst příjmu. Velmi málo se měnil sklon antény vůči vodorovné rovině, jelikož zeměpisná šířka srovnávaných pozorovacích míst je také různá jen v rámci necelého 1° . Vzdálenost daných míst ve směru východ–západ je o něco větší, proto i hodnota azimutu se v jednotlivých místech více liší.

Závěr

Cílem práce bylo vytvořit studijní text k tématu sférická geometrie. Celý text je psán pro čtenáře, kteří mají jen středoškolské znalosti matematiky. Tomu odpovídá i výběr obsahu práce a způsob formulací daných poznatků. Je zde podán přehled základních pojmů sférické geometrie a nejdůležitějších pouček sférické trigonometrie. Uvedli jsme si obecná řešení sférických trojúhelníků pro čtyři základní zadání, tedy jak pomocí daných prvků sférického trojúhelníka určit prvky zbývající. V poslední kapitole jsme si ukázali praktické využití poznatků sférické geometrie na reálných příkladech. Další praktické řešené i neřešené příklady k procvičení mohou zájemci nalézt např. v [8] nebo [7].

Veškeré nepřevzaté obrázky v práci jsou vytvořeny v online verzi programu Geogebra – 3D Grafy.

Práce může být oporou při studiu např. pro vysokoškolské studenty geografie, ale také výukovým textem pro ty čtenáře, kteří mají zájem rozšířit své (nejen matematické) obzory i o znalosti, které se běžně na středních školách neučí, avšak je možné je se znalostmi středoškolské matematiky zvládnout a mají své uplatnění i v praktickém životě.

Seznam použité literatury

- [1] BÉMOVÁ, K. *Výuka sférické geometrie na počítači*. [online]. Praha, 2007 [cit. 2019-10-15]. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/20.500.11956/10360>. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta.
- [2] BURIANOVÁ, J. *Orientace na nebeské sféře*. [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2015. [cit. 2019-11-25]. Dostupné z: https://is.muni.cz/auth/e1/1431/podzim2018/Z0135p/um/nebeska_sfera/index.html. Multimediální elektronický výukový materiál. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta.
- [3] DVOŘÁKOVÁ, H., DOUCHOVÁ V. *Sférická trigonometrie v kartografii a astronomii*. [online]. Praha, 2002 [cit. 2019-04-11]. Dostupné z: <http://gcvut.wz.cz/skola/2sem/kogg/kogg-sfer.trig.03.doc>.
- [4] HLOŽEK, M. *Sférická geometrie*. [online]. Plzeň, 2005 [cit. 2019-10-02]. Dostupné z: <https://docplayer.cz/22505426-Zapadoceska-univerzita-v-plzni.html>. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Pedagogická fakulta.
- [5] KRŮŽOVÁ, Kristýna. *Neeuklidovská geometrie* [online]. Brno, 2008 [cit. 2019-10-08]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/auth/th/km44m/>. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta.
- [6] KRŮŽOVÁ, Kristýna. *Neeuklidovská geometrie* [online]. Brno, 2010 [cit. 2019-10-08]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/c993q>. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta.
- [7] KŮST, J. *Sférická trigonometrie*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1964. Matematická knižnice, edice Na pomoc učiteli.
- [8] MAŠKA, O. *Řešené úlohy z matematiky: stereometrie, trigonometrie, analytická geometrie*. Praha: SNTL, 1959. Polytechnická knižnice (SNTL).
- [9] SMART, W. M., GREEN, R. M. *Textbook on Spherical Astronomy*. 6th ed. New York: Cambridge University Press, 1977. ISBN 0-521-21516-1.
- [10] VAN BRUMMELEN, G. *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry*. Oxford: Princeton University Press, 2013. ISBN 978-0-691-14892-2.
- [11] VINŠ, J. *Geometrie pro šestou třídu středních škol: (Vydání pro reálky): Trigonometrie rovinná a sférická*. Praha: Československá grafická Unie, 1913.

- [12] Spherical and elliptic geometries: an introduction. In: Youtube [online]. 01.04.2012 [cit. 2019-12-28]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=Sop6KXIX014>. Kanál uživatele Insights into Mathematics.
- [13] Spherical and elliptic geometries (cont.). In: Youtube [online]. 01.04.2012 [cit. 2019-12-28]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=tKPB7aeg4D0&t=308s>. Kanál uživatele Insights into Mathematics.

Seznam převzatých obrázků

- Obrázek 1.1 (str. 2) Euklides, zdroj: *commons.wikimedia.org*
- Obrázek 1.2 (str. 3) J. Napier, zdroj: *maa.org*
- Obrázek 1.3 (str. 4) L. Euler, zdroj: *aldebaran.cz*
- Obrázek 1.4 (str. 4) C. F. Gauss, zdroj: *omatematike.blog.cz*
- Obrázek 1.5 (str. 5) N. I. Lobačevskij, zdroj: *aldebaran.cz*
- Obrázek 1.6 (str. 5) J. Bolyai, zdroj: *cs.wikipedia.org*
- Obrázek 1.7 (str. 5) G. F. B. Riemann, zdroj: *cs.wikipedia.org*
- Obrázek 2.1 (str. 7) Kulová plocha, zdroj: [4]
- Obrázek 2.3 (str. 8) Délka s -úsečky, zdroj: [4]
- Obrázek 2.4 (str. 9) Sférický dvojúhelník, zdroj: [4]
- Obrázek 2.8 (str. 11) s -kružnice, zdroj: [4]
- Obrázek 3.2 (str. 15) Odvození – sinová věta, zdroj (horní část): [9]
- Obrázek 4.2 (str. 28) Nebeská sféra – obzor, zdroj (pravá část): [2]
- Obrázek 4.3 (str. 29) Obzorníkové souřadnice, zdroj: [2]
- Obrázek 4.4 (str. 29) Rovníkové souřadnice, zdroj: [2]
- Obrázek 4.6 (str. 31) Výpočet vzdáleností na Zemi, upraveno dle: *geography.upol.cz*
- Obrázek 4.9 (str. 35) Loxodroma, zdroj: *geography.upol.cz*
- Obrázek 4.10 (str. 35) Vztah ortodromy a loxodromy, zdroj: *geography.upol.cz*
- Obrázek 4.11 (str. 36) Obzorníkové a rovníkové souřadnice, zdroj: [2]
- Obrázek 4.12 (str. 36) Nautický trojúhelník, zdroj: [2]