

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

MUNI

PED

Určitý a křivkový integrál a jeho aplikace

Bakalářská práce

Brno 2022

Vedoucí práce:

RNDr. Břetislav Fajmon Ph.D.

Autor práce:

Jan Kyselka

Bibliografický záznam

KYSELKA, Jan. Určitý a křivkový integrál a jeho aplikace. Brno, 2022. 511. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Fakulta pedagogická. Katedra matematiky. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Břetislav Fajmon, PhD.

Anotace

Bakalářská práce "Určitý a křivkový integrál a jeho aplikace" nejprve popisuje teoretické znalosti z oblasti určitého integrálu, dále jeho využití v geometrii i ve fyzice a přibližné metody výpočtu určitého integrálu. Těžištěm této práce je rozšíření znalostí o oblast křivkových integrálů I. a II. druhu a jejich aplikací. Práce obsahuje teoretické znalosti o problematice, aplikace těchto znalostí a řešené příklady.

Annotation

The bachelor thesis "Definite and Line Integral and its Applications" consists of two main parts. The first part describes theoretical knowledge about the definite integral, its uses in both geometry and physics, and approximate methods of computation of the definite integral. The second part expands on these topics by introducing the type I and II line integral and its applications. The thesis provides theoretical fundamentals, practical applications and solved exercises from the area of definite and line integrals.

Klíčová slova

určitý integrál, přibližné metody výpočtu určitého integrálu, křivka, křivkový integrál

Keywords

definite integral, approximate methods of computation of the definite integral, curve, line integral

Prohlášení

„Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně, s využitím pouze citovaných pramenů, dalších informací a zdrojů v souladu s Disciplinárním řádem pro studenty Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity a se zákonem č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů.“

V Brně dne: 20. 4. 2022

Jan Kyselka

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu práce RNDr. Břetislavu Fajmonovi, Ph.D. za jeho cenné rady, připomínky, ochotu a čas strávený nejen vedením mé bakalářské práce, ale i výukou volitelného předmětu Fyzikální motivace pro výuku matematiky, který byl pro psaní této práce velkou inspirací.

Obsah

1	Určitý integrál	7
1.1	Definice a výpočet určitého integrálu	7
1.2	Základní věty o integrálním počtu	11
2	Využití určitého integrálu	13
2.1	Využití určitého integrálu v geometrii	13
2.2	Fyzikální a další aplikace určitého integrálu	18
3	Přibližné metody výpočtu určitého integrálu	21
3.1	Obdélníková metoda	21
3.2	Lichoběžníková metoda	23
3.3	Metoda Simpsonova	24
4	Křivkový integrál 1. druhu a jeho využití	27
4.1	Křivky a parametrické vyjádření	27
4.2	Definice křivkového integrálu 1. druhu	31
4.3	Využití křivkového integrálu 1. druhu	35
5	Křivkový integrál 2. druhu a jeho využití	39
5.1	Orientace křivky	39
5.2	Definice křivkového integrálu 2. druhu	39
5.3	Využití křivkového integrálu 2. druhu	43

Úvod

Rád bych se v této práci věnoval určitému integrálu, křivkovým integrálům a jejich využití, protože integrály mi byly během mého vysokoškolského studia vždy blízké a také jsem na střední i základní škole měl kladný vztah k fyzice.

Cílem práce je shrnout problematiku určitého integrálu, který se vyučuje v matematické analýze, rozšířit ji o křivkový integrál 1. a 2. druhu a uvést využití těchto integrálů nejen v matematice, ale i ve fyzice. Z vlastní zkušenosti vím, že studenti matematickou problematiku nejlépe pochopí na příkladech, proto ve své práci uvedu pokud možno na každou problematiku příklady i s řešením tak, aby byly co nejlépe pochopitelné a aby čtenáři dokázali své znalosti aplikovat.

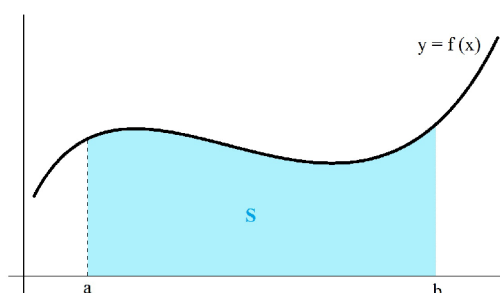
V kapitole 1 je uveden základní pojem určitý integrál a v kapitole 2 jeho využití v geometrii, fyzice a jiných oborech. Kapitola 3 ukazuje čtenáři přibližné metody výpočtu určitého integrálu, které jsou v některých případech potřeba použít.

Druhá část práce se zabývá křivkovými integrály. Kapitola 4 uvádí informace o křivkách a jejich parametrickém vyjádření, představuje křivkový integrál 1. druhu a jeho aplikace. V kapitole 5 je čtenář seznámen s křivkovým integrálem 2. druhu a jeho využitím.

1 Určitý integrál

V této kapitole se budeme nejprve věnovat problematice určitého integrálu. Na počátku si definujeme určitý Riemannův integrál podobně, jak bývá představen ve druhém ročníku v kurzu Matematická analýza 2, poté se zaměříme na některé vlastnosti určitého integrálu, které použijeme při jeho geometrickém i fyzikálním využití.

Motivace:



Obrázek 1.1: Obsah plochy pod křivkou

Řešíme problémovou situaci, kdy máme zadanou funkci $f(x)$ na libovolném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a naším úkolem je najít číslo, které je rovno obsahu plochy pod grafem této funkce. Jak za chvíli zjistíme, toto číslo se nazývá určitý integrál.

1.1 Definice a výpočet určitého integrálu

Integrální součty

Pro zjednodušení budeme uvažovat funkci omezenou na intervalu $\langle a, b \rangle$, protože nevlastním integrálům se v této práci věnovat nebudeme. Nyní zkusíme odhadnout plochu pod grafem tím způsobem, že vezmeme maximální hodnotu funkce na daném intervalu a vynásobíme délkou intervalu, tedy $b - a$. Snadno si můžeme povšimnout, že odhadovaná hodnota (obdélník) je vždy větší nebo v krajním případě rovna skutečnému obsahu pod křivkou. Pomocí minimální hodnoty funkce na intervalu můžeme stejným způsobem odhadnout plochu, která je vždy menší nebo rovna obsahu pod křivkou. Tyto naše odhady však nejsou moc přesné, ale jejich přesnost můžeme zvýšit, pokud náš in-

terval libovolně rozdělíme na více intervalů a budeme postupovat stejným způsobem v každém podintervalu. Proto provedeme dělení intervalu libovolnou konečnou posloupností, kde platí:

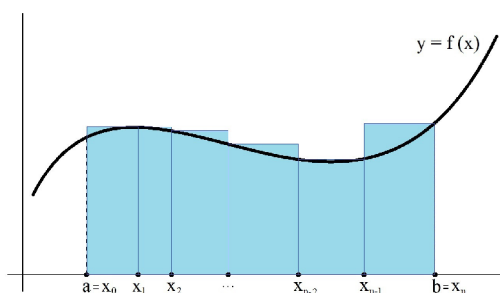
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

V každém podintervalu nalezneme maximum (minimum) a vynásobíme délkou každého podintervalu, čímž nám vzniknou obdélníčky, jejichž součtem získáme mnohem lepší odhad horní (dolní) hranice obsahu pod křivkou. Tento součet nazýváme horní integrální součet a obecně píšeme:

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

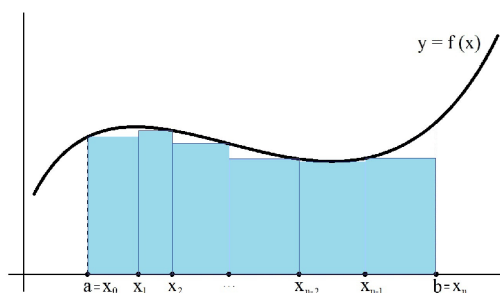
kde M_i je supremum hodnot $f(x)$ na podintervalu i -tém. Obdobně stanovíme dolní integrální součet jen s rozdílem, že budeme brát m_i jako infimum hodnot $f(x)$ na i -tém podintervalu

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$



Obrázek 1.2: Horní integrální součet

Z obrázků 1.2 a 1.3 je patrné, že skutečný obsah pod grafem je někde mezi těmito dvěma případy. Místo toho, abychom tyto hodnoty začali bezmyšlenkovitě průměrovat, tak se zkusíme zamyslet nad dělením, které jsme provedli na začátku. Naše dělení charakterizuje jedna důležitá vlastnost, které říkáme norma dělení $v(D)$. Jedná se o velikost největšího podintervalu ze všech, které jsme vytvořili naším dělením. Pokud budeme naše dělení do nekonečna zjemňovat takovým způsobem, že se norma dělení bude stále více a více blížit nule, zjistíme, že naše horní a dolní integrální součty se



Obrázek 1.3: Dolní integrální součet

také více a více přibližují jeden druhému. Zavedeme pojem integrální součet a můžeme snadno ověřit, že splňuje nerovnost $s(f, D) \leq \sigma(f, D) \leq S(f, D)$ lze je tedy oba nahradit jedním integrálním součtem:

$$\sigma(f, D) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \text{ kde } \xi_i \text{ je libovolný bod podintervalu } i\text{-tého.}$$

Protože existuje nekonečné množství, jakým lze interval $\langle a, b \rangle$ rozdělit, tak existuje i nekonečně mnoho integrálních součtů. Než si uvedeme definici určitého integrálu, zavedeme si nejprve definici limity těchto integrálních součtů.

Definice 1.1 Řekneme, že $L \in \mathbb{R}$ je limita integrálních součtů $\sigma(f, D)$ píšeme $\lim_{v(D) \rightarrow 0} \sigma(f, D) = L$, právě když pro každé libovolně malé $\epsilon > 0$ existuje dělení D_0 takové, že pro každé jeho zjemnění a pro jakoukoli volbu bodů ξ_i v jednotlivých podintervalech platí $|\sigma(f, D) - L| < \epsilon$.

S tímto základem již můžeme konečně definovat určitý integrál.

Definice 1.2 Riemannův určitý integrál

Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Ke každému dělení D uvažujeme integrální součet

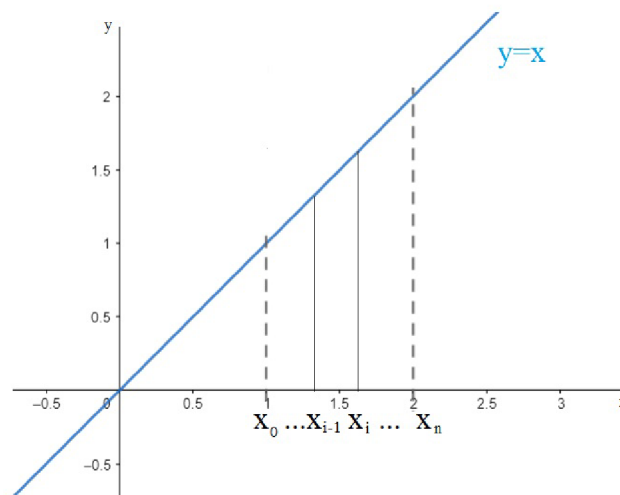
$$\sigma(f, D) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \text{ kde } \xi_i \text{ je libovolný bod podintervalu } i\text{-tého.}$$

Řekneme, že číslo L je Riemannovým určitým integrálem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$, právě když $\lim_{v(D) \rightarrow 0} \sigma(f, D) = L$. Budeme psát $\int_a^b f(x) dx = L$.

Ted' by se mohlo zdát, že máme vyhráno, ale počítání integrálů pomocí této definice není úplně běžný postup. Protože tato práce je zaměřena hlavně na praktické úlohy, tak si zde uvedeme alespoň jednoduchý příklad.

Příklad 1.1 Vypočtěte integrál z funkce $f(x) = x$ na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$.

Podle definice se snažíme interval rozdělit tak aby $v(D) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Takto nekonečné dělení ale nikdo z nás nezvládne. Proto si rozdělíme interval $\langle 1, 2 \rangle$ nejdříve jen na n podintervalů. Pro ulehčení toto dělení provedeme rovnoměrně. Velikost každého podintervalu tedy bude $\frac{1}{n}$.



Obrázek 1.4: Dělení intervalu

Snadno si uvědomíme, že u rostoucí funkce je největší hodnota M_i vždy rovna funkční hodnotě pravého krajního bodu podintervalů a naopak nejmenší hodnota m_i vždy rovna funkční hodnotě levého krajního bodu. Body dělení: $x_i = \frac{i}{n} + 1$, kde $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Z toho zjistíme, že $M_i = \frac{i}{n} + 1$ a $m_i = \frac{i-1}{n} + 1$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Nyní dosadíme do nerovnosti $s(f, D) \leq \sigma(f, D) \leq S(f, D)$ a upravíme

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n} + 1 \right) \cdot \frac{1}{n} \leq \sigma(f, D) \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} + 1 \right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1+n) \leq \sigma(f, D) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i+n).$$

Spočítat hodnotu sum na obou stranách není žádný problém. Pokud vytkneme n , které se zde vyskytuje právě n -krát a vzpomeneme si na výpočet součtu prvních k členů aritmetické posloupnosti, dostaneme následující výraz

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2} [0 + (n-1)] + \frac{n^2}{n^2} \leq \sigma(f, D) \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (1+n) + \frac{n^2}{n^2}.$$

Upravíme a nyní konečně rozdělíme na nekonečno dílků, tedy počítáme limitu $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} + 1 \leq \int_1^2 x dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} + 1$$

$$\frac{3}{2} \leq \int_1^2 x dx \leq \frac{3}{2}.$$

Ačkoli postup byl velice zdlouhavý, dopracovali jsme se k výsledku $\int_1^2 x dx = \frac{3}{2}$, který lze snadno geometricky potvrdit. Naštěstí pro nás existuje daleko rychlejší a efektivnější cesta jak se dopracovat výsledku. V následující větě se dozvíme, jak počítat určité integrály.

1.2 Základní věty o integrálním počtu

Věta 1.1 Newton-Leibnizova formule

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $I = \langle a, b \rangle$ a nechť $F(x)$ je libovolná funkce k ní primitivní. Pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Nyní se můžeme vrátit k příkladu 1.1 a zkusit úlohu vyřešit pomocí Newton-Leibnizovy formule

$$\int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

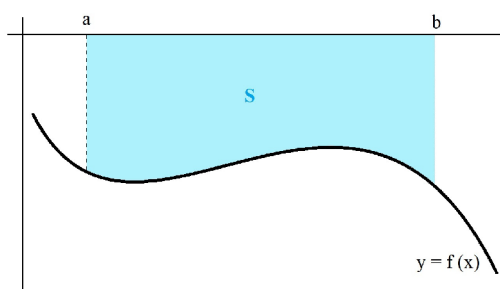
K výpočtům určitých integrálů budeme z důvodu praktičnosti používat zpravidla Newton-Leibnizovu formuli. Protože se tato práce zaměřuje především na praktické využití integrálů, tak se podíváme na věty, které nám pomohou s výpočet obsahu obrazce ohraničeného křivkami. Dosud jsme se setkali pouze s obsahem plochy pod grafem

nezáporné funkce. Teď se podíváme, jak vypočítat obsah plochy mezi osou x a funkcí zápornou. Integrál takové funkce je záporné číslo. Záporný obsah je však z geometrického hlediska holý nesmysl, proto si uvedeme následující větu.

Věta 1.2 Záporná funkce

Nechť je dána funkce $f(x)$ ve všech bodech uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$ záporná. Pak platí:

$$S = - \int_a^b f(x) dx.$$



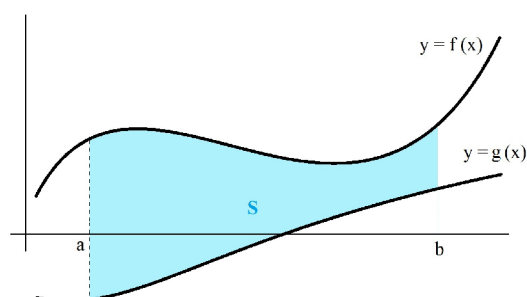
Obrázek 1.5: Záporná funkce

Věta 1.3 Obsah mezi dvěma křivkami

Nechť jsou dány funkce $f(x)$ a $g(x)$ definované na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť $\forall x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) \geq g(x)$, pak

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

S těmito poznatky můžeme odvodit všechny ostatní případy, kdy je funkce na části intervalu kladná a na části záporná a kdy neplatí podmínka, že jedna funkce má vždy větší či stejnou funkční hodnotu než funkce druhá. V případě výpočtu obsahu takových obrazců interval vhodně rozdělíme na takové podintervaly, ve kterých podle věty 1.2 a 1.3 dokážeme obsah snadno spočítat. Nyní by se mohlo zdát, že dokážeme vypočítat obsah jakéhokoli obrazce daného křivkami, ale opak je pravdou. Stále existují funkce, ke kterým nejsme schopni nalézt primitivní funkci tedy ani určit obsah pod křivkou. Příkladem této funkce může být $f(x) = e^{x^2}$. Obsah daný takovou funkcí můžeme ale určit přibližně. Tomu se budeme věnovat v kapitole 3.



Obrázek 1.6: Obsah mezi dvěma křivkami

2 Využití určitého integrálu

V této kapitole si ukážeme nejprve některá geometrická využití a následně i fyzikální a další aplikace určitého integrálu.

2.1 Využití určitého integrálu v geometrii

V této části se budeme věnovat obsahům, objemům rotačních těles a délce křivek. Ve všech těchto případech si dokážeme vystačit pouze s určitým integrálem, nebo alespoň tehdy, pokud dokážeme určitý integrál početně vyjádřit. Vše si ukážeme na příkladech.

Obsah rovinného obrazce

Podle definice a základních vět, které jsme si již představili dokážeme počítat obsahy obrazců jako obsah pod křivkou. Protože bychom nedokázali vyřešit velké množství integrálů pouze s představenými aparáty, ukážeme si substituční metodu a metodu per partes. Věty o substituci máme dvě ale ani ony ani metoda per partes nejsou cílem této práce, proto si je ukážeme jen prakticky v rámci některých výpočtů.

Příklad 2.1 *Vypočtěte obsah mezi křivkami $y = x \ln(x)$, $x = e$ a osou x .*

Hned na začátku úlohy je potřeba si uvědomit, jestli není část obsahu pod osou x a pokud ano, zda to ovlivní výpočet či nikoliv a najít meze, ve kterých budeme integrovat. Pravou mez určuje předpis $x = e$, levá mez je dána bodem $P [1, 0]$, který vznikl jako

průsečík osy x a grafu funkce $y = x \ln(x)$. V tomto případě je celý obsah nad osou x . Můžeme se dát do počítání

$$S = \int_1^e x \ln(x) dx.$$

Takový integrál vyřešíme metodou per partes. Funkci $y = x \ln(x)$ rozložíme na dvě funkce $u = \ln(x)$ a $v' = x$, první funkci derivujeme $u' = \frac{1}{x}$ a druhou integrujeme $v = \frac{x^2}{2}$. Vše složíme do tvaru $[uv'] - \int u'v dx$ v našich mezích. Nyní si už dokážeme s příkladem bez problémů poradit

$$S = \left[\ln(x) \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

Příklad 2.2 Vypočtete obsah, který vytvoří graf funkce $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$ ohraničený osou x na jedné své periodě.

Perioda funkce $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$ je 4π . Protože část leží pod osou x a část nad osou, musíme výpočet rozdělit do dvou integrálů. První od nuly do 2π , kde je obsah kladný a druhý od 2π do 4π , kde je obsah záporný, proto jej bereme se znaménkem mínus. Počítáme

$$S = \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx - \int_{2\pi}^{4\pi} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx.$$

Protože funkci $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$ zatím neumíme jen tak integrovat, provedeme substituci $\frac{1}{2}x = t$ a $\frac{1}{2}dx = dt$ v mezích $0 \rightarrow 0$ a $2\pi \rightarrow \pi$ pro první integrál a $2\pi \rightarrow \pi$, $4\pi \rightarrow 2\pi$ pro druhý. Můžeme pokračovat

$$S = 2 \int_0^{\pi} \sin(t) dt - 2 \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t) dt = 2[-\cos(t)]_0^{\pi} - 2[-\cos(t)]_{\pi}^{2\pi} = 2(1+1) - 2(-1-1) = 8.$$

Objem rotačního tělesa

V této části si odvodíme, jakým způsobem vypočítat objem tělesa, které vznikne rotací grafu funkce kolem jedné z os. Dále si odvodíme objemy významných těles, které vznikly rotací křivky. Odvození funguje na podobném principu jako definice určitého integrálu v kapitole 1, proto si ho už nebudeme popisovat tak podrobně. Popíšeme si pouze rotaci grafu funkce kolem osy x , ale stejným způsobem by šla dokázat i rotace kolem osy y .

Mějme zadánu spojitou omezenou funkci $f(x)$ na intervalu $I = \langle a, b \rangle$, jejíž graf rotuje kolem osy x . Pokud bychom celou funkci nahradili libovolnou konstantní funkcí $f(\xi)$ a tu nechali rotovat kolem osy x , vznikl by nám válec. Objem válce umíme spočítat podle vzorce $V = \pi r^2 v$. Do tohoto vzorce teď budeme zkoušet dosadit. Poloměr válce v našem případě určuje funkční hodnota ξ , a výška válce je délka intervalu $\langle a, b \rangle$. Objem bychom tedy vypočítali přibližně takto $V \doteq \pi \xi^2 (b - a)$. Nyní provedeme dělení intervalu libovolnou konečnou posloupností $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ na podintervaly. Na každém podintervalu naši funkci $f(x)$ nahradíme libovolnou funkcí konstantní procházející libovolným bodem funkce $f(x)$. To si v infinitezimálním počtu můžeme dovolit. Tím nám vzniknou obdélníčky, které rotují kolem osy x , tím tvoří válečky. Sečtením těchto válečků dostaneme daleko lepší odhad reálného objemu

$$V \doteq \sum_{i=1}^n \pi f(\xi_i)^2 (x_i - x_{i-1}).$$

Provedeme limitu $n \rightarrow \infty$, tím nám přejde suma v integrál, konstantní funkce na funkci $f(x)$ a $(x_i - x_{i-1})$ jako kousíček ve směru osy x . Objem se rovná přesně

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Nyní zkusíme vzoreček aplikovat na příkladech.

Příklad 2.3 *Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací funkce $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^2+1}$ kolem osy x na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.*

Dosadíme do vzorce:

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{2\sqrt{x}}{x^2+1} \right)^2 dx = \pi \int_0^2 \frac{4x}{(x^2+1)^2} dx,$$

provedeme substituci $x^2 + 1 = t$, $2x dx = dt$ v mezích $0 \rightarrow 1$ a $2 \rightarrow 5$ a dopočítáme

$$V = \pi \int_1^5 \frac{2}{t^2} dt = 2\pi \left[-\frac{1}{t} \right]_1^5 = 2\pi \left(-\frac{1}{5} + 1 \right) = \frac{8\pi}{5}.$$

Na dalším příkladě si vyzkoušíme vypočítat rotaci grafu funkce kolem osy y .

Příklad 2.4 *Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{x}$ definované na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ kolem osy y mezi funkcemi $y_1 = 1$ a $y_2 = 5$.*

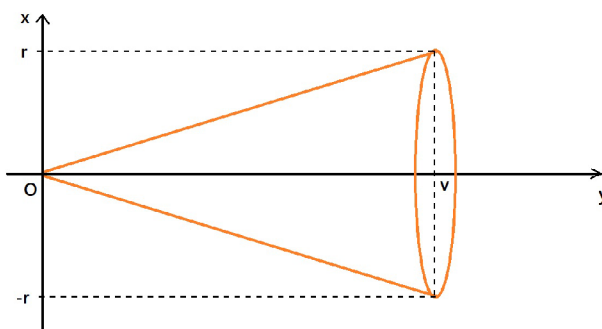
Příklad není až tak jednoduchý, jak by se mohlo na první pohled zdát. Integrací kolem osy y nemůžeme brát funkci $f(x)$ tak jak je zadaná, ale musíme najít funkci $f(y)$. Tu najdeme jako inverzní funkci k funkci $f(x)$. V našem případě je inverzní funkce větev paraboly $f(y) = y^2$ na kladné poloose y . Můžeme dosadit a počítat

$$V = \pi \int_1^5 y^4 dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_1^5 = \pi \left(\frac{5^5}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi 3124}{5}.$$

Ted' si ukážeme dva příklady s jejichž výsledkem se každý z nás už určitě někdy setkal a které si s trochou nadsázky už nebudeme muset pamatovat, jak tomu bylo od základní školy, protože si je dokážeme vždy znovu odvodit. Budeme odvozovat objem rotačních těles. Díky těmto příkladům nám také bude zodpovězena otázka zvědavých studentů, kde se vlastně ty vzorečky vzaly.

Příklad 2.5 *Odvod'te vzorec pro výpočet objemu kužele.*

Kužel si musíme vhodně umístit do souřadnicového systému. Existuje hned několik vhodných variant. My ho položíme středem, kudy prochází výška, na osu x tak, aby vrchol kužele byl v počátku. Kužel vznikne rotací přímky kolem osy x . Je důležité si najít a správně pojmenovat ty vhodné body, proto si pro představu kužel nakreslíme.



Obrázek 2.7: Rotační kužel

Pomocí dvou bodů dokážeme určit předpis přímky $y = \frac{r}{v}x$. Výška kužele nám udává meze od 0 do v . Můžeme dosazovat

$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v}\right)^2 x^2 dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \pi \frac{r^2}{v^2} \frac{v^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 v.$$

Příklad 2.6 *Odvod'te vzorec pro výpočet objemu koule.*

Tento příklad je pro představivost daleko jednodušší, stačí kouli umístit do středu soustavy souřadnic. Poloměr koule r nám udává meze na obě strany. Koule vzniká rotací kružnice kolem osy x . Kružnici můžeme zapsat rovnicí $x^2 + y^2 = r^2$, z toho $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Máme vše potřebné pro sestavení integrálu

$$V = \pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Délka křivky

V této části si odvodíme výpočet délky křivky. Opět budeme postupovat podobným způsobem jako u definice určitého integrálu.

Mějme funkci $f(x)$ se spojitou derivací na intervalu $I = \langle a, b \rangle$. Přibližnou délku křivky bychom získali, pokud bychom celou křivku nahradili úsečkou danou krajními body $f(a)$ a $f(b)$ a změřili její velikost. Pro lepší odhad rozdělíme interval I libovolnou posloupností $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ na podintervaly, na nichž provedeme tu stejnou myšlenku. Zaměříme se na podinterval i , kde mají krajní body souřadnice $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ a $[x_i, f(x_i)]$. Z tohoto vyjádření buď pomocí Pythagorovy věty nebo analytické geometrie vyjádříme velikost úsečky jako $\sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2}$. Když sečteme tyto úsečky dostaneme přesnější odhad, který následně upravíme

$$\begin{aligned} d &\doteq \sum_{i=1}^n \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(x_i - x_{i-1})^2}} (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

V limitním počtu $n \rightarrow \infty$ nám přejde suma na integrál, $(x_i - x_{i-1})$ na kousíček ve směru osy x a limita $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$ je derivace funkce $f(x)$. Dosadíme a napíšeme

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Vzorec vyzkoušíme na příkladu.

Příklad 2.7 Vypočítejte délku křivky $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln(x)}{2}$ na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$.

Máme už vše potřebné a mohli bychom ihned dosadit do vzorce, avšak pro větší přehlednost je lepší úpravy udělat postupně. Začneme derivací $y' = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2-1}{2x}$, kterou převedeme na společný jmenovatel. Tento tvar umocníme $\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2 = \frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2}$. K druhé mocnině derivace přičteme jedničku a upravíme na společný jmenovatel:

$$\frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2} + 1 = \frac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2}{(2x)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(2x)^2} = \frac{(x^2+1)^2}{(2x)^2}.$$

Zbývá odmocnit a integrovat

$$d = \int_1^2 \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(2x)^2}} dx = \int_1^2 \frac{x^2+1}{2x} dx.$$

Provedeme malý trik a zlomek rozdělíme na dvě části. Každou z nich můžeme integrovat zvlášť

$$\begin{aligned} d &= \int_1^2 \frac{x^2}{2x} dx + \int_1^2 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x| \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(2 + \ln(2) - \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{3}{4} + \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

V kapitole 4 si ukážeme ještě další způsob, jak zjistit délku křivky z parametrického vyjádření.

2.2 Fyzikální a další aplikace určitého integrálu

V této kapitole se podíváme na další využití určitého integrálu. Uvedeme si především fyzikální využití.

Okamžitá rychlost

Zrychlení definujeme jako derivaci okamžité rychlosti podle času. Z opačné strany můžeme počítat okamžitou rychlost jako integrál zrychlení $v = \int a dt$. Ve fyzikálních úlohách je často potřeba zjistit i uraženou dráhu, která se obvykle zjistí jako $s = vt$, dosazením integrálu získáme druhý vzorec $s = \int at dt$. Uplatnění si vyzkoušíme na příkladě.

Příklad 2.8 *Parašutista vyskočil z letadla a padá volným pádem. Po 5,5 sekundách dosáhl maximální rychlosti pádu. Jaká je tato rychlost a jakou dráhu urazil? Zanedbejte odpor vzduchu.*

Zrychlení při volném pádu nazýváme tíhové zrychlení, které je přibližně $g \doteq 9,81$. Počáteční čas $t_0 = 0$ a počáteční rychlost je nulová. Dosadíme do vzorců a vypočítáme

$$v = \int_0^{5,5} g dt = g [t]_0^{5,5} \doteq 9,81 \cdot 5,5 \doteq 54.$$

Maximální rychlost pádu parašutisty je 54 ms^{-1} , to je přibližně 194 kmh^{-1} . Ještě spočítáme dráhu

$$s = \int_0^{5,5} g t dt = g \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{5,5} \doteq 9,81 \cdot \frac{30,25}{2} \doteq 148.$$

Maximální rychlosti dosáhne po 148 m. Budeme doufat, že se parašutistovi otevře padák a přesuneme se na další využití integrálů.

Mechanická práce

Této aplikaci se budeme věnovat více v kapitole 5, proto si zde uvedeme jen vzorec a jeho aplikaci na příkladě. Práci vypočítáme

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx.$$

Příklad 2.9 *Vypočtěte jakou práci vykonal vzpěrač Laša Talachadze, který na olympijských hrách v Tokiu vyhrál zlatou medaili v dvojboji za zdvihnutí neuvěřitelných 488 kg (součet dvou pokusů) nad hlavu do výšky přibližně 2 m.*

V tomto případě je síla F rovna tíhové síle, kterou musí vzpěrač překonat. Tu vypočítáme jako $G = mg$. Na počátku se činka nachází na zemi ve výšce 0. Dosadíme a vypočítáme

$$W = \int_0^2 mg dx = mg [x]_0^2 \doteq 488 \cdot 9,81 \cdot 2 \doteq 9575J.$$

Od výpočtu práce se můžeme posunout k práci proměnné síly, které se také říká práce pružné síly. Jak název napovídá, pružnou práci vykonává například pružina při stlačení

nebo natažení. Pružnou sílu popisuje Hookův zákon jako $F(x) = -kx$, kde k je konstanta pružnosti. Práci pružné síly tedy vypočítáme

$$\int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_i}^{x_f} = \frac{kx_i^2}{2} - \frac{kx_f^2}{2}.$$

Speciálně pro $x_i = 0$ je pružná práce rovna $W = -\frac{kx_f^2}{2}$.

Příklad 2.10 *Jakou práci musíte vykonat, jestliže se pružina prodlouží o 12 cm, pokud víme, že zavěšené závaží o hmotnosti 1 kg roztáhne pružinu o 5 cm.*

Závaží o hmotnosti 1 kg působí na pružinu tíhovou silou $G = mg \doteq -9,81N$. Znaménko mínus je zde z toho důvodu, že síla působí opačným směrem. Konstantu pružnosti vypočítáme $k = -\frac{F}{x} \doteq \frac{9,81}{0,05} = 196,2Nm^{-1}$. Máme vše potřebné a můžeme dosadit.

$$W = \frac{196,2 \cdot 0,12^2}{2} \doteq 1,413J.$$

Další využití určitého integrálu

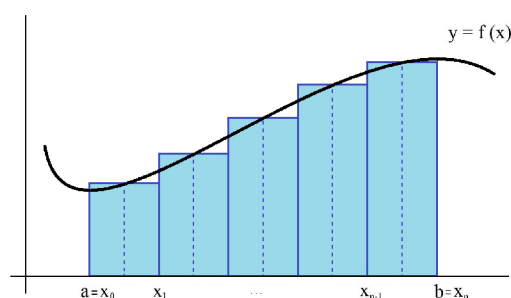
Existuje spousta dalších využití určitého integrálu. My si zde pro představu vyjmenujeme pouze některé.

- Spojitou pravděpodobnost můžeme počítat pomocí určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$. Tímto integrálem z hustoty pravděpodobnosti počítáme pravděpodobnost, že náhodná veličina bude mít hodnotu v intervalu $\langle a, b \rangle$. Podmínkou je $\int_{\Omega} f(x)dx = 1$.
- Poločas rozpadu radioaktivních látek lze počítat pomocí určitého integrálu.
- Množení organismů v biologii se počítá jako integrál lineární nebo exponenciální funkce.

3 Přibližné metody výpočtu určitého integrálu

Jak jsme se již dříve dozvěděli, nedokážeme najít primitivní funkce ke všem funkcím tudíž pomocí věty 1.1 nedokážeme vypočítat určitý integrál. Proto existují přibližné metody výpočtu určitých integrálů. Tyto metody se do jisté míry podobají výpočtu určitého integrálu přímo z definice. Můžeme pracovat i s chybou a dopracovat se určité požadované přesnosti. Proto se jedná o zcela korektní metody, které jsou velmi často používány a to především počítači, jež výpočty zvládají prakticky okamžitě.

3.1 Obdélníková metoda



Obrázek 3.8: Obdélníková metoda

Hlavní myšlenkou této metody je nahradit určitý integrál z funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ obsahem obdélníka, ohraničeného konstantní funkcí na tomto intervalu. Pro větší přesnost je lepší rozdělení na více obdélníků. Body ξ_i , které jsme v případě definice určitého integrálu mohli volit zcela libovolně, nyní budeme vždy volit jako střed intervalu. Konstantní funkce bude vždy rovna funkční hodnotě bodu ξ_i . Určitý integrál jsme tedy nahradili obsahem obdélníka o stranách $(b - a)$ a $f(\xi_i)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f(\xi_i).$$

Pro větší přesnost provedeme dělení intervalu konečnou posloupností $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ na stejně velké podintervaly a na každý aplikujeme stejnou myšlenku.

Obsah obdélníku i vypočítáme $\frac{b-a}{n} f(\xi_i)$. Na závěr sečteme obsahy všech obdélníků a získáváme přibližnou hodnotu určitého integrálu:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_1^n f(\xi_i).$$

Nyní zkusíme poznatky aplikovat na příkladě, který bychom dokázali vypočítat i pomocí věty 1.1, abychom mohli výsledky porovnat.

Příklad 3.1 *Vypočtěte integrál z funkce $f(x) = x^3$ na intervalu $\langle 0, 8 \rangle$ pomocí obdélníkové metody rozdělením na 4 a následně na 8 podintervalů.*

Interval $\langle 0, 8 \rangle$ rozdělíme na čtyři pomocí bodů 0, 2, 4, 6 a 8. Najdeme středy podintervalů (1, 3, 5, 7) a můžeme dosadit do vzorce:

$$\int_0^8 x^3 dx \approx \frac{8-0}{4} (1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3)$$

$$\int_0^8 x^3 dx \approx 992.$$

Obdobně provedeme dělení na osm podintervalů a nalezneme středy těchto podintervalů 0,5; 1,5; 2,5; 3,5; 4,5; 5,5; 6,5 a 7,5. Počítáme

$$\int_0^8 x^3 dx \approx \frac{8-0}{8} (0,5^3 + 1,5^3 + 2,5^3 + 3,5^3 + 4,5^3 + 5,5^3 + 6,5^3 + 7,5^3)$$

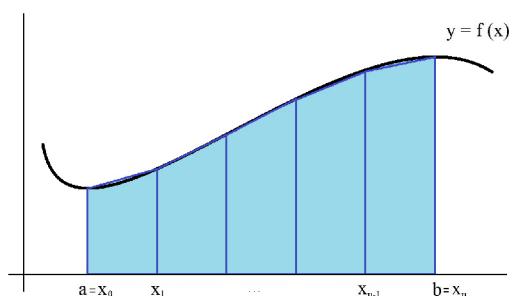
$$\int_0^8 x^3 dx \approx 1016.$$

Abychom měli nějakou představu, jakým způsobem se snížila velikost chyby našeho výpočtu určitého integrálu obdélníkovou metodou, kdy jsme rozdělili interval na osm podintervalů místo na čtyři, vypočítáme příklad i pomocí věty 1.1

$$\int_0^8 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^8 = 1024.$$

Graf polynommické funkce třetího stupně roste rychle a proto se obě chyby mohou zdát jako velké. Při pohledu na jejich rozdíl je však vidět, že dostatečným dělením intervalu bychom tuto chybu velmi jednoduše snížili.

3.2 Lichoběžníková metoda



Obrázek 3.9: Lichoběžníková metoda

Jak název napovídá, hlavní pointou této metody bude nahrazení určitého integrálu lichoběžníky. Budeme postupovat podobně jako u obdélníkové metody, nejprve integrál nahradíme jedním lichoběžníkem a poté budeme interval rozdělovat kvůli větší přesnosti na stejné podintervaly. Obsah lichoběžníku podle vzorce závisí na výšce a dvou vzájemně rovnoběžných základnách. Za výšku dosadíme velikost intervalu (velikost podintervalů). Velikosti základen zjistíme jako funkční hodnoty krajních bodů intervalu (dělicí body podintervalů). V případě náhrady určitého integrálu jedním lichoběžníkem získáme

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a) [f(a) + f(b)] \frac{1}{2}.$$

Nyní rozdělíme interval na podintervaly a zjistíme, že sousední lichoběžníky mají vždy právě jednu základnu společnou. Krajní lichoběžníky však sousedí jen s jedním lichoběžníkem a proto jejich krajní základny u bodů a a b musíme vzít pouze jednou a zbytek základen právě dvakrát. Tímto postupem získáme vzorec:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b - a}{2n} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].$$

Takto vyzbrojeni můžeme počítat integrály lichoběžníkovou metodou. Pro srovnání můžeme zjistit přibližnou hodnotu stejného určitého integrálu, jako jsme počítali u obdélníkové metody. A stejně tak můžeme i porovnat velikost chyby v závislosti na dělení intervalu.

Příklad 3.2 Vypočtěte integrál z funkce $f(x) = x^3$ na intervalu $\langle 0, 8 \rangle$ pomocí lichoběžníkové metody rozdělením na 4 a následně na 8 podintervalů.

Tentokrát stačí interval $\langle 0, 8 \rangle$ rozdělit pomocí bodů 0, 2, 4, 6 a 8 na čtyři. Středové hodnoty již hledat nemusíme. Dosadíme do vzorce a vypočítáme

$$\int_0^8 x^3 dx \approx \frac{8-0}{2 \cdot 4} [0^3 + 8^3 + 2(2^3 + 4^3 + 6^3)]$$

$$\int_0^8 x^3 dx \approx 1088.$$

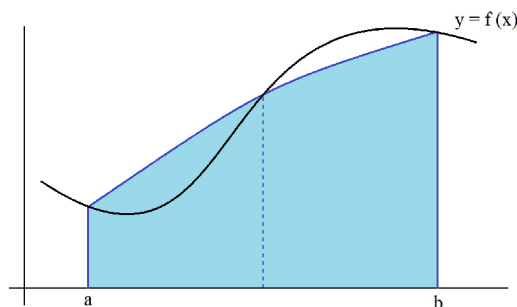
Obdobným způsobem provedeme pro dělení na osm podintervalů pomocí bodů 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8. Dosadíme do vzorce

$$\int_0^8 x^3 dx \approx \frac{8-0}{2 \cdot 8} [0^3 + 8^3 + 2(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3)]$$

$$\int_0^8 x^3 dx \approx 1040.$$

V tomto případě je chyba ještě větší než při použití obdélníkové metody, ale nemusí tomu tak být vždy. Podobně jako v příkladě 3.1 se chyba při dělení na více podintervalů prudce snižuje. Nespornou výhodou této metody je, že nemusíme hledat střed každého intervalu a vystačíme si pouze s dělicími body.

3.3 Metoda Simpsonova



Obrázek 3.10: Metoda Simpsonova

Tato metoda je poslední, které se v této práci budeme věnovat. Hlavní myšlenkou je nahradit zadanou funkci parabolou, která prochází třemi body (krajní body a střed). Proto musíme při dělení na stejné podintervaly dodržet ještě jednu podmínku navíc a to sudý počet těchto podintervalů. Dělení tedy bude $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} = b$. Pro výpočet obsahu základního obrazce na obrázku 3.10, kterým nahrazujeme určitý integrál, použijeme Simpsonovu formuli

$$S = \frac{b-a}{3 \cdot 2} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

V případě dělení intervalu na sudý počet podintervalů musíme použít podobnou úvahu jako u lichoběžníkové metody. Všechny funkční hodnoty se sudým koeficientem, kromě krajních u bodů $a = x_0$ a $b = x_{2n}$ musíme vzít dvakrát a všechny funkční hodnoty s lichými koeficienty musíme podle Simpsonovy formule vzít čtyřikrát. Výsledný vzorec vypadá následovně

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3 \cdot 2n} \left[f(x_0) + f(x_{2n}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right].$$

Opět můžeme naše znalosti vyzkoušet na příkladě a porovnat Simpsonovu metodu s metodou obdélníkovou a lichoběžníkovou.

Příklad 3.3 *Vypočítejte integrál z funkce $f(x) = x^3$ na intervalu $\langle 0, 8 \rangle$ pomocí Simpsonovy metody rozdělením na 4 a následně na 8 podintervalů.*

Dělení na čtyři i osm podintervalů splňují základní podmínku (sudý počet). Můžeme tedy interval rozdělit dělicími body 0, 2, 4, 6 a 8. Dosadíme do vzorce

$$\int_0^8 x^3 dx \approx \frac{8-0}{3 \cdot 2 \cdot 2} [0^3 + 8^3 + 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot (2^3 + 6^3)]$$

$$\int_0^8 x^3 dx \approx 1024.$$

Tento výsledek je dokonce naprosto přesný a ve výpočtu můžeme napsat znaménko rovnosti. Asi budeme očekávat, že se v případě dělení na osm podintervalů dopracujeme stejného výsledku. Pojdme to tedy ověřit. Interval rozdělíme dělicími body 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a dosadíme

$$\int_0^8 x^3 dx \approx \frac{8-0}{3 \cdot 2 \cdot 4} [0^3 + 8^3 + 2 \cdot (2^3 + 4^3 + 6^3) + 4 \cdot (1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3)]$$

$$\int_0^8 x^3 dx \approx 1024.$$

Výsledek vyšel opět stejně jako pomocí věty 1.1. Důvodem naprosto přesných výsledků je v tomto případě samotný princip metody, kdy máme nahradit graf funkce $f(x) = x^3$ parabolou. V tomto případě ani nejedná o aproximaci a výsledek je přesný. V případě jiného zadání nemusí být výsledek přesný a může se vyskytnout chyba podobně jako u obdélníkové a lichoběžníkové metody.

4 Křivkový integrál 1. druhu a jeho využití

V této kapitole se posunu od určitých integrálů k integrálům křivkovým. Motivací pro určitý integrál 1.1 bylo zjištění obsahu plochy pod křivkou. V kapitole 2 jsme díky určitému integrálu dokázali počítat nejen obsahy obrazců tvořených křivkami, ale i délku křivek v rovině. V případě křivkového integrálu 1. druhu připustíme existenci další veličiny na křivce, která však nemusí být rovnoměrně rozmístěna (např. náboj křivky) a budeme počítat tuto veličinu na křivce. Motivací pro nás může být výpočet hmotnosti drátu vyrobeného z nehomogenního materiálu.

4.1 Křivky a parametrické vyjádření

Doposud jsme pojem křivka používali jako graf funkce jedné reálné proměnné. Abychom mohli používat i jiné typy křivek například lomené čáry, musíme si křivky nejprve definovat. Protože budeme pracovat především s křivkami v prostoru, definujeme pojem křivka v dimenzi 3. Pro jiné dimenze je definice analogická. Uvedeme si definici, kterou uvádí Daneček, 2000.

Definice 4.1 Křivka

Množinu $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ nazveme křivkou v prostoru, jestliže existuje spojitě zobrazení Γ intervalu $\langle a, b \rangle$ na množinu γ takové, že platí:

1. zobrazení Γ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ až na výjimku konečného počtu bodů prosté,
2. zobrazení Γ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitě až na konečně mnoho bodů, ve kterých existují obě jednostranné limity, které mohou být různé,
3. Γ' má až na konečně mnoho bodů nenulovou hodnotu na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Zobrazení Γ nazýváme parametrizací křivky γ .

Z definice vyplývá, že křivky budeme vyjadřovat zpravidla parametrickým vyjádřením. Zde budeme používat tvar, který jsme si uváděli v kurzech geometrie, tedy:

$$\gamma : x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t), z = \varphi_3(t), t \in \langle a, b \rangle.$$

Z úsporných důvodů též můžeme značit jako: $\gamma : \varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)]$, $t \in \langle a, b \rangle$. Křivku můžeme chápat jako graf vektorové funkce $\gamma : \vec{\varphi}(t) = \varphi_1(t)\vec{i} + \varphi_2(t)\vec{j} + \varphi_3(t)\vec{k}$, $t \in \langle a, b \rangle$. Toho využijeme především v kapitole o křivkovém integrálu 2. druhu.

Definice 4.2 Některé vlastnosti křivek

Křivku $\gamma: \varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)]$, $t \in I$ nazveme:

jednoduchá, jestliže $\forall t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ platí $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$,

ukončená, jestliže má konečnou délku,

uzavřená, jestliže má konečnou délku a $\varphi(a) = \varphi(b)$,

hladká (oblouk), jestliže $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ mají spojité derivace na I a pro žádné $t \in I$ $\varphi'(t) \neq (0, 0, 0)$,

po částech hladká, jestliže křivka vznikla sjednocením konečně mnoha hladkých křivek.

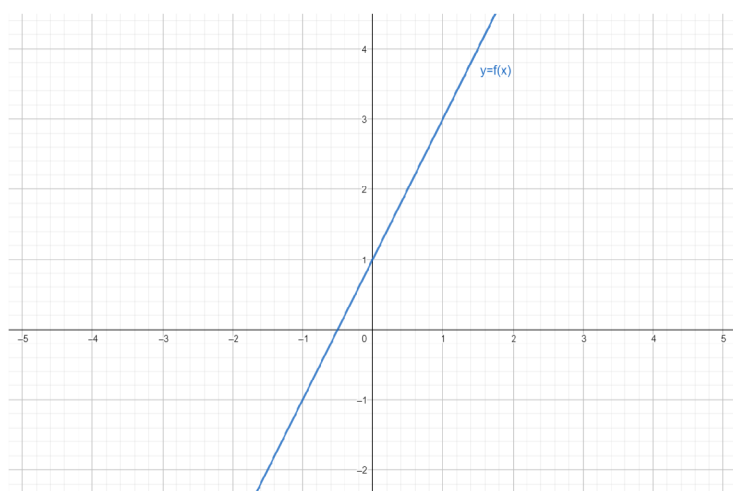
Protože velmi často jsou křivky popisovány rovnicí nebo také graficky, je na místě si procvičit převod na parametrické vyjádření. Vše si ukážeme na několika příkladech.

Příklad 4.1 Najděte parametrické vyjádření přímky f zadané obrázkem 4.11.

V některých případech existuje více, než jen jedna parametrizace. To platí i v tomto případě. Stačí si uvědomit, že veškeré body na přímce dokážeme najít pomocí počátečního bodu a nějakého násobku směrového vektoru přímky. Proto musíme najít jeden libovolný bod přímky a její směrový vektor. Nám se nabízí například bod $[0, 1]$ a vektor $(1, 2)$. Sestavíme tedy parametrické vyjádření přímky $f: x = t, y = t + 1, t \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.2 Najděte parametrické vyjádření části paraboly mezi body $A[-4, -4]$ a $B[4, 12]$ procházející bodem $C[0, 2]$.

Pomocí tří bodů dokážeme nalézt rovnici paraboly a tu poté parametrizujeme. Při hledání rovnice využijeme znalosti ze základní školy a to, že parabola má tvar $y =$



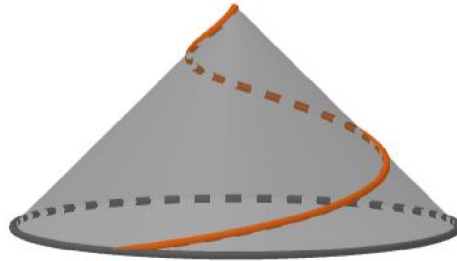
Obrázek 4.11: Zadání příkladu 4.1

$ax^2 + bx + c$. Do tohoto tvaru dosadíme souřadnice bodů ze zadání a získáme soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých. Po jejím vyřešení a dosazení dostaneme rovnici $y = \frac{1}{8}x^2 + 2x + 2$. Nakonec rovnici parametrizujeme. Pro ulehčení si zvolíme parametr $t = x$ a vyjádříme y pomocí parametru. Zbývá vyřešit, jakých hodnot může parametr nabývat. Jednoduše si uvědomíme, že na ose x přicházejí v úvahu hodnoty mezi body A a B včetně těchto bodů. Můžeme zapsat parametrické vyjádření paraboly p : $x = t$, $y = \frac{1}{8}t^2 + 2t + 2$, $t \in \langle -4, 4 \rangle$.

Příklad 4.3 Najděte parametrické vyjádření kružnice k se středem v bodě $S[3, 1]$ a poloměrem 5 jednotek.

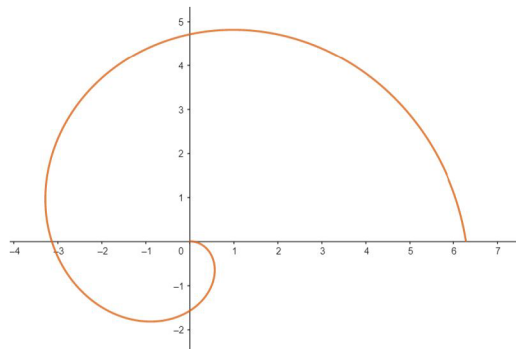
V tomto případě budeme postupovat zcela jinak, než v těch předešlých. S kružnicí v implicitní rovnici bychom si jen tak neporadili, proto provedeme transformaci do polárních souřadnic. Stačí si vzpomenout na jednotkovou kružnici, kde vyjadřujeme body kružnice pomocí úhlu φ , který svírá osa x s polopřímkou vedenou ze středu k nějakému bodu na kružnici. Souřadnice toho bodu vyjádříme jako kosinus zmíněného úhlu φ pro osu x a sinus pro osu y . V našem případě se nejedná o jednotkovou kružnici, proto musíme souřadnice vynásobit poloměrem a protože střed není počátek soustavy souřadnic, je třeba ještě na závěr přičíst souřadnice středu. Zapišeme parametrické vyjádření kružnice k : $x = 3 + 5\cos(\varphi)$, $y = 1 + 5\sin(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Příklad 4.4 Najděte parametrické vyjádření závitů, který vznikne jako jedno otočení kolem kužele od jeho vrcholu až ke hraně jeho podstavy. Poloměr kužele je 2π a jeho výška je také 2π .



Obrázek 4.12: Závit na kuželu

Celá parametrizace závisí na umístění kužele, proto nejprve sestrojíme kužel a vhodně si jej umístíme do souřadnicového systému podstavou na rovinu x, y . Nalezneme krajní body závitů, jeden na vrcholu se souřadnicemi $[0, 0, 2\pi]$ a druhý bod při základně. Ten si vhodně zvolíme tak aby ležel na jedné z os, například bod $[2\pi, 0, 0]$. Nyní nastává nejtěžší část příkladu. Začneme průmětem křivky do roviny podstavy.



Obrázek 4.13: Průmět závitů do podstavy

Šroubovice má v průmětu tvar části Archimedovy spirály, to nám napoví, že se

budeme pohybovat v polárních souřadnicích. V případě, že by se jednalo o kružnici, tak bychom dokázali body vyjádřit za pomoci jednotkové kružnice jako $x = \cos(\varphi)$, $y = \sin(\varphi)$. Když bychom k těmto bodům ještě přidali vzdálenost od počátku souřadnicového systému, dokázali bychom vyjádřit libovolný bod. Všimneme si, že vzdálenost závitů k počátku plynule klesá z hodnoty 2π až na nulu zároveň se změnou úhlu. Proto tento pokles popíšeme hodnotou $2\pi - t$. Můžeme tedy napsat první dvě souřadnice parametrického vyjádření $x = (2\pi - t)\cos(t)$ a $y = (2\pi - t)\sin(t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Poslední souřadnice už bude jednodušší. Stačí si uvědomit, že nám udává výšku kužele, která roste rovnoměrně od nuly do 2π , proto ji budeme charakterizovat jako $z = t$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Celou křivku popíšeme parametrickým vyjádřením

$$\gamma : \varphi(t) = [(2\pi - t)\cos(t), (2\pi - t)\sin(t), t].$$

Po veškeré přípravě se konečně můžeme začít věnovat křivkovým integrálům 1. druhu. Definici provedeme podobným způsobem jako u určitého integrálu v kapitole 1.

4.2 Definice křivkového integrálu 1. druhu

Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ je hladká nebo po částech hladká křivka. Nechť známe i hustotu rozložení hmoty v každém jejím bodě. Úkolem je zjistit celkovou hmotnost křivky. Křivku rozdělíme na oblouky libovolnou konečnou posloupností bodů P_i , kde $i=0, 1, 2, \dots, n$, pro které platí: $a = P_0 < P_1 < P_2 < \dots < P_n = b$. Velikost i -tého oblouku je $d(P_{i-1}P_i) = \Delta s_i$. Zavedeme normu dělení $v(D) = \max \Delta s_i, i=1, 2, \dots, n$.

Pokud by měl každý oblouk ve všech místech stejnou hustotu, stačilo by vynásobit jeho hustotu velikostí oblouku a získali bychom jeho celkovou hmotnost. Zde bychom mohli stejně jako při definici určitého integrálu definovat horní a dolní integrální součet pomocí suprema a infima hustoty na každém oblouku. Protože víme, že v limitním počtu $v(D) \rightarrow 0$ bude horní integrální součet roven dolnímu integrálnímu součtu, tak si můžeme zvolit libovolný bod oblouku. Hmotnost i -tého oblouku vyjádříme jako $\rho(M_i)\Delta s_i$. Číslo

$$S_\rho(D) = \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta s_i$$

nazveme integrální součet hustoty rozložení hmoty pro dělení D křivky γ . Tento integrální součet můžeme přesněji nazvat integrálním součtem 1. druhu. Hustotu rozložení hmoty ρ můžeme nahradit libovolnou ohraničenou funkcí f , která je definována v každém bodě křivky γ .

Definice 4.3 Křivkový integrál 1. druhu

Řekneme, že existuje křivkový integrál 1. druhu po křivce γ z funkce $f(M)$ tehdy a jen tehdy, když pro každou posloupnost $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ dělení křivky γ existuje vlastní limita posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i.$$

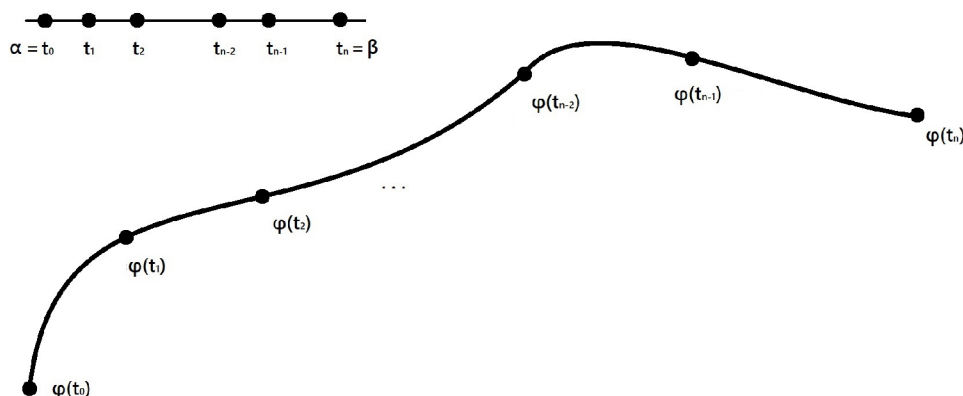
Tuto limitu nazveme křivkovým integrálem z funkce $f(M)$ přes křivku γ a značíme ji

$$\int_\gamma f(M) dl = \int_\gamma f(x, y) dl = \lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n).$$

Tato limita nezávisí na dělení křivky γ ani na výběru bodů M_i .

Křivkový integrál 1. druhu máme sice definovaný, ale podobně jako u určitého integrálu se k výpočtům jako takto popsaný podle definice nepoužívá. Křivkový integrál lze snadno převést na určitý integrál a my si teď odvodíme jeho výpočet a použijeme k tomu právě parametrické vyjádření, které jsme procvičovali. Odvození provedeme v rovině, ale obdobným způsobem by se dalo provést i pro počítání křivkového integrálu v prostoru.

Máme hladkou nebo po částech hladkou křivku γ zadanou parametricky $\gamma : \varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a spojitou funkcí $f(x, y)$ na intervalu $[a, b]$. Vrátime se zpět k dělení křivky na oblouky. V tomto případě nezavedeme dělicí body přímo na křivce, ale budeme dělit interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ libovolnou posloupností $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ na podintervaly $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$. Tím zároveň vzniknou dělicí body křivky $\varphi(t_i)$, $i=0, 1, \dots, n$,



Obrázek 4.14: Dělení křivky

kteřé rozdělí křivku na oblouky. V definici jsme hmotnost oblouku vyjádřili jako hmotnost libovolného bodu oblouku krát velikost oblouku. Nyní budeme hmotnost oblouku vztahovat vždy k příslušnému podintervalu. Místo hmotnosti bodu můžeme uvažovat libovolnou hodnotu funkce $f(x, y)$ neboli $f(\varphi(t_i))$, kde t_i je libovolný bod z podintervalu. Protože si bod můžeme libovolně vybrat, zvolíme krajní bod oblouku $\varphi(t_i)$. Při dostatečném zjemnění dělení se budou vytvořené oblouky čím dál více přibližovat úsečkám. Proto můžeme v limitním počtu $v(D) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ velikost oblouku spočítat jako délku úsečky vymezené jeho krajními body neboli $|\varphi(t_{i-1})\varphi(t_i)|$. Délka úsečky se v analytické geometrii počítá jako velikost vektoru. Zapišeme integrální součet:

$$S_f(D) \doteq \sum_{i=1}^n f(\varphi(t_i)) |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|.$$

Protože jsme nahradili velikosti oblouků úsečkami, je tento součet pouze přibližný. Provedeme úpravu, která součet nezmění

$$S_f(D) \doteq \sum_{i=1}^n f(\varphi(t_i)) \left| \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| (t_i - t_{i-1}).$$

Z definice už víme, že limitou posloupnosti integrálních součtů je právě křivkový integrál, který nás zajímá. V tomto případě naše dělení probíhalo na intervalu, ze kterého vybíráme parametry, proto pro nás limita $\lim n \rightarrow \infty$ znamená, že velikost podinter-

valů se blíží nule, tedy $\lim(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$. Tímto limitním přechodem získáme tvar

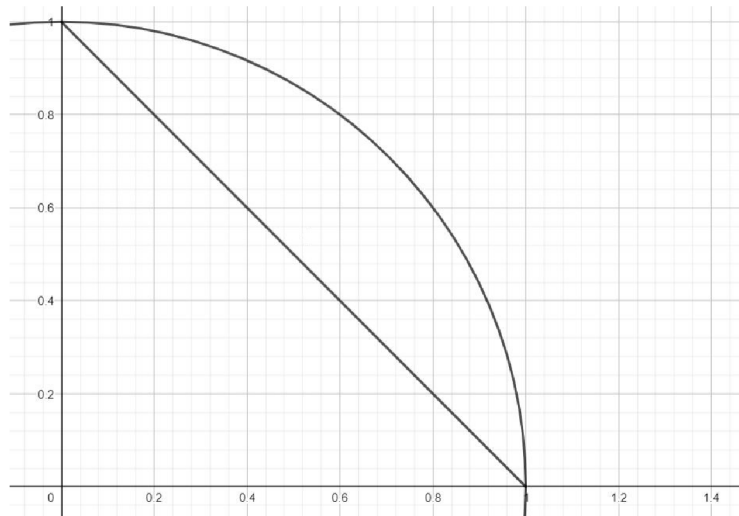
$$\int_{\gamma} f(x, y) dl = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt,$$

který můžeme také napsat jako:

$$\int_{\gamma} f(x, y) dl = \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$

S tímto tvarem už můžeme bez obtíží pracovat. Stejným způsobem bychom mohli odvodit výpočet křivkového integrálu 1. druhu pro křivky v prostoru. Vše si ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 4.5 Vypočtěte křivkový integrál $\int_{\gamma} (4x + 2y) dl$, kde křivka γ je složena z kružnicového oblouku kružnice se středem v počátku a poloměrem 1 a tětivy procházející body $[1, 0]$ a $[0, 1]$.



Obrázek 4.15: Kružnicový oblouk a tětiva

Křivku rozdělíme na dvě části, kružnicový oblouk a tětiva. Zapišeme parametrické vyjádření každé z nich a zjistíme derivace:

$$\gamma_1 : \varphi(t) = [\cos(t), \sin(t)], t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

$\gamma_2 : \varphi(t) = [t, -t + 1], t \in (0, 1), \varphi'(t) = (1, -1).$

Dosadíme do vzorce a vypočítáme

$$\int_{\gamma} (4x + 2y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4\cos(t) + 2\sin(t)] \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt + \int_0^1 [4t + 2(-t + 1)] \sqrt{1^2 + 1^2} dt$$

$$\int_{\gamma} (4x + 2y) dl = [4\sin(t) - 2\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 1 + [2t^2 - t^2 + t]_0^1 \cdot \sqrt{2}.$$

Výsledný křivkový integrál 1. druhu je tedy roven

$$\int_{\gamma} (4x + 2y) dl = 2 + 2\sqrt{2}.$$

4.3 Využití křivkového integrálu 1. druhu

Zde si uvedeme některé aplikace křivkového integrálu i s příklady.

Délka křivky

Při výpočtu křivkového integrálu 1. druhu hraje roli hustota rozložení hmoty, která nemusí být ve všech bodech stejná. Uvažujme teď však křivku, která je ve všech místech homogenní. Pak by se hmotnost křivky spočítala jako hustota rozložení hmoty krát délka křivky. V případě že je hustota rozložení hmoty rovna ve všech bodech jedné, pak má délka křivky stejnou hodnotu jako její hmotnost. Pro konstantní funkci rovnu jedné můžeme tedy napsat speciální vzorec pro výpočet délky křivky v rovině

$$\int_{\gamma} dl = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2} dt,$$

nebo v prostoru

$$\int_{\gamma} dl = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2} dt.$$

Pomocí těchto vzorců můžeme řešit příklady stejně jako s určitým integrálem. Zkusíme si jeden příklad v rovině a jeden v prostoru.

Příklad 4.6 *Odvod'te vzorec pro výpočet délky kružnice.*

Kružnice s poloměrem r má parametrické vyjádření $\varphi(t) = [r\cos(x), r\sin(x)]$, $t \in (0, 2\pi)$. Vypočítáme derivaci $\varphi'(t) = [-r\sin(x), r\cos(x)]$ a dosadíme do vzorce.

$$o = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} dt$$

Díky vzorci, kterému se říká goniometrická jednička je odmocnina rovna konstantě r .
Můžeme příklad dokončit

$$o = [rt]_0^{2\pi}$$

$$o = 2\pi r.$$

Příklad 4.7 *Určete délku drátu potřebného na vytvoření spirály na rajčata, pokud víme, že spirála musí mít 15 závitů a výšku 60π cm (zhruba 188 cm). Šířka spirály v nejtlustším bodě je 10 cm.*

Všechny závity mají stejnou délku, proto nám stačí vypočítat délku jednoho závitu. Jeden závit je vysoký 4π cm. Při pohledu shora má tvar kruhu o poloměru 5 cm, proto použijeme parametrizaci kruhu se středem v počátku souřadné soustavy $x = 5\cos(t)$ a $y = 5\sin(t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Třetí souřadnice roste rovnoměrně s parametrem t . Nárůst je od nuly do 4π na intervalu o velikosti 2π , proto musí parametr t růst dvakrát rychleji, tedy $z = 2t$. Zapišeme celou parametrizaci a derivaci:

$$\gamma : \varphi(t) = [5\cos(t), 5\sin(t), 2t],$$

$$\varphi'(t) = [-5\sin(t), 5\cos(t), 2].$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce a vypočítat

$$\int_{\gamma} dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{25\sin^2(t) + 25\cos^2(t) + 4} dt$$

$$\int_{\gamma} dl = \left[\sqrt{29}t \right]_0^{2\pi}$$

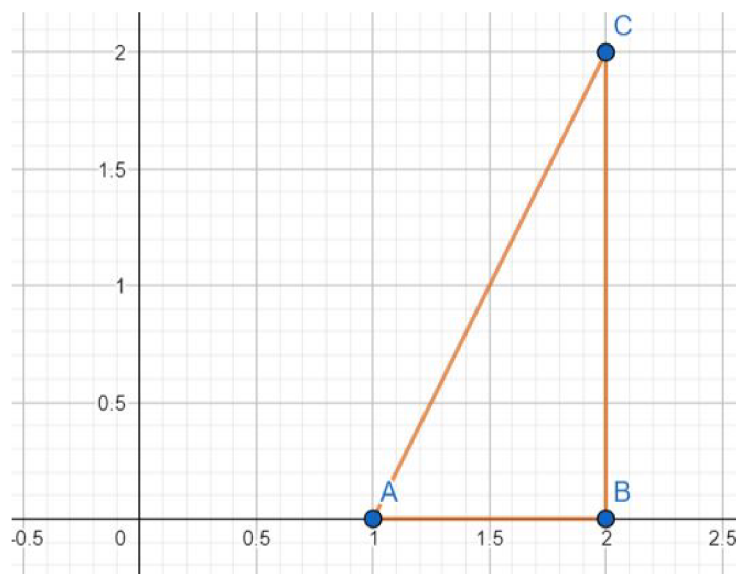
$$\int_{\gamma} dl = 2\sqrt{29}\pi.$$

Výslednou délku jednoho závitu vynásobíme 15 a získáme délku potřebného materiálu $30\sqrt{29}\pi$ cm, což je přibližně 507 cm drátu.

Hmotnost křivky a velikost elektrického náboje na křivce

Už jsme si řekli, že hmotnost křivky závisí na hustotě rozložení hmoty na křivce. Pokud je hustota homogenní, stačí vynásobit délku křivky hmotností libovolného bodu. Zde nás budou hlavně zajímat křivky, které mají rozložení hmoty (elektrického náboje) zadané spojitou funkcí, jak bylo uvedeno v odvození vzorce pro výpočet křivkového integrálu 1. druhu, který budeme používat v těchto případech.

Příklad 4.8 *Určete celkový elektrický náboj v trojúhelníkové ohradě zadané body $A [1, 0]$, $B [2, 1]$ a $C [2, 2]$. Rozložení elektrického náboje v ohradě popisuje funkce $f = xy + 2x + y$.*



Obrázek 4.16: Trojúhelníková ohrada

Nejprve si rozdělíme ohradu na 3 části, které vyjádříme parametricky i s jejich derivacemi:

$$\gamma_1 : \varphi(t) = (t, 0), t \in \langle 1, 2 \rangle \quad \varphi'(t) = (1, 0),$$

$$\gamma_2 : \varphi(t) = (0, t), t \in \langle 0, 2 \rangle \varphi'(t) = (0, 1),$$

$$\gamma_3 : \varphi(t) = (t, 2t), t \in \langle 1, 2 \rangle \varphi'(t) = (1, 2).$$

Můžeme dosadit do vzorce a vypočítat:

$$\int_{\gamma} dl = \int_1^2 2t dt + \int_0^2 t dt + \int_1^2 (2t^2 + 4t)\sqrt{5} dt$$

$$\int_{\gamma} dl = [t^2]_1^2 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 + \sqrt{5} \left[\frac{2t^3}{3} + 2t^2\right]_1^2$$

$$\int_{\gamma} dl = 5 + \sqrt{5} \frac{32}{3}.$$

5 Křivkový integrál 2. druhu a jeho využití

V této kapitole si definujeme a odvodíme křivkový integrál 2. druhu. Na křivku nyní budeme nahlížet jako na graf vektorové funkce $\gamma : \vec{\varphi}(t) = \varphi_1(t)\vec{i} + \varphi_2(t)\vec{j} + \varphi_3(t)\vec{k}, t \in \langle a, b \rangle$. Protože křivkový integrál 2. druhu je na rozdíl od toho předchozího orientovaný, musíme si nejprve říct něco o orientaci.

5.1 Orientace křivky

V kapitole o křivkovém integrálu 2. druhu si představujeme křivku jako trajektorii pohybujícího se bodu. Při takové představě se bod může pohybovat po každé křivce dvěma navzájem opačnými směry. Tomuto směru říkáme v matematice orientace křivky.

Nechť máme jednoduchou hladkou křivku γ , pak řekneme, že je parametrizována funkcí $P(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Na křivce definujeme orientaci takovým způsobem, že o bodě $P(t_1)$ hovoříme, že je před bodem $P(t_2)$, zapisujeme $P(t_1) \prec P(t_2)$, právě tehdy, když je $t_1 < t_2$. V takovém případě říkáme, že křivka γ je orientována souhlasně s parametrickým vyjádřením. V opačném případě, pokud pro $P(t_1) \succ P(t_2)$ platí $t_1 < t_2$, říkáme, že křivka γ je orientována nesouhlasně s parametrickým vyjádřením.

5.2 Definice křivkového integrálu 2. druhu

K definici křivkového integrálu druhého druhu nás motivuje následující fyzikální úloha. Po křivce se pohybuje hmotný bod, na který působí nějaká síla, jejíž hodnota je ve všech místech definována libovolnou vektorovou funkcí. Naším úkolem je zjistit, jakou práci síla vykoná při pohybu hmotného bodu přes křivku. Kdyby byla síla působící na hmotný bod konstantní, vypočítali bychom práci jako skalární součin síly a vektoru daným počátečním a koncovým bodem křivky.

Nechť je dána jednoduchá hladká orientovaná křivka $\vec{\gamma} \subset \mathbb{R}^2$ a spojitá vektorová funkce $\vec{F}(P)$. Uvažujeme dělení křivky $\vec{\gamma}$ libovolnou posloupností bodů P_i , kde $i=0, 1, 2, \dots, n$, pro které platí $a = P_0 \prec P_1 \prec P_2 \prec \dots \prec P_n = b$ na orientované oblouky $P_{i-1} \hat{=} P_i$.

Zavedeme normu dělení $v(D) = \max(P_{i-1} \hat{P}_i)$, $i=0, 1, 2, \dots, n$. V každém oblouku si zvolíme libovolný bod M_i . Při dostatečně jemném dělení můžeme hladkou práci, kterou vykoná síla $\vec{F}(P)$ přibližně spočítat jako:

$$S_F(D) = \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i)(P_i - P_{i-1}).$$

Toto číslo nazýváme integrální součet funkce \vec{F} pro dělení D křivky $\vec{\gamma}$ a pro daný výběr bodů M , nebo také integrální součet druhého druhu.

Definice 5.1 Křivkový integrál 2. druhu

Řekneme, že existuje křivkový integrál 2. druhu po křivce $\vec{\gamma}$ z funkce \vec{F} právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{D\}_{n=1}^{\infty}$ dělení křivky $\vec{\gamma}$ existuje vlastní limita posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_F(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i)(P_i - P_{i-1}).$$

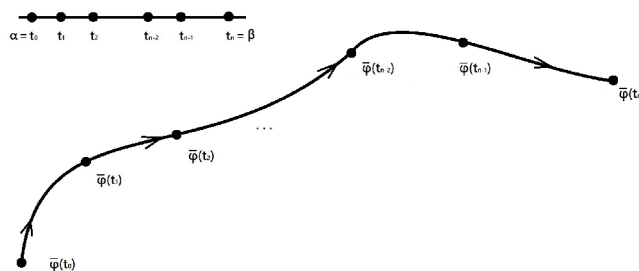
Tuto limitu nazveme křivkovým integrálem druhého druhu z funkce $\vec{F}(P)$ po křivce $\vec{\gamma}$ a značíme ji

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(P) d\vec{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_F(D).$$

Takto definovaný integrál si opět převedeme na určitý integrál. Uvedeme si postup pro jeho výpočet v rovině. Je parametricky zadaná jednoduchá hladká orientovaná křivka $\vec{\gamma}$ a vektorová funkce $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ popisující vektorové pole v okolí křivky $\vec{\gamma}$. Vektorová funkce $\vec{F}(x, y)$ působí na pohybující se bod po křivce $\vec{\gamma}$. Chceme zjistit, jakou práci vykoná vektorové pole \vec{F} . Podle definice bychom tuto práci vyjádřili $W = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(x, y) d\vec{l}$.

Opět se vrátíme k dělení na orientované oblouky, které tentokrát provedeme na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, ze kterého volíme parametry. Dělíme libovolnou konečnou posloupností, kde platí $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$. Toto dělení rozděluje křivku $\vec{\gamma}$ na orientované oblouky $\varphi(t_{i-1}) \hat{\varphi}(t_i)$. Zavedeme normu dělení $v(D) = \max \varphi(t_{i-1}) \hat{\varphi}(t_i)$. V případě, že $v(D) \rightarrow 0$ (a $n \rightarrow \infty$) můžeme nahradit orientovaný oblouk orientovanou úsečkou a také vektorovou funkcí \vec{F} libovolným konstantním vektorem na daném oblouku $\vec{F}(\vec{\varphi}(t_i))$.

Než začneme počítat celkovou práci, musíme si uvědomit, jakým způsobem nám bude orientace křivky ovlivňovat řešení. Z učebnice fyziky víme, že práce vykonaná



Obrázek 5.17: Dělení orientované křivky

silou působící ve směru pohybu je vždy se znaménkem plus, naopak práce vykonaná proti směru pohybu je se znaménkem mínus. Pro úplnost existuje ještě poslední situace, která však v našem případě nastat nemůže. Síla působící kolmo na pohyb nevykonává žádnou práci. Při orientaci souhlasné s parametrizací působí síla ve směru pohybu, tedy se znaménkem plus a naopak práce vykonaná při nesouhlasné orientaci bude se znaménkem mínus. Celkovou práci pro souhlasnou parametrizaci určíme přibližně

$$W \doteq \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{\varphi}(t_i)) \frac{(\vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1})$$

a pro nesouhlasnou parametrizaci

$$W \doteq - \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{\varphi}(t_i)) \frac{(\vec{\varphi}(t_i) - \vec{\varphi}(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}).$$

V limitním počtu $n \rightarrow \infty$ pak práci vyjádříme zcela přesně nejprve pro práci souhlasnou parametrizaci

$$W = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) dt$$

a pro nesouhlasnou parametrizaci

$$W = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(x, y) d\vec{l} = - \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t) dt.$$

Než s tímto vzorcem začneme pracovat, musíme si uvědomit, že i když se ve vzorci vyskytuje vektorová funkce a derivace vektoru, tak integrand je už jako výsledek skalárního součtu pouhý skalár. Také je na místě, abychom si připomněli, že skalární součin probíhá po jednotlivých složkách. Vektory můžeme ještě rozepsat:

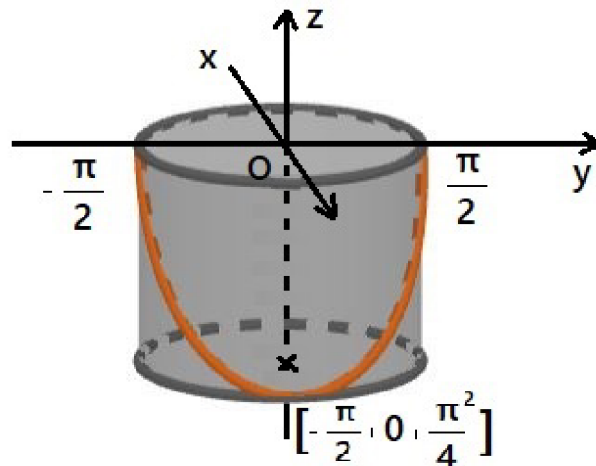
$$\vec{F}(\vec{\varphi}(t_i)) = (F_1(\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i)), F_2(\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))),$$

$$\vec{\varphi}'(t) = (\vec{\varphi}'_1(t), \vec{\varphi}'_2(t)).$$

Pokud bychom chtěli vzorec pro výpočet křivkového integrálu 2. druhu v prostoru, stačí ke každému z vektorů přidat ještě jednu souřadnici. Někdy se také pro vyjádření křivkového integrálu 2. druhu používá toto označení:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \int_{\vec{\gamma}} (F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy).$$

Příklad 5.1 Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu $\int_{\vec{\gamma}} (xy, 0, z + \frac{\pi^2}{4}) d\vec{l}$, kde se bod pohybuje ve směru paraboly sestavené na válci o poloměru $\frac{\pi}{2}$ a výšce $\frac{\pi^2}{4}$. Při pohledu shora se parabola dotýká horní podstavy ve dvou bodech $[0, \frac{\pi}{2}, 0]$ a $[0, -\frac{\pi}{2}, 0]$ a vrchol paraboly se dotýká spodní podstavy v bodě $[-\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi^2}{4}]$. Síla působí ve směru hodinových ručiček.



Obrázek 5.18: Parabola na válcové ploše

Nejprve umístíme válec souřadné soustavy tak, abychom měli horní podstavu v rovině x, y , její střed v počátku soustavy souřadnic. Při pohledu shora má válec tvar kruhu a parabola tvoří jeho polovinu. Proto vyjádříme první dvě souřadnice $x = \frac{\pi}{2} \cos(t)$ a $y = \frac{\pi}{2} \sin(t)$ pro $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Zbývá vyřešit poslední souřadnici. Protože vrchol paraboly má souřadnici $z_V = \frac{\pi^2}{4}$ a další dva body v horní podstavě mají oba souřadnici

$z = 0$, parabola vedená těmito třemi body musí mít poslední souřadnici $z = t^2 - \frac{\pi^2}{4}$.

Zapišeme celé parametrické vyjádření a derivaci:

$$\vec{\gamma} : \vec{\varphi}(t) = \left(\frac{\pi}{2} \cos(t), \frac{\pi}{2} \sin(t), t^2 - \frac{\pi^2}{4} \right), t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\vec{\varphi}'(t) = \left(-\frac{\pi}{2} \sin(t), \frac{\pi}{2} \cos(t), 2t \right).$$

Než dosadíme do vzorce, vyřešíme orientaci. Protože parametrizace vykresluje body křivky proti směru hodinových ručiček a síla působí po směru, jedná se o orientaci nesouhlasnou s parametrizací. Nyní už můžeme dosadit do vzorce a vypočítat:

$$\int_{\vec{l}} (xy, 0, z + \frac{\pi^2}{4}) d\vec{l} = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} \sin(t) \cos(t), 0, t^2 \right) \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \sin(t), \frac{\pi}{2} \cos(t), 2t \right) dt$$

$$\int_{\vec{l}} (xy, 0, z + \frac{\pi^2}{4}) d\vec{l} = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\pi^3}{8} \sin^2(t) \cos(t) + 2t^3 \right) dt.$$

Kvůli integraci prvního členu musíme rozdělit integrál na dva a v prvním provést substituci $\sin(t) = u$, $\cos(t) dt = du$ v mezích od -1 do 1. Zbývá tedy dořešit

$$\int_{\vec{l}} (xy, 0, z + \frac{\pi^2}{4}) d\vec{l} = - \left[\frac{\pi^3 u^3}{24} \right]_{-1}^1 - \left[\frac{t^4}{2} \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$\int_{\vec{l}} (xy, 0, z + \frac{\pi^2}{4}) d\vec{l} = - \frac{\pi^3 + 90\pi^4}{12}.$$

5.3 Využití křivkového integrálu 2. druhu

Už při definování křivkového integrálu 2. druhu jsem si řekli o jeho využití při počítání práce vykonané silou nebo vektorovým polem působícím na hmotný bod pohybující se po orientované křivce. Práce popisuje dráhové účinky síly. Výpočet práce si můžeme ukázat na následujícím příkladě.

Příklad 5.2 *Vypočtěte práci W , kterou vykoná $\vec{F}(xy, xy)$ při pohybu hmotným bodem po křivce zadané v příkladě 4.5 při orientaci křivky proti směru hodinových ručiček.*

Křivku jsme si rozdělili na dvě části s parametrickým vyjádřením a derivacemi

$$\vec{\gamma}_1 : \vec{\varphi}(t) = [\cos(t), \sin(t)], t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \vec{\varphi}'(t) = (-\sin(t), \cos(t)),$$

$$\vec{\gamma}_2 : \vec{\varphi}(t) = [t, -t + 1], t \in \langle 0, 1 \rangle, \vec{\varphi}'(t) = (1, -1).$$

Orientace křivky $\vec{\gamma}_1$ je souhlasná se směrem parametrizace a orientace křivky $\vec{\gamma}_2$ je naopak nesouhlasná se směrem parametrizace. Můžeme tedy dosadit a vypočítat

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2(t)\cos(t) + \cos^2(t)\sin(t))dt - \int_0^1 (-t^2 + t + t^2 - t)dt \\ W &= \int_0^1 -u^2 du + \int_0^1 z^2 dz - \int_0^1 0 dt \\ W &= -\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 \\ W &= 0. \end{aligned}$$

Tento příklad nás vede k dalšímu využití křivkového integrálu ve fyzice, konzervativním silám. Zákon zachování energie nám říká, že celková energie se v izolované soustavě nemění a na této skutečnosti jsou založeny konzervativní síly. Konzervativní síly můžeme definovat dvěma způsoby.

Definice 5.2 Konzervativní síly na uzavřené křivce

Síly jsou konzervativní, jestliže práce sil po uzavřené křivce, po které se hmotný bod pohybuje, je rovna nule.

Kdybychom měli definici napsat jinými slovy, zapsali bychom ji jako $W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow A} = 0$. Kdybychom tuto definici znali dříve, nemuseli bychom předchozí příklad vůbec počítat. Nyní si uvedeme druhé znění definice konzervativních sil.

Definice 5.3 Konzervativní síly a trajektorie

Síly jsou konzervativní, jestliže práce sil mezi dvěma danými body nezávisí na trajektorii, po které se bod pohybuje.

Také bychom místo druhé definice mohli napsat $W_{A \rightarrow B} = -W_{B \rightarrow A}$. Příkladem takové konzervativní síly může být gravitační síla, síla pružiny, magnetická a elektrická síla. Zkusíme pomocí konzervativních sil vyřešit následující příklad.

Příklad 5.3 *Skluzavka na dětském hřišti má tvar křivky z příkladu 4.4 (rozměry jsou v metrech). Skluzavku právě sjel chlapec, který váží 22 kg. Vypočtěte jakou práci vykonala tíhová síla \vec{G} při jeho sklouznutí dolů. Tření zanedbejte.*

Příklad bychom mohli řešit i bez použití konzervativních sil s parametrickým popisem křivky, který již máme vyjádřený, ale s použitím konzervativních sil bude výpočet daleko jednodušší. Druhá z definic konzervativních sil říká, že vykonaná práce nezávisí na trajektorii, ale pouze na počátečním a koncovém bodě pohybujícího se objektu. Počáteční bod $[0, 0, 2\pi]$ a koncový bod $[2\pi, 0, 0]$ ze zadání proto můžeme spojit úsečkou a tím nahradit původní křivku a práce vykonaná tíhovou silou se nezmění. Úsečku popíšeme parametricky pomocí směrového vektoru (koncový bod - počáteční bod) a počátečního bodu a vyjádříme derivaci:

$$\vec{U} : \vec{\varphi}(t) = (2\pi t, 0, 2\pi - 2\pi t), t \in \langle 0, 1 \rangle, \vec{\varphi}'(t) = (2\pi, 0, -2\pi).$$

Všimněme si, že derivací parametrického vyjádření přímky je pouze vektor, ze kterého se parametrizace složila. Interval $\langle 0, 1 \rangle$, ze kterého vybíráme parametr, v tomto případě také není náhodný a bude vždy stejný pokud budeme brát krajní body úsečky. To, že je parametrizace souhlasná s orientací, jsme již vyřešili tím, že jsme pro parametrizaci použili počáteční bod. Stejným způsobem funguje parametrizace úsečky a její orientace vždy. Ještě si musíme uvědomit, jakým způsobem funguje tíhová síla. Tíhová síla $\vec{G} = (0, 0, -mg)$ působí pouze na třetí souřadnici, tedy na výšku, a má směr dolů k zemskému povrchu, proto ji musíme uvažovat se znaménkem mínus. Nyní už můžeme dosadit

$$W = \int_{\vec{U}} \vec{G} d\vec{l} = \int_0^1 (0, 0, -mg) \cdot (2\pi, 0, -2\pi)$$

$$W = 2\pi mg \doteq 2\pi \cdot 22 \cdot 9,81 \doteq 1356 J.$$

Ve výpočtu je vidět, že vliv na vykonanou práci má pouze třetí souřadnice, na kterou jedinou působí tíhová síla. To nás vede k úvaze možného zjednodušení této práce. Ještě než tak učiníme, řekneme si něco o tíhové potenciální energii.

Potenciální energie

Jak napovídá název, potenciální energie tělesa E_p v soustavě je schopnost vykonat práci důsledkem změny polohy tělesa. V případě tíhové potenciální energie uvažujeme těleso v tíhovém poli Země, kde při pohybu tělesa dochází ke změně potenciální energie ΔE_p soustavy Země + těleso. Tato změna je definována jako záporně vzatá práce vykonaná

tíhovým polem Země. Zkráceně píšeme $\Delta E_p = -W_g$. Vztah $\Delta E_p = -W$ platí i obecně u všech druhů potenciální energie. Práci už počítat umíme, proto můžeme odvodit i vzorec pro změnu kinetické energie

$$\Delta E_p = - \int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{l}.$$

Podle definice 5.3 nezávisí na trajektorii tělesa, ale pouze na jeho počáteční a koncové poloze. Těleso se tedy pohybuje pouze jedním směrem. Pokud si zvolíme souřadný systém takový, že směr pohybu je stejný jako směr osy x , pak vykonaná práce i potenciální energie závisí na x -ové souřadnici. Funkci $\vec{F}(x, y, z)$ tak můžeme nahradit funkcí $F(x)$. Dejme si pozor, protože tyto dvě funkce jsou vyjádřeny každá v jiném souřadnicovém systému. Z geometrického hlediska bychom funkci $F(x)$ získali jako kolmý průmět funkce $\vec{F}(x, y, z)$ na novou osu x . Můžeme tedy uvést vzorec

$$\Delta E_p = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx,$$

kde x_i je počáteční poloha tělesa a x_f jeho koncová. Ještě si zkusíme odvodit vzorec pro výpočet tíhové potenciální energie. Abychom se vyhnuli sestrojování kolmého průmětu, vrátíme se opět ke křivkovému integrálu 2. druhu. Pro lepší grafické znázornění odvození provedeme v rovině. Při odvozování budeme vycházet z pohybu tělesa T o hmotnosti m , v tíhovém poli Země $\vec{G} = (0, -mg)$. Těleso se pohne z bodu $T_i[x_i, y_i]$ do bodu $T_f[x_f, y_f]$. Použijeme informace, které jsme si uvědomili na konci příkladu 5.3. Namísto zjišťování parametrického vyjádření křivky a jeho následné derivace nám stačí vektor $\vec{T}_i\vec{T}_f = (x_f - x_i, y_f - y_i)$ (koncový - počáteční bod) a meze integrálu budou $\langle 0, 1 \rangle$. Máme vše potřebné, můžeme dosadit a počítat

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= - \int_{\vec{\gamma}} \vec{G} d\vec{l} \\ \Delta E_p &= - \int_0^1 (0, -mg) \cdot (x_f - x_i, y_f - y_i) dt \\ \Delta E_p &= mg(y_f - y_i). \end{aligned}$$

Jako fyzikální význam má smysl pouze změna tíhové potenciální energie ΔE_p , ale můžeme požadovat v naší soustavě Země + těleso, aby byl každý bod spojený s nějakou

hodnotou potenciální energie. Hodnotu potenciální energie můžeme popsat vztahem $E_p - E_{p,i} = \Delta E_p$, kde $E_{p,i}$ je počáteční potenciální energie. Standardně klademe $E_{p,i} = 0$ pro $y_i = 0$. V takovém případě by na povrchu země byla $E_p = 0$. Pouze v tomto případě můžeme odvodit speciální výpočet potenciální energie $E_p = -\Delta E_p$, po dosazení $E_p = mgy_f$. Na místo y_f použijeme označení výška h a máme notoricky známý vzoreček již ze základní školy $E_p = mgh$.

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo shrnout problematiku určitého integrálu a popsat jeho využití a představit křivkové integrály s jejich aplikacemi. Práce je členěna do dvou částí. První tři kapitoly se zabývají problematikou určitého integrálu a zbylé dvě kapitoly křivkovými integrály.

V první kapitole jsou shrnuty základní teoretické informace o určitém integrálu a druhá kapitola je věnována jeho praktickému využití především v geometrii a ve fyzice. Každé využití je ukázáno na řešených příkladech. Třetí kapitola popisuje přibližné metody výpočtu určitého integrálu, které se využívají zejména u složitějších funkcí, jež nelze integrovat.

Zbylé dvě kapitoly představují křivkové integrály. Čtvrtá kapitola popisuje nejprve křivky a jejich parametrické vyjádření a poté pojednává o křivkovém integrálu prvního druhu a jeho využití. Pátá kapitola se zabývá křivkovým integrálem druhého druhu a jeho využití ve fyzice. Obě kapitoly obsahují řešené příklady.

Na tuto práci by se dalo navázat a rozšířit téma křivkových integrálů o téma plošných integrálů s jejich aplikacemi.

Doufám, že moje stanovené cíle byly splněny a podařilo se mi vytvořit text, který bude čtenářům sloužit nejen k pochopení tématu, ale i aplikaci nabytých zkušeností.

Seznam literatury:

- ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. Numerické metody. 3. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5437-8.
- DANĚČEK, Josef. Integrální počet II. Brno: CERM, 2000. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-1817-6.
- DOŠLÁ, Zuzana a Petr LIŠKA. Matematika pro nematematické obory: s aplikacemi v přírodních a technických vědách. Praha: Grada Publishing, 2014. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-5322-5.
- FAJMON, Břetislav. Fyzikální motivace pro výuku matematiky 02. Brno, 2018.
- FAJMON, Břetislav a Jitka PANÁČOVÁ. Fyzikální motivace pro výuku matematiky. Brno, 2018.
- HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER, DUB, Petr, ed. Fyzika. 2., přeprac. vyd. Přeložil Miroslav ČERNÝ. Brno: VUTIUM, c2013. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 9788021441231.
- JARNÍK, Vojtěch. Integrální počet. 5. vyd. Praha: Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1974.
- KLUVÁNEK, Igor, Ladislav MIŠÍK a Marko ŠVEC. Matematika pre štúdium technických: II. diel. Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1961. Edícia teoretickej literatúry (Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry).
- KOLLÁR, Martin, Ľubica KOSSACZKÁ a Daniel ŠEVČOVIČ. Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch. 3. vyd. Bratislava: Knižničné a edičné centrum FMFI UK, 2012. ISBN 978-80-89186-54-9
- LEPKA, Karel. MA2 – přednáška [online]. Brno, 2019 [cit. 20. 2. 2022]. Dostupné z: [MA2-prednaska.pdf \(is.muni.cz\)](#).
- SLOVÁK, Jan, Martin PANÁK a Michal BULANT. Matematika drsně a svižně. Brno: Masarykova univerzita, 2013. ISBN 978-80-210-6307-5.

TRÁVNÍČEK, Stanislav, Pavel CALÁBEK a Jaroslav ŠVRČEK. Matematická analýza I a II (pro učitelské obory) [online]. Olomouc, 2017 [cit. 20. 2. 2022]. Dostupné z: [MAI+II.pdf \(kag.upol.cz\)](#).

Seznam obrázků:

Obrázek 1.1: Obsah plochy pod křivkou

Obrázek 1.2: Horní integrální součet

Obrázek 1.3: Dolní integrální součet

Obrázek 1.4: Dělení intervalu

Obrázek 1.5: Záporná funkce

Obrázek 1.6: Obsah mezi dvěma křivkami

Obrázek 2.7: Rotační kužel

Obrázek 3.8: Obdélníková metoda

Obrázek 3.9: Lichoběžníková metoda

Obrázek 3.10: Metoda Simpsonova

Obrázek 4.11: Zadání příkladu 4.1

Obrázek 4.12: Závit na kuželu

Obrázek 4.13: Průmět závitu do podstavy

Obrázek 4.14: Dělení křivky

Obrázek 4.15: Kružnicový oblouk a tětiva

Obrázek 4.16: Trojúhelníková ohrada

Obrázek 5.17: Dělení orientované křivky

Obrázek 5.18: Parabola na válcové ploše