

**MASARYKOVA UNIVERZITA**  
**PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA**  
**ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY**

# **Diplomová práce**

**BRNO 2016**

**MÁRIA ŠIMKOVÁ**



**MASARYKOVA UNIVERZITA**  
**PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA**  
**ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY**

---



# **Numerické metody pro hledání vlastních čísel**

Diplomová práce

**Mária Šimková**

**Vedoucí práce: doc. Mgr. Jan Kolářek, Ph.D.**

**Brno 2016**

# Bibliografický záznam

- Autor:** Bc. Mária Šimková  
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita  
Ústav matematiky a statistiky
- Název práce:** Numerické metody pro hledání vlastních čísel
- Studijní program:** Matematika
- Studijní obor:** Statistika a analýza dat
- Vedoucí práce:** doc. Mgr. Jan Kolářek, Ph.D.
- Akademický rok:** 2015/2016
- Počet stran:** *xiii* + 59
- Klíčová slova:** Householderova transformace; Mocninná metoda; Metoda Rayleighova podílu; Arnoldiho metody; Lanczosovy metody; Čebyševovy polynomy; Krylovovy podprostory

# Bibliografický záznam

- Autor:** Bc. Mária Šimková  
Prírodovedecká fakulta, Masarykova univerzita  
Ústav matematiky a štatistiky
- Názov práce:** Numerické metódy pre hľadanie vlastných čísiel
- Študijný program:** Matematika
- Študijný odbor:** Štatistika a analýza dát
- Vedúci práce:** doc. Mgr. Jan Koláček, Ph.D.
- Akademický rok:** 2015/2016
- Počet strán:** *xiii* + 59
- Kľúčové slová:** Householderova transformácia; Mocninová metóda; Metóda Rayleighovho podielu; Arnoldiho metódy; Lanczosove metódy; Čebyševove polynómy; Krylovove podpriestory

# Bibliographic Entry

**Author:** Bc. Mária Šimková  
Faculty of Science, Masaryk University  
Department of Mathematics and Statistics

**Title of Thesis:** Numerical methods for eigenvalues

**Degree Programme:** Mathematics

**Field of Study:** Statistics and Data Analysis

**Supervisor:** doc. Mgr. Jan Kolářček, Ph.D.

**Academic Year:** 2015/2016

**Number of Pages:** *xiii* + 59

**Keywords:** Householder transform; Power method; Rayleigh quotient method; Arnoldi methods; Lanczos methods; Chebyshev polynomials; Krylov subspaces

# Abstrakt

V této práci se zabýváme problémem vlastních čísel na konečně rozměrném vektorovém prostoru. Přičem důraz hlavně klademe na odvození konvergence numerických metod za vhodných předpokladů případně odvození odhadu vzdálenosti mezi exaktními a aproximativními vlastními hodnotami (vektory) nějakého lineárního operátoru. Tímto způsobem se zabýváme mocninovou metodou a metodou Rayleighova podílu, při které konvergence je odvozená na základě ideje o operátorové funkci. Dále se věnujeme projekčním metodám na Krylovově podprostoru, kde například popisujeme Arnoldiho metodu za využití Householderovy transformace. V případě některých projekčních metod diskutujeme vztah mezi generátory Krylovových podprostorů a formálně ortogonálními polynomy. Též se věnujeme porovnání exaktních a aproximativních vlastních hodnot (vektorů) určených Lanczosovým algoritmem za využití Čebyševových polynomů. Na závěr porovnáme diskutované algoritmy na vhodných příkladech.

# Abstrakt

V tejto práci sa zaoberáme problémom vlastných čísiel na konečne rozmernom vektorovom priestore. Pričom dôraz hlavne kladieme na odvodenie konvergenzie numerických metód za vhodných predpokladov prípadne odvodenie odhadu vzdialenosti medzi exaktnými a aproximatívnymi vlastnými hodnotami (vektormi) nejakého lineárneho operátora. Týmto spôsobom sa zaoberáme mocninovou metódou a metódou Rayleighovho podielu, pri ktorej konvergencia je odvodená na základe ideí o operátorovej funkcii. Ďalej sa venujeme projekčným metódam na Krylovove podpriestory, kde napríklad popisujeme Arnoldiho metódu za využitia Householderovej transformácie. V prípade niektorých projekčných metód diskutujeme vzťah medzi generátormi Krylovových podpriestorov a formálne ortogonálnymi polynómami. Tiež sa venujeme porovnaniu exaktných a aproximatívnych vlastných hodnôt (vektorov) určených Lanczosovým algoritmom za využitia Čebyševových polynómov. Na záver porovnáme diskutované algoritmy na vhodných príkladoch.

# Abstract

In this thesis we deal with a problem of eigenvalues on a finite dimensional vector space. Whereas we focus on deriving a convergence of numerical methods under suitable assumptions eventually on estimation of a distance between exact and approximative eigenvalues (eigenvectors) of a certain linear operator. In this way we deal with the power method and the Rayleigh quotient method at which its convergence is derived on the basis of operator function idea. Further we look to projection methods onto Krylov subspaces especially we describe the Arnoldi method using the Householder transform. In a case of some projective methods we discuss a relation between generators of Krylov subspaces and formal orthogonal polynomials. There is also comparison of exact and approximative eigenvalues (eigenvectors) given by the Lanczos algorithm using the Chebyshev polynomials. At the end we compare discussed algorithms on suitable examples.





Masarykova univerzita  
Přírodovědecká fakulta



## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Mária Šimková**  
Studijní program: **Matematika**  
Studijní obor: **Statistika a analýza dat**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s tématem:

### Numerické metody pro hledání vlastních čísel

#### Numerical methods for eigenvalues

*Oficiální zadání:* Popište některé známé numerické metody pro hledání vlastních čísel matic. Zaměřte se také na speciální třídy matic, např. symetrické matice. Zmíněné metody také naprogramujte v nějakém statistickém software a proveďte srovnávací studii. Předpokládají se dobré programátorské schopnosti. Téma je určeno pro studenty oboru Statistika a analýza dat. Práce bude vypracována ve slovenském jazyce.


#### Doporučená literatura

MATHEWS, John H. a Kurtis D. FINK. Numerical methods using MATLAB. 4th ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson, 2004. ix, 680 p. ISBN 0-13-065248-2.,  
RALSTON, Anthony. Základy numerické matematiky [Ralston, 1978]. 2. české vyd. Praha: Academia, 1978. 635 s.:

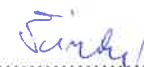
*Vedoucí diplomové práce:* Mgr. Jan Kolářek, Ph.D.

*Datum zadání diplomové práce:* říjen 2013

V Brně dne 31. 10. 2013

  
prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.  
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Souhlasím se zadáním (datum, podpis):

 27.11.2013  
.....  
student(ka)

  
.....  
vedoucí práce

# Poděkování

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať doc. Mgr. Janovi Koláčkovi, Ph.D. za odborné vedenie diplomovej práce, cenné rady, pripomienky a čas, ktorý mi venoval.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 8. května 2016

.....  
Mária Šimková

# Obsah

<b>Kapitola 1. Teoretický základ</b> .....	<b>1</b>
1.1 Základné pojmy a tvrdenia .....	1
1.2 Niektoré triedy polynómov .....	6
1.2.1 Formálne ortogonálne polynómy .....	6
1.2.2 Čebyševove polynómy .....	8
1.3 Operátory s konečnou hodnotou .....	9
<b>Kapitola 2. Maticové rozklady</b> .....	<b>11</b>
2.1 LU rozklad .....	11
2.2 QR rozklad .....	13
2.2.1 Gramov-Schmidtov proces .....	13
2.2.2 Householderova transformácia .....	13
<b>Kapitola 3. Výpočet špecifického vlastného čísla</b> .....	<b>19</b>
3.1 Mocninová metóda .....	19
3.2 Inverzná mocninová metóda .....	21
3.3 Metóda Rayleighovho podielu .....	22
3.4 Deflačné metódy .....	27
<b>Kapitola 4. Projekčné metódy</b> .....	<b>30</b>
4.1 Jednoduchá iterácia podpriestorom s projekciou .....	31
4.2 Projekčné metódy na Krylovove podpriestory .....	33
4.2.1 Arnoldiho metóda .....	35
4.2.2 Samoadjungovaný Lanczosov algoritmus .....	38
4.2.3 Antisymetrický Arnoldiho algoritmus .....	40
4.2.4 Nesamoadjungovaný Lanczosov algoritmus .....	41
4.3 Konvergencia Krylovových metód .....	43
<b>Kapitola 5. Praktická časť</b> .....	<b>48</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b> .....	<b>57</b>

# Úvod

V tejto práci sa zaoberáme numerickým problémom hľadania vlastných čísiel. Vlastné čísla, alebo ekvivalentne spektrum lineárneho operátora na (konečne rozmernom) vektorovom priestore, hrajú dôležitú úlohu pri riešení problémov či už v oblasti (parciálnych) diferenciálnych rovníc alebo v stochastických procesov a určite v mnohých ďalších oblastiach.

Koncept tejto práce je zamýšľaný nasledujúcim spôsobom. Prvé dve kapitoly sa venujú nutnému teoretickému základu – niektoré pojmy pripomínajú, iné doplňujú. Bezprostredne nasledujúcich dvoch kapitolách sa zameriavame na metódy výpočtu vlastného čísla s nejakou špecifickou vlastnosťou a projekčným metódam najmä do Krylovových podpriestorov. Kladieme dôraz na čo najpresnejší popis metódy matematicky, aby sme mohli v prípadoch, kedy je to bežnými prostriedkami možné, dokázať konvergenciu príslušnej metódy. Prípadne sa snažíme odhadnúť vzdialenosť medzi aproximatívnymi vlastnými číslami (vektormi) a tými exaktnými. V neposlednom rade sa venujeme rôznymi implementáciami nejakého algoritmu, hoci sa jedná z matematického pohľadu o ekvivalentné implementácie, ale z numerického pohľadu existujú medzi nimi celkom významné rozdiely ako bude vidieť v poslednej kapitole tejto práce. V neposlednom rade je v tejto práci pripomenutý vzťah medzi Čebyševovými polynómami či formálne ortogonálnymi polynómami a niektorými algoritmi pre výpočet generátorov Krylovových podpriestorov. Otázkami stability metódy sa budeme v tejto práci zaoberať minimálne vzhľadom k vyššie vytýčenému cieľu.

Táto práca predpokladá, že je čitateľ oboznámený s povinnými predmetmi oboru Statistika a analýza dat na PŘF MU.

# Prehľad použitého značenia

Pre jednoduchšiu orientáciu v texte tu čitateľovi predkladáme prehľad základného značenia, ktoré sa v celej práci vyskytuje.

$\mathbb{C}$	množina všetkých komplexných čísiel
$\mathbb{R}$	množina všetkých reálnych čísiel
$\mathbb{R}_+$	množina kladných reálnych čísiel
$\mathbb{R}_0^+$	množina nezáporných reálnych čísiel
$\mathbb{N}$	množina všetkých prirodzených čísiel
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{K}$	množina všetkých reálnych čísiel alebo množina všetkých komplexných čísiel
$\mathbb{K}^*$	$\mathbb{K} \setminus \{0\}$
$\mathbb{K}[x]$	vektorový priestor polynómov $\mathbb{K}[x]$
$\mathbb{K}_n[x]$	vektorový priestor polynómov $\mathbb{K}[x]$ stupňa najviac $n \in \mathbb{N}$
$\langle -, - \rangle$	skalárny súčin na vektorovom priestore
$\ \cdot\ _V$	norma na vektorovom priestore $V$
$\ v\ _2$	$\sqrt{\langle v, v \rangle}$
$\mathcal{L}(V)$	množina spojitých lineárnych operátorov na normovanom lineárnom priestore $V$
$S^n(V)$	$\{v \in V \mid \ v\ _V = 1\}$
$S^n$	$S^n(\mathbb{K}^{n+1})$
$P(V)$	projektívny priestor vektorového priestoru $V$
$[v_1, v_2, \dots, v_n] \subseteq V$	prienik všetkých vektorových podpriestorov priestoru $V$ obsahujúcich množinu $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
$V^*$	duálny vektorový priestor ku $V$
$U^\perp \subseteq V$	$\{u \in U \mid (\forall v \in V) \langle v, u \rangle = 0\}$
$R_\lambda$	$\{v \in V \mid (\exists k \in \mathbb{N}) (\varphi - \lambda \text{id})^k u = 0\}$
$K_m(\varphi, v)$	Krylovov podpriestor generovaný $\varphi^i(v)$ pre $i = 0, 1, \dots, m-1$
$P_U^W$	projekcia na podpriestor $U$ priestoru $V$ , ak platí $V = U \oplus W^\perp$
$\varepsilon$	štandardná báza $\mathbb{K}^n$
$\delta_{ij}$	Kroneckerova delta funkcia

$st$	stupeň nejakého polynómu
$\text{dist}(a, A)$	vzdialenosť bodu $a \in V$ od množiny $A \subseteq V$
$T_n$	$n$ -tý Čebyševov polynóm
$\varphi^*$	adjungovaný operátor k operátoru $\varphi$
$\varphi_m$	zúženie operátoru $\varphi$ na Krylovov podpriestor $K_m$ t. j. $P_{K_m} \varphi _{K_m}$
$\sigma(\varphi)$	$\{\lambda \in \mathbb{K}   (\exists v \in V \setminus \{0\}) \varphi(v) = \lambda v\}$
$r(\varphi)$	$\sup_{\lambda \in \sigma(\varphi)}  \lambda $
$\lambda(v)$	Rayleighov podiel t. j. $\frac{\langle \varphi(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle}$
$f(\varphi)$	operátorova funkcia
$(\varphi)_{\alpha\alpha}$	matica zobrazenia operátoru $\varphi$ v bázi $\alpha$
$\Delta\lambda(v)$	$\frac{\lambda(v) - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda(v)}$
$\text{Mat}_n(\mathbb{K})$	vektorový priestor matíc $n \times n$ nad $\mathbb{K}$
$I$	jednotková matica
$\Re(c)$	reálna časť komplexného čísla $c \in \mathbb{C}$

# Kapitola 1

## Teoretický základ

V tejto práci budeme uvažovať konečne rozmerný vektorový priestor  $V$  so skalárnym súčinom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nad telesom  $\mathbb{K}$  a  $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$ . Rovnako je možné na  $V$  nahliadnuť ako na normovaný lineárny priestor  $(V, \|\cdot\|_V)$ , kde  $\|\cdot\|_V$  je nejaká norma definovaná na  $V$  napr. odvodená zo skalárneho súčinu. V tejto kapitole uvedieme tvrdenia zo základných kurzov lineárnej algebry a funkcionálnej analýzy, z ktorých budeme vychádzať v nasledujúcich kapitolách. Táto časť vychádza hlavne zo zdrojov [23] a [8].

### 1.1 Základné pojmy a tvrdenia

**Definícia 1.1.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor. *Vlastným vektorom* operátora  $\varphi$  je nenulový vektor  $v \in V$ , ak existuje  $\lambda \in \mathbb{K}$  tak, že  $\varphi(v) = \lambda v$ . Číslo  $\lambda$  nazývame *vlastným číslom* operátora  $\varphi$  príslušným k vlastnému vektoru  $v$ . Množinu všetkých vlastných čísiel operátora  $\varphi$  nazveme *spektrom* operátora  $\varphi$  a značíme ju  $\sigma(\varphi)$ . Spektrálnym polom-erom operátora  $\varphi$  za predpokladu  $\sigma(\varphi) \neq \emptyset$  nazývame  $r(\varphi) = \sup_{\lambda \in \sigma(\varphi)} |\lambda|$ . Operátor  $\varphi^*: V \rightarrow V$  je *adjungovaný* k operátoru  $\varphi$ , ak  $\forall u, v \in V$  platí  $\langle u, \varphi^*(v) \rangle = \langle \varphi(u), v \rangle$ .

*Poznámka.* V numerickej matematike sa často rozlišuje pojem pravý a ľavý vlastný vektor. Pravý vlastný vektor uvažujeme v zmysle definície 1.1. Ľavý vlastný vektor operátora  $\varphi$  príslušný k vlastnému číslu  $\lambda$  môžeme definovať ako vlastný vektor adjungovaného lineárneho operátora  $\varphi^*$  príslušný k vlastnému číslu  $\bar{\lambda}$ , čo nám umožňuje lema 3.17.

Z definície vlastného vektora  $v$  operátora  $\varphi$  vyplýva, že pre ľubovoľné  $k \in \mathbb{K}^*$  je opäť  $kv$  vlastným vektorom operátora  $\varphi$ . Preto budeme uvažovať konvergenciu postupnosti vlastných vektorov nejakého lineárneho operátora na  $V$  v projektívnom priestore  $P(V) \cong S^{n-1}(V)/\sim$ , kde je

$$x \sim y \iff \exists \xi \in S^0 \subseteq \mathbb{K} : x = \xi y \text{ pre } x, y \in S^{n-1}(V),$$

s topológiou indukovanou projekciou  $p: S^{n-1}(V) \rightarrow S^{n-1}(V)/\sim$ , pričom na  $S^{n-1}(V)$  uvažujeme topológiu podpriestoru  $V$  indukovanú normou  $\|\cdot\|_V$ . Z predošlých úvah sa ľahko odvodí tvrdenie prevzaté z [11, Proposition 2.1]

**Veta 1.2.** *Postupnosť  $\{p(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq P(V)$  konverguje v  $P(V)$  práve vtedy, keď existuje postupnosť  $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in S^0 \subseteq \mathbb{K}$  taká, že  $\left\{ \mu_k \frac{u_k}{\|u_k\|_V} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq S^{n-1}(V)$  konverguje v  $S^{n-1}(V)$ .*

**Veta 1.3.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor a  $\alpha = (v_i)_{i=1}^n$  báza priestoru  $V$ . Potom existuje lineárny operátor  $\varphi_\alpha: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  tak, že nasledujúci diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \downarrow (\ )_\alpha & & \downarrow (\ )_\alpha \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Naviac operátor  $\varphi_\alpha$  je daný predpisom  $\varphi_\alpha(x) = (\varphi)_{\alpha\alpha}x$  pre  $x \in \mathbb{K}^n$ , kde

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = ((\varphi(v_1))_\alpha, (\varphi(v_2))_\alpha, \dots, (\varphi(v_n))_\alpha)$$

je matica zobrazenia  $\varphi$  v bázi  $\alpha$ .

*Dôkaz.* Viď [23, časť 2.24 na str. 15]. □

**Dôsledok 1.4.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor,  $\alpha$  báza priestoru  $V$  a  $\lambda \in \mathbb{K}$  ľubovoľné. Potom platí  $\lambda \in \sigma(\varphi)$  práve vtedy, keď je  $\lambda \in \sigma(\varphi_\alpha)$ .

*Dôkaz.* Nech je  $\lambda \in \sigma(\varphi)$ . Potom existuje nenulový  $v \in V$  tak, že platí  $\varphi(v) = \lambda v$ , odkiaľ dostávame  $\varphi_\alpha((v)_\alpha) = (\varphi(v))_\alpha = \lambda(v)_\alpha$ . Pretože  $(\ )_\alpha$  je injektívne, máme  $\lambda \in \sigma(\varphi_\alpha)$ . Analogicky sa ukáže druhá implikácia za využitia faktu, že zobrazenie  $(\ )_\alpha$  je lineárny izomorfizmus. □

**Veta 1.5.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor a  $a \in \mathbb{K}$ . Operátor  $\varphi$  má vlastné číslo  $\lambda \in \mathbb{K}$  práve vtedy, keď  $\varphi - a\text{id}$  má vlastné číslo  $\lambda - a$ . Ak operátor  $\varphi$  má vlastné číslo  $\lambda \in \mathbb{K}$ , potom  $\varphi^k$  má vlastné číslo  $\lambda^k$ . Naviac, ak  $\varphi$  je bijekcia platí  $\varphi$  má vlastné číslo  $\lambda$  práve vtedy, keď  $\varphi^{-1}$  má vlastné číslo  $\lambda^{-1}$ .

*Dôkaz.* Nech je  $\lambda \in \sigma(\varphi)$ , teda platí  $\varphi(v) = \lambda v$  pre nejaké nenulové  $v \in V$ . Potom dostaneme  $(\varphi - a\text{id})(v) = \varphi(v) - av = (\lambda - a)v$ ,  $\varphi^k(v) = \lambda^k v$  a v prípade  $\varphi$  bijektívneho zobrazenia máme  $\lambda^{-1}v = \lambda^{-1}\varphi^{-1}\varphi(v) = \varphi^{-1}(v)$ . Predpokladajme, že  $(\varphi - a\text{id})(v) = (\lambda - a)v$  pre nejaké nenulové  $v \in V$ , potom dostaneme  $\varphi(v) = (\varphi - a\text{id} + a\text{id})(v) = \lambda v$ . Ak je naviac  $\varphi$  bijekcia a predpokladáme  $\varphi^{-1}(v) = \lambda^{-1}v$ , potom platí  $\lambda v = \lambda \varphi \varphi^{-1}(v) = \varphi(v)$ . □

**Veta 1.6.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor a  $\alpha, \beta$  je nejaké báze  $V$ . Platí  $\lambda \in \sigma(\varphi)$  práve vtedy, keď  $\lambda$  je koreňom polynómu  $\det((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda I)$ . Naviac platí  $\det((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda I) = \det((\varphi)_{\beta\beta} - \lambda I)$  pre  $\lambda \in \sigma(\varphi)$ .

*Dôkaz.* Viď [23, veta 5.8 na str. 32]. □

**Definícia 1.7.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor,  $\alpha$  báza priestoru  $V$  a  $\lambda \in \sigma(\varphi)$ . Polynóm  $\det((\varphi)_{\alpha\alpha} - xI) \in \mathbb{K}[x]$  nazývame charakteristický polynóm operátoru  $\varphi$ . Algebrická násobnosť vlastného čísla  $\lambda$  je  $k \in \mathbb{N}$ , ak násobnosť  $\lambda$  ako koreňa  $\det((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda I)$  je  $k$ . Geometrická násobnosť vlastného čísla  $\lambda$  je  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(\varphi - \lambda \text{id})$ .



**Definícia 1.8.** Nech  $V = U \oplus W^\perp$  je vektorový priestor a  $U, W \subseteq U$  vektorové podpriestory. Projekciou na podpriestor  $U$  nazývame zobrazenie definované nasledovne  $P_U^W(u + w) = u$  pre  $u + w \in U \oplus W^\perp$ . Kolmou projekciou na podpriestor  $U$  nazývame zobrazenie  $P_U^U = P_U$ .

Poznamenajme ešte, že je možné rozšíriť definíciu projekcie na ľubovoľný konečný počet podpriestorov induktívne.

**Lema 1.9.** Nech  $U, W \subseteq V$  sú podpriestory také, že platí  $V = U \oplus W^\perp$ . Potom existujú biortonormálne báze podpriestorov  $U$  a  $W$ .

*Dôkaz.* Najskôr si všimnime, že platí  $V = U \oplus W^\perp \iff V = U^\perp \oplus W$  (plynie to z [6, vety 5.3] – konkrétne z posledných dvoch bodov). Zvolme ortonormálnu bázu  $\alpha = (w_j)_{j=1}^m$  podpriestoru  $W$  a doplníme ju ortonormálnou bázou  $(w_j)_{j=m+1}^n$  podpriestoru  $W^\perp$  na bázu  $\beta$  priestoru  $V$ . Potom zrejme  $(\langle w_j, - \rangle)_{j=1}^n$  je duálna báza k bázi  $\beta$  duálneho priestoru  $V^*$ . Uvažujme lineárne zobrazenie  $\iota^*: V^* \rightarrow U^*$  dané predpisom  $\iota^*(f) = f \circ \iota = f|_U$  indukované inklúziou  $\iota: U \hookrightarrow V$ . Z predpokladu  $V = U^\perp \oplus W$  máme  $[\langle w_l, - \rangle | l = 1, 2, \dots, m] \subseteq \subseteq \text{im } \iota^*$  lineárne nezávislú množinu, pretože ak by pre nejaké  $w_j \in W$  platilo  $\langle w_j, u \rangle = 0$  pre každé  $u \in U$  t. j.  $w_j \in U^\perp$ , potom nutne  $w_j = 0$ . Vzhľadom k platnosti  $\dim_{\mathbb{K}} U^* = m$  je  $U^* = [\langle w_l, - \rangle | l = 1, 2, \dots, m]$ . Z vety o existencii duálnej báze priestoru  $(U^*)^*$  k bázi  $(\langle w_j, - \rangle)_{j=1}^m$  a ztotožnenia  $(U^*)^* = U$  obdržíme požadovanú bázu  $\gamma$  priestoru  $U$  takú, že  $\alpha$  a  $\gamma$  sú biortonormálne báze.  $\square$

Zdôraznime, že lema 1.9 by všeobecne bez predpokladu  $V = U \oplus W^\perp$  platiť nemusela, čo je možné ilustrovať na priestore  $V$  dimenzie  $n \geq 2$ , kde uvážime podpriestory  $W = [v_1]$  a  $V = [v_2]$  také, že platí  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ .

**Definícia 1.10.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor a  $\lambda \in \sigma(\varphi)$ . Operátor  $\varphi$  je *nilpotentný*, ak existuje  $l \in \mathbb{N}$  tak, že platí  $\varphi^l \equiv 0$ . Koreňovým podpriestorom príslušným k vlastnému číslu  $\lambda$  rozumieme  $R_\lambda = \{v \in V | (\exists k \in \mathbb{N})(\varphi - \lambda \text{id})^k v = 0\}$ .

**Lema 1.11.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárne zobrazenie a  $\lambda \in \sigma(\varphi)$  ľubovoľné. Platí:

- (i) Množina  $R_\lambda$  je vektorový podpriestor.
- (ii) Podpriestor  $R_\lambda$  je invariantný voči operátoru  $\varphi$  t. j.  $\varphi(R_\lambda) \subseteq R_\lambda$ .
- (iii) Pre  $\eta \in \mathbb{K} \setminus \{\lambda\}$  je operátor  $(\varphi - \eta \text{id})|_{R_\lambda}$  lineárny izomorfizmus.
- (iv) Operátor  $(\varphi - \lambda \text{id})|_{R_\lambda}$  je nilpotentný.

*Dôkaz.* Viď [23, veta 5.17 na str. 36].  $\square$

**Veta 1.12.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor. Súčet koreňových podpriestorov  $R_{\lambda_1}, R_{\lambda_2}, \dots, R_{\lambda_p}$  príslušných  $k$  po dvoch rôznych vlastným číslam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  operátoru  $\varphi$  je priamy. Navyše pre každú vlastnú hodnotu  $\lambda \in \sigma(\varphi)$  je dimenzia  $R_\lambda$  rovná algebraickej násobnosti  $\lambda$ .

*Dôkaz.* Viď [23, veta 5.23 na str. 38].  $\square$

**Dôsledok 1.13.** *Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor a charakteristický polynóm operátoru  $\varphi$  má práve  $n$  koreňov v  $\mathbb{K}$  včetne násobnosti. Potom platí*

$$\varphi = \sum_{i=1}^p N_i + \lambda_i P_i,$$

kde je  $p = |\sigma(\varphi)|$ ,  $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$  po dvoch rôzne,  $P_i$  je projekcia na  $R_{\lambda_i}$  a  $N_i = (\varphi - \lambda_i)P_i$  je nilpotentný operátor na  $R_{\lambda_i}$ .

*Dôkaz.* Podľa vety 1.12 a z predpokladu tejto vety máme  $V \supseteq \bigoplus_{i=1}^p R_{\lambda_i}$  a  $\sum_{i=1}^p \dim_{\mathbb{K}} R_{\lambda_i} = n$ , odkiaľ plynie  $V = \bigoplus_{i=1}^p R_{\lambda_i}$  t. j.  $v = \sum_{i=1}^p P_i v$  pre  $v \in V$ . Potom zrejme platí  $\varphi(v) = \sum_{i=1}^p \varphi(P_i v) = \sum_{i=1}^p (N_i + \lambda_i P_i)v$ . Operátor  $N_i$  je nilpotentný podľa lemy 1.11 (iv).  $\square$

**Veta 1.14.** *Všetky normy definované na vektorovom priestore  $V$  nad  $\mathbb{K}$  sú ekvivalentné. Skalárny súčin  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  je spojité zobrazenie. Lineárne zobrazenie  $\varphi: V \rightarrow V$  je spojité zobrazenie.*

*Dôkaz.* Viď [8, vety 1.6 a 1.31, časť 2.1].  $\square$

**Veta 1.15.** *Nech  $V$  je vektorový priestor nad  $\mathbb{R}$ . Postupnosť  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq V$  konverguje k  $a \in V$  práve vtedy, keď  $\{(a_k)_\alpha\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n$  konverguje k  $(a)_\alpha \in \mathbb{R}^n$  pre nejakú bázu  $\alpha$  priestoru  $V$ .*

*Dôkaz.* Podľa vety 1.14 existuje  $m \in \mathbb{R}^+$  také, že  $\|(a_k - a)_\alpha\|_{\mathbb{R}^n} \leq m \|((a_k - a)_\alpha)_\alpha^{-1}\|_V$ . Nech je  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  ľubovoľné a predpokladajme, že  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n$  konverguje k  $a \in \mathbb{R}^n$ . Teda k  $\frac{\varepsilon}{m}$  existuje  $k_0 \in \mathbb{N}$  také, že pre všetky  $k \geq k_0$  je  $\|a_k - a\|_V < \frac{\varepsilon}{m}$ . Celkovo dostávame, že pre  $k \geq k_0$  platí  $\|(a_k - a)_\alpha\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$  t. j. ukázali sme požadované tvrdenie. Druhá implikácia sa ukáže analogicky.  $\square$

Vety 1.3 a 1.15 nám umožňujú popisovať algoritmy numerických metód dvomi spôsobmi, a to buď pre matice alebo lineárne operátory. Vždy vyberieme ten spôsob, ktorý nám umožní jednoduchší popis. Základom oboch zmiených viet je fakt, že  $V \cong \mathbb{K}^n$  sú lineárne izomorfné.

**Definícia 1.16.** Pre  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$  definujeme normu nasledovne

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}(V)} = \sup_{\|x\|_V=1} \|\varphi(x)\|_V.$$

**Veta 1.17.** *Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor, potom platí  $\|\varphi\|_2 = \|\varphi^*\|_2$ .*

*Dôkaz.* Zrejme postačuje ukázať  $\|\varphi\|_2 \leq \|\varphi^*\|_2$ , čo dosiahneme nasledovne

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2^2 &= \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi(x)\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle}{\|x\|_2^2} = \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle \varphi^*(\varphi(x)), x \rangle}{\|x\|_2^2} \\ &\leq \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi^*(\varphi(x))\|_2}{\|x\|_2} \leq \sup_{y, x \in V \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi^*(y)\|_2}{\|y\|_2} \frac{\|\varphi(x)\|_2}{\|x\|_2} = \|\varphi^*\|_2 \|\varphi\|_2. \end{aligned}$$

Iste ak je  $\|\varphi\|_2 = 0$ , tak potom nutne  $\varphi = 0 = \varphi^*$  t. j. máme  $\|\varphi\|_2 = \|\varphi^*\|_2$ , čo sme chceli ukázať.  $\square$

Poznamenajme ešte k predošlej vete, že platí všeobecnejšie tvrdenie, ktoré je možné nájsť napr. v [8].

Nasledujúca veta a jej dôkaz vychádza zo zdroja [24]. Z rovnakého zdroja pochádza aj jej dôsledok nazývaný ako *Gelfandova veta* pre lineárne operátory na priestoroch konečnej dimenzie, ktorý po nej nasleduje.

**Veta 1.18.** *Nech  $\varphi$  je lineárny operátor a charakteristický polynóm operátora  $\varphi$  má  $n$  koreňov v  $\mathbb{K}$  včetně násobnosti. Potom platí*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^k = 0 \iff r(\varphi) < 1.$$

*Naviac, ak je  $r(\varphi) > 1$ , potom  $\|\varphi^k\|$  je neohraničená.*

*Dôkaz.* Nech platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^k = 0$ , ďalej nech  $\lambda \in \sigma(\varphi)$  je ľubovoľné a  $x \in V \setminus \{0\}$  príslušný vlastný vektor taký, že platí  $\|x\|_V = 1$ . Potom k  $\varepsilon = 1$  existuje  $k_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pre každé  $k \geq k_0$  je  $\sup_{\|y\|_V=1} \|\varphi^k(y)\|_V < 1$ , teda špeciálne platí  $1 > \|\varphi^k(x)\|_V = |\lambda|^k$  t. j.  $|\lambda| < 1$ . Pretože  $\lambda$  bolo ľubovoľné, máme  $r(\varphi) < 1$ .

Pre  $x \in V$  také, že platí  $\|x\|_V = 1$  počítajme za využitia dôsledku 1.13, pričom pre každé  $i = 1, 2, \dots, p$  bude  $n_i \in \mathbb{N}$  najmenšie také, že platí  $N_i^{n_i} = 0$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi^k(x)\|_V &= \left\| \sum_{i=1}^p (N_i + \lambda_i P_i)^k x \right\|_V \leq \sum_{i=1}^p \left\| (N_i + \lambda_i P_i)^k x \right\|_V = \sum_{i=1}^p \left\| \sum_{j=0}^k \binom{k}{k-j} N_i^j \lambda_i^{k-j} x \right\|_V \\ &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^k \binom{k}{k-j} |\lambda_i|^{k-j} \|N_i^j x\|_V \leq p \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=0}^k k^j |\lambda_i|^{k-j} \|N_i^j x\|_V \\ &\leq p \left( \max_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n_i-1}} \|N_i^j x\|_V \right) \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=0}^{n_i-1} k^j |\lambda_i|^{k-j} \end{aligned}$$

Pri predošlých úpravách využívame hlavne lemy 1.11 (ii), čo nám umožní použiť binomickú vetu. Teda dostávame

$$0 \leq \|\varphi^k\|_V \leq p \left( \max_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n_i} \|N_i^j\|_V \right) \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=0}^{n_i-1} k^j |\lambda_i|^{k-j}$$

a teraz postačuje ukázať vzhľadom ku spojitosti funkcie  $\max$  na  $\mathbb{R}$ , že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n_i-1} |\lambda_i|^{k-j} k^j = 0 \text{ pre každé } i = 1, 2, \dots, p.$$

Táto limita sa určí napr. pomocou diskkrétnej varianty L'Hôpitalovho pravidla. Celkovo obdržíme požadované tvrdenie, a to  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^k = 0$ .

Ak je  $r(\varphi) > 1$ , potom existuje  $i \in \mathbb{N}$  tak, že  $|\lambda_i| > 1$  a príslušný vlastný vektor  $x \in V$  spĺňajúci  $\|x\|_V = 1$ . Potom priamo z definície máme  $\|\varphi^k\|_V \geq \|\varphi^k(x)\|_V = |\lambda_i|^k$ , preto tvrdenie plynie z neobmedzenosti  $|\lambda_i|^k$ .  $\square$

**Dôsledok 1.19** (Gelfand). *Nech  $\varphi$  je lineárny operátor a charakteristický polynóm operátora  $\varphi$  má  $n$  koreňov v  $\mathbb{K}$  včetně násobnosti. Potom platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi^k\|^{\frac{1}{k}} = r(\varphi)$ .*

*Dôkaz.* Nech  $\varepsilon > 0$  je ľubovoľné, potom definujeme lineárne zobrazenia ( $\varphi_{-\varepsilon}$  iba pre  $r(\varphi) > \varepsilon$ ) nasledovne  $\varphi_{\varepsilon} = \frac{1}{r(\varphi)+\varepsilon}\varphi$  a  $\varphi_{-\varepsilon} = \frac{1}{r(\varphi)-\varepsilon}\varphi$ . Zrejme platí  $r(\varphi_{\varepsilon}) < 1 < r(\varphi_{-\varepsilon})$ . Využitím predošlej vety 1.18 obdržíme z príslušných definícií existenciu  $n_{\varepsilon}, n_{-\varepsilon} \in \mathbb{N}$  takých, že  $\|\varphi_{\varepsilon}^n\| < 1$  pre  $n \geq n_{\varepsilon}$  a  $\|\varphi_{-\varepsilon}^n\| > 1$  pre  $n \geq n_{-\varepsilon}$ . Odkiaľ po jednoduchej úprave ihneď dostávame  $(r(\varphi) - \varepsilon)^n < \|\varphi^n\| < (r(\varphi) + \varepsilon)^n$  pre  $n \geq \max\{n_{\varepsilon}, n_{-\varepsilon}\}$ . Poznamenajme, že predošlá nerovnosť zrejme platí aj pre prípad  $r(\varphi) \leq \varepsilon$ . Teraz požadované tvrdenie plynie z definície limity postupnosti.  $\square$

Nakoniec bez dôkazu pridajme inú formuláciu dôsledku 1.19, ktorá sa nám bude hodiť neskôr. Nech sú splnené predpoklady dôsledku 1.19, potom existuje postupnosť  $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  s vlastnosťou  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$  taká, že platí  $\|\varphi^k\| = (r(\varphi) + \varepsilon_k)^k$  pre  $k \in \mathbb{N}$ .

## 1.2 Niektoré triedy polynómov

### 1.2.1 Formálne ortogonálne polynómy

Teraz sa budeme venovať v krátkosti (formálne) ortogonálnym polynómom, ktoré majú určitý vzťah k Lanczosovým algoritmom ako uvidíme neskôr. Pojem formálne ortogonálneho polynómu vznikne zovšeobecnením pojmu ortogonalít dvoch polynómov zavádzanom v štandardnom kurze lineárnej algebry. Budeme predovšetkým vychádzať z materiálu [3].

**Definícia 1.20.** Nech  $c: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}$  je nejaká lineárna forma. Povieme, že polynóm  $p_k \in \mathbb{K}[x]$  stupňa  $\text{st}(p_k) = k \in \mathbb{N}_0$  je *formálne ortogonálny* voči forme  $c$ , ak platí  $c(x^i p_k(x)) = 0$  pre každé  $0 \leq i < k$ . Polynóm  $p_k \in \mathbb{K}_k[x]$  nazývame *ortogonálny*, ak platí  $p_k \perp \mathbb{K}_{k-1}[x]$ .

Poznamenajme, že definícia 1.20 neurčuje formálne ortogonálny polynóm  $p_k$  vzhľadom k forme  $c$  jednoznačne. Obvykle sa pridáva nejaká ďalšia podmienka ako napr. polynóm má byť monický či  $c(x^k p_k) = 1$ . Pre niektoré lineárne formy takýto polynóm nemusí ani existovať. Tento fakt je ľahko vidieť napríklad rozpísaním si sústavy lineárnych rovníc pre koeficienty neznámeho polynómu  $p_k$  a uvážením hodnoty príslušného determinantu matice tejto sústavy. Ďalej si môžeme všimnúť prípad, keď máme definovaný skalárny súčin na  $\mathbb{K}[x]$  splňujúci  $\langle xp, q \rangle = \langle p, xq \rangle$  pre ľubovoľné  $p, q \in \mathbb{K}[x]$ , potom môžeme definovať lineárnu formu  $c$  na  $\mathbb{K}[x]$  nasledovne  $c(p) = \langle 1, p \rangle$  a pojmy formálne ortogonálny polynóm a ortogonálny polynóm splyvajú.

Nasledujúca veta pochádza z materiálu [16]. Táto veta sa zameriava najmä na popis rekurentného vzťahu troch termov ortogonálnych polynómov a navyše dokazuje aj jednoznačnosť postupnosti ortogonálnych polynómov. Ako ešte uvidíme táto veta má tiež blízky vzťah k samoadjungovanému Lanczosovmu algoritmu. Následne túto vetu zovšeobecníme pre formálne ortogonálne polynómy a využijeme ju pri popise look-ahead rozšírenia ne-samoadjugovaného Lanczosovho algoritmu.

**Veta 1.21.** *Nech skalárny súčin na  $\mathbb{K}[x]$  splňuje  $\langle xp, q \rangle = \langle p, xq \rangle$  pre ľubovoľné  $p, q \in \mathbb{K}[x]$ , potom monické ortogonálne polynómy sú dané nasledujúcim rekurentným predpisom*

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k^2 p_{k-1}(x) \quad \text{pre } k \in \mathbb{N}_0, \quad (1.1)$$

pričom platí  $p_{-1} = 0$ ,  $p_0 = 1$ ,  $\alpha_k = \frac{\langle p_k(x), xp_k(x) \rangle}{\|p_k(x)\|_2^2}$  pre  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\beta_k = \frac{\|p_k(x)\|_2}{\|p_{k-1}(x)\|_2}$  pre  $k \in \mathbb{N}$  a  $\beta_0 = 0$ .

*Dôkaz.* Ukážeme, že tri termy po sebe idúcich ortogonálnych polynómov splňujú rovnosť (1.1) a sú jediné s takouto vlastnosťou. Definujeme polynóm  $q(x) = p_{k+1}(x) - (x - \alpha_k)p_k(x) + \beta_k^2 p_{k-1}(x)$  pre pevné  $k \in \mathbb{N}_0$ , potom zrejme platí  $q \in \mathbb{K}_k[x]$  vzhľadom k tomu, že  $p_k(x), p_{k+1}(x)$  sú normované polynómy. Ďalej z definície polynómu  $q(x)$  dostávame

$$\langle q(x), p_i(x) \rangle = \langle (x - \alpha_k)p_k(x), p_i(x) \rangle = \langle p_k(x), xp_i(x) \rangle = 0 \quad \text{pre } i = 0, 1, \dots, k-2.$$

Ukážeme, že platí  $q \perp p_k$  a  $q \perp p_{k-1}$ . K tomu sa nám hodí rovnosť  $xp_{k-1}(x) = p_k(x) + p(x)$  pre nejaké  $p \in \mathbb{K}_{k-1}[x]$ . Upravujeme

$$\begin{aligned} \langle q(x), p_{k-1}(x) \rangle &= -\langle xp_k(x), p_{k-1}(x) \rangle + \beta_k^2 \langle p_{k-1}(x), p_{k-1}(x) \rangle \\ &= -\langle p_k(x), xp_{k-1}(x) \rangle + \beta_k^2 \langle p_{k-1}(x), p_{k-1}(x) \rangle \\ &= -\langle p_k(x), p_k(x) \rangle + \beta_k^2 \langle p_{k-1}(x), p_{k-1}(x) \rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\langle q(x), p_k(x) \rangle = -\langle (x - \alpha_k)p_k(x), p_k(x) \rangle = -\langle xp_k(x), p_k(x) \rangle + \overline{\alpha_k} \langle p_k(x), p_k(x) \rangle = 0.$$

Teda sme ukázali, že platí  $q \in (\mathbb{K}_k[x])^\perp = 0$  vzhľadom k tomu, že  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k$  je ortogonálna báza  $\mathbb{K}_k[x]$ . Týmto sme dokázali tvrdenie.  $\square$

Teraz sa zaoberajme všeobecnejším prípadom a hľadáme obdobnú reláciu medzi formálne ortogonálnymi polynómami vzhľadom k nejakej lineárnej forme  $c$ . V tomto prípade, však môže existovať  $j \in \mathbb{N}$  také, že pre formálne ortogonálny polynóm  $p_j$  stupňa  $j \neq \infty$  platí  $c(x^j p_j) = 0$ , a teda bude potrebné sa zaoberať len nejakou maximálnou podmnožinou  $\mathbb{N}_0$  možných stupňov monických formálne ortogonálnych polynómov ako uvidíme v nasledujúcej vete. Ku formulácii vety budeme potrebovať definovať postupnosť  $\{p_k^*\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ , kde  $p_k^*$  bude označovať monický formálne ortogonálny polynóm stupňa  $n_k \in \mathbb{N}_0$ , potom  $p_{k+1}^*$  bude značiť normovaný formálne ortogonálny polynóm stupňa  $n_{k+1} = n_k + m_k$  pre  $m_k \geq 1$  najmenšie také, že platí

$$\begin{aligned} c(x^i p_k^*) &= 0 \quad \text{pre každé } i = 0, 1, \dots, n_k + m_k - 2 \\ c(x^{n_k + m_k - 1} p_k^*) &\neq 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Vzhľadom k vyššie spomenutej indukčnej definícii predpokladajme, že platí  $c(1) \neq 0$ . Bez dôkazu si uvedieme nasledujúce kľúčové tvrdenie, pretože tento dôkaz spočíva v aplikovaní samotnej definície členov postupnosti  $\{p_k^*\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ .

**Veta 1.22.** *Pre termy postupnosti monických formálne ortogonálnych polynómov  $\{p_k^*\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  platí nasledujúca rovnosť*

$$p_{k+1}^*(x) = (a_{n_k} + a_{n_k+1}x + \dots + a_{n_k+m_k-1}x^{m_k-1} + x^{m_k}) p_k^*(x) - b_{k+1} p_{k-1}(x),$$

kde značíme  $p_{-1}^* = 0$ ,  $p_0^* = 1$ ,  $b_1 = 0$  a  $a_{i+1}, b_{k+1} \in \mathbb{K}$  dané rovnicami

$$\sum_{j=0}^{m_k} a_{j+n_k} c(x^{i+j} p_k^*(x)) - b_{k+1} c(x^i p_{k-1}^*(x)) = 0 \quad \text{pre každé } i = n_k - 1, n_k, \dots, n_k + m_k - 1.$$

## 1.2.2 Čebyševove polynómy

V nasledujúcej časti si pripomenieme Čebyševove polynómy, niektoré ich kľúčové vlastnosti a sekciu ukončíme vetou s význačným názvom min-max pre polynómy. Táto podčasť bude vychádzať z materiálov [5] a [22].

**Definícia 1.23.** Postupnosť polynómov  $T_n(x) \in \mathbb{R}[x]$  nazývame *Čebyševovými polynómami* (prvého druhu), ak platí  $T_n(\cos t) = \cos nt$  pre  $n \in \mathbb{N}_0$  a  $t \in \mathbb{R}$  ľubovoľné.

Ukážeme, že Čebyševove polynómy dané definíciou 1.23 skutočne existujú pre ľubovoľné  $x \in \mathbb{R}$ . K tomu využijeme pre  $k \in \mathbb{N}$  súčet identít  $\cos(k-1)t = \cos kt \cos t + \sin kt \sin t$  a  $\cos(k+1)t = \cos kt \cos t - \sin kt \sin t$  t. j.

$$\cos(k-1)t + \cos(k+1)t = 2 \cos kt \cos t.$$

Pričom ihneď z definície máme  $T_0(x) = 1$  a  $T_1(x) = x$ . Z predošlých úvah máme rekurzívnu formulu  $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$ . Odkiaľ si môžeme všimnúť, že vedúci koeficient polynómu  $T_k$  je  $2^{k-1}$  pre  $k \in \mathbb{N}$ . Iný spôsob odvodenia existencie Čebyševových polynómov je nasledujúci. S využitím ďalších trigonometrických identít upravujeme pre  $|x| \leq 1$ :

$$\begin{aligned} T_n(x) = T_n(\cos t) = \cos nt &= \frac{1}{2} (e^{itn} + e^{-itn}) = \frac{1}{2} ((\cos t + i \sin t)^n + (\cos t - i \sin t)^n) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Pridajme pár komentárov k úpravám (1.3). Najskôr si všimnime prostredníctvom binomickej vety, že sa vo výraze pre  $T_n(x)$  nebudú vyskytovať nepárne mocniny  $\sqrt{1-x^2}$ . Priamym výpočtom za využitia (1.3) sa ľahko presvedčíme, že platí  $T_n(\cosh t) = \cosh nt = \frac{1}{2} (e^{tn} + e^{-tn})$  pre  $x = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) \geq 1$ , odkiaľ ľahko dostaneme  $e^t = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ . Poznamenajme ešte, že z  $T_n(\cosh t) = \cosh nt$  obdržíme rozšírenie na komplexné Čebyševove polynómy voľbou  $t \in \mathbb{C}$ . Pripomeňme, že ešte platí  $|T_n(\cos t)| = |\cos nt| \leq 1$  pre  $t \in \mathbb{R}$ . Prejdime k formulácii min-max vety, ktorej dôkaz bude založený na myšlienke dôkazu vety 4.10 z materiálu [5].

**Veta 1.24 (Min-max).** *Nech  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  je neprázdny interval a  $c \in \mathbb{R}$  splňujúce  $c \geq b$ , potom platí*

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{T_n\left(1 + 2\frac{x-b}{b-a}\right)}{T_n\left(1 + 2\frac{c-b}{b-a}\right)} = \operatorname{argmin}_{p \in \mathbb{R}_n[x]: p(c)=1} \max_{x \in [a,b]} |p(x)|$$

*Dôkaz.* Zrejme stačí tvrdenie dokázať pre interval  $[-1, 1]$ , inak by sme uvážili invertibilnú lineárnu transformáciu  $f: x \mapsto 1 + 2\frac{x-b}{b-a}$ , a potom pre  $p \in \mathbb{R}_n[x]$  ľubovoľné platí

$$\max_{x \in [a,b]} |p(f(x))| = \max_{x \in [-1,1]} |p(x)|.$$

Predpokladajme pre spor, že existuje  $q \in \mathbb{R}_n[x]$  splňujúce  $q(c) = 1$  a

$$\max_{x \in [-1,1]} |q(x)| < \max_{x \in [-1,1]} |\tilde{T}_n(x)|.$$

Uvážme pre  $k = 0, 1, \dots, n$  čísla  $x_k = \cos \frac{(n-k)\pi}{n}$ , ktoré zrejme splňujú

$$|\tilde{T}_n(x_k)| = \left| \frac{(-1)^{n-k}}{T_n(c)} \right| = \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_n(x)|,$$

teda potom nutne platí  $|q(x_k)| < |\tilde{T}_n(x_k)|$ . Ak platí  $c = 1$ , ihneď máme spor, preto ďalej predpokladajme  $c > 1$ . Teda  $r(x_k) = \tilde{T}_n(x_k) - q(x_k)$  je alternujúca postupnosť pre  $k = 0, 1, \dots, n-1$  t. j.  $r(x_k)r(x_{k+1}) < 0$ , a podľa Bolzanovej vety platí, že  $\tilde{T}_n - q$  má aspoň  $n$  koreňov na  $[-1, 1]$ . Ďalej zrejme  $c \notin [-1, 1]$  je tiež koreň  $\tilde{T}_n - q$ , preto zo základnej vety algebry nutne plynie  $\tilde{T}_n - q = 0$ , čo je opäť spor.  $\square$

Ako môžeme vidieť z dôkazu vety 1.24 tvrdenie platí aj pre  $c \leq a$ . V dôkaze sme tiež ukázali platnosť

$$\min_{p \in \mathbb{R}_n[x]: p(c)=1} \max_{x \in [a, b]} |p(x)| = \frac{1}{|T_n(1 + 2\frac{c-b}{b-a})|}.$$

### 1.3 Operátory s konečnou hodnotou

Vo vete 1.3 sme pripomenuli vzťah medzi lineárnymi operátormi na priestore  $V$  a prvkami  $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$  t. j. maticami. Pre takéto matice máme už definovaný pojem hodnoty a tu ho zovšeobecníme pre ľubovoľný operátor na Hilbertovom priestore. Cieľom tejto časti je hlavne poukázať na vzťah medzi maticami nad  $\mathbb{K}$  a operátormi definovanými prostredníctvom skalárneho súčinu, ktoré sa často použijú pri popise numerických metód. Budeme vychádzať z materiálu [19, kapitola 3].

V tejto sekcii budeme pracovať s obcejším priestorom ako  $V$ , a to Hilbertovým priestorom  $H$  nad telesom  $\mathbb{K}$ . A analogicky budeme uvažovať priestor spojitéch lineárnych operátorov  $\mathcal{L}(H)$ .

**Definícia 1.25.** Operátor  $T \in \mathcal{L}(H)$  má konečnú hodnotu, ak platí  $h(T) = \dim_{\mathbb{K}} \text{im} T < \infty$  a číslo  $h(T)$  nazývame hodnotou operátora  $T$ .

Poznamenajme, že operátory s konečnou hodnotou tvoria vektorový podpriestor priestoru  $\mathcal{L}(H)$ .

**Veta 1.26.** Nech  $T \in \mathcal{L}(H)$  je operátor hodnoty  $n \in \mathbb{N}$ , potom existuje ortonormálna konečná množina  $\{e_i\}_{i=1}^n$  priestoru  $H$  taká, že platí

$$Tv = \sum_{i=1}^n \langle T^* e_i, v \rangle e_i.$$

*Dôkaz.* Podľa predpokladu existuje ortonormálna báza  $\{e_i\}_{i=1}^n$  podpriestoru  $\text{im} T$ , preto môžeme písať

$$Tv = \sum_{i=1}^n \langle e_i, Tv \rangle e_i.$$

Funkcionál  $v \mapsto \langle e_i, Tv \rangle$  je spojitý a lineárny na  $H$ , preto podľa Rieszovej vety o reprezentácii spojitého lineárneho funkcionálu na Hilbertovom priestore existuje  $v_i \in H$  také, že platí  $\langle e_i, Tv \rangle = \langle v_i, v \rangle$ . Z definície adjungovaného operátora dostaneme  $T^* e_i = v_i$ , odkiaľ plynie požadované tvrdenie.  $\square$

**Dôsledok 1.27.** *Nech  $T \in \mathcal{L}(H)$  je operátor hodnosti  $n \in \mathbb{N}$ , potom adjungovaný operátor  $T^*$  má hodnotu  $n$ .*

*Dôkaz.* Najskôr ukážeme, že operátor  $T^*$  má konečnú hodnotu. Upravujme za využitia príslušnej definície a vety 1.26 pre  $u, v \in H$

$$\langle u, Tv \rangle = \left\langle u, \sum_{i=1}^n \langle T^* e_i, v \rangle e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle T^* e_i, v \rangle \langle u, e_i \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle e_i, u \rangle (T^* e_i), v \right\rangle.$$

Týmto sme ukázali, že platí  $T^* u = \sum_{i=1}^n \langle e_i, u \rangle (T^* e_i)$  t. j.  $T^*$  má konečnú hodnotu. Teraz nám stačí ukázať, že  $T^* e_i$  sú lineárne nezávislé v  $H$ . Sporom predpokladajme, že platí  $\sum_{i=1}^n b_i T^* e_i = 0$  pre  $b_i \in \mathbb{K}$  a existuje  $b_j \neq 0$ . Potom dostaneme  $\sum_{i=1}^n b_i e_i \in \ker T^* \cap \text{im} T$ . Lahko sa odvodí z definície, že platí množinová rovnosť  $(\text{im} T)^\perp = \ker T^*$ , odkiaľ nutne musí platiť  $\sum_{i=1}^n b_i e_i = 0$ , čo je spor s lineárnou nezávislosťou  $e_i$  v  $H$ . Týmto je tvrdenie dokázané.  $\square$

Dôsledok 1.27 vlastne zovšeobecňuje známy fakt, že hodnoty stĺpcová i riadková (t. j. stĺpcová hodnota transponovanej matice) nejakej matice z  $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$  sú zhodné. Ďalej napríklad z vety 1.26 plynie, že pre  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$  splňujúcu  $h(A) = 1$  platí  $Ax = \langle v, x \rangle u$  pre vhodné  $u, v \in \mathbb{K}^n$ . A jej dôkaz nám dáva návod ako nájsť vektory  $u, v$ . Preto položíme  $u = a_j$  a  $v = A^T u$ , kde  $a_j$  je nejaký stĺpec matice  $A$ .



# Kapitola 2

## Maticové rozklady

V tejto kapitole sa zameranie na maticové rozklady, ktoré hrajú dôležitú úlohu v algoritmoch pre výpočet vlastných čísiel, ako bude vidieť v nasledujúcich kapitolách. Tento dôvod nás motivuje k podrobnejšiemu štúdiu týchto rozkladov špeciálne QR rozkladu, ktorý sa vyznačuje numerickou stabilitou.

### 2.1 LU rozklad

Táto časť práce vychádza z materiálu [13]. Najskôr si uvedieme príslušný algoritmus a následne sa budeme venovať jeho korektnosti.

---

**Algoritmus 2.1** LUFACTORIZATION( $A$ )

---

```
1:  $U \leftarrow A$ 
2:  $L \leftarrow I$ 
3:  $P \leftarrow I$ 
4: for  $k \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do
5:    $j_k \leftarrow \operatorname{argmax}_{k \leq j \leq n} |U_{jk}|$ 
6:    $P_k \leftarrow \sigma_{(k,j_k)}(I)$   $\triangleright \sigma_{(k,j_k)}(I)$  značí  $(k, j_k)$  transpozíciu stĺpcov matice  $I$ 
7:    $(l_k)_j \leftarrow \begin{cases} 0 & 1 \leq j \leq k \\ \frac{a_{jk}}{a_{kk}} & k < j \leq n \end{cases}$ 
8:    $L_k \leftarrow I - l_k e_k^T$ 
9:    $L \leftarrow P_k L P_k L_k^{-1}$ 
10:   $U \leftarrow L_k P_k U$ 
11:   $P \leftarrow P_k P$ 
12: return  $L, U, P$ 
```

---

**Veta 2.1** (LU rozklad). *Nech  $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$  je regulárna, potom matice  $P, L, U \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$  určené algoritmom 2.1 splňujú  $PA = LU$  a majú nasledujúce vlastnosti:*

- $P$  je nejakou permutáciou stĺpcov jednotkovej matice
- $L$  je dolná trojuholníková matica s  $L_{ii} = 1$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$

• *U je horná trojuholníková matica*

*Dôkaz.* Matica  $U$  daná algoritmom 2.1 je horná trojuholníková zo samotnej konštrukcie. Teda sa nám podarilo skonštruovať nasledujúci rozklad

$$L_{n-1}P_{n-1}\dots L_2P_2L_1P_1A = U. \quad (2.1)$$

Budeme uvažovať  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  ľubovoľné. Pre ďalšie úpravy potrebujeme platnosť  $L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$ . Overíme, že skutočne predpis  $L_k^{-1}$  je korektný t. j.  $L_k^{-1}L_k = L_kL_k^{-1} = I - l_k e_k^T l_k e_k^T = I$  využitím  $e_k^T l_k = 0$ . Ekvivalentne rovnicu (2.1) môžeme písať

$$P_{n-1}\dots P_2P_1A = P_{n-1}\dots P_2L_1^{-1}P_2^{-1}L_2^{-1}\dots P_{n-1}^{-1}L_{n-1}^{-1}U. \quad (2.2)$$

Potom zrejme  $P_{n-1}\dots P_2P_1$  je permutácia stĺpcov jednotkovej matice t. j.  $P = P_{n-1}\dots P_2P_1$ . Označíme  $L'_k = P_{n-1}\dots P_{k+2}P_{k+1}L_kP_{k+1}^{-1}\dots P_{k+2}^{-1}P_{n-1}^{-1}$ , potom rovnicu (2.2) upravíme na tvar  $PA = (L'_{n-1}\dots L'_2L'_1)^{-1}U$ . K dokončeniu dôkazu potrebujeme ukázať, že platí  $L = (L'_{n-1}\dots L'_2L'_1)^{-1}$  je dolná trojuholníková matica s diagonálnymi prvkami  $L_{kk} = 1$ . Z definície príslušných matíc dostaneme  $L'_k = I - l'_k e_k^T$  pre  $l'_k = P_{n-1}\dots P_{k+2}P_{k+1}l_k$ . Indukciou ukážeme, že platí  $(L'_{n-1}\dots L'_2L'_1)^{-1} = I + l'_1 e_1^T + l'_2 e_2^T + \dots + l'_{n-1} e_{n-1}^T$ . Pre  $n = 2$  sme tvrdenie už ukázali. Predpokladáme, že pre nejaké  $1 < l < n$  platí

$$(L'_{n-l}\dots L'_2L'_1)^{-1} = I + l'_1 e_1^T + l'_2 e_2^T + \dots + l'_{n-l} e_{n-l}^T.$$

Určíme

$$\begin{aligned} (L'_{n-l+1}\dots L'_2L'_1)^{-1} &= (I + l'_1 e_1^T + l'_2 e_2^T + \dots + l'_{n-l} e_{n-l}^T)(I + l'_{n-l+1} e_{n-l+1}^T) \\ &= I + l'_1 e_1^T + l'_2 e_2^T + \dots + l'_{n-l+1} e_{n-l+1}^T \end{aligned}$$

s využitím  $e_j^T l'_{n-l+1} = 0$  pre  $j < n - l + 1$ . □

*Poznámka.* Permutácia riadkov matice  $A$  je nutná z dôvodu zamedzenia delenia nulou pri počítaní matice  $L_k$ . Pri praktickom výpočte sa môže hodiť, že z definície matíc  $P_k$  v predošlom dôkaze platí  $P_k = P_k^T = P_k^{-1}$ . Uvažujme sústavu  $Ax = b$  pre  $x, b \in \mathbb{K}^n$  a  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ , ktorú vyriešime prostredníctvom LU rozkladu. Nech platí  $PA = LU$ , kde matice  $P, L, U$  sú určené vetou 2.1. Potom máme sústavu  $P Ax = L(Ux) = Pb$ , ktorú je možné vyriešiť v dvoch krokoch:

1. Vyriešime  $Ly = Pb$ , odkiaľ dostaneme  $y \in \mathbb{K}^n$ .
2. Nájdeme riešenie  $Ux = y$ , ktoré je aj riešením  $Ax = b$ .

Ako si môžeme všimnúť z dôkazu LU rozkladu, je ho možné zostrojiť aj pre singulárne matice, rovnako aj obdĺžnikové. Len je potrebné pridať zastavovacie kritérium algoritmu, aby sme zamedzili deleniu nulou. V prípade obdĺžnikových matíc bude matica  $L$  štvorcová, kvôli potrebe inverzie a  $U$  obdĺžniková rovnakých rozmerov ako matica  $A$ . LU rozklad vyžaduje  $O(n^2)$  operácií, čo je menej ako Gaussova eliminácia  $O(n^3)$ . Z tohto dôvodu môže byť vhodné využiť LU rozklad pre výpočet determinantu matice za predpokladu, že je štvorcová:

$$\det(A) = \det(PLU) = (-1)^s \prod_{i=1}^n u_{ii},$$

kde  $s$  je počet zamenených riadkov matice  $A$  pri výpočte LU rozkladu.

## 2.2 QR rozklad

### 2.2.1 Gramov-Schmidtov proces

Tento dobre známy ortogonalizačný proces je základom niekoľkých algoritmov pre výpočet QR rozkladu matíc. Táto podčasť bude založená na materiáli [2].

Na úvod pripomeňme základnú myšlienku tohto algoritmu. Uvažujme unitárny vektorový priestor  $V$  a lineárne nezávislé vektory  $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$  a chceme nájsť ortogonálne vektory  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  také, že platí  $[u_1, u_2, \dots, u_j] = [v_1, v_2, \dots, v_j]$  pre  $1 \leq j \leq m$ . Ekvivalentne môžeme písať pre  $0 \leq j \leq m-1$  a  $P_U$

$$v_{j+1} = \left( \text{id} - P_{[v_1, v_2, \dots, v_j]} \right) u_{j+1} = (\text{id} - P_{[v_j]}) \dots (\text{id} - P_{[v_2]}) (\text{id} - P_{[v_1]}) u_{j+1}, \quad (2.3)$$

čo je základom dvoch najznámejších algoritmických popisov – klasického (prvé vyjadrenie  $v_{j+1}$  v (2.3)) a modifikovaného (druhé vyjadrenie  $v_{j+1}$  v (2.3)). Geometricky sa jedná o kolmú projekciu  $u_j$  do podpriestorov  $[v_1, v_2, \dots, v_j]^\perp = \bigcap_{i=1}^j [v_i]^\perp$  pre  $1 \leq j \leq m$ .

Na nasledujúcich riadkoch si uvedieme modifikovaný Gramov-Schmidtov proces vo forme pseudokódu, nakoľko klasický Gramov-Schmidtov proces je z numerického hľadiska nestabilný.

---

#### Algoritmus 2.2 QRFACTORIZATION(A)

---

```

1: for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
2:    $a_i \leftarrow \frac{a_i}{\|a_i\|_2}$   $\triangleright A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 
3:   for  $j \leftarrow (i+1)$  to  $n$  do
4:      $a_j \leftarrow a_j - \langle a_i, a_j \rangle a_i$ 
5: return  $A$ 

```

---

Tento algoritmus bude využívaný vo štvrtej kapitole tejto práce pri popise projekčných metód.

### 2.2.2 Householderova transformácia

Na začiatku tejto podčasti pripomenieme definíciu reflexie vzhľadom k nejakému podpriestoru. Ďalej uvedieme niektoré jej vlastnosti, zameriame sa na špeciálny prípad reflexie podľa nadroviny, a nakoniec sformulujeme dôsledok o QR rozklade štvorcovej matice. V krátkosti sa budeme venovať využitiu QR rozkladu pri výpočte determinantu nejakej matice. Táto časť vychádza z kapitol 7 a 25 knihy [12]. V tejto podsekcii budeme uvažovať unitárny resp. euklidovský vektorový priestor  $V$ .

**Definícia 2.2.** Nech  $U \subseteq V$  je vektorový podpriestor priestoru  $V$ . Reflexia  $r$  vzhľadom k nejakému podpriestoru  $U$  je lineárne zobrazenie  $r = 2P_U - \text{id}$ .

*Poznámka.* Ekvivalentne, môžeme písať vo vyššie uvedenej definícii za využitia  $P_{U^\perp} + P_U = \text{id}$

$$r = 2(\text{id} - P_{U^\perp}) - \text{id} = \text{id} - 2P_{U^\perp}.$$

Na nasledujúcich riadkoch uvedieme niektoré zaujímavé vlastnosti operátora  $r: V \rightarrow V$ .

**Veta 2.3.** *Nech  $U \subseteq V$  je vektorový podpriestor  $V$  a  $r: V \rightarrow V$  reflexia vzhľadom k podpriestoru  $U$ . Potom platí:*

1. *Operátor  $r$  je samoadjungovaný a unitárny resp. ortogonálny. Špeciálne  $r$  je izometria.*
2. *Spektrum operátora  $r$  je  $\sigma(r) \subseteq \{-1, 1\}$ .*

*Dôkaz.* Najskôr pripomeňme, že  $P_U$  je samoadjungovaný operátor a splňa  $P_U^2 = P_U$ , teda platí

$$\langle P_U(u), v \rangle = \langle P_U^2(u), v \rangle = \langle P_U(u), P_U(v) \rangle = \langle u, P_U^2(v) \rangle = \langle u, P_U(v) \rangle. \quad (2.4)$$

1. Upravujme pre  $u, v \in V$  za využitia (2.4):

$$\begin{aligned} \langle 2P_U(u) - u, 2P_U(v) - v \rangle &= 4\langle P_U(u), P_U(v) \rangle - 2\langle u, P_U(v) \rangle - 2\langle P_U(u), v \rangle + \langle u, v \rangle \\ &= \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 2P_U(u) - u, v \rangle &= \langle 2P_U(u) - u, (v - 2P_U(v)) + 2P_U(v) \rangle \\ &= \langle u, 2P_U(v) - v \rangle + 4\langle P_U(u), P_U(v) \rangle - 2\langle u, P_U(v) \rangle - 2\langle P_U(u), P_U(v) \rangle \\ &= \langle u, 2P_U(v) - v \rangle \end{aligned}$$

Teda sme z definície ukázali požadované.

2. Tvrdenie plynie zrejme z vlastnosti  $P_U^2 = P_U$ .

□

Pre rozvoj ďalšej teórie bude podstatné nasledujúce zovšeobecnenie reflexie podľa nadroviny.

**Definícia 2.4.** *Nech  $V$  je unitárny vektorový priestor a  $U \subseteq V$  podpriestor priestoru  $V$ . Hermitovskou reflexiou okolo  $U$  o uhol  $\theta \neq 2k\pi$ , kde je  $k \in \mathbb{Z}$ , nazývame lineárny operátor  $\rho: V \rightarrow V$  daný predpisom*

$$\rho_\theta = \text{id} + (e^{i\theta} - 1)P_{U^\perp}.$$

*Poznámka.* Štandardnú reflexiu podľa nadroviny je možné získať pre uhly  $\theta$  také, že  $e^{i\theta} = -1$ .

Tvrdenie 2.3 pre reflexiu podľa nejakého podpriestoru môžeme zovšeobecniť nasledujúcim spôsobom:

**Veta 2.5.** *Nech  $U \subseteq V$  je vektorový podpriestor unitárneho priestoru  $V$  a  $\rho_\theta: V \rightarrow V$  hermitovská reflexia okolo  $U$  o uhol  $\theta$  splňujúci  $e^{i\theta} \neq 1$ . Potom platí:*

1. *Operátor  $\rho_\theta$  je unitárny. Špeciálne  $\rho_\theta$  je izometria.*
2. *Spektrum operátora  $\rho_\theta$  je  $\sigma(\rho_\theta) \subseteq S^1 \subseteq \mathbb{C}$ .*
3. *Ak máme podpriestor  $W^\perp \subseteq U$  a  $\rho_\lambda$  je hermitovská reflexia okolo  $W$  o uhol  $\lambda$ , potom  $\rho_\lambda \circ \rho_\theta = \rho_\theta \circ \rho_\lambda$ .*

*Dôkaz.* Časti 1 a 2 sa dokážu analogicky ako v tvrdení 2.3. Ďalej je možné ukázať, že  $\rho_\theta$  je samoadjungovaný práve vtedy, keď  $\rho_\theta$  je reflexia podľa  $U$ . K dôkazu časti 3 stačí využiť, že platí  $V = U^\perp \oplus U$ .  $\square$

Teraz sa budeme zaoberať hermitovskou reflexiou okolo  $[w]^\perp$  o uhol  $\theta$  splňujúci  $e^{i\theta} \neq 1$ . Z príslušnej definície a  $P_{[w]^\perp} + P_{[w]} = \text{id}$  ihneď dostávame:

$$\rho_\theta = \text{id} + (e^{i\theta} - 1) \frac{\langle w, - \rangle}{\|w\|_2^2} w$$

Špeciálny prípad predošlej reflexie  $\rho_\theta$  je predmetom nasledujúcej definície.

**Definícia 2.6.** Nech  $w \in S^{n-1}(V) \cup \{0\}$  je ľubovoľný. Lineárny operátor  $H_w(x) = x - 2\langle w, x \rangle w$  nazývame *Householderova transformácia*.

**Veta 2.7.** Nech  $V$  je unitárny vektorový priestor, nech pre vektory  $u, v \in V$  platí  $\|u\|_2 = \|v\|_2$ . Ďalej nech  $\theta \in \mathbb{R}$  je určené:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = 1 & u \perp v \\ \langle u, v \rangle = e^{i\theta} |\langle u, v \rangle| & \text{inak} \end{cases}$$

Potom platí  $H_w(u) = H_{w\xi}(u) = e^{-i\theta} v$ , kde je

$$w = \begin{cases} \pm \frac{u - e^{-i\theta} v}{\|u - e^{-i\theta} v\|_2} & u \neq e^{-i\theta} v \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

a  $\xi \in S^0 \subseteq \mathbb{C}$  ľubovoľné.

*Dôkaz.* Uvažujme  $u \neq e^{-i\theta} v$  (druhá možnosť je triviálna) a hľadáme vhodné  $w \in S^{n-1}(V)$  také, že platí

$$H_w(u) = u - 2\langle w, u \rangle w = e^{-i\theta} v \iff u - e^{-i\theta} v = 2\langle w, u \rangle w. \quad (2.5)$$

Zobrazením rovnice (2.5) lineárnym zobrazením  $\langle u, - \rangle$  obdržíme rovnosť

$$\langle u, u - e^{-i\theta} v \rangle = 2\langle w, u \rangle \langle u, w \rangle = 2|\langle w, u \rangle|^2. \quad (2.6)$$

Ďalej zrejme platí  $\langle u, u - e^{-i\theta} v \rangle = \frac{1}{2} \|u - e^{-i\theta} v\|_2^2$ . Odkiaľ plynie rovnica  $\pm 2|\langle w, u \rangle| = \|u - e^{-i\theta} v\|_2$ . Ak ďalej budeme naviac predpokladať, že platí  $\langle w, u \rangle \in \mathbb{R}$ , dostaneme  $\langle w, u \rangle = \pm \frac{1}{2} \|u - e^{-i\theta} v\|_2$ . Teraz už z rovnice (2.5) máme  $w = \pm \frac{u - e^{-i\theta} v}{\|u - e^{-i\theta} v\|_2} \in S^{n-1}(V)$ , čo je korektné definované vzhľadom k predpokladu. Nakoniec sa ľahko overí, že  $w$  definované predošlým spôsobom spĺňa všetky požiadavky vety. Ešte dodajme, že platnosť  $H_{w\xi} = H_w$  plynie ihneď z definície Householderovej transformácie.  $\square$

*Poznámka.* V predošlom dôkaze si môžeme všimnúť, že nemusí vždy existovať  $w \in S^{n-1}(V)$  také, že  $H_w(u) = v$  pre  $u, v$  z predošlej vety. Dôvodom je nutná platnosť rovnice (2.6), z ktorej vyplýva  $\langle u, u - v \rangle \in \mathbb{R}$ , čo všeobecne nad telesom  $\mathbb{C}$  nemusí platiť.

**Lema 2.8.** *Nech  $V$  je unitárny vektorový priestor,  $v \in V \setminus \{0\}$  je ľubovoľný vektor a  $\theta \in \mathbb{R}$  splňujúce  $e^{i\theta} \neq 1$ . Potom existuje hermitovská reflexia  $\rho_\theta$  taká, že platí  $\rho_\theta(v) = e^{i\theta}v$ .*

*Dôkaz.* Stačí zrejme uvážiť hermitovskú reflexiu  $\rho_\theta = \text{id} + (e^{i\theta} - 1) \frac{\langle v, - \rangle}{\|v\|_2^2} v$ . □

Teraz môžeme zhrnúť výsledky predošlých dvoch tvrdení. Nech  $u, v, w \in V$  splňujú požiadavky vety 2.7, potom zrejme platí  $\rho_\theta(H_w(u)) = v$ .

**Veta 2.9.** *Nech  $V$  je unitárny vektorový priestor a  $\alpha = (v_i)_{i=1}^n$  nejaká jeho ortonomálna báza. Potom pre ľubovoľnú podmnožinu  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq V$  existujú Householderove transformácie  $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$  také, že vektory  $r_j = h_{n-1} \circ \dots \circ h_2 \circ h_1(u_j)$  pre každé  $1 \leq j \leq n$  splňajú  $r_j \in [v_1, v_2, \dots, v_j]$ . Ak navyše požadujeme  $((r_j)_\alpha)_j \in \mathbb{R}_0^+$ , potom existuje izometria  $h_n = \rho_{\theta_n} \circ \dots \circ \rho_{\theta_2} \circ \rho_{\theta_1}$ , kde  $\rho_{\theta_j}$  je hermitovská reflexia okolo  $[v_j]^\perp$  o uhol  $\theta_j$  pre  $1 \leq j \leq n$ .*

*Dôkaz.* Tvrdenie dokážeme indukciou vzhľadom k dimenzii  $n$  priestoru  $V$ . Pre  $n = 1$  je prvá časť tvrdenia triviálna a pre druhú časť uvážme  $\rho_{\theta_1} = \text{id} + (e^{i\theta_1} - 1) \langle v_1, - \rangle v_1$ , kde  $e^{i\theta_1} = \frac{\langle u_1, v_1 \rangle}{|\langle u_1, v_1 \rangle|}$ .

Predpokladajme teraz, že  $n \geq 2$  a tvrdenie platí pre ľubovoľný vektorový priestor dimenzie  $n - 1$  nad  $\mathbb{K}$ . V prípade, že  $u_1 = 0$ , potom vezmeme  $h_1 = \text{id}$ . V opačnom prípade podľa vety 2.7 existuje  $w_1 \in V$  také, že  $H_{w_1}(u_1) = e^{-i\theta_1} \|u_1\|_2 v_1 \in [v_1]$ , preto položíme  $h_1 = H_{w_1}$ . Uvažujeme nasledujúci direktný súčet  $V = [v_1] \oplus [v_1]^\perp$ . Teraz môžeme jednoznačne písať  $h_1(u_j) = P_{[v_1]}(h_1(u_j)) + (\text{id} - P_{[v_1]})(h_1(u_j))$  pre  $2 \leq j \leq n$ . Aplikujeme indukčný predpoklad na podpriestor  $[v_1]^\perp$ , jeho ortonormálnu bázu  $(v_i)_{i=2}^n$  a podmnožinu  $(\text{id} - P_{[v_1]})(\{h_1(u_2), \dots, h_1(u_n)\})$ . Čím obdržíme Householderove transformácie  $h'_2, \dots, h'_{n-1}$  a  $h'_n = \rho_{\theta_n} \circ \dots \circ \rho_{\theta_2}$  definované na podpriestore  $[v_1]^\perp$ , ktoré využijeme pri definícii hľadaných izometrií na  $V$ . Definujem pre  $2 \leq j \leq n$  zobrazenia nasledovne  $h_j|_{[v_1]} = \text{id}$  a  $h_j|_{[v_1]^\perp} = h'_j$ . Z lemy 2.8 pre  $h_1(u_1)$  získame zobrazenie  $\rho_{\theta_1}$ , ktoré podľa vety 2.3 časti 3 komutuje postupne s  $h_j$  pre  $2 \leq j \leq n$ . Teraz stačí položiť  $h_n = h'_n \circ \rho_{\theta_1}$ , a teda veta je dokázaná. □

*Poznámka.* Vetu 2.9 by bolo možné ľahko zovšeobecniť pre ľubovoľné  $m \in \mathbb{N}$  a pre ľubovoľnú podmnožinu  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subseteq V$ .

**Dôsledok 2.10 (QR rozklad).** *Nech  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$  je ľubovoľná matica, potom existujú matice  $H_1, H_2, \dots, H_n \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$  také, že zobrazenie  $x \mapsto H_i x$  pre  $x \in \mathbb{K}^n$  a  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  je Householderova transformácia a splňujúce  $R = H_n H_{n-1} \dots H_1 A$  je horná trojuholníková matica. Ďalej existuje unitárna matica  $Q$  taká, že  $A = QR$  (QR rozklad matice  $A$ ). Navyše matica  $R$  môže byť vybraná tak, že prvky  $r_{ii} \geq 0$  pre každé  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . V prípade, že  $A$  je regulárna, potom existuje jediný QR rozklad matice  $A$  s kladnými diagonálnymi elementami matice  $R$ .*

*Dôkaz.* Nech  $\varepsilon = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  je štandardná báza  $\mathbb{K}^n$ , potom podľa vety 2.9 pre množinu  $\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\}$  existujú unitárne transformácie  $h_1, h_2, \dots, h_n$  a k nim príslušné matice zobrazenia v bázi  $\varepsilon$   $H_1 = (h_1)_{\varepsilon\varepsilon}, H_2 = (h_2)_{\varepsilon\varepsilon}, \dots, H_n = (h_n)_{\varepsilon\varepsilon}$ . Potom z vyššie uvedenej vety pre  $Q^{-1} = H_n H_{n-1} \dots H_1$  dostávame  $(Q^{-1}A)e_i \subseteq [e_1, e_2, \dots, e_i]$  t. j.  $R = Q^{-1}A$  je horná trojuholníková matica. Vzhľadom k tomu, že zrejme zloženie unitárnych operátorov

je unitárny operátor a inverzný operátor k unitárnemu operátoru je unitárny operátor, obdržíme fakt, že  $Q$  je unitárna matica. Zostáva ukázať poslednú časť tvrdenia, ktorú dokážeme sporom. Nech  $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$  sú dva rôzne QR rozklady matice  $A$  také, že  $(R_1)_{ii}, (R_2)_{ii} > 0$  pre každé  $1 \leq i \leq n$ . Vzhľadom k vyššie zmieneným vlastnostiam unitárnych matíc dostávame, že  $R_1R_2^{-1} = Q_1^{-1}Q_2$  je unitárna matica. Ďalej  $R_2^{-1}$  je horná trojuholníková matica s kladnými diagonálnymi prvkami (to je hneď vidieť z výpočtu inverznej matice pomocou matice algebraických doplnkov), potom zrejme  $R_1R_2^{-1}$  je horná trojuholníková matica s kladnými diagonálnymi prvkami. Z unitárnosti matice  $R = R_1R_2^{-1}$  máme

$$e_j^T Re_i = \langle R(R^{-1}e_j), Re_i \rangle = \langle R^{-1}e_j, e_i \rangle = 0 \quad \text{pre } j < i,$$

pretože  $R^{-1}e_j \in [e_1, e_2, \dots, e_j]$ . Tým sme ukázali, že  $R$  je diagonálna matica s kladnými prvkami na diagonále, potom nutne  $R = I$  je jednotková matica t. j.  $R_1 = R_2$  a  $Q_1 = Q_2$ , čo je spor s predpokladom.  $\square$

Podobne ako v prípade LU rozkladu, môžeme určiť determinant matice  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$  prostredníctvom dôsledku 2.10, a to nasledovne:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n r_{ii} e^{-i\theta_i},$$

kde  $e^{i\theta_i}$  sú vlastné čísla matice  $Q \neq I$  a  $r_{ii}$  sú diagonálne elementy matice  $R \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ . Nakoniec uvedieme ešte jeden dôsledok predošlých tvrdení týkajúci sa odhadu determinantu nejakej matice, pochádzajúci z knihy [18, str. 263].

**Dôsledok 2.11** (Hadamardova nerovnosť). *Pre maticu  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ , ktorá je regulárna, platí*

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|_2.$$

*Rovnosť nastáva len v prípade, že stĺpce matice  $A$  sú ortogonálne.*

*Dôkaz.* Uvážime QR rozklad matice  $A = QR$  a štandardnú bázu  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  vektorového priestoru  $\mathbb{K}^n$ . Z definície unitárnej matice dostávame  $|\det(Q)| = 1$  a

$$\|a_i\|_2^2 = \langle Ae_i, Ae_i \rangle = \langle Q(Re_i), Q(Re_i) \rangle = \langle Re_i, Re_i \rangle = \|Re_i\|_2^2. \quad (2.7)$$

Upravujme za využitia odhadu  $|r_{ii}| \leq \|Re_i\|_2$  plynúceho z Cauchy-Schwarzovej nerovnosti:

$$|\det(A)| = \prod_{i=1}^n |r_{ii}| \leq \prod_{i=1}^n \|Re_i\|_2 = \prod_{i=1}^n \|a_i\|_2 \quad (2.8)$$

Potom rovnosť v (2.8) nastane práve vtedy, keď  $R$  je diagonálna matica. Analogicky ako v (2.7) sa ukáže, že platí  $\langle Ae_i, Ae_j \rangle = \langle Re_i, Re_j \rangle$  pre  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . A pripomeňme, že inverzná matica k hornej trojuholníkovkej matici je horná trojuholníková matica. Teraz ukážeme, že regulárna matica  $R$  je diagonálna práve vtedy, keď stĺpce matice  $A$  sú ortogonálne. Skutočne máme  $\langle Ae_i, Ae_j \rangle = 0$  pre ľubovoľné  $i < j$  práve vtedy, keď platí  $0 = \langle A(R^{-1}e_i), Ae_j \rangle = \langle e_i, Re_j \rangle$  t. j.  $R$  je diagonálna matica.  $\square$

Môžeme si všimnúť, že pre singulárnu štvorcovú maticu platí Hadamardova nerovnosť triviálne a rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď daná matica obsahuje nulový stĺpec.

Poznamenajme ešte, že analogickým postupom ako v prípade LU rozkladu je možné riešiť maticové rovnice. Uvažujme  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ , vektory  $x, b \in \mathbb{K}^n$  a maticovú rovnicu  $Ax = b$ , ktorú vyriešime v nasledujúcich krokoch:

1. vyriešime rovnicu  $Qy = b$  pre  $y \in \mathbb{K}^n$  t. j.  $y = Q^{-1}b = \overline{Q}^T b$
2. nájdeme riešenie  $Rx = y$

V predošlom postupe matice  $Q, R \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$  sú dané QR rozkladom matice  $A$ .

Nakoniec odvodené výsledky popíšeme vo forme algoritmov podľa [18]. Uvažujme ortonormálnu bázu  $\alpha = (u_i)_{i=1}^n$  priestoru  $V$ ,  $u_i \in \alpha$  a  $u \in V$  ľubovoľné. Prvý algoritmus je založený na vete 2.7 a voľbe vektorov  $v = -e^{i\theta} \rho \|u\|_2 u_i$  a  $\overline{p}w = \frac{z+u_i}{\sqrt{2+2((z)\alpha)_i}}$ , kde  $u = \rho \|u\|_2 z$

a  $\rho = \begin{cases} 1 & ((u)\alpha)_i = 0 \\ \frac{((u)\alpha)_i}{|((u)\alpha)_i|} & \text{inak} \end{cases}$ . Môžeme si všimnúť, že definícia vektoru  $w$  je korektná, pretože platí  $((z)\alpha)_i \in \mathbb{R}_0^+$  z definície vektoru  $z$ . Z tvrdenia vety napokon dostaneme  $H_{\overline{p}w}(u) = H_w(u) = -\rho \|u\|_2 u_i$ . Nasledujúci algoritmus práve vracia transformáciu  $H_{\overline{p}w}$ .

---

**Algoritmus 2.3** HOUSEHOLDER( $u, u_i$ )
 

---

- 1: **if**  $u = 0$  **then**
  - 2:     **return** id
  - 3: **if**  $((u)\alpha)_i = 0$  **then**
  - 4:      $r \leftarrow 1$
  - 5: **else**
  - 6:      $r \leftarrow \frac{((u)\alpha)_i}{|((u)\alpha)_i|}$
  - 7:  $w \leftarrow \frac{\overline{r}u}{\|u\|_2} + u_i$
  - 8:  $w \leftarrow \frac{w}{\sqrt{2((w)\alpha)_i}}$
  - 9: **return** id  $- 2\langle w, - \rangle w$
- 

Druhý algoritmus udáva postup výpočtu QR rozkladu pre štvorcovú maticu  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ .

---

**Algoritmus 2.4** QRFACTORIZATION( $A$ )
 

---

- 1:  $R \leftarrow A$
  - 2: **for**  $k \leftarrow 1$  to  $n - 1$  **do**
  - 3:      $H_k \leftarrow \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \text{HOUSEHOLDER}(A[k:n, k], e_i[k:n]) \end{pmatrix}$
  - 4:      $R \leftarrow H_k R$
  - 5:  $Q \leftarrow \overline{H_1}^T \overline{H_2}^T \dots \overline{H_n}^T$
  - 6: **return**  $R, Q$
-



# Kapitola 3

## Výpočet špecifického vlastného čísla

V tejto kapitole sa budeme venovať výpočtu vlastného čísla lineárneho operátora s nejakou špecifickou vlastnosťou. Za hlavný význam týchto metód je možné považovať obmedzenie sa na výpočet určitej podmnožiny spektra nejakého operátora. Táto kapitola vychádza hlavne z knihy [22]. Najskôr uvedieme motiváciu k zavedeniu Rayleighovho podielu podľa [1].

Ak  $\lambda \in \mathbb{K}$  je vlastné číslo lineárneho operátora  $\varphi: V \rightarrow V$  príslušné k vlastnému vektoru  $u \in V$ , potom  $\|\varphi(u) - \lambda u\|_2^2 = 0$ . Nech teraz  $v \in V \setminus \{0\}$  je ľubovoľný a chceme nájsť najlepšiu aproximáciu príslušnej vlastnej hodnoty  $\lambda(v)$  v zmysle

$$\lambda(v) = \operatorname{argmin}_{\mu \in \mathbb{K}} \|\varphi(v) - \mu v\|_2^2.$$

Tento optimalizačný problém vyriešime pomocou známej vety z lineárnej algebry

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - \mu v\|_2^2 &= \|(\varphi(v) - P_{[v]} \varphi(v)) + (P_{[v]} \varphi(v) - \mu v)\|_2^2 \\ &= \|(\varphi(v) - P_{[v]} \varphi(v))\|_2^2 + \|(P_{[v]} \varphi(v) - \mu v)\|_2^2 \\ &\geq \|(\varphi(v) - P_{[v]} \varphi(v))\|_2^2. \end{aligned}$$

Rovnosť v poslednej nerovnosti nastáva práve vtedy, keď  $P_{[v]} \varphi(v) = \lambda(v)v$  t. j.

$$\langle \varphi(v) - \lambda(v)v, v \rangle = 0.$$

**Definícia 3.1.** Nech  $v \in V \setminus \{0\}$  a  $\varphi: V \rightarrow V$  lineárny operátor. Rayleighovým podielom nazývame podiel  $\lambda(v) = \frac{\langle \varphi(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle}$ .

*Poznámka.* Ak v definícii 3.1 navyše predpokladáme, že  $\varphi$  je samoadjungovaný, potom zrejme platí  $\lambda(v) \in \mathbb{R}$  pre každé  $v \in V \setminus \{0\}$ .

**Definícia 3.2.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor. Vlastné číslo  $\lambda \in \mathbb{K}$  operátora  $\varphi$  nazveme *dominantné*, ak pre každé  $\eta \in \sigma(\varphi) \setminus \{\lambda\}$  platí  $|\lambda| > |\eta|$ .

### 3.1 Mocninová metóda

Mocninová metóda, ako nám už názov napovedá, generuje postupnosť  $\{\varphi^k(v)\}_{k \in \mathbb{N}}$  pre nejaké lineárne zobrazenie  $\varphi: V \rightarrow V$  a vektor  $v \in V$ . Pred formuláciou samotnej vety o konvergencii tejto metódy si uveďme jej pseudokód.

**Algoritmus 3.1** POWERMETHOD( $\varphi, \delta > 0, v^{(0)}$ )

---

```

1:  $k \leftarrow 1$ 
2: while  $k = 1$  or  $\|\varphi(v^{(k-1)}) - \alpha^{(k-1)}v^{(k-1)}\|_V > \delta$  do
3:    $v^{(k)} \leftarrow \varphi(v^{(k-1)})$ 
4:    $v^{(k)} \leftarrow \frac{v^{(k)}}{\|v^{(k)}\|_V}$ 
5:    $\alpha^{(k)} \leftarrow \lambda(v^{(k)})$ 
6:    $k \leftarrow k + 1$ 
7: return  $v^{(k)}, \alpha^{(k)}$ 

```

---

**Veta 3.3.** *Nech  $\varphi$  je lineárny operátor taký, že charakteristický polynóm operátora  $\varphi$  má  $n$  koreňov v  $\mathbb{K}$  včetně násobnosti,  $\lambda_1 \in \sigma(\varphi) \setminus \{0\}$  je dominantné vlastné číslo a  $\dim_{\mathbb{K}} R_{\lambda_1} = \dim_{\mathbb{K}} \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id})$ . Potom buď počiatkový vektor  $v^{(0)}$  má nulovú komponentu v  $R_{\lambda_1}$  alebo postupnosť tried vektorov  $[v^{(k)}] \in P(V)$  z algoritmu 3.1 konverguje k triede vlastných vektorov príslušných k vlastnému číslu  $\lambda_1$  a  $\alpha^{(k)}$  konverguje k  $\lambda_1$ .*

*Dôkaz.* Využijeme dôkazu dôsledku 1.13 k vyjadreniu  $v^{(0)} = \sum_{i=1}^p P_i v^{(0)}$ , kde  $P_i$  je projekcia na koreňový podpriestor  $R_{\lambda_i}$  príslušný k vlastnému číslu  $\lambda_i \in \sigma(\varphi)$  pre  $i = 1, 2, \dots, p$ . Z predpokladu vety platí  $N_1 \equiv 0$ . Upravujeme za využitia invariance  $\varphi$  na  $R_{\lambda_i}$  pre  $k > 0$

$$\begin{aligned} \varphi(v^{(k-1)}) &= \varphi^k(v^{(0)}) = \varphi^k\left(\sum_{i=1}^p P_i v^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^p \varphi^k P_i(v^{(0)}) = \sum_{i=1}^p (N_i + \lambda_i P_i)^k v^{(0)} \\ &= \left(\lambda_1^k P_1 + \sum_{i=2}^p (N_i + \lambda_i P_i)^k\right) v^{(0)} = \lambda_1^k \left(P_1 + \sum_{i=2}^p \frac{(N_i + \lambda_i P_i)^k}{\lambda_1^k}\right) v^{(0)}. \end{aligned}$$

Podľa lemy 1.11 bod (iii) má operátor  $\varphi_i = (N_i + \lambda_i P_i): R_{\lambda_i} \rightarrow R_{\lambda_i}$  jediné vlastné číslo  $\lambda_i$  pre  $i = 2, 3, \dots, p$ . Teda pre spektrálny polomer za využitia vety 1.5 a za predpokladu  $i > 1$  platí  $r\left(\frac{\varphi_i^k}{\lambda_1^k}\right) = \frac{|\lambda_i|^k}{|\lambda_1|^k} < 1$ . Určíme nasledujúcu limitu za využitia vety 1.2 a za predpokladu  $P_1 v^{(0)} \neq 0$

$$\begin{aligned} [v] &= \lim_{k \rightarrow \infty} [v^{(k)}] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\lambda_1^k \left(P_1 + \sum_{i=2}^p \frac{(N_i + \lambda_i P_i)^k}{\lambda_1^k}\right) v^{(0)}}{\left\| \lambda_1^k \left(P_1 + \sum_{i=2}^p \frac{(N_i + \lambda_i P_i)^k}{\lambda_1^k}\right) v^{(0)} \right\|_V} \right] \\ &= \left[ \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(P_1 + \sum_{i=2}^p \frac{(N_i + \lambda_i P_i)^k}{\lambda_1^k}\right) v^{(0)}}{\left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \left(P_1 + \sum_{i=2}^p \frac{(N_i + \lambda_i P_i)^k}{\lambda_1^k}\right) v^{(0)} \right\|_V} \right] = \left[ \frac{P_1 v^{(0)}}{\|P_1 v^{(0)}\|_V} \right]. \end{aligned}$$

Pri predposlednej úprave sme použili spojitost normy a vetu 1.18. Z definície  $P_1 v^{(0)}$  je buď  $v$  vlastný vektor príslušný k  $\lambda_1$  alebo  $v^{(0)}$  má nulovú komponentu v  $R_{\lambda_1}$ . Konečne opäť za využitia vety 1.14 máme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle \varphi(v^{(k)}), v^{(k)} \rangle}{\langle v^{(k)}, v^{(k)} \rangle} = \lambda_1.$$

□

*Poznámka.* Z dôkazu vety 3.3 a z faktu, že bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že platí  $|\lambda_{i+1}| \leq |\lambda_i|$  pre  $i \in \{2, 3, \dots, p\}$  vyplýva, že rýchlosť konvergencie je daná pomerom  $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$ . A teda, keď  $|\lambda_1|$  a  $|\lambda_2|$  sú blízko seba, potom je rýchlosť konvergencie nízka.

V praxi prípad, že počiatkový vektor  $v^{(0)}$  má nulovú komponentu v  $R_{\lambda_1}$  nastane zriedkavo, nakoľko pri výpočtoch nastávajú zaokrúhľovacie chyby. Ak uvažujeme  $V = \mathbb{R}^n$ , obvykle sa volí počiatková aproximácia ako  $v^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^T$ . Vetu 3.3 nie je možné použiť v prípade, ak napr.  $\lambda_1 = 2$  a  $\lambda_2 = -2$  sú všetky vlastné čísla operátora  $\varphi$ , pretože  $\lambda_1$  nie je dominantné vlastné číslo. V tomto prípade môžeme využiť zobrazenie  $\varphi + \text{id}$ , ktoré má vlastné čísla  $\lambda_1 = 3$  a  $\lambda_2 = -1$  podľa vety 1.5, a teda je možné aplikovať mocninovú metódu pre výpočet vlastných čísiel.

Ďalej sa môžeme zaoberať otázkou, pre ktorú triedu matíc metóda diskutovaná v tejto sekcii bude konvergovať. Jednou takouto triedou sú reálne matice splňujúce predpoklady Perronovej-Frobeniouvej vety, ktorú si uvedieme podľa [25]. V citovanej práci je tiež možné nájsť niektoré ďalšie vlastnosti stochastických matíc odvodené spôsobom blízky k spracovaniu tejto práce, z ktorých si niektoré uvedieme. Perronova-Frobeniova veta má špeciálny význam pre práve už spomenuté stochastické matice s istou vlastnosťou, a to poukazuje na dominanciu a jednoduchosť vlastného čísla 1, čo sa práve požaduje vo vete 3.3. Tiež hovorí o existencii príslušného vlastného stochastického vektoru matice.

**Definícia 3.4.** Matica  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$  sa nazýva ireducibilná, ak neexistuje matica  $P$  daná nejakou permutáciou stĺpcov jednotkovej matice  $I \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$  taká, že platí

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

pre vhodné matice  $B, C, D$ .

**Veta 3.5** (Perron-Frobenious). *Nech je daná ireducibilná matica  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$ . Potom existuje jednoduché dominantné reálne vlastné číslo  $\lambda > 0$  matice  $A$  a jeho príslušný vlastný vektor  $v \in \mathbb{R}_+^n$ .*

*Dôkaz.* Vid' [25, veta 3.13] □

**Veta 3.6.** *Nech  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  je stochastická matica, potom platí  $1 \in \sigma(A)$  a  $|\lambda| \leq 1$  pre každé  $\lambda \in \sigma(A)$ , pričom uvažujeme vektorový priestor  $\mathbb{R}^n$  nad  $\mathbb{C}$ .*

*Dôkaz.* Vid' [25, veta 2.6 a 2.10] □

## 3.2 Inverzná mocninová metóda

Ako už názov hovorí, v prípade lineárneho izomorfizmu  $\varphi$  budeme aplikovať mocninovú metódu na operátor  $\varphi^{-1}$ . Avšak výpočet inverznej matice je časovo náročný, preto sa väčšinou využíva LU rozklad popísaný v druhej kapitole tejto práce. Z vety 1.5 poznáme, že výpočtom dominantného vlastného čísla operátora  $\varphi^{-1}$  získame najmenšie vlastné číslo v absolútnej hodnote operátora  $\varphi$ . Rovnako sa často stretávame s problémom výpočtu vlastného čísla operátora  $\varphi$ , ktoré je najbližšie k nejakému číslu  $h \in \mathbb{K}$  (nazývanom aj

---

**Algoritmus 3.2** INVERSEPOWERMETHOD( $\varphi, \delta > 0, v^{(0)}, h, \alpha$ )
 

---

```

1:  $P, L, U \leftarrow \text{LUFACORIZATION}((\varphi)_{\alpha\alpha} - hI)$ 
2:  $k \leftarrow 1$ 
3: while  $k = 1$  or  $\|U^{-1}L^{-1}Pv^{(k-1)} - \alpha^{(k-1)}v^{(k-1)}\|_V > \delta$  do
4:    $v^{(k)} \leftarrow U^{-1}L^{-1}Pv^{(k-1)}$ 
5:    $v^{(k)} \leftarrow \frac{v^{(k)}}{\|v^{(k)}\|_V}$ 
6:    $\alpha^{(k)} \leftarrow \lambda(v^{(k)})$ 
7:    $k \leftarrow k + 1$ 
8: return  $v^{(k)}, \frac{1}{\alpha^{(k)}} + h$ 
    
```

---

posun), a príslušného vlastného vektoru. Tento problém vyriešime aplikovaním mocninovej metódy na operátor  $(\varphi - hI)^{-1}$ . Na záver pripomeňme, že k dôkazu konvergencie tejto metódy nám za určitých predpokladov posluží veta 3.3.

Násobenie inverznými maticami v kroku 4 algoritmu 3.2 môžeme previesť riešením sústav lineárnych rovníc  $Ly = Pv^{(k-1)}$  a  $Uv^{(k)} = y$ , pričom v oboch prípadoch využijeme vlastností matíc  $L$  a  $U$ . Časová zložitosť vyriešenia systému z predošlej vety je  $O(n^2)$ . V prípade tejto metódy je rýchlosť konvergencie určená pomerom  $\rho(h) = \frac{|\lambda_1 - h|}{|\lambda_2 - h|}$ , kde  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  sú vlastné čísla operátora  $\varphi$  také, že  $|\lambda_2| > |\mu|$  pre ľubovoľné  $\mu \in \sigma(\varphi) \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$ . Pomer  $\rho(h)$  bude tým menší, čím bude menšie  $|\lambda_1 - h|$ . Táto úvaha nás vedie k myšlienke v každej iterácii upravovať parameter  $\sigma$  na základe nasledujúcej formuly  $h_k = h_{k-1} + \frac{1}{\alpha^{(k)}}$ . Avšak táto úprava nám môže zvýšiť časovú zložitosť, lebo bude potrebné v každej iterácii počítať LU rozklad. Odlišný prístup je možné nájsť v [21].

### 3.3 Metóda Rayleighovho podielu

Budeme pokračovať v hľadaní vhodného parametra posunu  $h$  pre inverznú mocninovú metódu. Ako vhodná voľba posunu sa javí využiť Rayleighov podiel zavedený v úvode tejto kapitoly. Pre túto sekciu označíme vlastné čísla samoadjungovaného operátora  $\varphi: V \rightarrow V$  tak, aby platilo  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  a ortonormálnu bázu  $V$  tvorenú príslušnými vlastnými vektormi označíme  $(v_i)_{i=1}^n$ .

**Veta 3.7** (Max-min princíp). *Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je samoadjungovaný operátor. Potom pre každé  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí*

$$\lambda_k = \max_{S \subseteq V: \dim_{\mathbb{K}} S = n - k + 1} \min_{v \in S \setminus \{0\}} \lambda(v).$$

*Dôkaz.* Najskôr označíme  $S_k = [v_1, v_2, \dots, v_k]$  a  $S \subseteq V$  bude podpriestor  $V$  taký, že  $\dim_{\mathbb{K}} S = n - k + 1$ . Podľa vety o dimenzii prieniku a súčtu podpriestorov z lineárnej algebry máme

$$\dim_{\mathbb{K}}(S \cap S_k) = \dim_{\mathbb{K}} S + \dim_{\mathbb{K}} S_k - \dim_{\mathbb{K}}(S + S_k) = n + 1 - \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(S + S_k)}_{\leq n} \geq 1.$$

Teda existuje  $v \in (S \cap S_k) \setminus \{0\}$ , odkiaľ  $v = \sum_{i=1}^k a_i v_i$  pre vhodné  $a_i \in \mathbb{K}$  a  $\lambda(v) = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i |a_i|^2}{\sum_{i=1}^k |a_i|^2} \leq \lambda_k$ . Potom  $\max_{S: \dim_{\mathbb{K}}(S) = n - k + 1} \min_{v \in S \setminus \{0\}} \lambda(v) \leq \lambda_k$ . K rovnosti zvolíme  $S = [v_k, v_{k+1}, \dots, v_n]$ , potom  $\lambda(u) \geq \lambda_k$  pre každé  $u \in S$  a rovnosť nastáva pre  $u \in [v_k]$ .  $\square$

Pre vetu 3.7 sa v niektorých publikáciách používa pomenovanie podľa autorov tohto výsledku, a to dvojíc Courant a Fisher, či Weyl a Poincaré. Rovnako spomenutú vetu je možné zovšeobecniť pre kompaktný samoadjungovaný operátor na Hilbertovom priestore. Pridajme ešte bez dôkazu analógiu vyššie spomenutého princípu, a to min-max princíp.

**Veta 3.8** (Min-max princíp). *Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je samoadjungovaný operátor. Potom pre každé  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí*

$$\lambda_k = \min_{S \subseteq V: \dim_{\mathbb{K}} S = k} \max_{v \in S \setminus \{0\}} \lambda(v).$$

Z dôkazu vety 3.7 je možné rovnako odpozorovať nasledujúce tvrdenie.

**Veta 3.9.** *Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je samoadjungovaný operátor. Potom pre každé  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí*

$$\lambda_k = \min_{v \in [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}]^\perp \setminus \{0\}} \lambda(v) = \max_{v \in [v_1, v_2, \dots, v_k] \setminus \{0\}} \lambda(v).$$

**Lema 3.10.** *Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je samoadjungovaný lineárny operátor a  $\lambda_1$  má algebraickú násobnosť jedna. Potom platí  $\lambda(v) = \lambda_1$  pre  $v \in V$  práve vtedy, keď  $v \in [v_1]$ .*

*Dôkaz.* Nech  $\lambda(v) = \lambda_1$  a pomocou báze vyjadríme  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$  pre  $a_i \in \mathbb{K}$ . Potom platí  $\lambda(v) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i |a_i|^2}{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}$ . Rovnako môžeme písať

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i |a_i|^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_1 |a_i|^2 = \sum_{i=2}^n \underbrace{(\lambda_i - \lambda_1)}_{>0} |a_i|^2 = 0.$$

Odkiaľ nutne  $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ , a tým sme dokázali jednu implikáciu. Druhá implikácia je zrejma. □

Nasledujúca definícia pochádza z [15, str. 4], kde je možné nájsť viac poznatkov o zavedenom pojme.

**Definícia 3.11.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je samoadjungovaný operátor,  $f: \sigma(\varphi) \rightarrow \mathbb{K}$  je zobrazenie splňujúce  $f \neq 0$ . Definujeme lineárny operátor  $f(\varphi): V \rightarrow V$  nasledovne  $f(\varphi)(v_i) = f(\lambda_i)v_i$  pre  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Takto definovaný lineárny operátor nazývame *operátorova funkcia*.

**Lema 3.12.** *Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je samoadjungovaný operátor a  $v \in V \setminus \{0\}$ . a . Ďalej nech  $f(\varphi), g(\varphi): V \rightarrow V$  sú operátorove funkcie také, že platí*

$$\lambda_m \leq \lambda(f(\varphi)v) < \lambda_{m+1} \text{ pre vhodné } m \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$|f(\lambda_i)| \leq |g(\lambda_i)|, i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad a \quad |f(\lambda_i)| \geq |g(\lambda_i)|, i \in \{m+1, m+2, \dots, n\}.$$

*Potom platí  $\lambda(g(\varphi)v) \leq \lambda(f(\varphi)v)$ .*

*Dôkaz.* Z definície báze máme  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$  pre vhodné  $a_i \in \mathbb{K}$ . Potrebujeme ukázať, že platí

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i |g(\lambda_i)|^2 |a_i|^2 - \sum_{i=1}^n \lambda(f(\varphi)v) |g(\lambda_i)|^2 |a_i|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda(f(\varphi)v)) |g(\lambda_i)|^2 |a_i|^2 \leq 0, \quad (3.1)$$

pretože je  $\lambda(g(\varphi)v) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i |g(\lambda_i)|^2 |a_i|^2}{\sum_{i=1}^n |g(\lambda_i)|^2 |a_i|^2}$ . Z definície  $\lambda(f(\varphi)v)$  máme

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda(f(\varphi)v)) |f(\lambda_i)|^2 |a_i|^2 = 0. \quad (3.2)$$

Potom výraz (3.1) vieme napísať za využitia (3.2) ako

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \underbrace{(\lambda_i - \lambda(f(\varphi)v))}_{\leq 0} \underbrace{(|g(\lambda_i)|^2 - |f(\lambda_i)|^2)}_{\geq 0} |a_i|^2 + \\ + \sum_{i=m+1}^n \underbrace{(\lambda_i - \lambda(f(\varphi)v))}_{\geq 0} \underbrace{(|g(\lambda_i)|^2 - |f(\lambda_i)|^2)}_{\leq 0} |a_i|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

□

Nasledujúce výsledky sú prevzaté z [20, str. 82].

**Veta 3.13.** *Nech je  $\varphi: V \rightarrow V$  samoadjungovaný operátor, vlastné čísla  $\lambda_1, \lambda_2$  splňujú  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Ďalej nech je  $v \in V \setminus \{0\}$  také, že platí  $\lambda(v) \in (\lambda_1, \lambda_2)$  a  $f(\varphi): V \rightarrow V$  je operátorova funkcia. Rovnako predpokladáme, že platí  $f(\lambda_1) \neq 0$  a  $\eta := \max_{1 < i \leq n} \left| \frac{f(\lambda_i)}{f(\lambda_1)} \right| < 1$ . Pre  $y \in V$  označíme  $\Delta\lambda(y) = \frac{\lambda(y) - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda(y)}$ , potom platí*

$$\Delta\lambda(f(\varphi)v) \leq \eta^2 \Delta\lambda(v).$$

*Dôkaz.* Definujeme funkciu  $\widehat{f}: \sigma(\varphi) \rightarrow \mathbb{K}$  nasledovne

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda_1) &= f(\lambda_1), \\ \widehat{f}(\lambda_i) &= \max_{1 < j \leq n} |f(\lambda_j)| = \eta |f(\lambda_1)| \text{ pre } 1 < i \leq n. \end{aligned}$$

Zavedieme nasledujúce označenie  $\widehat{v} := \widehat{f}(\varphi)v$  a  $\widetilde{v} := f(\varphi)v$ . Ďalej budeme uvažovať podpriestor  $W = [v, v_1]$ . Podpriestor  $W$  je dvojrozmerný, nakoľko je  $\lambda(v) > \lambda_1$ , preto z lemy 3.10 dostávame  $v \notin [v_1]$ . Uvažujme  $P_{[v_1]}$  kolmú projekciu na podpriestor  $[v_1]$ . Ľahko sa ukáže, že platí  $W = [v - P_{[v_1]}v, v_1]$ . Z lineárnej algebry vieme, že platí  $v - P_{[v_1]}v \in [v_1]^\perp$ , teda dostávame  $W = [v_1] \oplus [v - P_{[v_1]}v]$ . Ukážeme, že platí  $\widehat{v} \in W$  t. j.

$$\widehat{v} = \widehat{f}(\varphi)(v - P_{[v_1]}v + P_{[v_1]}v) = \eta |f(\lambda_1)| (v - P_{[v_1]}v) + f(\lambda_1) P_{[v_1]}v. \quad (3.4)$$

Všimnime si niektorých relácií, ktoré vyplývajú z predošlých tvrdení tejto sekcie. Definujeme funkciu  $g: \sigma(\varphi) \rightarrow \mathbb{K}$  nasledovne  $g(\lambda_i) = f(\lambda_1)$  pre  $1 \leq i \leq n$ . Potom zrejme máme

$\lambda(v) = \lambda(g(\varphi)v)$ , ale navyše aplikovaním lemy 3.12 dostávame  $\lambda(\hat{v}) \leq \lambda(g(\varphi)v)$ . K odvodeniu ďalšej relácie využijeme fakt, že sme ukázali  $\lambda(\hat{v}) \leq \lambda(v) < \lambda_2$  a z vety 3.9 vieme, že platí  $\lambda_1 \leq \lambda(\hat{v})$ . Teda môžeme opäť použiť lemu 3.12, odkiaľ dostaneme  $\lambda(\tilde{v}) \leq \lambda(\hat{v})$ . Využitím vety 3.9 máme  $\lambda_2 = \min_{v \in [v_1]^\perp} \lambda(v)$  t. j.  $\lambda(v - P_{[v_1]}v) \geq \lambda_2$ . Celkovo sme odvodili nasledujúce relácie

$$\lambda_1 \leq \lambda(\tilde{v}) \leq \lambda(\hat{v}) \leq \lambda(v) < \lambda_2 \leq \lambda(v - P_{[v_1]}v). \quad (3.5)$$

Využitím rovníc  $v = (v - P_{[v_1]}v) + P_{[v_1]}v$ ,  $\langle v - P_{[v_1]}v, P_{[v_1]}v \rangle = 0$  a (3.4) dostávame úpravou výrazov nasledovné

$$\frac{\lambda(\hat{v}) - \lambda_1}{\lambda(v - P_{[v_1]}v) - \lambda(\hat{v})} = \eta^2 \frac{\lambda(v) - \lambda_1}{\lambda(v - P_{[v_1]}v) - \lambda(v)}. \quad (3.6)$$

Výraz na ľavej strane rovnosti (3.6) je rastúca funkcia premennej  $\lambda(\hat{v})$  na vhodnej podmnožine  $\mathbb{R}$  (ľahko odvodíme za využitia relácií (3.5)), preto platí

$$\frac{\lambda(\tilde{v}) - \lambda_1}{\lambda(v - P_{[v_1]}v) - \lambda(\tilde{v})} \cdot \frac{\lambda(v - P_{[v_1]}v) - \lambda(v)}{\lambda(v) - \lambda_1} \leq \eta^2. \quad (3.7)$$

Podobne ukážeme, že výraz na ľavej strane nerovnosti (3.7) je rastúca funkcia premennej  $\lambda(v - P_{[v_1]}v)$  na vhodnej podmnožine  $\mathbb{R}$ , čo opäť plynie z (3.5). Potom platí

$$\frac{\Delta\lambda(\tilde{v})}{\Delta\lambda(v)} \leq \frac{\lambda(\tilde{v}) - \lambda_1}{\lambda(v - P_{[v_1]}v) - \lambda(\tilde{v})} \cdot \frac{\lambda(v - P_{[v_1]}v) - \lambda(v)}{\lambda(v) - \lambda_1} \leq \eta^2,$$

odkiaľ plynie dokazované tvrdenie. □

---

**Algoritmus 3.3** RAYLEIGHQUOTIENTITERATION( $\varphi$ ,  $\delta > 0$ ,  $v^{(0)}$ )
 

---

- 1:  $v^{(0)} \leftarrow \frac{v^{(0)}}{\|v^{(0)}\|_2}$
  - 2:  $h^{(0)} \leftarrow \langle \varphi(v^{(0)}), v^{(0)} \rangle$
  - 3:  $k \leftarrow 0$
  - 4: **while**  $\|\varphi(v^{(k)}) - h^{(k)}v^{(k)}\|_2 > \delta$  **do**
  - 5:      $k \leftarrow k + 1$
  - 6:      $v^{(k)} \leftarrow (\varphi - h^{(k-1)}\text{id})^{-1}v^{(k-1)}$
  - 7:      $v^{(k)} \leftarrow \frac{v^{(k)}}{\|v^{(k)}\|_2}$
  - 8:      $h^{(k)} \leftarrow \langle \varphi(v^{(k)}), v^{(k)} \rangle$
  - 9: **return**  $v^{(k)}, h^{(k)}$
- 

Pri výpočte inverzného operátora na 5.riadku algoritmu 3.3 môžeme využiť LU (QR) rozklad, príp. nejakú aproximáciu inverzného operátora. Teraz ukážeme konvergenciu pre ešte špeciálnejšiu triedu samoadjungovaných operátorov.

**Veta 3.14.** *Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je samoadjungovaný operátor taký, že  $0 \leq \lambda_1$  (pozitívne semidefinítý). Ďalej uvažujeme vektor  $v^{(0)} \in V$  splňujúci  $\lambda_1 < \lambda(v^{(0)}) < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ . Potom postupnosť tried vektorov  $[v^{(k)}]$  z algoritmu 3.3 konverguje k triede vlastných vektorov príslušných k vlastnému číslu  $\lambda_1$  a  $h^{(k)}$  konverguje k  $\lambda_1$ .*

*Dôkaz.* Nech je  $k \in \mathbb{N}$  ľubovoľné, potom definujeme postupnosť funkcií  $f_k: \sigma(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}$  nasledovne  $f_k(\lambda_i) = \frac{1}{\lambda_i - \lambda(v^{(k-1)})}$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$ . Najskôr ukážeme, že  $f_k$  sú korektne definované, k čomu postačí ukázať, že platí  $\lambda(v^{(k)}) \in \left[ \lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)$ . To sa prevedie jednoducho matematickou indukciou za využitia lemy 3.12 a podobnej myšlienky ako v dôkaze vety 3.13 t. j. v indukčnom kroku využijeme fakt, že pre  $l > 1$  platí

$$\frac{1}{|\lambda_2 - \lambda(v^{(k-1)})|} < \frac{1}{|\lambda_1 - \lambda(v^{(k-1)})|} \text{ a } \lambda(v^{(l-1)}) = \lambda(g_l(\varphi)v^{(l-1)}),$$

kde máme  $g_l: \sigma(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}$  dané predpisom  $g_l(\lambda_i) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda(v^{(k-1)})}$ . Poznamenajme ešte platnosť vety 3.9 t. j. máme  $\lambda(v^{(k)}) \geq \lambda_1$ , pričom platí  $\lambda(v^{(k)}) = \lambda_1 \iff v^{(k)} \in [v_1]$  podľa lemy 3.10, preto ďalej predpokladáme  $\lambda(v^{(k)}) \neq \lambda_1$ , a tým sú  $f_k$  korektne definované.

Ako prvé potrebujeme ukázať, že platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} h^{(k)} = \lambda_1$ . Z  $\lambda(v^{(k)}) < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$  plynie  $\eta_k = \max_{1 < i \leq n} \left| \frac{f_k(\lambda_i)}{f_k(\lambda_1)} \right| = \Delta\lambda(v^{(k-1)}) < 1$ . Opäť matematickou indukciou a využitím vety 3.13 dostaneme

$$\Delta\lambda(v^{(k)}) \leq \eta_k^2 \dots \eta_2^2 \eta_1^2 \Delta\lambda(v^{(0)}). \quad (3.8)$$

Z nerovnice (3.8) plynie relácia  $\eta_{k+1} = \Delta\lambda(v^{(k)}) \leq \Delta\lambda(v^{(0)})$ , odkiaľ dostaneme nerovnosť  $\Delta\lambda(v^{(k)}) \leq \Delta\lambda(v^{(0)})^{2k+1}$ . Z predpokladov máme platnosť  $\Delta\lambda(v^{(0)}) < 1$ , odkiaľ ihneď obdržíme  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\lambda(v^{(0)})^{2k+1} = 0$ . Ďalej máme  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\lambda(v^{(k)}) = 0$  zo známej vety z matematickej analýzy (konkrétne [7, veta 2.13]) a z platnosti  $0 \leq \Delta\lambda(v^{(k)})$ . Ďalej platí  $b_k = \lambda_2 - \lambda(v^{(k)}) \leq \lambda_2 - \lambda_1$  t. j. postupnosť  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  je obmedzená. Preto dostaneme  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(v^{(k)}) - \lambda_1 = 0$  podľa ďalšej vety z matematickej analýzy (napr. v [7, veta 2.8]).

Dokážeme druhú časť tvrdenia. Z nerovnosti pre  $i > 1$

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{(h^{(k)} - \lambda_1)(h^{(k-1)} - \lambda_1) \dots (h^{(1)} - \lambda_1)}{(\lambda_i - h^{(k)})(\lambda_i - h^{(k-1)}) \dots (\lambda_i - h^{(1)})} &\leq \\ &\leq \frac{(h^{(k)} - \lambda_1)(h^{(k-1)} - \lambda_1) \dots (h^{(1)} - \lambda_1)}{(\lambda_2 - h^{(k)})(\lambda_2 - h^{(k-1)}) \dots (\lambda_2 - h^{(1)})} \leq \Delta\lambda(v^{(0)})^k, \end{aligned} \quad (3.9)$$

a využitím už spomenutej vety z matematickej analýzy dostávame

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(h^{(k)} - \lambda_1)(h^{(k-1)} - \lambda_1) \dots (h^{(1)} - \lambda_1)}{(\lambda_i - h^{(k)})(\lambda_i - h^{(k-1)}) \dots (\lambda_i - h^{(1)})} = 0.$$

Zrejme postupnosť  $(-1)^k$  je obmedzená, teda dostávame

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{(h^{(k)} - \lambda_1)(h^{(k-1)} - \lambda_1) \dots (h^{(1)} - \lambda_1)}{(\lambda_i - h^{(k)})(\lambda_i - h^{(k-1)}) \dots (\lambda_i - h^{(1)})} = 0. \quad (3.10)$$

Pre vhodné  $c_i \in \mathbb{K}$  máme  $v^{(0)} = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ . Limitu z (3.10) a vetu 1.2 využijeme pri nasle-



dujúcom výpočte:

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} [v^{(k)}] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{(\varphi - h^{(k)}\text{id})^{-1}(\varphi - h^{(k-1)}\text{id})^{-1} \dots (\varphi - h^{(1)}\text{id})^{-1} \sum_{i=1}^n c_i v_i}{\|(\varphi - h^{(k)}\text{id})^{-1}(\varphi - h^{(k-1)}\text{id})^{-1} \dots (\varphi - h^{(1)}\text{id})^{-1} \sum_{i=1}^n c_i v_i\|_2} \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(\lambda_i - h^{(k)})(\lambda_i - h^{(k-1)}) \dots (\lambda_i - h^{(1)})} v_i}{\left\| \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(\lambda_i - h^{(k)})(\lambda_i - h^{(k-1)}) \dots (\lambda_i - h^{(1)})} v_i \right\|_2} \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{c_1 v_1 + \sum_{i=2}^n c_i (-1)^k \frac{(h^{(k)} - \lambda_1)(h^{(k-1)} - \lambda_1) \dots (h^{(1)} - \lambda_1)}{(\lambda_i - h^{(k)})(\lambda_i - h^{(k-1)}) \dots (\lambda_i - h^{(1)})} v_i}{\left\| c_1 v_1 + \sum_{i=2}^n c_i (-1)^k \frac{(h^{(k)} - \lambda_1)(h^{(k-1)} - \lambda_1) \dots (h^{(1)} - \lambda_1)}{(\lambda_i - h^{(k)})(\lambda_i - h^{(k-1)}) \dots (\lambda_i - h^{(1)})} v_i \right\|_2} \right] \\
&= \left[ \frac{c_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{(h^{(k)} - \lambda_1)(h^{(k-1)} - \lambda_1) \dots (h^{(1)} - \lambda_1)}{(\lambda_i - h^{(k)})(\lambda_i - h^{(k-1)}) \dots (\lambda_i - h^{(1)})} c_i v_i}{\left\| c_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{(h^{(k)} - \lambda_1)(h^{(k-1)} - \lambda_1) \dots (h^{(1)} - \lambda_1)}{(\lambda_i - h^{(k)})(\lambda_i - h^{(k-1)}) \dots (\lambda_i - h^{(1)})} c_i v_i \right\|_2} \right] = \left[ \frac{v_1}{\|v_1\|_2} \right]
\end{aligned}$$

Odkiaľ dostávame požadované tvrdenie.  $\square$

*Poznámka.* V literatúre [22] sa uvádza, že postupnosť  $h^{(k)}$  určená metódou Rayleighovho podielu 3.3 pre samoadjungovaný operátor konverguje kubicky k vlastnej hodnote.

### 3.4 Deflačné metódy

V tejto časti sa budeme snažiť popísať niektoré spôsoby ako modifikovať daný lineárny operátor  $\varphi: V \rightarrow V$  tak, aby sme prostredníctvom tohoto modifikovaného operátora vedeli nájsť niektoré vlastné čísla a vektory pôvodného operátora  $\varphi$ . Operátor  $\varphi$  budeme modifikovať využitím operátorov konečnej hodnoty zavedených v prvej kapitole 1.3. Typickým príkladom využitia vyššie popísanej techniky je výpočet dominantného vlastného čísla mocninovou metódou, nasledovaný modifikáciou daného operátora za využitia tohoto dominantného vlastného páru a aplikácia mocninovej metódy na modifikovaný operátor taký, že spĺňa podmienky vety 3.3. Tiež si môžeme všimnúť aj negatívnu stránku tejto techniky, a to kumulatívnu chybu jednotlivých metód.

**Veta 3.15 (Rado).** *Nech  $V$  je vektorový priestor nad  $\mathbb{C}$  (algebraicky uzavretým telesom) a  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  ľubovoľné číslo, potom spektrum operátora  $\psi_k = \varphi - \sum_{i=1}^k h_i \langle u_i, - \rangle v_i$  pre  $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$  ľubovoľné a  $h_1, h_2, \dots, h_k \in \mathbb{K}$  je  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ , ak je  $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ,  $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$  pre  $i = 1, 2, \dots, k$  a  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  sú vlastné čísla operátora  $\psi_k|_{[v_1, v_2, \dots, v_k]}$ .*

*Dôkaz.* Existuje báza  $\alpha$  priestoru  $V$  taká, že matica  $(\varphi)_{\alpha\alpha}$  je v Jordanovom kanonickom tvare a  $v_1, v_2, \dots, v_k \in \alpha$ . Označme  $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  a  $\gamma$  bude obsahovať vektory z bázy  $\alpha$ , ktoré sa nenachádzajú v bázi  $\beta$ . Potom podľa definície matice zobrazenia v bázi  $\delta = (\beta, \gamma)$  máme

$$(\psi_k)_{\delta\delta} = \begin{pmatrix} (\psi_k|_{[v_1, v_2, \dots, v_k]})_{\beta\beta} & A \\ 0 & (\varphi)_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

kde  $A \in \text{Mat}_{k \times (n-k)}(\mathbb{C})$  je vhodná matica. Teda dostávame

$$\det(\psi_k - \lambda \text{id})_{\delta\delta} = \det(\psi_k|_{[v_1, v_2, \dots, v_k]} - \lambda \text{id})_{\beta\beta} \det(\varphi - \lambda \text{id})_{\gamma\gamma},$$

odkiaľ plynie ihneď dokazované tvrdenie. □

Najskôr ešte poznamenajme, že predošlá veta pre  $k = 1$  sa nazýva aj Brauerova. Radova veta popisuje ako zmeniť niektoré vlastné hodnoty operátora  $\varphi$ . Vo všeobecnosti, ale týmto spôsobom pozmeníme vlastné vektory (ak existujú) príslušné k vlastným hodnotám  $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$ . Zaoberajme sa teraz niektorými špeciálnymi prípadmi operátora  $\psi_k$ .

**Veta 3.16.** *Nech sú splnené predpoklady vety 3.15, navyše nech je  $h_i = \lambda_i - \mu_i$  pre  $i = 1, 2, \dots, k$  a  $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$  pre ľubovoľné  $i, j = 1, 2, \dots, k$ . Potom  $v_i$  sú vlastné vektory operátora  $\psi_k$  príslušné k vlastným číslam  $\mu_i$  pre  $i = 1, 2, \dots, k$  a ak je  $v_r$  vlastný vektor  $\varphi$  pre  $r > k$ , potom za predpokladu  $\lambda_r \neq \mu_i$  pre každé  $i = 1, 2, \dots, k$*

$$w_r = v_r - \sum_{i=1}^k \frac{(\lambda_i - \mu_i) \langle u_i, v_r \rangle}{\lambda_r - \mu_i} v_i$$

je vlastný vektor  $\psi_k$  príslušný k vlastnému číslu  $\lambda_r$ .

*Dôkaz.* Prvá časť tvrdenia pre  $i = 1, 2, \dots, k$  sa ľahko overí priamym dosadením. K dôkazu druhej časti hľadáme  $w_r$  v tvare  $w_r = v_r - \sum_{i=1}^k a_i v_i$  k čomu nás môže motivovať tvar  $r$ -tého stĺpca matice (3.11). Počítajme

$$\psi_k(w_r) = \lambda_r v_r - \sum_{i=1}^k ((\lambda_i - \mu_i) \langle u_i, v_r \rangle + a_i \mu_i) v_i = \lambda_r w_r,$$

preto nutne musí byť  $(\lambda_i - \mu_i) \langle u_i, v_r \rangle + a_i \mu_i = a_i \lambda_r$  pre  $i = 1, 2, \dots, k$ , odkiaľ ihneď plynie dokazované tvrdenie. □

*Poznámka.* Poznamenajme, že voľba  $\mu_i = \lambda_i$  pre  $i = 1, 2, \dots, k$  v predošlej vete sa nazýva Wielandtova redukcia. Na druhej strane sa môže pýtať, či vôbec vektory  $u_1, u_2, \dots, u_k$  zo zmienenej vety existujú. Na túto otázku nájdeme odpoveď v nasledujúcich dvoch vetách.

Najskôr sa zaoberajme vzťahom medzi pravými a ľavými vlastnými vektormi.

**Lema 3.17.** *Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor a  $\varphi^*$  adjungovaný lineárny operátor k operátoru  $\varphi$ . Ak platí  $\lambda \in \sigma(\varphi)$ , potom platí  $\bar{\lambda} \in \sigma(\varphi^*)$ . Ak  $v$  je vlastný vektor operátora  $\varphi$  príslušný k vlastnému číslu  $\lambda \in \mathbb{K}$  a  $u$  je vlastný vektor operátora  $\varphi^*$  príslušný k vlastnému číslu  $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{\bar{\lambda}\}$ , potom  $v \perp u$  t. j.  $\langle v, u \rangle = 0$ . Ku každému vlastnému vektoru  $v_k$  operátora  $\varphi$  príslušnému k vlastnému číslu  $\lambda_k$  existuje vlastný vektor  $u_k$  operátora  $\varphi^*$  taký, že platí  $\langle v_k, u_k \rangle = 1$ .*

*Dôkaz.* Najskôr ukážeme, že platí  $\ker \varphi^* = (\text{im } \varphi)^\perp$ . Nech je  $w \in \ker \varphi^*$ , potom platí

$$\forall u \in V \quad 0 = \langle u, \varphi^*(w) \rangle = \langle \varphi(u), w \rangle \quad (3.12)$$

t. j.  $w \in (\text{im } \varphi)^\perp$ . Opačná inklúzia tiež plynie z rovnice (3.12). Pretože  $\lambda$  je vlastný vektor operátora  $\varphi$ , existuje  $v \in V \setminus \{0\}$  tak, že platí  $\varphi(v) = \lambda v$  alebo ekvivalentne  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(\varphi - \lambda \text{id}) > 0$ . Z definície sa ľahko ukáže rovnosť  $(\varphi - \lambda \text{id})^* = \varphi^* - \bar{\lambda} \text{id}$ . Potrebujeme ukázať,

že platí  $\dim_{\mathbb{K}} \ker(\varphi - \lambda \text{id})^* > 0$ . Z lineárnej algebry vieme, že platí  $V = \text{im} \eta \oplus (\text{im} \eta)^\perp$  t. j.  $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \text{im} \eta + \dim_{\mathbb{K}} (\text{im} \eta)^\perp$  a z vety o dimenziách jadra a obrazu máme rovnosť  $\dim_{\mathbb{K}} \ker \eta + \dim_{\mathbb{K}} \text{im} \eta = \dim_{\mathbb{K}} V$  pre ľubovoľný lineárny operátor  $\eta: V \rightarrow V$ . Odkiaľ dostávame

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker(\varphi - \lambda \text{id})^* = \dim_{\mathbb{K}} \ker(\varphi - \lambda \text{id}) > 0.$$

K druhému tvrdeniu počítajme

$$\overline{\lambda} \langle v, u \rangle = \langle v, \varphi^*(u) \rangle = \langle \varphi(v), u \rangle = \mu \langle v, u \rangle,$$

odkiaľ máme  $(\overline{\lambda} - \mu) \langle v, u \rangle = 0$ , teda platí  $v \perp u$ . K tretej časti tvrdenia využijeme lemu 1.9. Už sme ukázali, že platí  $V = \ker(\varphi - \lambda \text{id})^* \oplus \ker(\varphi - \lambda \text{id})^\perp$ , a teda existencia požadovaných vektorov plynie ihneď z citovanej lemy.  $\square$

Predošlá lema nám umožní formulovať nasledujúcu deflačnú techniku.

**Dôsledok 3.18** (Hotelling). *Vo vete 3.15 volme pre  $i = 1, 2, \dots, k$  vektor  $u_i$  ako ľavý vlastný vektor operátora  $\varphi$  príslušný k vlastnému číslu  $\lambda_i$  taký, že platí  $\langle u_i, v_i \rangle = 1$  a  $h_i = \lambda_i$ . Potom platí  $\sigma(\psi_k) = \{0, \lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n\}$ . Špeciálne, ak  $\varphi$  je samoadjungovaný operátor t. j.  $\varphi = \varphi^*$ , potom platí  $u_i = v_i$ .*

Zaujímavou aplikáciou vyššie spomenutej teórie je určenie spektra tzv. Google matice, o ktorej konštrukcii a ďalších informáciách je možné sa dočítať v práci [17].

**Príklad 3.19.** Tzv. Google matica je definovaná nasledovne  $G = \alpha P + (1 - \alpha) \langle v, - \rangle e$ , kde  $P \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  je stochastická matica (splňa  $Pe = e$ ), vektor  $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$  je ľubovoľný vektor splňujúci  $\langle v, e \rangle = 1$  a  $\alpha \in [0, 1]$ . Matica  $P$  je matica prechodu Markovovho reťazca modelu webu a matica  $G$  vznikne vhodnou modifikáciou matice  $P$  tak, aby existoval jediný stacionárny vektor Markovovho reťazca určeného maticou  $G$ , k čomu sa využíva Perronova-Frobeniova veta 3.5. Tento stacionárny vektor sa nazýva PageRank a má špecifický význam pre poradie výsledkov vyhľadávania daného dotazu. Nech matica  $P$  určuje lineárny operátor  $\varphi: x \mapsto Px$  na  $\mathbb{C}^n$  so spektrom  $\sigma(\varphi) = \{1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , potom operátor  $\alpha\varphi$  bude mať spektrum  $\sigma(\alpha\varphi) = \{\alpha, \alpha\lambda_2, \dots, \alpha\lambda_n\}$  a  $e$  pravý vlastný vektor operátora  $\alpha\varphi$ . Teraz využijeme vety 3.15 pre operátor  $\psi_1: x \mapsto \alpha\varphi(x) + (1 - \alpha) \langle v, x \rangle e$  a obdržíme spektrum  $\sigma(\psi_1) = \{1, \alpha\lambda_2, \dots, \alpha\lambda_n\}$ . Ďalej môžeme pokračovať napr. aplikovaním mocninovej metódy na operátor  $\psi_1$ , čím spočítame práve PageRank vektor.

# Kapitola 4

## Projekčné metódy

Hlavným významom projekčných metód je obmedzenie sa na vhodný podpriestor, na ktorom hľadáme spektrum reštrikcie pôvodného operátora pomocou vhodných metód napr. z tretej kapitoly. V tejto kapitole sa budeme zaoberať projekčnými metódami najmä na Krylovové podpriestory. Hlavným zdrojom bude materiál [22].

Na úvod si pripomenieme potrebné pojmy a uvedieme si niektoré odhady, ktoré budú potrebné v ďalších častiach pri špeciálnom použití týchto metód. Začneme krátkou motiváciou.

Uvažujme  $P_U^W : V \rightarrow U$  projekciu na podpriestor  $U$ . Najskôr si všimnime, že platí rovnosť  $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} W = m$ . Ak zvolíme báze  $\alpha = (u_i)_{i=1}^m$  resp.  $\beta = (w_i)_{i=1}^m$  podpriestorov  $U$  resp.  $W$  biortonormálne t. j.  $\langle u_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$  pre každé  $i, j = 1, 2, \dots, m$ , potom bude zobrazenie  $P_U^W$  jednoznačne určené podmienkami t. j.  $P_U^W(v) = \sum_{i=1}^m a_i u_i$  a  $(\text{id} - P_U^W)v \perp w_j$  pre každé  $j = 1, 2, \dots, m$ . Naskytá sa však otázka či vyššie spomenuté biortonormálne báze existujú. Odpoveď je možné nájsť v leme 1.9.

**Definícia 4.1.** Nech  $P_U^W : V \rightarrow U$  je projekcia na podpriestor  $U$  a  $\varphi : V \rightarrow V$  je lineárny operátor. Vektor  $\hat{u} \in U$  nazveme aproximatívnym vlastným vektorom na  $U$  príslušným k aproximatívnemu vlastnému číslu  $\hat{\lambda} \in \mathbb{K}$  operátora  $\varphi$ , ak platí  $P_U^W(\varphi - \hat{\lambda}\text{id})\hat{u} = 0$ .

Ihneď z definície dostaneme nasledujúcu lemu.

**Lema 4.2.** Nech  $P_U^W : V \rightarrow U$  je projekcia na podpriestor  $U$  a  $\varphi : V \rightarrow V$  je lineárny operátor invariálny voči  $U$  t. j.  $\varphi(U) \subseteq U$ . Ak pre nejaké  $\hat{u} \in U$  a  $\hat{\lambda} \in \mathbb{K}$  platí  $P_U^W(\varphi - \hat{\lambda}\text{id})\hat{u} = 0$ , potom  $\hat{u}$  je vlastným vektorom príslušným k vlastnému číslu  $\hat{\lambda}$  operátora  $\varphi$ .

Všimnime si, že z definície platí  $\|\hat{u} - u\|_2 \geq \|(\text{id} - P_U)u\|_2$ , kde uvažujeme notáciu podľa definície 4.1 a  $u$  je nejaký vlastný vektor  $\varphi$ . Ako uvidíme ďalej  $\|(\text{id} - P_U)u\|_2$  má dôležitú úlohu aj pri odhadoch iných vzdialeností.

**Veta 4.3.** Nech je  $\gamma = \|P_U^W(\varphi - \lambda\text{id})(\text{id} - P_U)\|_2$  a  $u \in V$  vlastný vektor operátora  $\varphi$  príslušný k vlastnému číslu  $\lambda \in \mathbb{K}$ , potom platí

$$\begin{aligned} \|(P_U^W \varphi - \lambda\text{id})P_U u\|_2 &\leq \gamma \|(\text{id} - P_U)u\|_2, \\ \|(P_U^W \varphi P_U - \lambda\text{id})u\|_2 &\leq \sqrt{\gamma^2 + |\lambda|^2} \|(\text{id} - P_U)u\|_2. \end{aligned}$$

*Dôkaz.* Upravujeme za využitia vlastnosti kolmej projekcie  $(\text{id} - P_U)^2 = (\text{id} - P_U)$

$$\begin{aligned} \|(P_U^W \varphi - \lambda \text{id})P_U u\|_2 &= \|P_U^W (\varphi - \lambda \text{id})P_U u\|_2 = \|P_U^W (\varphi - \lambda \text{id})(\text{id} - P_U)(\text{id} - P_U)u\|_2 \\ &\leq \gamma \|(\text{id} - P_U)u\|_2 \end{aligned}$$

K dôkazu druhej nerovnosti uvažujeme

$$\begin{aligned} \|(P_U^W \varphi P_U - \lambda \text{id})u\|_2^2 &= \|(P_U^W \varphi P_U - \lambda \text{id})(P_U u + (\text{id} - P_U)u)\|_2^2 \\ &= \|P_U^W (\varphi - \lambda \text{id})P_U u + \lambda (\text{id} - P_U)u\|_2^2 \\ &= \|P_U^W (\varphi - \lambda \text{id})P_U u\|_2^2 + |\lambda|^2 \|(\text{id} - P_U)u\|_2^2 \\ &\leq \gamma^2 \|(\text{id} - P_U)u\|_2^2 + |\lambda|^2 \|(\text{id} - P_U)u\|_2^2, \end{aligned}$$

odkiaľ ihneď plynie dokazované tvrdenie.  $\square$

*Poznámka.* Ak v predošlej vete uvažujeme  $P_U: V \rightarrow U$  kolmú projekcia na podpriestor  $U$ , potom zrejme  $\gamma = \|P_U \varphi (\text{id} - P_U)\|_2$ , čím získavame presnejší odhad. Ďalej je možné využiť nasledujúci odhad  $\gamma \leq \|\varphi\|_2$  vzhľadom k  $\|P_U\|_2 = \|(\text{id} - P_U)\|_2 = 1$ . Takéto obmedzenie hodnoty  $\gamma$  nemusí platiť vo všeobecnom prípade, avšak na druhej strane za výhodu všeobecnej projekcie na podpriestor môžeme považovať možnosť určiť ľavé a pravé vlastné (vektory) čísla, ak to je samozrejme požadované.

Nakoniec pripomeňme maticovú reprezentáciu  $P_U^W \varphi|_U: U \rightarrow U$  aproximatívneho vlastného problému v bázi  $\alpha = (u_i)_{i=1}^m$  podpriestoru  $U$  biortonormálnej na bázu  $(w_i)_{i=1}^m$  podpriestoru  $W$  a v ortonormálnej bázi  $\beta = (v_i)_{i=1}^n$  priestoru  $V$ . Potom podľa príslušných definícií platí  $((\iota)_{\beta\alpha})_{ij} = (\langle v_i, u_j \rangle)$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$  a  $j = 1, 2, \dots, m$ , kde je  $\iota: U \rightarrow V$  inklúzia, a  $((P_U^W)_{\alpha\beta})_{ij} = (\langle w_i, v_j \rangle)$  pre  $i = 1, 2, \dots, m$  a  $j = 1, 2, \dots, n$ . Poznamenajme ešte, že vyššie spomenuté matice zobrazení majú nasledujúcu vlastnosť  $(P_U^W)_{\alpha\beta}(\iota)_{\beta\alpha} = (\text{id})_{\alpha\alpha}$ . Označme  $x \in \mathbb{K}^m$  nejaký vlastný vektor matice  $(P_U^W)_{\alpha\beta}(\varphi)_{\beta\beta}(\iota)_{\beta\alpha}$ , potom aproximatívny vlastný vektor  $(\varphi)_{\beta\beta}$  bude zrejme  $(\iota)_{\beta\alpha}x$ . Túto časť hlavne uvádzame z implementačných dôvodov.

## 4.1 Jednoduchá iterácia podpriestorom s projekciou

Táto metóda vznikla zovšeobecnením mocnínovej metódy a umožňuje určiť aproximácie viacerých vlastných čísiel nejakého lineárneho zobrazenia. Nech  $U_0 \subseteq V$  je  $m$ -rozmerný podpriestor priestoru  $V$  a  $\varphi: V \rightarrow V$  lineárne zobrazenie. Definujme postupnosť podpriestorov nasledovne  $U_k = \varphi^k(U_0)$  pre  $k \in \mathbb{N}$ . Pripomeňme, že v prípade mocnínovej metódy sme pracovali s normovanou postupnosťou určitých vektorov z  $V$ . V tomto prípade, aby sme predišli znižovaniu dimenzie podpriestorov  $U_k$ , budeme navyše v každom kroku hľadať (ortonormálnu) bázu podpriestorov  $U_k$ , čo je možné dosiahnuť využitím QR rozkladu matice zobrazenia  $\varphi$  prípadne jej LU rozkladom. Pri implementácii tejto metódy je možné využiť identifikácie  $V(k, n)/O(k) \cong G_n(k)$ , kde uvažujeme pravú akciu ortogonálnej grupy  $O(k)$  na množine  $V(k, n) = \{(u_i)_{i=1}^k \in (\mathbb{K}^n)^k \text{ je ortogonálna báza}\}$  a  $G_n(k)$  je množina  $k$ -rozmerných podpriestorov vo  $V$ . Teraz uveďme ešte pseudokód metódy.

---

**Algoritmus 4.1** SIMPLESUBSPACEITERATION( $\varphi, \delta > 0, \alpha = (u_i)_{i=1}^m, \varepsilon$ )
 

---

- 1:  $k \leftarrow 1$
  - 2:  $U_0 = (\text{id})_{\varepsilon\alpha}$
  - 3: **while**  $k = 1$  or  $\max_i \|U_k e_i - U_{k-1} e_i\|_V > \delta$  **do**
  - 4:      $U_k \leftarrow (\varphi)_{\varepsilon, \varepsilon} U_{k-1}$
  - 5:      $U_k \leftarrow \text{QRFACTORIZATION}(U_k)$
  - 6:      $k \leftarrow k + 1$
  - 7: **return**  $U_k$
- 

Poznamenajme ešte, že vo väčšine prípadov môže byť vhodnejšie v kroku 4 algoritmu 4.1 aplikovať na maticu  $U_{k-1}$  vhodnú mocninu  $(\varphi)_{\varepsilon, \varepsilon}$ , ktorá sa môže voliť viacerými spôsobmi napríklad ako najväčšie číslo  $\eta$ , pre ktoré platí  $1 + \eta = 1$  v danom programovacom jazyku.

Teraz sa budeme zaoberať presnosťou odhadov vlastných vektorov na podpriestoroch  $U_k$  generovaných jednoduchou iteráciou za určitých predpokladov. Nech je  $1 \leq m \leq n$  a nech  $P_k$  označuje kolmú projekciu na podpriestor  $U_k$ . Predpokladajme, že spektrum lineárneho operátora  $\varphi: V \rightarrow V$  je celé v  $\mathbb{K}$  a jeho vlastné čísla splňujú nasledujúcu nerovnosť

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m| > |\lambda_{m+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Ďalej nech  $(v_i)_{i=1}^n$  je ortonormálna báza  $V$  tvorená vlastnými vektormi a budeme uvažovať kolmú projekciu  $P_{[v_1, v_2, \dots, v_m]}$  na  $R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_m}$ .

**Veta 4.4.** Nech  $U_0 = [x_1, x_2, \dots, x_m]$  a ďalej predpokladajme, že množina  $\{P_{[v_1, v_2, \dots, v_m]} x_i\}_{i=1}^m$  je lineárne nezávislá. Potom ku každému  $v_i$  existuje jediné  $s_i \in U_0$  splňujúce  $P_{[v_1, v_2, \dots, v_m]} s_i = v_i$  pre  $1 \leq i \leq m$ . Navyše pre  $1 \leq i \leq m$  platí nasledujúca nerovnosť

$$\|(\text{id} - P_k)v_i\|_2 \leq \|s_i - v_i\|_2 \left( \frac{|\lambda_{m+1}|}{|\lambda_i|} + \varepsilon_k \right)^k,$$

kde postupnosť  $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  splňa  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$  a  $P_k$  je kolmá projekcia na  $U_k$ .

*Dôkaz.* Z predpokladu o lineárnej nezávislosti obdržíme, že  $(P_{[v_1, v_2, \dots, v_m]} x_j)_{j=1}^m$  tvorí bázu invariátneho podpriestoru  $P_{[v_1, v_2, \dots, v_m]} V$  zobrazenia  $P_{[v_1, v_2, \dots, v_m]}$ . Teraz môžeme písať pre  $1 \leq i \leq m$

$$v_i = \sum_{j=1}^m a_j P_{[v_1, v_2, \dots, v_m]} x_j = P_{[v_1, v_2, \dots, v_m]} \left( \sum_{j=1}^m a_j x_j \right),$$

preto položíme  $s_i = \sum_{j=1}^m a_j x_j$ , ktoré je zrejme unikátne. Ďalej máme rovnosť  $s_i = v_i + (\text{id} - P_{[v_1, v_2, \dots, v_m]})s_i$ , v ktorej označíme  $w = (\text{id} - P_{[v_1, v_2, \dots, v_m]})s_i$ . Pokračujme definovaním prvku  $y_i = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^k \varphi^k(s_i)$ , potom ihneď pre invariantný podpriestor  $W = R_{\lambda_{m+1}} \oplus R_{\lambda_{m+2}} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_n}$  operátora  $\varphi$  dostávame rovnosť

$$y_i - v_i = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^k \varphi^k(s_i - v_i) = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^k \varphi|_W^k w.$$

Z predošlej rovnosti plynie platnosť

$$\|y_i - v_i\|_2 \leq \left\| \left( \frac{1}{\lambda_i} \right)^k \varphi|_W^k \right\|_2 \|w\|_2. \quad (4.1)$$

Z definície podpriestoru  $W$  obdržíme  $r\left(\frac{1}{\lambda_i}\varphi|_W\right) = \frac{|\lambda_{m+1}|}{|\lambda_i|} < 1$ . Aplikovaním Gelfandovej vety 1.19 dostávame

$$\left\| \left( \frac{1}{\lambda_i} \right)^k \varphi|_W^k \right\|_2 = \left( \frac{|\lambda_{m+1}|}{|\lambda_i|} + \varepsilon_k \right)^k, \quad (4.2)$$

kde  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  pre  $k \rightarrow \infty$ . Z definície kolmej projekcie  $P_k$  a faktu  $y_i \in U_k$  ihneď máme platnosť  $\|(\text{id} - P_k)v_i\|_2 \leq \|v_i - y_i\|_2$ . Teraz požadovaná nerovnosť plynie z platnosti (4.1), (4.2) a nerovnosti z predošlej vety.  $\square$

## 4.2 Projekčné metódy na Krylovove podpriestory

Tieto metódy sú založené na (kolmej) projekcii do podpriestorov generovaných mocninovou metódou. Na takýchto podpriestoroch, v mnohých prípadoch oveľa menšej dimenzie v porovnaní s  $\dim_{\mathbb{K}} V$ , hľadáme aproximatívne vlastné vektory, čo náš problém významne zjednodušuje. Ďalším zjednodušením neodmysliteľne je orientácia sa na vybrané triedy operátorov, a to samoadjungované či antisymetrické operátory. V tejto časti, už typicky, najskôr uvedieme potrebný teoretický základ a následne sa budeme venovať popisu jednotlivých metód.

**Definícia 4.5.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárne zobrazenie,  $v \in V$  je ľubovoľný vektor a  $m \in \mathbb{N}$  je ľubovoľné. *Krylovovým podpriestorom*  $K_m(\varphi, v)$  rozumieme podpriestor

$$[v, \varphi(v), \dots, \varphi^{m-1}(v)].$$

Ak z kontextu nebude pochyb, ako je Krylovov podpriestor  $K_m(\varphi, v)$  definovaný, budeme v krátkosti písať  $K_m$  namiesto  $K_m(\varphi, v)$ . Pripomeňme, že na  $V$  môžeme zaviesť štruktúru (ľavého)  $\mathbb{K}[x]$ -modulu prostredníctvom daného lineárneho zobrazenia  $\varphi: V \rightarrow V$  definovaním  $x \cdot v = \varphi(v)$  pre ľubovoľné  $v \in V$ . Potom môžeme písať  $K_m(\varphi, v) = [v, x \cdot v, \dots, x^{m-1} \cdot v] = \{p \cdot v \mid p \in \mathbb{K}_{m-1}[x]\}$ . Viac o vzťahu medzi  $\mathbb{K}[x]$ -modulmi a vektorovými priestormi nad  $\mathbb{K}$  s lineárnym operátorom je možné nájsť v štúdijskom materiáli [6], pričom budeme niektoré poznatky z citovaného materiálu používať aj v tejto sekcii. V ďalšom texte budeme uvažovať lineárny operátor  $\varphi: V \rightarrow V$  a ním generované Krylovove podpriestory  $K_m$ .

**Definícia 4.6.** Nech  $V$  je  $\mathbb{K}[x]$ -modul. Minimálnym polynómom prvku  $v \in V$  rozumieme normovaný polynóm  $p \in \mathbb{K}[x]$  najmenšieho nezáporného stupňa taký, že platí  $p \cdot v = 0$ .

**Lema 4.7.** Nech  $s$  je stupeň minimálneho polynómu vektora  $v \in V$ . Potom platí  $K_m(\varphi, v) = K_s(\varphi, v)$  pre  $m \geq s$  a  $\varphi(K_s(\varphi, v)) \subseteq K_s(\varphi, v)$ .

*Dôkaz.* Zrejme máme  $K_m(\varphi, v) \supseteq K_s(\varphi, v)$ . K druhej inklúzii predpokladajme, že existuje  $t \in \mathbb{K}[x]$  taký, že platí  $\text{st}(t) \geq s$  a  $t \cdot v \in K_m(\varphi, v)$ . Z faktu, že je  $t \in \mathbb{K}[x]$ , existujú polynómy

$q, r \in \mathbb{K}[x]$  splňujúce  $t = qp + r$ , kde  $\text{st}(r) < s$  a  $p$  je minimálny polynóm prvku  $v$ . Odkiaľ ihneď obdržíme  $t \cdot v = r \cdot v$  t. j.  $K_m(\varphi, v) = K_s(\varphi, v)$ . K druhej časti tvrdenia si stačí všimnúť, že platí

$$\varphi(K_s(\varphi, v)) \subseteq K_{s+1}(\varphi, v) = K_s(\varphi, v).$$

□

Ihneď z príslušných definícií obdržíme platnosť nasledujúcej lemy.

**Lema 4.8.** *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

1. Krylovov podpriestor  $K_m(\varphi, v)$  má dimenziu  $m$ .
2. Vektory  $v, \varphi(v), \dots, \varphi^{m-1}(v)$  sú lineárne nezávislé.
3. Stupeň minimálneho polynómu vektoru  $v$  je aspoň  $m$ .

**Lema 4.9.** *Nech  $P_{K_m}^W$  je projekcia na Krylovov podpriestor  $K_m(\varphi, m)$ . Označme  $\varphi_m = P_{K_m}^W \varphi|_{K_m}$ , potom pre ľubovoľný polynóm  $q \in \mathbb{K}[x]$  splňujúci  $\text{st}(q) < m$  platí  $q(\varphi)v = q(\varphi_m)v$ . Navyiac ak je  $\text{st}(q) = m$ , potom platí  $P_{K_m}^W q(\varphi)v = q(\varphi_m)v$ .*

*Dôkaz.* Prvú časť tvrdenia ukážeme indukciou podľa stupňa polynómu  $q$ , pričom zrejme postačuje predpokladať, že  $q = x^i$  pre  $i = 0, 1, \dots, m-1$ . Pre  $i = 0$  je tvrdenie zřejmé. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké  $i$  t. j.  $\varphi^i(v) = \varphi_m^i(v)$  a ukážeme, že platí pre  $i+1 \leq m-1$ . Aplikujme zobrazenie  $P_{K_m}^W \varphi$  na predošlú rovnosť, čím obdržíme z príslušných definícií rovnosti

$$\varphi^{i+1}(v) = P_{K_m}^W \varphi^{i+1}(v) = P_{K_m}^W \varphi \varphi^i(v) = \varphi_m^{i+1}(v). \quad (4.3)$$

K druhej časti využijeme rovnosti (4.3) až na fakt, že nemusí nutne platiť  $\varphi^m(v) \in K_m$ . □

Teraz sa budeme v krátkosti zaoberať ortogonálnou projekciou do nejakého Krylovovho podpriestoru a jej charakterizáciou.

**Veta 4.10.** *Nech  $P_{K_m}$  je ortogonálna projekcia na Krylovov podpriestor  $K_m(\varphi, v)$  a označme  $p_m$  normovaný charakteristický polynóm lineárneho operátora  $\varphi_m = P_{K_m} \varphi|_{K_m}$ . Potom platí*

$$p_m = \operatorname{argmin}_{p \in \mathbb{K}[x]: \text{st}(p)=m, \text{normovaný}} \|p(\varphi) \cdot v\|_2.$$

*Dôkaz.* Podľa Cayleyho-Hamiltonovej vety (viď [6, veta 10.10]) platí  $p_m(\varphi_m) = 0$ , preto dostaneme

$$\langle p_m(\varphi_m) \cdot v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in K_m(\varphi, v).$$

Z predošlej lemy 4.9 a faktu, že  $P_{K_m}: V \rightarrow V$  je samoadjungovaný operátor, obdržíme

$$0 = \langle p_m(\varphi_m) \cdot v, w \rangle = \langle P_{K_m} p_m(\varphi) \cdot v, w \rangle = \langle p_m(\varphi) \cdot v, w \rangle \quad \forall w \in K_m(\varphi, v). \quad (4.4)$$

Vzhľadom k predpokladu máme  $p_m(\varphi) \cdot v - p(\varphi) \cdot v \in K_m$  a za využitia (4.4) dostaneme

$$\|p(\varphi) \cdot v\|_2^2 = \|p_m(\varphi) \cdot v\|_2^2 + \|p_m(\varphi) \cdot v - p(\varphi) \cdot v\|_2^2$$

pre ľubovoľný normovaný polynóm  $p \in \mathbb{K}[x]$  stupňa  $m$ , odkiaľ ihneď plynie požadované tvrdenie. □



Poznamenajme, že táto charakterizácia má hlavný význam pre hľadanie ekvivalentných metód z matematického pohľadu a nie je zamýšľaná k využitiu pri implementácii metódy založenej na myšlienke Krylovových podpriestorov. Malo by sa jednať o jediné známe kritérium optimality metód založených na Krylovových podpriestoroch v prípade  $\varphi$  nesamoadjungovaného operátora. V prípade samoadjungovaných operátorov máme k dispozícii *max-min* princíp 3.7.

### 4.2.1 Arnoldiho metóda

Táto metóda je určená pre nesamoadjungované operátory a je založená na kolmej projekcii do Krylovovho podpriestoru. Hlavnou myšlienkou je úprava matice zobrazenia do Hessenbergovho tvaru. Je známe, že táto metóda dáva dobrú aproximáciu vlastných hodnôt, ak je zastavená pred samotným dokončením. Uveďme si najskôr algoritmus metódy a dokážme niekoľko tvrdení, ktoré sa ponúkajú z popisu algoritmu.

---

#### Algoritmus 4.2 ARNOLDI1( $\varphi, v_1$ )

---

```

1:  $v_1 \leftarrow \frac{v_1}{\|v_1\|_2}$ 
2: for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
3:   for  $i \leftarrow 1$  to  $j$  do
4:      $h_{ij} \leftarrow \langle v_i, \varphi(v_j) \rangle$ 
5:    $w_j \leftarrow \varphi(v_j) - \sum_{i=1}^j h_{ij} v_i$ 
6:    $h_{j+1,j} \leftarrow \|w_j\|_2$ 
7:   if  $h_{j+1,j} = 0$  then
8:     return  $v_1, v_2, \dots, v_j, (h_{ik})_{k=1,2,\dots,j; i=1,2,\dots,k+1}$ 
9:   else
10:     $v_{j+1} \leftarrow \frac{w_j}{h_{j+1,j}}$ 
11: return  $v_1, v_2, \dots, v_m, (h_{ij})_{j=1,2,\dots,m; i=1,2,\dots,j+1}$ 

```

---

Ako si môžeme všimnúť z popisu algoritmu jedná sa o klasický Gramov-Schmidtov ortonormalizačný proces, ktorého výhodou oproti Householderovmu algoritmu je jeho iteratívnosť, a tým možno ortonormalizovať systém zadaný iteratívne.

**Lema 4.11.** *Nech  $v_1, v_2, \dots, v_k$  je postupnosť vektorov určená algoritmom 4.2 pre  $k \leq m$  krok ukončenia algoritmu, potom tvorí ortonormálnu bázu Krylovovho podpriestoru  $K_k(\varphi, v_1)$ .*

*Dôkaz.* Z konštrukcie postupnosti vektorov  $v_2, \dots, v_k$  ihneď dostávame, že sa jedná ortonormálnu postupnosť. Zostáva dokázať, že daná postupnosť spĺňa  $v_1, v_2, \dots, v_k \in K_m(\varphi, v_1)$ . Indukciou ukážeme, že platí  $v_i = q_{i-1}(\varphi) \cdot v_1$  pre  $i = 1, 2, \dots, k$  a  $q_{i-1} \in \mathbb{K}_{i-1}[x]$ . Pre  $i = 1$  je tvrdenie zrejme pravdivé – stačí uvažovať polynóm  $q_0 = 1$ . Predpokladajme, že tvrdenie platí pre ľubovoľné  $j \leq i$ , potom dostaneme

$$h_{(i+1)i} v_{i+1} = \varphi(v_i) - \sum_{j=1}^i h_{ji} v_j = (xq_{i-1})(\varphi) \cdot v_1 - \sum_{j=1}^i h_{ji} q_{j-1}(\varphi) \cdot v_1. \quad (4.5)$$

Z rovnice (4.5) plynie tvrdenie pre  $i + 1$  t. j.  $v_{i+1} = q_i(\varphi) \cdot v_1$ , teda požadované tvrdenie bolo dokázané.  $\square$

**Definícia 4.12.** Maticu  $H \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$  nazývame Hessenbergova, ak platí  $(H)_{ij} = 0$  pre  $i > j + 1$  a  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**Veta 4.13.** Nech  $\alpha = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  je báza Krylovovho podpriestoru  $K_m(\varphi, v_1)$  určená algoritmom 4.2 pre  $k \leq m$  krok ukončenia algoritmu. Označme  $H_m \in \text{Mat}_k(\mathbb{K})$  Hessenbergovu maticu takú, že  $(H_m)_{i \leq j+1}$  sú dané algoritmom 4.2 pre  $j = 1, 2, \dots, k$ . Potom pre  $P_{K_m}$  ortogonálnu projekciu do  $K_m$  platí

$$(\varphi_m)_{\alpha, \alpha} = (P_{K_m} \varphi|_{K_m})_{\alpha, \alpha} = H_m.$$

*Dôkaz.* Z algoritmu 4.2 dostávame rovnosť  $P_{K_m} \varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{j+1} h_{ij} P_{K_m}(v_i)$  pre  $j = 1, 2, \dots, k$ , pričom z konštrukcie platí  $v_{k+1} \perp K_m$  t. j.  $P_{K_m}(v_{k+1}) = 0$ , odkiaľ ihneď plynie požadované tvrdenie.  $\square$

Teraz sa v krátkosti zaoberajme prípadom, keď algoritmus 4.2 skončí pred krokom  $m$ .

**Veta 4.14.** Algoritmus 4.2 skončí v kroku  $k$  práve vtedy, keď minimálny polynóm vektoru  $v_1$  je stupňa  $k$ . Ak platí niektorá formulácia z predošlej ekvivalencie, potom vlastné hodnoty a vektory operátora  $P_{K_m} \varphi|_{K_m}$  sú tiež vlastnými hodnotami a vektormi operátora  $\varphi$ .

*Dôkaz.* Ak algoritmus 4.2 skončí v kroku  $k$ , potom dostávame  $\varphi(v_k) = \sum_{i=1}^k h_{ik} v_i$  a využitím dôkazu lemy 4.11 obdržíme, že stupeň minimálneho polynómu  $v_1$  je najviac  $k$ . Ak by tento stupeň bol  $j < k$ , potom podľa lemy 4.7 by platilo  $K_j = K_{j+1}$ , pričom podľa definície je  $v_{j+1} \perp K_j$  a zároveň je  $v_{j+1} \in K_{j+1}$ , odkiaľ nutne plynie  $v_{j+1} = 0$  t. j. algoritmus 4.2 by skončil v kroku  $j$ . Týmto sme obdržali spor, a teda stupeň minimálneho polynómu  $v_1$  je práve  $k$ . Opačná implikácia sa ukáže analogicky. Dôkaz druhej časti tvrdenia plynie z už dokázanej prvej časti a lemy 4.7.  $\square$

Nakoniec nám zostáva popísať akým spôsobom sa určia odhady vlastných čísel a vektorov operátora  $\varphi$ . To prevedieme kolmou projekciou  $\text{im } \varphi$  na Krylovov podpriestor  $K_m(\varphi, v_1)$ , ktorá je popísaná v úvode tejto kapitoly 4 a využijeme faktu, že matica zobrazenia vo vhodnej bázi je v Hessenbergovom tvare.

V nasledujúcom tvrdení sa budeme ešte zaoberať presnosťou odhadu nejakého vlastného vektoru a príslušnej vlastnej hodnoty operátora  $\varphi$ .

**Veta 4.15.** Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineárny operátor a  $\hat{u}$  je vlastný vektor príslušný k vlastnému číslu  $\hat{\lambda}$  operátora  $P_{K_m} \varphi|_{K_m}$ , potom platí

$$\left\| (\varphi - \hat{\lambda} \text{id}) \hat{u} \right\|_2 = |a_m| h_{(m+1)m},$$

kde  $v_1, v_2, \dots, v_k, h_{(m+1)m}$  sú dané algoritmom 4.2 a  $\hat{u} = \sum_{i=1}^m a_i v_i$  pre  $a_i \in \mathbb{K}$ .

*Dôkaz.* S využitím dôkazu vety 4.13 upravujme

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{u}) &= \sum_{i=1}^m a_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^m a_i P_{K_m} \varphi(v_i) + a_m h_{(m+1)m} v_{m+1} = P_{K_m} \varphi(\hat{u}) + a_m h_{(m+1)m} v_{m+1} \\ &= \hat{\lambda} \hat{u} + a_m h_{(m+1)m} v_{m+1}. \end{aligned}$$

Z predošlej úpravy ihneď dostávame požadované tvrdenie.  $\square$

V algoritme 4.2 sme prevádzali Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces na prvku  $v_{j+1}$  pomocou prvej rovnosti v (2.3), teraz uvedieme algoritmus pomocou druhej z rovností v (2.3). Ešte poznamenajme, že tento algoritmus je matematicky ekvivalentný algoritmu 4.2, ale z numerického hľadiska je vhodnejší.

---

**Algoritmus 4.3** ARNOLDI2( $\varphi, v_1$ )
 

---

```

1:  $v_1 \leftarrow \frac{v_1}{\|v_1\|_2}$ 
2: for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
3:    $w \leftarrow \varphi(v_j)$ 
4:   for  $i \leftarrow 1$  to  $j$  do
5:      $h_{ij} \leftarrow \langle v_i, w \rangle$ 
6:      $w \leftarrow w - h_{ij}v_i$ 
7:    $h_{j+1,j} \leftarrow \|w\|_2$ 
8:   if  $h_{j+1,j} = 0$  then
9:     return  $v_1, v_2, \dots, v_j, (h_{ik})_{k=1,2,\dots,j;i=1,2,\dots,k+1}$ 
10:  else
11:     $v_{j+1} \leftarrow \frac{w}{h_{j+1,j}}$ 
12: return  $v_1, v_2, \dots, v_m, (h_{ij})_{j=1,2,\dots,m;i=1,2,\dots,j+1}$ 

```

---

Avšak za jednu z najspoľahlivejších implementácií Arnoldiho metódy z numerického hľadiska je považovaný ortogonalizačný proces založený na Householderovej transformácii – presnejšie vete 2.9. Pri popise tohto algoritmu využijeme aj materiál [26] a tiež algoritmus 2.3. Najskôr si uvedieme príslušný algoritmus, a potom dokážeme analogické tvrdenie k tvrdeniu 4.11. Predpokladajme ešte, že máme danú ortonormálnu bázu  $(u_i)_{i=1}^n$  priestoru  $V$ .

---

**Algoritmus 4.4** ARNOLDI3( $\varphi, v_1$ )
 

---

```

1:  $v_1 \leftarrow \frac{v_1}{\|v_1\|_2}$ 
2:  $H_1 \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}(v_1, u_1)$ 
3: for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
4:    $v_j \leftarrow H_1 H_2 \dots H_j u_j$ 
5:   if  $\dim_{\mathbb{K}}[v_1, \varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_j)] = j$  then
6:     return  $v_1, v_2, \dots, v_j$ 
7:   else
8:      $H_{j+1} \leftarrow \text{HOUSEHOLDER}((\text{id} - P_{[u_1, u_2, \dots, u_j]})(H_j \dots H_2 H_1 \varphi(v_j)), u_{j+1})$ 
9: return  $v_1, v_2, \dots, v_m$ 

```

---

**Veta 4.16.** *Nech  $v_1, v_2, \dots, v_k$  je postupnosť vektorov určená algoritmom 4.4 pre  $k \leq m$  krok ukončenia algoritmu, potom tvorí ortonormálnu bázu Krylovovho podpriestoru  $K_k(\varphi, v_1)$ .*

*Dôkaz.* Z konštrukcie Householderových transformácií máme  $v_i = H_1 H_2 \dots H_k u_i$  pre  $i = 1, 2, \dots, k$ , preto je zrejme  $(v_i)_{i=1}^k$  ortonormálna báza. Zostáva ukázať, že platí  $K_k(\varphi, v_1) = [v_1, v_2, \dots, v_k]$ , čo ukážeme indukciou. Zrejme platí  $K_1(\varphi, v_1) = [v_1]$ , preto predpoklada-

jme, že tvrdenie platí pre nejaké  $1 \leq j < m$ . Z indukčného predpokladu máme  $K_{j+1}(\varphi, v_1) \supseteq \supseteq [v_1, \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_j)]$ . Vzhľadom k tomu, že dimenzie oboch podpriestorov sú rovnaké, obdržíme rovnosť. Konštrukcia nám tiež dáva  $H_k \dots H_2 H_1 \varphi(v_i) \in [u_1, u_2, \dots, u_{i+1}]$  pre  $i \in \{1, 2, \dots, j\}$  a tiež  $H_k \dots H_2 H_1 v_1 \in [u_1]$ . Opäť z rovnosti dimenzií, z prvej vety dôkazu a faktu, že  $H_k \dots H_2 H_1$  je unitárny operátor máme  $[v_1, \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_j)] = [v_1, v_2, \dots, v_{j+1}]$ , týmto je dokázaná aj celá veta.  $\square$

Na záver tejto časti si uvedieme tabuľku, ktorá poskytuje porovnanie priestorovej a časovej zložitosti algoritmov preberaných v tejto sekcii.

Zložitosť	Arnoldi1 4.2	Arnoldi2 4.3	Arnoldi3 4.4
Časová	$m^2 n$	$m^2 n$	$2m^2 n - \frac{2}{3}m^3$
Priestorová	$(m+1)n$	$(m+1)n$	$(m+1)n - \frac{1}{2}m^2$

Tabuľka 4.1: Prehľad zložitosti rôznych implementácií Arnoldiho metódy.

### Deflačné techniky Arnoldiho metódy

Pretože Arnoldiho metóda ako bola popísaná v predošlej sekcii je vhodná z numerického hľadiska pre výpočet jedného vlastného vektoru, v tejto časti sa v krátkosti zameriame na teoretický popis deflačnej techniky pre Arnoldiho metódu.

Predpokladajme, že máme určené aproximácie vlastných vektorov  $\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \dots, \widehat{v}_{k-1}$  operátora  $\varphi$  Arnoldiho metódou pre nejaké  $k \leq n$ . Teraz zvolíme  $v_k \in [\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \dots, \widehat{v}_{k-1}]^\perp \cap K_m(\varphi, v_1)$  s normou  $\|v_k\|_2 = 1$ . Nakoniec aplikujeme Arnoldiho metódu na lineárne zobrazenie  $(\text{id} - P_{[\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \dots, \widehat{v}_{k-1}]})\varphi$  s počiatočným vektorom  $v_k$  a obdržíme tak Krylovov podpriestor dimenzie  $m - k$ . Následne určíme aproximatívny vlastný vektor projekčnou metódou na Krylovov podpriestor  $K_{m-k}((\text{id} - P_{[\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \dots, \widehat{v}_{k-1}]})\varphi, v_k) \subseteq K_m(\varphi, v_1)$ , ktorý ortogonalizujeme voči už spočítaným aproximáciám vyššie zmienených vlastných vektorov  $\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \dots, \widehat{v}_{k-1}$ .

Avšak existujú sofistikovanejšie deflačné techniky založené na určitej podmienenosti, a je možné nájsť viac informácií o týchto technikách napr. v [22, kapitola 8].

### 4.2.2 Samoadjungovaný Lanczosov algoritmus

Ako už názov hovorí, jedná sa o Arnoldiho algoritmus za predpokladu, že sa zaoberáme problémom vlastných čísel pre samoadjungovaný operátor. Týmto predpokladom dosiahneme určité zjednodušenia oproti pôvodnému Arnoldiho algoritmu.

**Veta 4.17.** *Nech  $\varphi$  je samoadjungovaný operátor, potom Hessenbergova matica  $H_m$  určená algoritmom 4.2 je reálna a symetrická t. j. tridiagonálna.*

*Dôkaz.* Pokračujme v dôkaze vety 4.13, kde je matica  $H_m$  definovaná. Ukážeme, že operátor  $P_{K_m} \varphi|_{K_m}$  je samoadjungovaný za využitia faktu, že operátor  $P_{K_m}$  je samoadjungovaný, k tomu upravujeme pre  $j, k = 1, 2, \dots, m$ :

$$\langle P_{K_m} \varphi(v_j), v_k \rangle = \langle \varphi(v_j), P_{K_m}(v_k) \rangle = \langle v_j, \varphi(v_k) \rangle = \langle P_{K_m}(v_j), \varphi(v_k) \rangle = \langle v_j, P_{K_m} \varphi(v_k) \rangle \quad (4.6)$$

Pričom zrejme platí  $\overline{h_{jk}} = \langle P_{K_m} \varphi(v_j), v_k \rangle = \langle v_j, P_{K_m} \varphi(v_k) \rangle = h_{kj}$ . Ďalej z faktu, že platí  $h_{kj} \in \mathbb{R}$  pre  $k \geq j$ , obdržíme platnosť  $h_{kj} = h_{jk}$ , odkiaľ plynie dokazované tvrdenie.  $\square$

Teraz uvedieme Lanczosov algoritmus pre samoadjungovaný operátor  $\varphi$ , kde budeme značiť  $h_{jj} = \alpha_j$  a  $h_{j-1,j} = \beta_j$  pre  $j = 1, 2, \dots, m$ . Tento algoritmus bude založený na modifikovanom Gramovom-Schmidtovom procese. Pretože  $H_m$  je tridiagonálna nám postačuje ukladať tri vektory  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$  pre  $i = 2, \dots, m-1$

---

**Algoritmus 4.5** SELFADJOINTLANCZOS( $\varphi, v_1$ )
 

---

```

1:  $v_1 \leftarrow \frac{v_1}{\|v_1\|_2}$ 
2:  $\beta_1 \leftarrow 0$ 
3:  $v_0 \leftarrow 0$ 
4: for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
5:    $w_j \leftarrow \varphi(v_j) - \beta_j v_{j-1}$ 
6:    $\alpha_j \leftarrow \langle v_j, w_j \rangle$ 
7:    $w_j \leftarrow w_j - \alpha_j v_j$ 
8:    $\beta_{j+1} \leftarrow \|w_j\|_2$ 
9:   if  $\beta_{j+1} = 0$  then
10:    return  $v_1, v_2, \dots, v_j, (\alpha_i, \beta_i)_{i=1,2,\dots,j}$ 
11:   else
12:      $v_{j+1} \leftarrow \frac{w_j}{\beta_{j+1}}$ 
13: return  $v_1, v_2, \dots, v_m, (\alpha_j, \beta_j)_{j=1,2,\dots,m}$ 

```

---

Poznamenajme, že zrejme z konštrukcie algoritmus generuje ortogonálnu postupnosť, ale v skutočnosti dochádza k rôznym nepresnostiam, ktoré sa kumulujú. Ilustrujeme v nasledujúcej kapitole grafickým vyobrazením.

Zamerajme sa v krátkosti na vzťah medzi monickými ortogonálnymi polynómami a Krylovovým podpriestorom  $K_m(\varphi, v_1)$ . Z algoritmu 4.5 obdržíme nasledovný rekurentný vzťah

$$\beta_{j+1} v_{j+1} = \varphi(v_j) - \alpha_j v_j - \beta_j v_{j-1}. \quad (4.7)$$

Predpokladajme, že minimálny polynóm vektoru  $v_1$  má stupeň aspoň  $m$  t. j. podľa lemy 4.8  $\dim_{\mathbb{K}} K_m(\varphi, v_1) = m$ . Potom existuje lineárny izomorfizmus  $\psi: \mathbb{K}_{m-1}[x] \rightarrow K_m(\varphi, v_1)$  daný predpisom  $\psi(p) = p(\varphi) \cdot v_1$ . Preto môžeme na  $\mathbb{K}_{m-1}[x]$  definovať skalárny súčin prostredníctvom zobrazenia  $\psi$ , a to predpisom  $\langle p, q \rangle = \langle \psi(p), \psi(q) \rangle$ . Všimnime si, že skalárny súčin definovaný spôsobom z predošlej vety splňuje  $\langle xp, q \rangle = \langle p, xq \rangle$ , čo plynie z faktu, že operátor  $\varphi$  je samoadjungovaný. Vzhľadom k vyššie definovanému skalárnemu súčinu obdržíme z vety 1.21 podobný rekurentný vzťah medzi tromi termami postupnosti  $\{v_k\}_{k=1}^m$  ako existuje medzi monickými ortogonálnymi polynómami až na normujúce konštanty (rozdiel medzi ortonormálnymi polynómami a monickými ortogonálnymi polynómami) ako je v rovnici 4.7. Nakoniec pripomeňme, že z predpisu 4.7 plynie, že  $v_m = a p_m(\varphi) \cdot v_1$ , kde  $p_m$  je normovaný charakteristický polynóm matice  $H_m$  a  $a \in \mathbb{R}_+$ . Predošlé tvrdenie ihneď plynie z rekurentného predpisu pre výpočet determinantu tridiagonálnej matice, ktorý je práve vo formulácii vety 1.21, ako sa je možné presvedčiť priamym výpočtom.

### 4.2.3 Antisymetrický Arnoldiho algoritmus

V tejto sekcii sa budeme opäť zaoberať špeciálnym prípadom Arnoldiho algoritmu. Najskôr si pripomenieme definíciu antisymetrického operátora.

**Definícia 4.18.** Lineárny operátor  $\varphi: V \rightarrow V$  nazývame antisymetrický, ak platí  $\varphi^* = -\varphi$ .

Teraz si uveďme niektoré algebraické vlastnosti antisymetrických operátorov, ktoré budú analogické (aj v dôkaze) tým pre samoadjungované operátory.

**Veta 4.19.** *Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je antisymetrický operátor. Potom každé vlastné číslo  $\lambda \in \mathbb{K}$  tohto operátora splňuje  $\Re(\lambda) = 0$  a existuje ortonormálna báza tvorená vlastnými vektormi.*

Predošlá veta nám hovorí, že v prípade, keď uvažujeme  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  má operátor  $\varphi$  vlastné číslo 0, ak  $2 \nmid \dim V$ . Podobne ako v prípade samoadjungovaných operátoroch platí nasledujúce tvrdenie, ktorého dôkaz je analogický dôkazu vety 4.17.

**Veta 4.20.** *Nech  $\varphi$  je antisymetrický operátor, potom Hessenbergova matica  $H_m$  určená algoritmom 4.2 splňuje  $\Re(h_{jj}) = 0$ ,  $h_{jk} = -h_{kj}$  pre  $j, k = 1, 2, \dots, m$  t. j. matica  $H_m$  je tridiagonálna.*

Opäť analogicky ako v prípade Lanczosovho algoritmu zavedieme nasledujúce označenie  $h_{jj} = \alpha_j$  a  $h_{j-1,j} = \beta_j$  pre  $j = 1, 2, \dots, m$ . Uvedieme si aj samotný algoritmus, ktorý sa od toho Lanczosovho algoritmu líši iba v nejakých znamienkach ako sme uviedli v predošlej vete, preto postačuje pri výpočte ukladať iba tri vektory  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$  pre  $i = 2, \dots, m-1$  a je založený na modifikovanom Gramovom-Schmidtovom procese. Môžeme si tiež všimnúť, že aj v tomto prípade môžeme nájsť podobný vzťah medzi generátormi Krylovovho podpriestoru  $K_m(\varphi, v_1)$  a monickými ortogonálnymi polynómami ako sme uviedli v predošlej časti tejto kapitoly.

---

#### Algoritmus 4.6 SKEWSYMMETRICARNOLDI( $\varphi, v_1$ )

---

```

1:  $v_1 \leftarrow \frac{v_1}{\|v_1\|_2}$ 
2:  $\beta_1 \leftarrow 0$ 
3:  $v_0 \leftarrow 0$ 
4: for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
5:    $w_j \leftarrow \varphi(v_j) + \beta_j v_{j-1}$ 
6:    $\alpha_j \leftarrow \langle v_j, w_j \rangle$ 
7:    $w_j \leftarrow w_j - \alpha_j v_j$ 
8:    $\beta_{j+1} \leftarrow \|w_j\|_2$ 
9:   if  $\beta_{j+1} = 0$  then
10:    return  $v_1, v_2, \dots, v_j, (\alpha_i, \beta_i)_{i=1,2,\dots,j}$ 
11:   else
12:      $v_{j+1} \leftarrow \frac{w_j}{\beta_{j+1}}$ 
13: return  $v_1, v_2, \dots, v_m, (\alpha_j, \beta_j)_{j=1,2,\dots,m}$ 

```

---

Nakoniec ešte poznamenajme, že ak prevedieme rovnaké úpravy ako v rovnici 4.6 pre  $\varphi$  antisymetrický operátor, obdržíme antisymetriu operátora  $P_{K_m} \varphi|_{K_m}$ , pomocou ktorého aproximujeme vlastné hodnoty a vektory operátora  $\varphi$ .

#### 4.2.4 Nesamoadjungovaný Lanczosov algoritmus

Jedná sa o zovšeobecnenie Lanczosovho algoritmu pre nesamoadjungované operátory. Hlavným rozdielom bude v projekcii do podpriestoru, ktorá nemusí byť nutne ortogonálna. Základnou myšlienkou tohoto algoritmu je vytvorenie dvojice biortonormálnych báz podpriestorov  $K_m(\varphi, v_1)$  a  $K_m(\varphi^*, w_1)$ . Jeho pseudokód je popísaný v 4.7.

---

**Algoritmus 4.7** NONSELFADJOINTLANCZOS( $\varphi, v_1, w_1$ )
 

---

**Input:**  $\langle v_1, w_1 \rangle = 1$

- 1:  $w_0 \leftarrow 0$
  - 2:  $\delta_1 \leftarrow 0$
  - 3:  $v_0 \leftarrow 0$
  - 4:  $\beta_1 \leftarrow 0$
  - 5: **for**  $j \leftarrow 1$  to  $m$  **do**
  - 6:    $\alpha_j \leftarrow \langle \varphi(v_j), w_j \rangle$
  - 7:    $\widehat{v}_j \leftarrow \varphi(v_j) - \overline{\alpha_j}v_j - \overline{\beta_j}v_{j-1}$
  - 8:    $\widehat{w}_j \leftarrow \varphi^*(w_j) - \alpha_j w_j - \delta_j w_{j-1}$
  - 9:   Choose suitable  $\delta_{j+1} \in \mathbb{K}$  e.g.  $\delta_{j+1} \leftarrow |\langle \widehat{v}_j, \widehat{w}_j \rangle|^{\frac{1}{2}}$
  - 10:   **if**  $\delta_{j+1} = 0$  **then**
  - 11:     **return**  $w_1, w_2, \dots, w_j, v_1, v_2, \dots, v_j; (\alpha_i, \beta_i, \delta_i)_{i=1,2,\dots,j}$
  - 12:    $\beta_{j+1} \leftarrow \frac{\langle \widehat{v}_j, \widehat{w}_j \rangle}{\delta_{j+1}}$
  - 13:    $w_{j+1} \leftarrow \frac{\widehat{w}_j}{\beta_{j+1}}$
  - 14:    $v_{j+1} \leftarrow \frac{\widehat{v}_j}{\delta_{j+1}}$
  - 15: **return**  $w_1, w_2, \dots, w_m, v_1, v_2, \dots, v_m; (\alpha_i, \beta_i, \delta_i)_{i=1,2,\dots,m}$
- 

Podobne ako v predošlých sekciách označme tridiagonálnu maticu pre  $i, j = 1, 2, \dots, m$  nasledovne:

$$(T_m)_{ij} = \begin{cases} \overline{\beta_i} & i = j - 1, \\ \overline{\alpha_i} & i = j, \\ \overline{\delta_{i+1}} & i = j + 1, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Teraz si ukážeme niektoré vlastnosti algoritmu 4.7, ktoré zhrnieme do nasledujúcej vety.

**Veta 4.21.** Ak algoritmus 4.7 skončí v kroku  $m$ , potom platí  $\langle v_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$  pre  $i, j = 1, 2, \dots, m$  t. j.  $w_1, w_2, \dots, w_m, v_1, v_2, \dots, v_m$  tvoria biortonormálny systém. Ďalej platí, že  $\alpha = (v_i)_{i=1}^m$  tvorí bázu  $K_m(\varphi, v_1)$  resp.  $\beta = (w_i)_{i=1}^m$  tvorí bázu  $K_m(\varphi^*, w_1)$ . Matice zobrazení splňujú

$$\begin{aligned} \left( P_{K_m(\varphi, v_1)}^{K_m(\varphi^*, w_1)} \varphi |_{K_m(\varphi, v_1)} \right)_{\alpha\alpha} &= T_m, \\ \left( P_{K_m(\varphi^*, w_1)}^{K_m(\varphi, v_1)} \varphi^* |_{K_m(\varphi^*, w_1)} \right)_{\beta\beta} &= \overline{T_m}^T. \end{aligned}$$

*Dôkaz.* Indukciou ukážeme prvú časť tvrdenia, zrejme pre  $m = 1$  tvrdenie platí. Predpokladáme platnosť tvrdenia pre  $m$  a ukážeme platnosť pre  $m + 1$  rozdelením na nasledujúce prípady.

1. Z indukčného predpokladu máme  $\langle v_{m-1}, w_m \rangle = 0$  a  $\langle v_m, w_m \rangle = 1$ , preto platí

$$\langle v_{m+1}, w_m \rangle = \frac{1}{\delta_{m+1}} (\langle \varphi(v_m), w_m \rangle - \alpha_m \langle v_m, w_m \rangle - \beta_m \langle v_{m-1}, w_m \rangle) = 0.$$

2. Opäť využijeme indukčný predpoklad, a to rovností  $\langle v_m, w_{m-1} \rangle = 0$  a  $\langle v_{m-1}, w_{m-1} \rangle = 1$ . Potom platí

$$\langle v_{m+1}, w_{m-1} \rangle = \frac{1}{\delta_{m+1}} (\langle \varphi(v_m), w_{m-1} \rangle - \alpha_m \langle v_m, w_{m-1} \rangle - \beta_m \langle v_{m-1}, w_{m-1} \rangle) = 0,$$

pretože úpravami za využitia rovností  $\langle v_m, w_m \rangle = 1$  a  $\langle v_m, w_{m-2} \rangle = 0$  z indukčného predpokladu dostaneme:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(v_m), w_{m-1} \rangle &= \langle v_m, \varphi^*(w_{m-1}) \rangle = \langle v_m, \beta_m w_m + \alpha_{m-1} w_{m-1} + \delta_{m-1} w_{m-2} \rangle \\ &= \beta_m \langle v_m, w_m \rangle + \alpha_{m-1} \langle v_m, w_{m-1} \rangle + \delta_{m-1} \langle v_m, w_{m-2} \rangle = \beta_m \end{aligned}$$

3. Uvažujme teraz prípad  $1 \leq i < m - 1$  a počítajme za evidentného využitia indukčného predpokladu

$$\begin{aligned} \langle v_{m+1}, w_i \rangle &= \frac{1}{\delta_{m+1}} (\langle \varphi(v_m), w_i \rangle - \alpha_m \langle v_m, w_i \rangle - \beta_m \langle v_{m-1}, w_i \rangle) \\ &= \frac{1}{\delta_{m+1}} \langle v_m, \beta_{i+1} w_{i+1} + \alpha_i w_i + \delta_i w_{i-1} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Analogicky sa ukáže, že platí  $\langle v_i, w_{m+1} \rangle = 0$  pre  $i = 1, 2, \dots, m$  a platnosť  $\langle v_{m+1}, w_{m+1} \rangle = 1$  máme z definície príslušného algoritmu. To, že  $\alpha$  generuje podpriestor  $K_m(\varphi, v_1)$  sa dokáže podobne ako vo vete 4.11. Teraz ukážeme lineárnu nezávislosť, preto predpokladajme  $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$  a uvažme antilineárne zobrazenia  $\langle -, w_j \rangle$  pre  $j = 1, 2, \dots, m$ . Potom máme  $0 = \sum_{i=1}^m \bar{a}_i \langle v_i, w_j \rangle = \bar{a}_j \langle v_j, w_j \rangle = \bar{a}_j$ , teda lineárnu nezávislosť  $\alpha$  je dokázaná. Analogicky sa ukáže tvrdenie o postupnosti  $\beta$ . Prejdime k dôkazu poslednej časti tvrdenia. Z algoritmu 4.7 máme ihneď

$$\varphi(v_i) = \overline{\delta_{i+1}} v_{i+1} + \overline{\alpha_i} v_i + \overline{\beta_i} v_{i-1}.$$

Z biortogonalít systémov  $\{v_i\}_{i=1}^m$  a  $\{w_i\}_{i=1}^m$  platí  $v_{m+1} \in K_m(\varphi^*, w_1)^\perp$  ekvivalentne  $P_{K_m(\varphi, v_1)}^{K_m(\varphi^*, w_1)}(v_{m+1}) = 0$ , odkiaľ plynie požadované tvrdenie. Opäť analogicky sa dokáže tvrdenie pre  $\varphi^*$  a bázu  $\beta$ .  $\square$

Rovnako ako v prípade Arnoldiho metódy sa odhady vlastných čísiel a vektorov operátora  $\varphi$  určia projekciou im  $\varphi$  na Krylovov podpriestor  $K_m(\varphi, v_1)$  ortogonálne k  $K_m(\varphi^*, w_1)$ , ktorá je popísaná v úvode tejto kapitoly, pričom využijeme fakt, že matica zobrazenia vo vhodnej báze je v Hessenbergovom tvare. Ešte poznamenajme z popisov algoritmov 4.2 a 4.7 je zřejmé, že platí analogické tvrdenie ako 4.15 pre  $\varphi$  i  $\varphi^*$ .



Môžeme si všimnúť, že táto metóda narozdiel od Arnoldiho metódy súčasne počíta aproximácie ľavých a pravých vlastných vektorov  $\varphi$ . Ďalším rozdielom medzi Arnoldiho metódou a Lanczosovou pre nesamoadjungovaný operátor je v priestorovej zložitosti, kde nám v prípade druhej uvedenej metódy postačí pri výpočte ukladať 6 vektorov a uvážiť nejaký priestor pre ukladanie tridiagonálnej matice  $T_m$ . Algoritmus skončí predčasne v prípade, ak platí  $\langle \widehat{v}_j, \widehat{w}_j \rangle = 0$ , čo zrejme nemusí nastať iba v prípade, keď platí  $\widehat{v}_j = 0$  alebo  $\widehat{w}_j = 0$ , čo je prípad nájdania exaktnej vlastnej hodnoty, ako bolo ukázané vo vete 4.14 v prípade Arnoldiho metódy. Preto potrebujeme nejakým spôsobom ošetriť prípad, keď nastane situácia  $\langle \widehat{v}_j, \widehat{w}_j \rangle = 0$  a súčasne  $\widehat{w}_j, \widehat{v}_j \neq 0$ . Tento problém sa snaží riešiť nasledujúca sekcia.

### Look-ahead rozšírenie

Naviažeme na predošlú časť a budeme používať tam zavedené značenie. Základnou ideou tohto rozšírenia je fakt, že hoci vektory  $v_j$  a  $w_j$  pre nejaké  $j \in \mathbb{N}$  nemôžu byť definované, existuje nejaké  $k \in \mathbb{N}$  také, že vektory  $v_{j+k}$  a  $w_{j+k}$  definované môžu byť. K teoretickej analýze tohoto problému využijeme zovšeobecnenie načrtnutého vzťahu medzi ortogonálnymi polynómami a postupnosťou vektorov generovaných Lanczosovým algoritmom. K tejto časti budeme využívať hlavne tvrdenia z prvej kapitoly a jej podčasti 1.2.1.

Preto definujme lineárnu formu  $c$  na  $\mathbb{K}_{m-1}[x]$  predpisom  $c(p) = \langle v_1, p(\varphi^*) \cdot w_1 \rangle$ , potom vzhľadom k definícii adjungovaného operátora  $\kappa \varphi$  postačuje hľadať formálne ortogonálne polynómy vzhľadom k  $c$ . Poznamenajme ešte, že platí z predpokladu algoritmu 4.7  $c(1) = 1$ . Takéto polynómy vieme skonštruovať prostredníctvom vety 1.22. Avšak na druhú stranu týmto spôsobom nezískame bázu  $K_m(\varphi, v_1)$  resp.  $K_m(\varphi^*, w_1)$ . Teda bude potrebné nejakým spôsobom doplniť biortogonálny systém určený vetou 1.22. Touto otázkou sa zaoberajú v článku [10], kde je možné nájsť ďalšie potrebné modifikácie načrtnutého algoritmu.

## 4.3 Konvergencia Krylovových metód

Zameriame sa hlavne na Lanczosovu metódu pre samoadjungovaný operátor  $\varphi: V \rightarrow V$ . Ako uvidíme z tvrdení tejto časti, pre všeobecnejší prípad Arnoldiho metódy bude potrebný silnejší matematický aparát. Vzhľadom k tomu, že pre spektrum  $\sigma(\varphi)$  nemusí nutne platiť  $\sigma(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$  (napr. v prípade antisymetrického operátora), a preto bude potrebné využiť nejaké zovšeobecnenie min-max vety 1.24 pre polynómy. Niektoré ďalšie úvahy je možné nájsť v [22, kapitola 6], odkiaľ je prevzatá aj táto časť. Na úvod si uvedieme prípravné tvrdenia.

Predpokladajme v tejto sekcii, že vlastné hodnoty  $\varphi$  sú zoradené nasledovne

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

a ortonormálnu bázu tvorenú príslušnými vlastnými vektormi budeme značiť  $(u_i)_{i=1}^n$ .

**Lema 4.22.** *Nech  $V$  je vektorový priestor nad  $\mathbb{R}$  s podpriestorom  $K_m(\varphi, v_1)$  splňujúcim  $\dim_{\mathbb{R}} K_m(\varphi, v_1) = m$  a  $P_i$  bude projekcia na koreňový podpriestor  $R_{\lambda_i}$  pre  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .*

Ak je  $P_i v_1 \neq 0$ , potom platí

$$\min_{q \in \mathbb{R}_{m-1}[x], q(\lambda_i) \neq 0} \frac{\|q(\varphi) \cdot (\text{id} - P_i)v_1\|_2}{\|q(\varphi) \cdot (P_i v_1)\|_2} \leq \frac{\kappa_i}{|T_{m-i}(1 + 2c_i)|} \frac{\|(\text{id} - P_i)v_1\|_2}{\|P_i v_1\|_2}, \quad (4.8)$$

kde značíme  $\kappa_1 = 1$  a  $\kappa_i = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j - \lambda_n}{\lambda_j - \lambda_i}$  pre  $i = 2, 3, \dots, m$  a  $c_i = \frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} - \lambda_n}$ .

*Dôkaz.* Najskôr upravujeme pre  $q \in \mathbb{R}_{m-1}[x]$  splňujúce  $q(\lambda_i) \neq 0$

$$\frac{\|q(\varphi) \cdot (\text{id} - P_i)v_1\|_2}{\|q(\varphi) \cdot (P_i v_1)\|_2} = \frac{\|q(\varphi) \cdot y_i\|_2}{|q(\lambda_i)|} \frac{\|(\text{id} - P_i)v_1\|_2}{\|P_i v_1\|_2} = \|p(\varphi) \cdot w_i\|_2 \frac{\|(\text{id} - P_i)v_1\|_2}{\|P_i v_1\|_2}, \quad (4.9)$$

kde značíme  $w_i = \begin{cases} 0 & (\text{id} - P_i)v_1 = 0, \\ \frac{(\text{id} - P_i)v_1}{\|(\text{id} - P_i)v_1\|_2} & \text{inak,} \end{cases}$  a  $p(x) = \frac{q(x)}{q(\lambda_i)}$ . Z definície máme  $w_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_j u_j$ , pričom  $\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_j|^2 = 1$  a  $a_j \in \mathbb{R}$ , teda obdržíme

$$\|p(\varphi) \cdot w_i\|_2^2 = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_j|^2 |p(\lambda_j)|^2 \leq \max_{j \neq i} |p(\lambda_j)|^2.$$

Uvažujme nasledujúce členenie. Ak je  $i = 1$ , máme nerovnosť

$$\max_{j \neq 1} |p(\lambda_j)| \leq \max_{x \in [\lambda_n, \lambda_2]} |p(x)|,$$

teda celkovo

$$\min_{p \in \mathbb{R}_{m-1}[x], p(\lambda_1) = 1} \|p(\varphi) \cdot w_i\|_2 \leq \min_{p \in \mathbb{R}_{m-1}[x], p(\lambda_1) = 1} \max_{x \in [\lambda_n, \lambda_2]} |p(x)|.$$

V opačnom prípade pre  $i \neq 1$  sa obmedzíme na polynómy  $p$  tvaru

$$p(x) = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j - x}{\lambda_j - \lambda_i} s(x),$$

kde  $s \in \mathbb{R}_{m-i}[x]$  je ľubovoľný polynóm splňujúci  $s(\lambda_i) = 1$ . Teda máme

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}_{m-1}[x], p(\lambda_i) = 1} \|p(\varphi) \cdot w_i\|_2 &\leq \min_{s \in \mathbb{R}_{m-i}[x], s(\lambda_i) = 1} \max_{x \in [\lambda_n, \lambda_{i+1}]} \left| \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j - x}{\lambda_j - \lambda_i} s(x) \right| \\ &\leq \kappa_i \min_{s \in \mathbb{R}_{m-i}[x], s(\lambda_i) = 1} \max_{x \in [\lambda_n, \lambda_{i+1}]} |s(x)|. \end{aligned}$$

Teraz stačí využiť vety 1.24, a tým je dôkaz hotový.  $\square$

Nasledujúca lema nám poskytne informáciu o tvare odhadu niektorej z vlastných hodnôt operátora  $\varphi: V \rightarrow V$ . Predpokladajme obdobne, že vlastné hodnoty operátora  $P_{K_m} \varphi|_{K_m}$  sú zoradené nasledovne

$$\lambda_1^{(m)} \geq \lambda_2^{(m)} \geq \dots \geq \lambda_m^{(m)}.$$

**Lema 4.23.** *Nech  $\varphi$  je samoadjungovaný a  $K_m(\varphi, v_1)$  je Krylovov podpriestor dimenzie  $m$ , potom pre  $1 \leq i \leq m \leq n$  platí*

$$\lambda_i^{(m)} = \max_{q \in \mathbb{K}_{m-1}[x] \setminus \{0\} : q(\lambda_j^{(m)}) = 0 \text{ pre } j=1,2,\dots,(i-1)} \frac{\langle \varphi(q(\varphi) \cdot v_1), q(\varphi) \cdot v_1 \rangle}{\|q(\varphi) \cdot v_1\|_2^2}.$$

*Dôkaz.* Z vety 3.9 za využitia rovností  $\langle P_{K_m} \varphi(x), x \rangle = \langle \varphi(x), P_{K_m} x \rangle = \langle \varphi(x), x \rangle$  máme (treba si uvedomiť, že v tejto časti máme opačne zoradené vlastné čísla ako v odkazovanej vete)

$$\lambda_i^{(m)} = \max_{x \in K_m \setminus \{0\} \cap [\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \dots, \widehat{u}_{i-1}]^\perp} \frac{\langle \varphi(x), x \rangle}{\|x\|_2^2}, \quad (4.10)$$

kde  $\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \dots, \widehat{u}_{i-1}$  sú vlastné vektory operátora  $\varphi_m$ . Ukážme ešte, že platí  $\langle v_1, \widehat{u}_j \rangle \neq 0$  pre  $j = 1, 2, \dots, (i-1)$ . S využitím lemy 4.9 obdržíme  $\widehat{u}_j = p_j(\varphi) \cdot v_1 = p_j(\varphi_m) \cdot v_1$  pre nejaké  $p_j \in \mathbb{K}_{m-1}[x]$ . Teda máme

$$0 \neq \langle \widehat{u}_j, \widehat{u}_j \rangle = \langle v_1, \overline{p_j}(\varphi_m) \cdot \widehat{u}_j \rangle = \langle v_1, \overline{p_j}(\lambda_j^{(m)}) \widehat{u}_j \rangle = \overline{p_j}(\lambda_j^{(m)}) \langle v_1, \widehat{u}_j \rangle.$$

Odkiaľ je ľahko vidieť, že platí

$$x \perp [\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \dots, \widehat{u}_{i-1}] \iff x = q(\varphi) \cdot v_1 : q \in \mathbb{K}_{m-1}[x], q(\lambda_j^{(m)}) = 0 \text{ pre } j = 1, 2, \dots, (i-1).$$

□

Teraz sa zaoberajme odhadom rozdielu medzi exaktnými a aproximátnymi vlastných hodnotami  $\varphi: V \rightarrow V$ .

**Veta 4.24.** *Nech  $V$  je vektorový priestor nad  $\mathbb{R}$ ,  $P_i$  je projekcia na koreňový podpriestor  $R_{\lambda_i}$  pre  $1 \leq i \leq m \leq n$ . Ďalej predpokladáme, že platí  $P_i v_1 \neq 0$  a Krylovov podpriestor  $K_m(\varphi, v_1)$  je dimenzie  $m$ . Ak platí  $\lambda_j^{(m)} = \lambda_j$  pre  $0 < j < i$ , potom máme nasledujúce odhady*

$$0 \leq \lambda_i - \lambda_i^{(m)} \leq (\lambda_1 - \lambda_n) \left( \frac{\kappa_i^{(m)}}{T_{m-i}(1+2c_i)} \frac{\|(\text{id} - P_i)v_1\|_2}{\|P_i v_1\|_2} \right)^2, \quad (4.11)$$

kde používame nasledujúcu notáciu  $\kappa_i^{(m)} = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j^{(m)} - \lambda_n}{\lambda_j^{(m)} - \lambda_i}$  a  $c_i = \frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} - \lambda_n}$ .

*Dôkaz.* Prvú nerovnosť obdržíme z rovnice (4.10) rozšírením definičného oboru funkcie max. Teraz máme podľa lemy 4.23

$$\lambda_i - \lambda_i^{(m)} = \min_{q \in \mathbb{K}_{m-1}[x] \setminus \{0\} : q(\lambda_j^{(m)}) = 0 \text{ pre } j=1,2,\dots,(i-1)} \frac{\langle (\lambda_i \text{id} - \varphi)q(\varphi) \cdot v_1, q(\varphi) \cdot v_1 \rangle}{\|q(\varphi) \cdot v_1\|_2^2}.$$

Ďalej môžeme písať  $v_1 = \sum_{j=1}^n a_j u_j$  pre vhodné  $a_j \in \mathbb{R}$ , potom obdržíme

$$\begin{aligned}
\lambda_i - \lambda_i^{(m)} &= \min_{q \in \mathbb{R}_{m-1}[x] \setminus \{0\} : q(\lambda_j^{(m)}) = 0 \text{ pre } j=1,2,\dots,(i-1)} \frac{\sum_{j=1}^n (\lambda_i - \lambda_j) |a_j q(\lambda_j)|^2}{\sum_{j=1}^n |a_j q(\lambda_j)|^2} \\
&\leq (\lambda_i - \lambda_n) \min_{q \in \mathbb{R}_{m-1}[x] \setminus \{0\} : q(\lambda_j^{(m)}) = 0 \text{ pre } j=1,2,\dots,(i-1)} \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_j q(\lambda_j)|^2}{\sum_{j=1}^n |a_j q(\lambda_j)|^2} \\
&\leq (\lambda_i - \lambda_n) \min_{q \in \mathbb{R}_{m-1}[x] \setminus \{0\} : q(\lambda_j^{(m)}) = 0 \text{ pre } j=1,2,\dots,(i-1)} \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_j q(\lambda_j)|^2}{|a_i|^2 |q(\lambda_i)|^2} \\
&\leq (\lambda_i - \lambda_n) \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_j|^2}{|a_i|^2} \min_{q \in \mathbb{R}_{m-1}[x] \setminus \{0\} : q(\lambda_j^{(m)}) = 0 \text{ pre } j=1,2,\dots,(i-1)} \max_{j \neq i} \left| \frac{q(\lambda_j)}{q(\lambda_i)} \right|^2 \\
&\leq (\lambda_i - \lambda_n) \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_j|^2}{|a_i|^2} \min_{r \in \mathbb{R}_{m-i}[x] \setminus \{0\} : r(\lambda_i) = 1} \max_{\lambda \in \{\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n\}} \left| \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j^{(m)} - \lambda}{\lambda_j^{(m)} - \lambda_i} r(\lambda) \right|^2 \\
&\leq (\lambda_i - \lambda_n) \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_j|^2}{|a_i|^2} \left| \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j^{(m)} - \lambda_n}{\lambda_j^{(m)} - \lambda_i} \right|^2 \min_{r \in \mathbb{R}_{m-i}[x] \setminus \{0\} : r(\lambda_i) = 1} \max_{\lambda \in [\lambda_n, \lambda_{i+1}]} |r(\lambda)|^2 \\
&= (\lambda_i - \lambda_n) \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_j|^2}{|a_i|^2} \left| \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_j^{(m)} - \lambda_n}{\lambda_j^{(m)} - \lambda_i} \right|^2 \frac{1}{|T_{m-i}(1 + 2c_i)|^2},
\end{aligned}$$

odkiaľ plynie dokazované tvrdenie.  $\square$

Teraz sa budeme zaoberať odhadmi vzdialeností aproximatívnych vlastných vektorov a exaktných vlastných vektorov operátora  $\varphi$ .

**Lema 4.25.** *Nech  $\varphi: V \rightarrow V$  je samoadjungovaný operátor,  $\hat{\lambda}$  je aproximatívna vlastná hodnota vlastnej hodnoty  $\lambda \in \sigma(\varphi)$  a  $u \in V$  vlastný vektor príslušný k  $\lambda$ . Ďalej označme  $\gamma = \|P_{K_m} \varphi(\text{id} - P_{K_m})\|_2$  a  $\delta = \text{dist}(\lambda, \sigma(\varphi_m) \setminus \{\hat{\lambda}\})$ . Potom existuje aproximatívny vlastný vektor  $\hat{u}$  príslušný k vlastnému číslu  $\hat{\lambda}$  taký, že platí*

$$\|u - \hat{u}\|_2 \leq \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\delta^2}} \|(\text{id} - P_{K_m})u\|_2.$$

*Dôkaz.* Najprv zrejme máme  $0 = (\varphi - \lambda \text{id})u = (\varphi - \lambda \text{id})P_{K_m}u + (\varphi - \lambda \text{id})(\text{id} - P_{K_m})u$ , odkiaľ s využitím  $P_{K_m}^2 = P_{K_m}$  dostaneme

$$\begin{aligned}
\|P_{K_m}(\varphi - \lambda \text{id})P_{K_m}u\|_2 &= \|P_{K_m}(\varphi - \lambda \text{id})(\text{id} - P_{K_m})u\|_2 = \|P_{K_m} \varphi(\text{id} - P_{K_m})u\|_2 \\
&\leq \gamma \|(\text{id} - P_{K_m})u\|_2.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ďalej uvažujme obdobne

$$P_{K_m}(\varphi - \lambda \text{id})P_{K_m}u = P_{K_m}(\varphi - \lambda \text{id})P_{[\hat{u}]}P_{K_m}u + P_{K_m}(\varphi - \lambda \text{id})(\text{id}_{K_m} - P_{[\hat{u}]})P_{K_m}u,$$

odkiaľ máme za využitia invariencie operátora  $P_{K_m}(\varphi - \lambda \text{id})$  na  $(\text{id}_K - P_{[\hat{u}]})P_{K_m}u$

$$\begin{aligned} \|P_{K_m}(\varphi - \lambda \text{id})P_{K_m}u\|_2^2 &= \|P_{K_m}(\varphi - \lambda \text{id})P_{[\hat{u}]}P_{K_m}u\|_2^2 + \|P_{K_m}(\varphi - \lambda \text{id})(\text{id}_{K_m} - P_{[\hat{u}]})P_{K_m}u\|_2^2 \\ &\geq \delta^2 \|(\text{id}_{K_m} - P_{[\hat{u}]})P_{K_m}u\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Zhrňme výsledky z odvodených nerovností (4.12) a (4.13) do

$$\|(\text{id}_{K_m} - P_{[\hat{u}]})P_{K_m}u\|_2 \leq \frac{\gamma}{\delta} \|(\text{id} - P_{K_m})u\|_2.$$

Ďalej zrejme platí  $\|u - \hat{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \|(\text{id} - P_{[\hat{u}]})u\|_2^2 = \|(P_{K_m} - P_{[\hat{u}]})u\|_2^2 + \|(\text{id} - P_{K_m})u\|_2^2$ , a pretože tiež zrejme platí  $\|(P_{K_m} - P_{[\hat{u}]})u\|_2^2 = \|(\text{id}_{K_m} - P_{[\hat{u}]})P_{K_m}u\|_2^2$ , dokázali sme požadované tvrdenie.  $\square$

**Veta 4.26.** *Nech  $V$  je vektorový priestor nad  $\mathbb{R}$  a nech sú splnené predpoklady lemy 4.22, potom existuje vlastný vektor  $\hat{u}_i$  operátora  $\varphi_m$  taký, že platí*

$$\|u_i - \hat{u}_i\|_2 \leq \frac{\kappa_i^{(m)}}{|T_{m-i}(1+2c_i)|} \sqrt{1 + \frac{\beta_{m+1}^2}{\delta^2} \frac{\|(\text{id} - P_i)v_1\|_2}{\|P_i v_1\|_2}},$$

kde  $\delta = \text{dist}(\lambda, \sigma(\varphi_m) \setminus \{\hat{\lambda}\})$  a ostatné značenie je z lemy 4.22.

*Dôkaz.* Existencia vektoru  $\hat{u}_i$  plynie z lemy 4.25, kde potrebujeme určiť normu  $\gamma$ . Počítajme pre  $\{v_i\}_{i=1}^{m+1}$  dané algoritmom 4.5

$$(\text{id} - P_{K_m})\varphi v_j = (\text{id} - P_{K_m}) \left( \sum_{i=1}^{j+1} h_{ij} v_i \right) = \begin{cases} h_{(m+1)m} v_{m+1} & j = m, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Preto máme  $\|(\text{id} - P_{K_m})\varphi P_{K_m}\|_2 = \beta_{m+1}$ , a pretože platí podľa vety 1.17 pre adjungované operátory rovnosť  $\|(\text{id} - P_{K_m})\varphi P_{K_m}\|_2 = \|P_{K_m}\varphi(\text{id} - P_{K_m})\|_2$ , máme  $\gamma = \beta_{m+1}$ . Hľadajme odhad nasledujúceho výrazu

$$\begin{aligned} \|(\text{id} - P_{K_m})u_i\|_2 &= \min_{q \in \mathbb{K}_{m-1}[x]} \|u_i - q(\varphi) \cdot v_1\|_2 = \min_{q \in \mathbb{K}_{m-1}[x]} \left\| \frac{P_i v_1}{\|P_i v_1\|} - q(\varphi) \cdot v_1 \right\|_2 \\ &\leq \min_{q \in \mathbb{K}_{m-1}[x]: q(\lambda_i) \neq 0} \left\| \frac{q(\varphi) \cdot P_i v_1}{\|q(\varphi) \cdot P_i v_1\|} - q(\varphi) \cdot v_1 \right\|_2 \\ &\leq \min_{q \in \mathbb{K}_{m-1}[x]: q(\lambda_i) \neq 0} \left\| \frac{q(\varphi)}{\|q(\varphi) \cdot P_i v_1\|_2} \cdot (\text{id} - P_i)v_1 \right\|_2 \\ &= \min_{q \in \mathbb{K}_{m-1}[x]: q(\lambda_i) \neq 0} \frac{\|q(\varphi) \cdot (\text{id} - P_i)v_1\|_2}{\|q(\varphi) \cdot P_i v_1\|_2}. \end{aligned}$$

Teraz môžeme využiť výsledkov lemy 4.22 a obdržať dokazované tvrdenie.  $\square$

# Kapitola 5

## Praktická časť

V tejto časti budeme demonštrovať niektoré algoritmy a príslušné tvrdenia z predošlých kapitol na vhodných príkladoch. Budeme sa zaoberať rôznymi triedami matíc ako napríklad stochastické matice, symetrické a antisymetrické. Základom budú implementácie jednotlivých algoritmov pre výpočet aproximácií vlastných čísel a vektorov v software R, ktoré sú súčasťou archívu<sup>1</sup> tejto záverečnej práce.

**Príklad 5.1.** V tomto príklade prevzatom z [22] sa budeme zaoberať maticou prechodu dvojrozmernej náhodnej prechádzky  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  so stavmi na množine

$$\{(i, j) \in \{0, 1, \dots, K\} \times \{0, 1, \dots, K\} : i + j \leq K\}$$

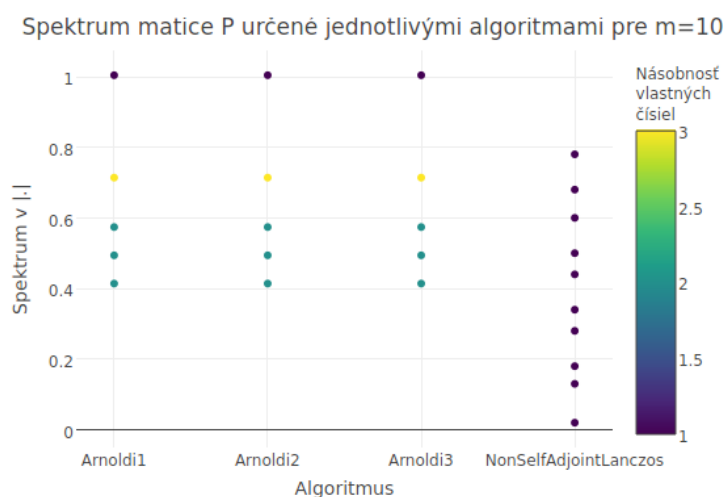
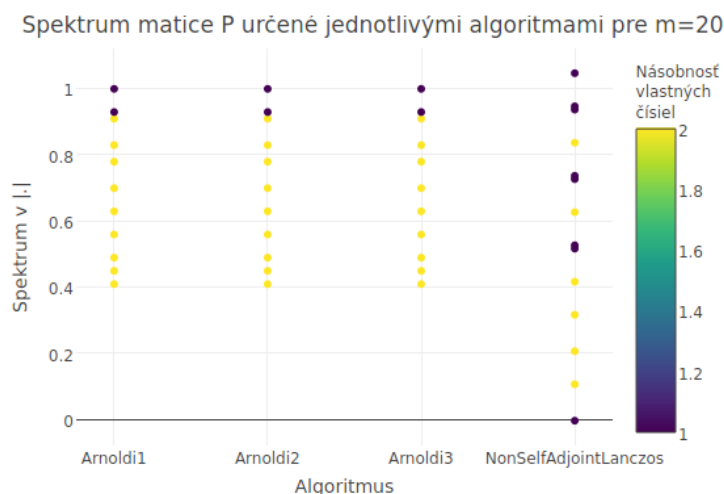
pre  $K \in \mathbb{N}$  pevné a s pravdepodobnosťami prechodu danými nasledovne:

$$P(S_{n+1} = (i, j) | S_n = (k, l)) = \begin{cases} pd(k, l) & i = (k - 1) \text{ alebo } j = (l - 1), \\ \frac{1}{2} - pd(k, l) & i = (k + 1) \text{ alebo } j = (l + 1), \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

kde značíme  $pd(k, l) = \begin{cases} \frac{k+l}{2K} & k, l \neq 0, \\ \frac{k+l}{K} & k = 0 \text{ alebo } l = 0. \end{cases}$ . Maticu prechodu tohoto homogénneho

Markovho reťazca budeme značiť ako  $P$ . Poznamenajme ešte, že celkovo máme  $\frac{(K+1)(K+2)}{2}$  rôznych stavov, do ktorých sa môže náhodná prechádzka  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dostať. V tretej kapitole vo vete 3.6 sme pripomenuli, že stochastická matica má vždy vlastné číslo 1 a platí  $|\lambda| \leq 1$  pre ľubovoľné  $\lambda \in \sigma(P)$ . Zdrojový kód k tejto úlohe je možné nájsť v súbore `example1.R`, kde uvažujeme  $K = 40$ . Poďme sa pozrieť, či túto podmienku splňujú aproximatívne vlastné hodnoty  $P$  a porovnať prostredníctvom aproximatívnych vlastných hodnôt jednotlivé projekčné metódy.

<sup>1</sup>[http://is.muni.cz/th/379697/prif\\_m/code.zip](http://is.muni.cz/th/379697/prif_m/code.zip)

Obr. 5.1: Porovnanie aproximatívneho spektra matice  $P$  pre  $m = 10$ Obr. 5.2: Porovnanie aproximatívneho spektra matice  $P$  pre  $m = 20$ 

Z obrázkov 5.1 a 5.2 si môžeme všimnúť, že aproximatívne spektrum na Krylovových podpriestoroch generovaných algoritmi 4.2, 4.3 a 4.4 sa významne nelíši a tiež spektrálny polomer v jednotlivých prípadoch je jedna. To však už neplatí o aproximatívnom spektre určenom algoritmom 4.7. Interaktívnu verziu vyššie zmienených obrázkov je možné nájsť na webe<sup>2</sup> prípadne v archíve práce.

Ďalej si maticu prechodu  $P$  náhodnej prechádzky  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  upravíme podľa spôsobu popísaného v príklade 3.19, teda skonštruujeme tzv. Google maticu  $G = \alpha P + (1 - \alpha)ee^T$  pre  $\alpha = 0,35$ . O takto upravenej matici  $G$  vieme, že spĺňa predpoklady vety 3.3. Výsledky si zhrnieme v tabuľke 5.1.

<sup>2</sup><http://math.muni.cz/~xsimkovam/dp/ex1obr1.html>

Krok	POWERMETHOD	INVERSEPOWERMETHOD	RAYLEIGHQUOTIENTITERATION
1.	0.9724200	1.000618	0.8333331
2.	0.9962697	1.000311	0.9726958
3.	0.9995082	1.000128	1.0000221
4.	0.9999329	1.000050	1.0000000
5.	0.9999897	1.000019	
6.	0.9999980	1.000007	
7.	0.9999995	1.000003	
8.	0.9999998	1.000001	
9.	0.9999999	1.000000	
10.	1.0000000		

Tabuľka 5.1: Konvergencia jednotlivých algoritmov aplikovaných na maticu  $G$ 

Z tabuľky 5.1 vidíme, že rýchlosť konvergencie Rayleighovej iterácie 3.3 v tomto prípade je trikrát väčšia ako v prípade ostatných dvoch metód (3.1 a 3.2), načo sme v teoretickej časti poukázali. V tomto prípade sme uvažovali inverznú mocninovú metódu s posunutím 1,5, čo nám zabezpečuje konvergenciu práve k číslu 1.

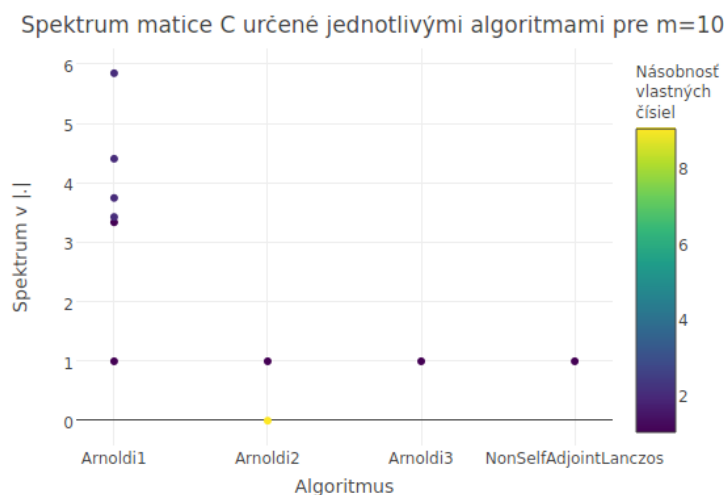
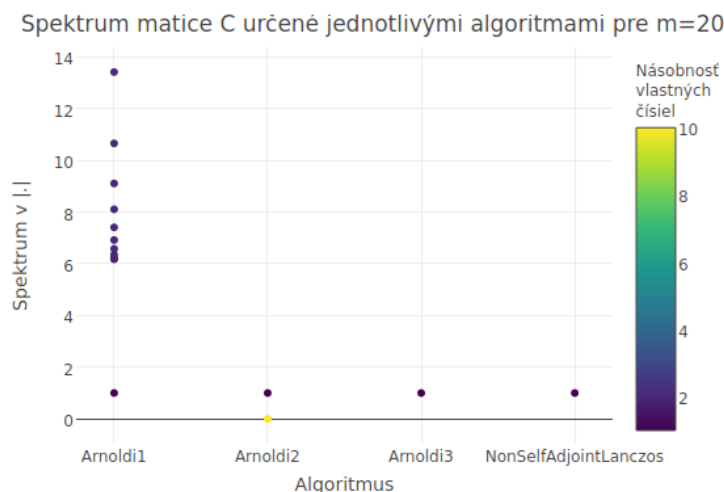
**Príklad 5.2.** V tomto príklade sa budeme zaoberať výpočtom koreňov nejakého monického polynómu  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{K}[x]$  prostredníctvom hľadania vlastných čísel vhodnej matice, ktorej charakteristickým polynómom bude práve polynóm  $p$ . Z článku [9] je táto pridružená matica definovaná nasledovne

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

pričom sa rekurentným výpočtom príslušného determinantu ľahko odvodí, že platí  $\det(C_p - xI) = p(x)$ . Najskôr sa budeme zaoberať polynómom  $p(x) = x^{99} - 1$ , ktorého korene  $c \in \mathbb{C}$  podobne ako v predošlom príklade splňujú  $|c| = 1$ . Zdrojový kód k tomu príkladu je možné nájsť v súbore `example2.R`. Opäť si vykreslíme obdobné obrázky 5.3 a 5.4 ako v predošlom príklade, pričom ich interaktívna verzia je dostupná na webe<sup>3</sup>.

<sup>3</sup><http://math.muni.cz/~xsimkovam/dp/ex2obr1.html>



Obr. 5.3: Porovnanie aproximatívneho spektra matice  $C$  pre  $m = 10$ Obr. 5.4: Porovnanie aproximatívneho spektra matice  $C$  pre  $m = 20$ 

Teraz už z obrázkov 5.3 a 5.4 je patrný rozdiel medzi rôznymi implementáciami Arnoldiho metódy. Rovnako si môžeme všimnúť, že algoritmus ARNOLDI1 vykazuje pomerne veľkú chybu medzi exaktnými vlastnými hodnotami a aproximatívnymi vlastnými hodnotami. Algoritmus ARNOLDI2 narozdiel od algoritmu ARNOLDI1 nevykazuje takú mieru nepresnosti, avšak určí okrem vlastného čísla 1 aj viacnásobné aproximatívne vlastné číslo 0. Algoritmy ARNOLDI3 a NONSELFADJOINTLANCZOS skončia už v kroku 1, pretože ako počiatočný vektor algoritmov máme zvolený vektor  $(1, 1, \dots, 1)^T$ . Na druhú stranu si môžeme všimnúť, že algebraická násobnosť vlastného čísla 1 je v prípade každého algoritmu iba jedna. Aj z tohoto dôvodu je vhodné využívať deflačné techniky načrtnuté v časti 4.2.1, pretože vlastné číslo 1 je aproximované pomerne presne.

Venujme sa ešte v krátkosti metódam založeným na iteráciách jedným vektorom. Budeme uvažovať polynóm  $(x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)^2$ . Mocninová metóda 3.1 konverguje k najväčšiemu vlastnému číslu v absolútnej hodnote, inverzná mocninová metóda 3.2 rovnako, pričom sme zvolili parameter posunu 3, 5. Rayleighova metóda 3.3 bude konvergovať

k najmenšiemu vlastnému číslu vzhľadom k vete 3.14 a počiatočnej aproximácii vlastného vektora zvolenej podľa odporúčaní ako  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ . Z tabuľky 5.2 si môžeme všimnúť, že inverzná mocninová metóda konverguje rýchlejšie ako mocninová metóda, ale tento fakt je ovplyvnený aj voľbou parametra posunu, pretože spektrum poznáme vopred.

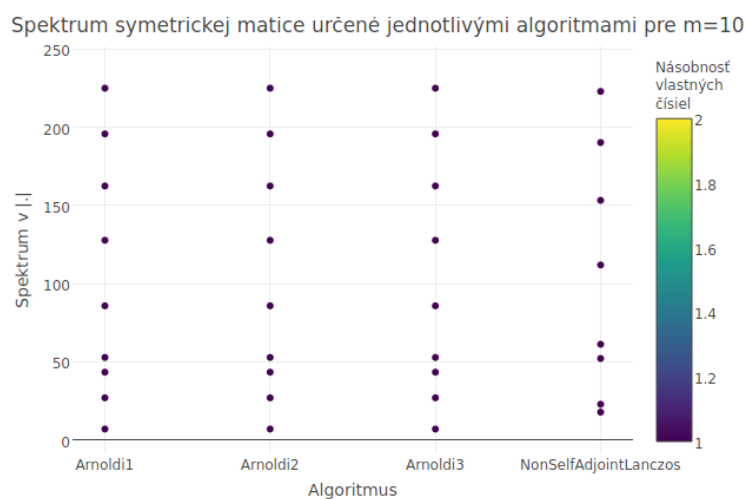
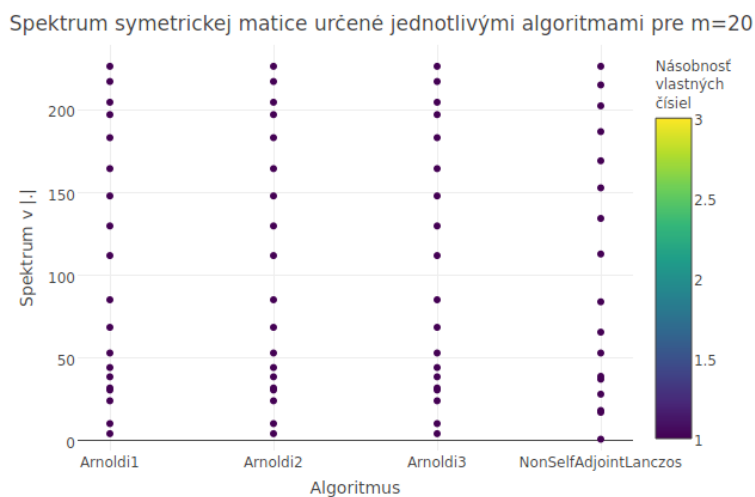
Krok	POWERMETHOD	INVERSEPOWERMETHOD	RAYLEIGHQUOTIENTITERATION
1.	0.6666667	3.301841	0.6666667
2.	-3.4666667	3.206560	0.6663146
3.	11.9111917	3.152568	0.7653881
4.	7.1705928	3.119103	0.8597116
5.	5.5962845	3.096944	0.9250949
9.	3.8675069	3.054801	0.9952444
25.	3.1671057	3.019902	
50.	3.0589011	3.009976	
66.	3.0509055	3.007562	
100.	3.0322814		
125.	3.0254382		
150.	3.0209889		
175.	3.0178643		
202.	3.0153899		

Tabuľka 5.2: Konvergencia jednotlivých algoritmov aplikovaných na maticu  $C$

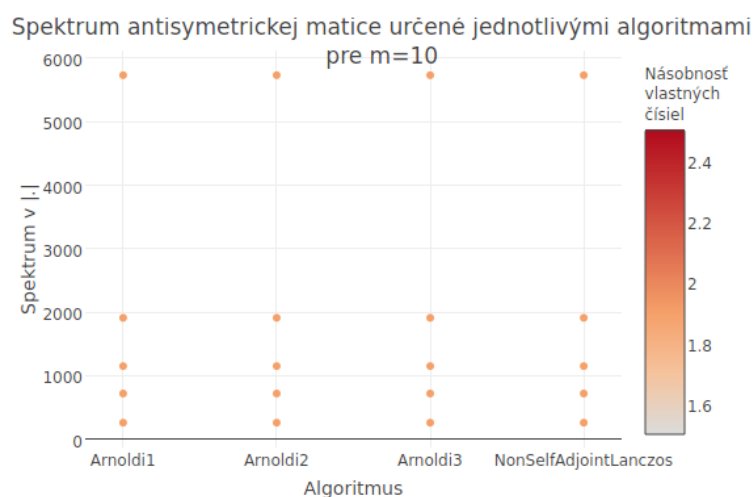
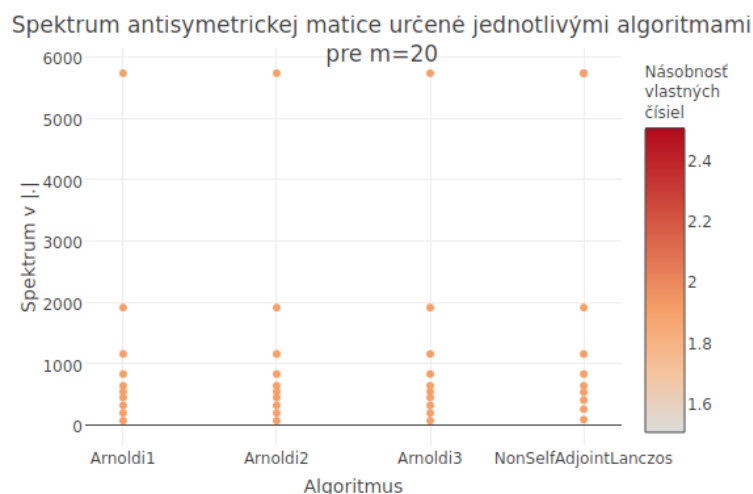
**Príklad 5.3.** V tomto príklade sa v krátkosti zameriame na symetrické a antisymetrické matice. Zdrojový kód k tomu príkladu je možné nájsť v súbore `example3.R`. Interaktívne obrázky sú opäť dostupné na webe<sup>4 5</sup>. Tentokrát aplikujeme projekčné metódy na matice s prvkami vygenerovanými z binomického rozdelenia pravdepodobnosti  $Bi(2n; 0, 45)$ , kde  $n$  je rozmer matice, pričom v našom prípade uvažujeme  $n = 100$ . Teraz porovnáme jednotlivé metódy prostredníctvom grafického vyobrazenia.

<sup>4</sup><http://math.muni.cz/~xsimkovam/dp/ex3obr1.html>

<sup>5</sup><http://math.muni.cz/~xsimkovam/dp/ex3obr2.html>

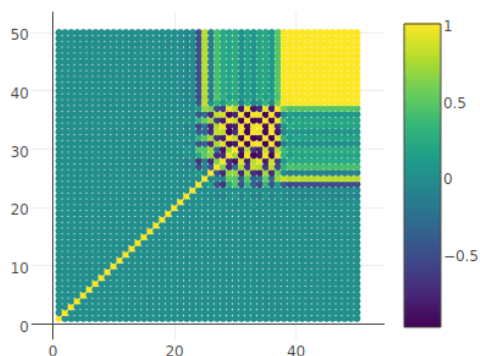
Obr. 5.5: Porovnanie aproximatívneho spektra symetrickej matice pre  $m = 10$ Obr. 5.6: Porovnanie aproximatívneho spektra symetrickej matice pre  $m = 20$ 

Najskôr sa venujme prípadu symetrickej matice. Z obrázkov 5.5 a 5.6 si môžeme všimnúť, že tri rôzne implementácie Arnoldiho metódy opäť dávajú zhodné aproximatívne spektrum. V porovnaní so špeciálnou verziou Arnoldiho metódy – Lanczosovým algoritmom je možné spozorovať určité minimálne rozdiely.

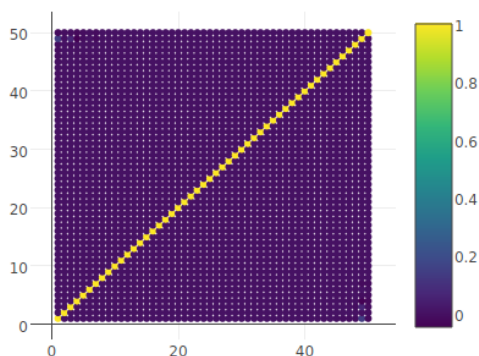
Obr. 5.7: Porovnanie aproximatívneho spektra antisymetrickej matice pre  $m = 10$ Obr. 5.8: Porovnanie aproximatívneho spektra antisymetrickej matice pre  $m = 20$ 

Podobné výsledky ako v prípade symetrickej matice obdržíme aj v prípade antisymetrickej matice ako je možné vidieť z obrázkov 5.7 a 5.8.

**Príklad 5.4.** V tomto poslednom príklade sa hlavne zameriame na overenie ortogonalnosti generátorov Krylovových podpriestorov určených jednotlivými algoritmiami. Zdrojový súbor k tomuto príkladu je `example4.R`. Budeme postupovať obdobne ako v materiále [2] v časti pod názvom testovacia úloha. Základom bude matica  $120 \times 120$  podobná diagonálnej s mocninami  $\frac{1}{2}$  na diagonále pre algoritmy Arnoldi1, Arnoldi2, Arnoldi3 a NonSelfAdjointLanczos. Pre ostatné dva algoritmy použijeme príslušné náhodne generované matice s rovnakými rozmermi popísané v predošlom príklade 5.3. Jednotlivé algoritmy generujú vektory s nasledujúcimi Gramovými maticami.

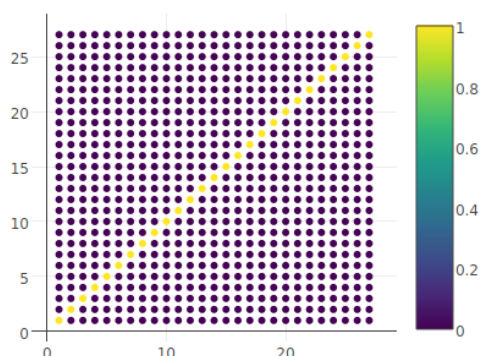


Obr. 5.9: Gramova matica vektorov generovaných algoritmom Arnoldi1

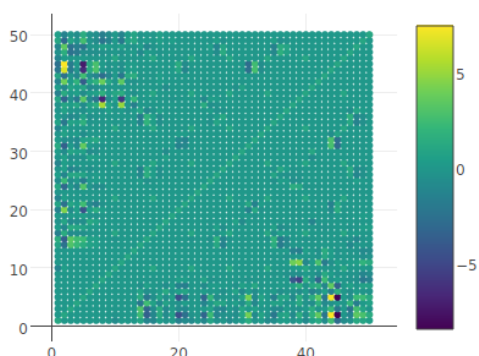


Obr. 5.10: Gramova matica vektorov generovaných algoritmom Arnoldi2

Môžeme si povšimnúť rozdielu medzi algoritmami Arnoldi1 a Arnoldi2, a to v použití dvoch sítie matematicky ekvivalentných algoritmov, ale numericky rozdielných implementácií Gramovho-Schmidtovho procesu.

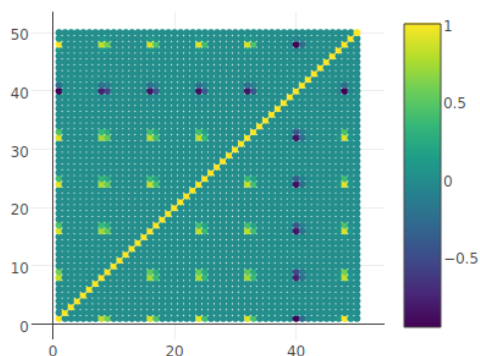


Obr. 5.11: Gramova matica vektorov generovaných algoritmom Arnoldi3

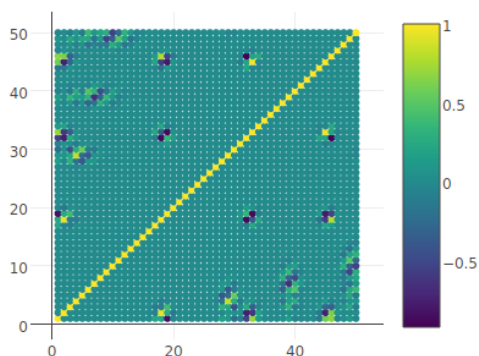


Obr. 5.12: Gramova matica vektorov generovaných algoritmom NonSelfAdjoint-Lanczos

Algoritmus Arnoldi3 generuje podpriestor menšej dimenzie ako ostatné algoritmy. Lanczosove algoritmy, ako vidíme z obrázkov, majú oveľa väčšiu nepresnosť v tomto meradle, čo môže byť spôsobené predpokladom, že niektoré dvojice vektorov sú teoreticky ortogonálne, ale v prípade numerickej implementácie tomu tak nie je.



Obr. 5.13: Gramova matica vektorov generovaných algoritmom SelfAdjointLanczos



Obr. 5.14: Gramova matica vektorov generovaných algoritmom SkewSymmetricLanczos

Ako v predošlých príkladoch aj v tomto prípade sú k dispozícii interaktívne verzie obrázkov na webe [6](#) [7](#) [8](#) [9](#) [10](#) [11](#).

<sup>6</sup><http://math.muni.cz/~xsimkovam/dp/ex4obr1.html>

<sup>7</sup><http://math.muni.cz/~xsimkovam/dp/ex4obr2.html>

<sup>8</sup><http://math.muni.cz/~xsimkovam/dp/ex4obr3.html>

<sup>9</sup><http://math.muni.cz/~xsimkovam/dp/ex4obr4.html>

<sup>10</sup><http://math.muni.cz/~xsimkovam/dp/ex4obr5.html>

<sup>11</sup><http://math.muni.cz/~xsimkovam/dp/ex4obr6.html>

# Zoznam použitej literatúry

- [1] BINDEL, David. Rayleigh quotients, minimax and interlace theorems. In: *Matrix Computations : Lectures* [online]. 2012 [cit. 2014-09-11]. Dostupné z: <http://www.cs.cornell.edu/~bindel/class/cs6210-f12/notes/lec29.pdf>
- [2] BLOMGREN, Peter. *Numerical Matrix Analysis* [online]. San Diego, 2014 [cit. 2016-01-09]. Dostupné z: [http://terminus.sdsu.edu/SDSU/Math543\\_s2012/Lectures/07/lecture.pdf](http://terminus.sdsu.edu/SDSU/Math543_s2012/Lectures/07/lecture.pdf)
- [3] BREZINSKI, C a M REDIVO-ZAGLIA. *Breakdowns in the computation of orthogonal polynomials* [online]. Dordrecht, 1994 [cit. 2016-03-06]. Dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.11.7779&rep=rep1&type=pdf>
- [4] BRU, R., R. CANTÓ, R. L. SOTO a A. M. URBANO. *A Brauer's theorem and related results* [online]. 2011 [cit. 2014-10-25]. Dostupné z: <http://personales.upv.es/~rbru/papers-2011/trabajo-CEJM-v5.pdf>
- [5] CAROTHERS, N. L. *A Short Course on Approximation Theory* [online]. Bowling Green State University, 2009 [cit. 2016-02-03]. Dostupné z: <http://personal.bgsu.edu/~carother/Notes/ApproxTheorySu09-Final.pdf>
- [6] ČADEK, Martin a Lukáš VOKŘÍNEK. *Lineární algebra a geometrie III* [online]. Brno, 2013 [cit. 2016-01-22]. Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/~koren/LA3.pdf>
- [7] DOŠLÁ, Zuzana a Jaromír KUBEN. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné* [online]. Brno, 2004 [cit. 2014-09-25]. ISBN 80-210-3121-2. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~dosla/download/skript.pdf>
- [8] DOŠLÝ, Ondřej. MASARYKOVA UNIVERZITA. *Lineární funkcionální analýza* [online]. Brno, 2012 [cit. 2015-01-28]. Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/~dosly/lfa-2013.pdf>
- [9] EDELMAN, Alan a H. MURAKAMI. Polynomial roots from companion matrix eigenvalues. *Mathematics of computation* [online]. 1995, 64(210), 763-776 [cit. 2016-04-23]. Dostupné z: <http://www.ams.org/journals/mcom/1995-64-210/S0025-5718-1995-1262279-2/S0025-5718-1995-1262279-2.pdf>

- [10] FREUND, Roland W., Martin H. GUTKNECHT a Noël M. NACHTIGAL. *An Implementation of the Look-Ahead Lanczos Algorithm for Non-Hermitian Matrices* [online]. [cit. 2016-01-31]. Dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.53.9389&rep=rep1&type=pdf>
- [11] FRIEDLAND, Shmuel. *Convergence of products of matrices in projective spaces* [online]. 2004 [cit. 2015-08-09]. Dostupné z: <http://homepages.math.uic.edu/~friedlan/prodmatr4.pdf>
- [12] GALLIER, Jean. *Geometric Methods and Applications For Computer Science and Engineering* [online]. With Internet Supplement. New York, NY: Springer New York, 2008 [cit. 2015-09-16]. ISBN 9781461301370. Dostupné z: <http://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/geom3.html>
- [13] Gaussian Elimination and LU Factorization. In: *Introduction to Numerical Analysis homepage* [online]. 2013 [cit. 2014-09-02]. Dostupné z: [http://www.cs.bgu.ac.il/~na141/wiki.files/477577\\_Chapter\\_7.pdf](http://www.cs.bgu.ac.il/~na141/wiki.files/477577_Chapter_7.pdf)
- [14] HANSEN, Anders C. *The Infinite Dimensional QR algorithm* [online]. Cambridge [cit. 2016-05-06]. Dostupné z: [http://www.damtp.cam.ac.uk/research/afha/anders/Inf\\_QR1.pdf](http://www.damtp.cam.ac.uk/research/afha/anders/Inf_QR1.pdf)
- [15] IGAZ, Dávid. *Rozklady matic a jejich aplikace* [online]. Brno, 2013 [cit. 2014-09-11]. Dostupné z: [https://is.muni.cz/th/379853/prif\\_b/BakalarskaPraca\\_BachelorThesis\\_.pdf](https://is.muni.cz/th/379853/prif_b/BakalarskaPraca_BachelorThesis_.pdf). Bakalárska práca. Masarykova univerzita.
- [16] ISERLES, A. *Numerical Analysis – Lecture 3: Orthogonal polynomials* [online]. Cambridge, 2010 [cit. 2016-01-24]. Dostupné z: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/PartIB/Lect03.pdf>
- [17] LANGVILLE, Amy N. a Carl D. MEYER. *Deeper Inside PageRank* [online]. Raleigh, 2004 [cit. 2016-04-02]. Dostupné z: [http://meyer.math.ncsu.edu/Meyer/PS\\_Files/DeeperInsidePR.pdf](http://meyer.math.ncsu.edu/Meyer/PS_Files/DeeperInsidePR.pdf)
- [18] LYCHE, Tom. *Lecture Notes for Inf-Mat 4350, 2012*. Oslo, 2012. Dostupné z <http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/INF-MAT4350/h12/undervisningsmateriale/book2012.pdf>
- [19] MELROSE, Richard. *Functional Analysis: Lecture notes for 18.102* [online]. Cambridge, 2010, 6.5.2014 [cit. 2015-12-12]. Dostupné z: <https://math.mit.edu/~rbm/18-102-S14/FunctAnal.pdf>
- [20] NEYMEYR, Klaus. *A Hierarchy of Preconditioned Eigensolvers for Elliptic Differential Operators* [online]. Tübingen, 2001 [cit. 2014-09-10]. Dostupné z: <http://cat.math.uni-rostock.de/~neymeyr/papers/habil.pz.gz>. Habilitačná práca. Universität Tübingen.
- [21] NEYMEYR, Klaus. *A Note on Inverse Iteration* [online]. Rostock, 2014 [cit. 2014-10-25]. Dostupné z: <http://cat.math.uni-rostock.de/~neymeyr/papers/invit.pdf>



- [22] SAAD, Yousef. *Numerical methods for large eigenvalue problems* [online]. 2011 [cit. 2014-08-17]. Dostupné z: [www.cs.umn.edu/~saad/eig\\_book\\_2ndEd.pdf](http://www.cs.umn.edu/~saad/eig_book_2ndEd.pdf)
- [23] SLOVÁK, Jan. MASARYKOVA UNIVERZITA. *Lineární algebra* [online]. Brno, 1998 [cit. 2014-06-27]. Dostupné z: <https://www.math.muni.cz/~slovak/Vyuka/la.pdf>
- [24] Spectral radius. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2014-09-02]. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/Spectral\\_radius](http://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_radius)
- [25] VINKLER, Mojmír. *Afinní geometrie a Markovovy řetězce* [online]. Brno, 2012 [cit. 2016-04-03]. Dostupné z: [http://is.muni.cz/th/358102/prif\\_b/afinni\\_geometrie\\_a\\_markovovy\\_retezce.pdf](http://is.muni.cz/th/358102/prif_b/afinni_geometrie_a_markovovy_retezce.pdf)
- [26] WALKER, Homer F. *Implementation of the GMRES method using Householder transformations*. SIAM J. Sci. SrAT. COMPUT. [online]. 1988, **9**(1), 152-163 [cit. 2016-02-23]. Dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=EF218DCFB4057C5F20FDEE3A2A5297CA?doi=10.1.1.455.6591&rep=rep1&type=pdf>

