MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2018 ZDISLAVA TVRDÍKOVÁ

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Nekonečné řady v komplexním oboru

Bakalářská práce

Zdislava Tvrdíková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Josef Kalas, CSc. **Brno 2018**

Bibliografický záznam

Autor:	Zdislava Tvrdíková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Nekonečné řady v komplexním oboru
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.
Akademický rok:	2017/18
Počet stran:	ix + 49
Klíčová slova:	Komplexní obor; mocninné řady; Taylorův rozvoj; Laurentova řada; odstranitelná singularita; pól; podstatná singularita; Cauchyova teorie; Residuová věta

Bibliographic Entry

Author:	Zdislava Tvrdíková Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Infinite series in complex domain
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial and Insurance Mathematics
Supervisor:	doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.
Academic Year:	2017/18
Number of Pages:	ix + 49
Keywords:	Komplex domain; power series; Taylor series; Laurent series; removable singularity; pole; essential singularity; Cauchy's theorem; Residue theorem

Abstrakt

V této bakalářské práci se zabýváme nekonečnými řadami v komplexním oboru s důrazem na mocninné a Laurentovy řady. Teorie je doplněna vybranými aplikacemi teorie reziduí. Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole definujeme číselné řady v komplexním oboru, v kapitole druhé funkční řady v komplexním oboru. Třetí kapitola obsahuje základní definice a věty křivkového integrálu. Čtvrtá kapitola ukazuje speciální typ řady, tzv. Laurentovu řadu, analyzuje izolované singularity a rezidua komplexních funkcí a nakonec ukazuje vybrané aplikace teorie reziduí na výpočet jistých reálných vlastních i nevlastních integrálů.

Abstract

In this thesis we study infinite series in complex domain with an emphasis on power and Laurent series. The theory is complemented by selected residue applications. The thesis is divided into four chapters. In the first chapter we define number series in the complex domain, in the second chapter there are functional series in the complex domain. The third chapter contains basic definitions and theorems of the line integral. The fourth chapter shows a special type of the series, the so called Laurent series, analyzes the isolated singularities, and residues of complex functions. The object of research of the fourth chapter are selected applications of the residue theory on the calculation of both proper and improper real integrals.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2017/2018

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Studentka: Zdislava Tvrdíková

Program: Matematika

Obor: Finanční a pojistná matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce: Nekonečné řady v komplexním oboru

Název práce anglicky: Infinite series in complex domain

Oficiální zadání:
Pojednejte o nekonečných řadách v komplexním oboru s důrazem na mocninné a Laurentovy řady. Všimněte si některých vybraných aplikací. Teorii doplňte vhodnými řešenými příklady. Na závěr zařaďte sbírku úloh k samostatnému řešení.

Literatura:

KALAS, Josef. *Analýza v komplexním oboru*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2006. iv, 202. ISBN 8021040459.

JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (II)*. 3. dopl. vyd. Praha: Academia, 1976. 669 s.

VESELÝ, Jiří. *Komplexní analýza : pro učitele*. 1. vyd. Praha: Karolinum, 2000. viii, 244. ISBN 8024602024.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.

Datum zadání práce: 15. 6. 2017

V Brně dne: 6. 11. 2017

Souhlasím se zadáním (podpis, datum): 16. 11. 2017

Tvrdíková		v. z.
Zdislava Tvrdíková	doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.	prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
studentka	**vedoucí práce**	**ředitel Ústavu matematiky a statistiky**

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému vedoucímu doc. RNDr. Josefu Kalasovi, CSc., za návrh této bakalářské práce a za poskytnutou literaturu. Dále mu děkuji za velmi milý přístup, ochotu, čas a podnětné připomínky na konzultacích, které bezpochyby přispěly ke zlepšení kvality této bakalářské práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 19. května 2018 ....

Zdislava Tvrdíková

Obsah

Přehled použitého značení

Pro snažší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\tilde{\mathbb{C}}$	rozšířená množina komplexních čísel
$\mathbb{R}^*$	rozšířená množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	kladná část množiny reálných čísel
$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel rozšířená o $\{0\}$
$(\mathbb{C}, d)$	metrický prostor na množině $\mathbb{C}$ s metrikou d
$d(w,z)$	metrická vzdálenost bodů $w, z \in \mathbb{C}$
i	imaginární jednotka
$z = x + iy$	algebraický tvar komplexního čísla z
$\bar{z}$	číslo komplexně sdružené k číslu z
$\lvert z \rvert$	velikost (absolutní hodnota) komplexního čísla z
$\mathrm{Re}\, z$	reálná část komplexního čísla z
$\mathrm{Im}\, z$	imaginární část komplexního čísla z
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$	posloupnost a_n pro n od jedné do nekonečna
$\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$	posloupnost částečných součtů s_k pro k od jedné do nekonečna
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum a_n$	nekonečná řada
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$	mocninná řada
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$	Laurentova řada
$f'(z_0)$	derivace funkce f v bodě z_0
$f^{(n)}(z)$	n-tá derivace funkce f
$[x_0, y_0]$	bod se souřadnicemi x_0 a y_0
$u_x(x_0, y_0)$	parciální derivace funkce u podle x v bodě (x_0, y_0)
$\lim_{z \to z_0} f(z)$	limita funkce f pro z jdoucí k bodu z_0
$\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in M}}$	limita funkce f vzhledem k množině M

$\to$	bodová konvergence
$\rightrightarrows$	stejnoměrná konvergence
$\setminus$	množinový rozdíl
$n!$	faktoriál z čísla n
$K(z_0,R)$	otevřený kruh se středem v bodě z_0 o poloměru R
$K^*(z_0,R)$	prstencové okolí bodu z_0
$P(z_0,r,R)$	mezikruží bodu z_0 s vnitřním poloměrem r a vnějším poloměrem R
e^z	exponenciální funkce
$\ln n$	přirozený logaritmus čísla n
$\arg z$	hodnota argumentu čísla z, která leží v intervalu $\langle -\pi,\pi\rangle$
$\log z$	$:= \ln\lvert z\rvert + i\arg z$, inverzní funkce k exponenciální funkci
$\sin z$	funkce sinus
$\cos z$	funkce kosinus
$\sinh z$	funkce hyperbolický sinus
$\cosh z$	funkce hyperbolický kosinus
$\operatorname{res}_{z_0} f$	reziduum funkce f v bodě z_0
$\dot{-}\gamma$	opačně orientovaná cesta k cestě γ
$\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$	součet cest γ_1,γ_2
$\gamma_1 \dot{-} \gamma_2$	rozdíl cest γ_1,γ_2
$\int_a^b f(x)dx$	nevlastní integrál funkce f v mezích od a do b
$\int_\gamma f(z)dz$	křivkový integrál funkce f po cestě γ

Úvod

Komplexní analýza se spolu s diferenciálním a integrálním počtem řadí mezi základní partie matematické analýzy. Má mnoho aplikací, a to především v matematice a fyzice. Jedním z nejdůležitějších matematiků v této oblasti byl Augustin Louis Cauchy, po kterém byla pojmenována celá teorie.

Tato bakalářská práce se věnuje nekonečným řadám v komplexním oboru, včetně aplikací Cauchyovy teorie a Residuové věty. Jejím cílem je ukázat aplikaci teorie residuí na několika příkladech a teorii doplnit sbírkou neřešených příkladů. Předpokladem této práce je proto znalost matematické analýzy v reálném oboru - zejména integrálního počtu, a práce s komplexními čísly.

V první kapitole se seznamujeme s nekonečnými číselnými řadami komplexní proměnné a jejich konvergencí. Teorie je doplněna dvěma řešenými příklady souvisejícími s určením konvergence zadané řady. Na konci této kapitoly je cvičení s neřešenými příklady.

Ve druhé kapitole ukazujeme teorii funkčních komplexních řad a jejich konvergenci. Důležitým typem funkčních řad jsou tzv. mocninné řady, kterým je věnována další část. Dále ukazujeme Taylorův rozvoj mocninné řady. Tato kapitola je doplněna 10 řešenými příklady. Její závěr obsahuje cvičení s neřešenými příklady k procvičení.

Ve třetí kapitole stručně uvádíme nejnutnější definice a věty křivkového integrálu. Tato část slouží k porozumění navazující, čtvrté kapitoly.

V její první části analyzujeme další speciální funkční řadu, a sice Laurentovu řadu. Ta hraje důležitou roli při definování residuí funkce komplexní proměnné. Ve druhé části se věnujeme izolovaným singulárním bodům, které výpočet residuí značně usnadňují. Ve třetí části této kapitoly definujeme residuum funkce a formulujeme Residuovou a Cauchyovu větu. Tyto věty jsou následně ilustrovány na řešených příkladech. Navazuje podkapitola Aplikace residuí. V této sekci ukazujeme aplikaci Cauchyovy teorie na výpočet různých reálných integrálů. Uvádíme celkem šest speciálních typů reálných integrálů, kde aplikaci residuí využíváme. Ke každému typu je přidán ukázkový řešený příklad. Práce je zakončena sbírkou úloh k procvičení.

Hlavním zdrojem této práce je [4], který je doplněn [2], [3], [5] a [7]. Ukázkové příklady a úlohy ve cvičeních jsou inspirovány především [3] a [5]. Grafy jsou vytvořeny ve webové aplikaci draw.io, práce je sázena systémem LaTeX.

Kapitola 1

Číselné řady v $\mathbb{C}$

Množinu *všech komplexních čísel* $\mathbb{C}$ budeme chápat jako úplný metrický prostor $(\mathbb{C}, d)$, kde metrika d je vzdálenost taková, že platí $d(w,z) = |w - z|$.
Rozšířenou množinu komplexních čísel budeme brát jako množinu $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1.1 Nekonečné řady a jejich konvergence

Nekonečné řady v komplexním oboru se od řad v reálném oboru příliš neliší. Komplexní řada vzniká jako součet prvků posloupnosti komplexních čísel, pokud je posloupnost nekonečná, vznikne sečtením jejích členů nekonečná řada.

Definice 1. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost čísel $a_n \in \mathbb{C}$. Posloupnost *částečných součtů* $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ definovaných jako $s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$ nazýváme *(nekonečnou) řadou* se *členy* a_n a označujeme ji

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{resp.} \sum a_n.$$

Pojem *konvergence*, resp. *divergence* nekonečné řady má souvislost s existencí limity posloupnosti částečných součtů. Posloupnost komplexních čísel $\{a_n\}$ nazveme *konvergentní k limitě* $L \neq \infty$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový index n^*, že pro všechna $n > n^*$ platí nerovnost $|a_n - L| < \varepsilon$.

Říkáme, že (nekonečná) řada $\sum a_n$ *konverguje* (*je konvergentní*), jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ je konvergentní. V opačném případě říkáme, že řada $\sum a_n$ *diverguje* (*je divergentní*).

Existuje-li konečná limita posloupnosti částečných součtů $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, označujeme ji jako *součet* řady. Součet řady značíme s nebo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Konvergence, resp. divergence nekonečné řady se nezmění, jestliže konečný počet jejích prvků změníme nebo vynecháme, či k ní konečný počet prvků přidáme. Nekonečnou řadu $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, kde $m \in \mathbb{Z}$, definujeme jako

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+m-1},$$

pokud řada na pravé straně konverguje.

Stejně jako v reálném oboru, i v oboru komplexním platí tzv. *nutná podmínka konvergence:* Protože n-tý člen posloupnosti je roven $a_n = s_n - s_{n-1}$, platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

pro každou konvergentní řadu $\sum a_n$.

Příklad 1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)$ diverguje, protože posloupnost $(\cos \pi n)_{n=1}^{\infty}$ má dva různé hromadné body -1 a 1, tedy limita neexistuje a nutná podmínka konvergence není splněna.

Poznámka. Připomeňme definici hromadného bodu. Bod $x_0 \in \mathbb{R}$ nazveme *hromadným bodem množiny* $M \subseteq \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro jeho libovolné okolí $\mathscr{O}(x_0)$ existuje bod $x \in M$, pro který platí $x \in M \cap \mathscr{O}$ a zároveň $x \neq x_0$.

Věta 1.1.1. *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady a $a, b \in \mathbb{C}$. Potom platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (aa_n + bb_n) \text{ konverguje a } \sum_{n=1}^{\infty} (aa_n + bb_n) = a\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} \text{ konverguje se součtem } \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}.$$

Důsledek 1.1.2. *Komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje každá z reálných řad $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Re}\ a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Im}\ a_n$, přičemž platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Re}\ a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Im}\ a_n.$$

Věta 1.1.3 (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium konvergence)**.** *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že platí*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon$$

pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $n \geq n_\varepsilon$.

Poznámka. Důkaz viz [4], str. 19.

Definice 2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *absolutně konvergentní*, jestliže je řada $\sum |a_n|$ konvergentní. Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum |a_n|$ diverguje, potom mluvíme o *neabsolutní (relativní) konvergenci* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 1.1.4. *Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní a platí*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Věta 1.1.5. *Komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně právě tehdy, když každá z reálných řad $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Re}\ a_n, \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Im}\ a_n$ konverguje absolutně.*

Důkaz. Plyne z nerovnosti $\max\{|\operatorname{Re} a_n|, |\operatorname{Im} a_n|\} \leq |a| \leq |\operatorname{Re} a_n| + |\operatorname{Im} a_n|$. $\square$

Věta 1.1.6 (Riemannova věta o přerovnání absolutně konvergentní řady)**.** *Jestliže je komplexní řada $\sum a_n$ absolutně konvergentní, potom každé „přerovnání“ této řady konverguje absolutně ke stejnému součtu, tj.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\rho(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

pro každou permutaci ρ množiny $\mathbb{N}$ (tj. pro každou bijekci $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

Poznámka. Důkaz viz [4], str. 20.

Při vyšetřování (absolutní) konvergence komplexních řad lze aplikovat mnohá kritéria využívaná v reálné analýze. Například:

- **Srovnávací kriterium:**
  Jestliže komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje $|a_n| \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, kde $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní řada, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

- **D'Alembertovo podílové kriterium:**
  Jestliže komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje podmínku $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$, pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Jestliže $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pokud existuje limita $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \in \mathbb{R}^*$, potom pro $q < 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pro $q > 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

- **Cauchyovo odmocninové kriterium:**
  Jestliže komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje podmínku $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Pokud $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Především, pokud existuje limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^*$, potom pro $q < 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pro $q > 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

- **Cauchyovo integrální kriterium:**
  Pokud řada $\sum a_n$ splňuje $|a_n| = f(n)$, pro každé $n \in \mathbb{N}$, kde $f : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ je nezáporná a nerostoucí funkce, potom řada $\sum a_n$ konverguje absolutně právě tehdy, když nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konverguje.

- **Dirichletovo kriterium:**
  Buď posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní posloupností reálných čísel a nechť platí, že $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ a posloupnost částečných součtů $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konvergentní.

Důkaz. Jestliže je posloupnost částečných součtů $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ohraničená, pak existuje $k > 0$ takové, že $|s_n| \leq k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť je $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, existuje index n_0 takový, že pro každé $n \geq n_0$ platí, že $|c_n| < \frac{\varepsilon}{4k}$. Pro $n, m \in \mathbb{N}$ je

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| = |s_{n+m} - s_n| \leq |s_{n+m}| + |s_n| \leq 2k.$$

Pro $n \geq n_0$ a $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}|c_{n+1}a_{n+1} + \cdots + c_{n+m}a_{n+m}| &= |c_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + c_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \\ &+ \cdots + c_{n+m}(s_{n+m} - s_{n+m-1})| = | - c_{n+1}s_n + \\ &+ (c_{n+1} - c_{n+2})s_{n+1} + (c_{n+2} - c_{n+3})s_{n+2} + \\ &+ \cdots + (c_{n+m-1} - c_{n+m})s_{n+m-1} + c_{n+m}s_{n+m}| \leq \\ &\leq |c_{n+1}||s_n| + |c_{n+1} - c_{n+2}||s_{n+1}| + \\ &+ \cdots + |c_{n+m-1} - c_{n+m}||s_{n+m-1}| + |c_{n+m}||s_{n+m}| \leq \\ &\leq k[|c_{n+1}| + |c_{n+1} - c_{n+2}| + \cdots + |c_{n+m-1} - c_{n+m}| + |c_{n+m}|] = \\ &= k[|c_{n+1}| + |c_{n+1}| - |c_{n+2}| + \cdots + |c_{n+m-1}| - |c_{n+m}| + |c_{n+m}|] \leq \\ &\leq k[|c_{n+1}| + |c_{n+1}| - |c_{n+m}| + |c_{n+m}|] \leq 2k|c_{n+1}| < 2k\frac{\varepsilon}{4k} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy řada $\sum c_n a_n$ konverguje podle Cauchyova-Bolzanova kriteria (věta 1.1.3). □

Příklad 2. Rozhodněte o konvergenci daných řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i(-1)^{n-1}n}{n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{3^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n, \quad a \in \mathbb{C}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}, \quad a \in \mathbb{C}$

Řešení.

(a) V dané řadě oddělíme její reálnou a imaginární část. Dostaneme

$$\operatorname{Re} \frac{1+i(-1)^{n-1}n}{n^2} = \frac{1}{n^2}, \operatorname{Im} \frac{1+i(-1)^{n-1}n}{n^2} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Z reálné analýzy máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Reálná i imaginární část je konvergentní a z důsledku 1.1.2 víme, že je konvergentní i řada v zadání, přičemž její součet je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i(-1)^{n-1}n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + i\ln 2.$$

(b) Použitím d'Alembertova kriteria dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)(1+i)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n(1+i)^n}{3^n}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(1+i)}{3n} \right| = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt{2}}{3n} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.\end{aligned}$$

Řada konverguje absolutně.

(c) Aplikováním Cauchyova kriteria dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a|^n} = \lim_{n\to\infty} |a| = |a|.$$

Pro $|a| < 1$ daná řada konverguje absolutně, pro $|a| > 1$ řada diverguje. V případě $|a| = 1$ není splněna *nutná podmínka konvergence* ($\lim_{n\to\infty} a^n \neq 0$, resp. neexistuje), řada diverguje.

(d) Za pomocí podílového kriteria získáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} |a| \frac{n}{n+1} = |a|.$$

Pro $|a| < 1$ zadaná řada konverguje, pro $|a| > 1$ diverguje. Musíme vyřešit, jak se řada chová v případě, že $|a| = 1$.
V případě, kdy $a = 1$ je řešení jednoduché, dostáváme harmonickou řadu

$$\sum \left| \frac{a^n}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}.$$

Platí, že harmonická řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje.
Pro $|a| = 1,\ a \neq 1$ je to složitější než v oboru reálném. V tomto případě využijeme znalosti $a = e^{i\varphi}$,

$$a^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle .$$

Z tohoto vzorce dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{i\varphi})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}.$$

Nyní lze aplikovat Dirichletovo kriterium. Platí, že $a_n = e^{in\varphi}$ a $c_n = \frac{1}{n}$. Máme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\varphi} = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{i\varphi}\right)^k = e^{i\varphi} \frac{1 - e^{in\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}.$$

Pro $\varphi \neq 0,\ 2\pi$:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = e^{i\varphi} \left| \frac{e^{\frac{1}{2}in\varphi} - e^{-\frac{1}{2}in\varphi}}{e^{\frac{1}{2}i\varphi} - e^{-\frac{1}{2}i\varphi}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}in\varphi}}{e^{\frac{1}{2}i\varphi}} \right|.$$

Ze vzorce $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ máme

$$\left| \frac{e^{\frac{1}{2}in\varphi} - e^{-\frac{1}{2}in\varphi}}{e^{\frac{1}{2}i\varphi} - e^{-\frac{1}{2}i\varphi}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}in\varphi}}{e^{\frac{1}{2}i\varphi}} \right| = \left| \frac{\sin \frac{n}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} \right| \cdot \left| \frac{e^{\frac{1}{2}in\varphi}}{e^{\frac{1}{2}in\varphi}} \right| = \left| \frac{\sin \frac{n}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} \right|.$$

Pro $\varphi \neq 2k\pi$ máme

$$\left| \frac{\sin \frac{n}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|}.$$

Odtud $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\varphi}{2}|}$ pro $\varphi \neq 0,\ 2\pi$ a zadaná řada konverguje.
Pro $\varphi = 2k\pi$ dostáváme $a = e^{i\varphi} = 1$, vzniká harmonická řada, která diverguje.
Zadaná řada tedy pro $|a| \leq 1$ a $a \neq 1$ konverguje a pro $|a| > 1$ a $a = 1$ diverguje.

1.2 Cvičení

1. Rozhodněte o konvergenci daných řad:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n2^n}$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin(in)}{3^n}$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{i\frac{\pi}{n}}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(in)}{5^n}$.

Výsledky

1. a) konverguje, b) konverguje absolutně,
   c) konverguje absolutně, d) diverguje,
   e) konverguje absolutně, f) konverguje absolutně,
   g) diverguje, h) konverguje,
   i) konverguje, j) konverguje pro $\varphi \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
   k) konverguje.

Kapitola 2

Funkční řady v $\mathbb{C}$

2.1 Holomorfní funkce

Pro zavedení pojmu holomorfní funkce je nejprve vhodné uvést definici komplexní diferencovatelnosti.

Definice 3. Nechť f je konečná komplexní funkce definovaná na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{C}$. Řekneme, že f je *komplexně diferencovatelná v bodě* $z_0 \in M$, jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Limita se nazývá *komplexní derivace* funkce f v bodě z_0 a označuje se $f'(z_0)$.

V následující větě budeme potřebovat algebraický tvar komplexních čísel (funkcí). Pro dané $z \in \mathbb{C}$ a funkci f máme

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

kde $u(x,y),\ v(x,y)$ jsou reálné funkce takové, že

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy).$$

Věta 2.1.1 (Nutná a postačující podmínka komplexní diferencovatelnosti)**.** *Funkce f je komplexně diferencovatelná v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, právě tehdy, když reálné funkce u, v jsou diferencovatelné v bodě $[x_0, y_0]$ a když splňují tzv. Cauchyovy-Riemannovy podmínky*

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0), \quad u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0).$$

Pro derivaci $f'(z_0)$ potom platí

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0).$$

Definice 4. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{C}$ je *holomorfní v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$, jestliže f má komplexní derivaci na nějakém okolí bodu z_0. Funkce f je *holomorfní na množině* $M \subseteq \mathbb{C}$, jestliže je holomorfní v každém bodě $z \in M$.

Příklad 3. Rozhodněte o holomorfnosti funkce $f(z) = z^n$.

Řešení. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Podle definice 3 máme

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}) = nz_0^{n-1}.$$

Funkce $f(z) = z^n$ je holomorfní v celé komplexní rovině.

Definice 5. Funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se nazývá *celá*, jestliže je holomorfní v celé komplexní rovině. Celé funkce, které nejsou polynomy, se nazývají *transcendentní*.

Důsledek 2.1.2. *Jestliže funkce f, g jsou holomorfní na množině $M \subseteq \mathbb{C}$, potom je holomorfní v M i jejich součet $f + g$ a součin fg a platí*

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Je-li navíc $g(z) \neq 0$ pro všechna $z \in M$, je v M holomorfní podíl $\frac{f}{g}$, přičemž

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Věta 2.1.3. *Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je oblast. Funkce $f : G \to \mathbb{C}$ je konstantní na G právě tehdy, když je holomorfní na G a $f'(z) = 0$ pro každé $z \in G$.*

Důkaz. Implikace „$\Rightarrow$“ vyplývá z definic komplexní diferencovatelnosti a holomorfní funkce.
Dokážeme obrácenou implikaci. Nechť je f holomorfní na G s vlastností $f'(z) = 0$ pro každé $z \in G$. Funkce u, v z (2.1) splňují

$$u'_x(x,y) = 0 = v'_x(x,y), \quad v'_y(x,y) = 0 = -u'_y(x,y), \quad \text{pro každé } [u,v] \in G,$$

z čehož vyplývá, že funkce u, v jsou konstantní na oblasti G, to znamená, že i funkce $f = u + iv$ je konstantní na G. □

Důsledek 2.1.4. *Nechť f, g jsou funkce holomorfní na oblasti $G \subseteq \mathbb{C}$. Potom platí tvrzení*

1. *Rovnost $f' = g'$ platí na G právě tehdy, když $f = g + K$ na G, kde K je (komplexní) konstanta.*
2. *Funkce f je na G polynomem stupně menšího než n právě tehdy, když $f^{(n)} = 0$ na G.*

2.2 Komplexní funkční řady

Definice 6. Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$ je neprázdná množina a nechť $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na M. Posloupnost částečných součtů $\{s_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ definovaných vztahem

$$s_k(z) := \sum_{n=1}^{k} f_n(z), \quad z \in M, \quad k \in \mathbb{N}$$

nazveme *(nekonečná) funkční řada* se členy f_n a označíme ji

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad \text{resp. } \sum f_n(z).$$

Množina všech komplexních čísel $z \in M$, v nichž řada konverguje, se nazývá *obor konvergence*.

Rozlišujeme dva typy konvergencí funkčních posloupností a řad - *bodovou konvergenci na množině* a *stejnoměrnou konvergenci na množině*:

Řekneme, že funkční posloupnost $\{f_n(z)\}$ *konverguje bodově* na množině M, pokud je konvergentní v každém bodě $z_0 \in M$. Funkce f s vlastností

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \text{pro každé } z \in M,$$

se nazývá *limitní funkce posloupnosti*. Symbolicky značíme bodovou konvergenci posloupnosti

$$f_n \to f \quad \text{na } M.$$

Řekneme, že funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *konverguje bodově* na množině M, jestliže je konvergentní v každém bodě $z_0 \in M$. Funkce f s vlastností

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad \text{pro každé } z \in M,$$

se nazývá *součet řady*. Symbolicky značíme bodovou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f \quad \text{na } M.$$

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(z)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ definovaných na množině M, *konverguje* na množině M *stejnoměrně* k funkci $f : M \to \mathbb{C}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že platí nerovnost

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad \text{pro každé } z \in M \text{ a každé } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon;$$

píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na M.

Řekneme, že funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *konverguje stejnoměrně k součtu f* na M, jestliže její příslušná posloupnost částečných součtů $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na množině M.

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(z)\}$ *konverguje skoro stejnoměrně na M*, jestliže konverguje stejnoměrně na každé kompaktní množině $K \subseteq M$.

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *konverguje skoro stejnoměrně* na M, jestliže konverguje stejnoměrně na každé kompaktní množině $K \subseteq M$.

Poznámka. Podobně jako u číselných řad, označuje $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ funkční řadu i součet funkční řady.

Pro praktické výpočty se s výhodou používá následující postačující kritérium.

Věta 2.2.1 (Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence)**.** *Jestliže pro řadu $\sum f_n(z)$ existuje reálná konvergentní číselná řada $\sum \alpha_n$ s vlastností*

$$|f_n(z)| \leq \alpha_n \quad \textit{pro každé } n \in \mathbb{N} \textit{ a pro každé } z \in G,$$

pak řada $\sum f_n(z)$ konverguje absolutně a stejnoměrně na G.

Poznámka. Reálná číselná řada $\sum \alpha_n$ se pro funkční řadu $\sum f_n(z)$ nazývá *majorantou* funkční řady $\sum f_n(z)$.

Příklad 4. Rozhodněte, zda je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(n-\ln n)}}{2^n + \sqrt{n}}$$

absolutně konvergentní.

Řešení. Vezměme $|a_n| = \left|\frac{e^{i(n-\ln n)}}{2^n+\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dostali jsme geometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, kde $q = \frac{1}{2}$, která je konvergentní a je majorantou zadané funkční řady. Podle věty 2.2.1 je řada absolutně konvergentní.

Věta 2.2.2. *Nechť $\{f_n(z)\}$ je posloupnost spojitých funkcí na množině $G \subseteq \mathbb{C}$. Jestliže řada $\sum f_n(z)$ konverguje stejnoměrně na G k součtu f, potom je funkce f spojitá na G.*

2.3 Mocninné řady v $\mathbb{C}$

Důležitým typem funkčních řad jsou tzv. *mocninné řady*, tedy řady funkcí proměnné z tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{2.2}$$

kde $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$, pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Číslo z_0 se nazývá *střed mocninné řady* (2.2) a čísla a_n *koeficienty* mocninné řady viz [7]. Číslo a_0 je tzv. *absolutní člen*. Oborem konvergence libovolné mocninné řady je neprázdná podmnožina v $\mathbb{C}$, protože řada (2.2) vždy konverguje ve svém středu z_0.

Věta 2.3.1 (Abelova věta)**.** *Jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konverguje v nějakém $z^* \in \mathbb{C}$, pak konverguje absolutně v každém $z \in \mathbb{C}$, pro které platí*

$$|z - z_0| < |z^* - z_0|. \tag{2.3}$$

Důkaz. Nechť $z^* \neq z_0$ a $z \in \mathbb{C}$ vyhovuje nerovnosti (2.3). Jelikož řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^* - z_0)^n$ konverguje, platí $|a_n (z^* - z_0)^n| \to 0$. Tedy existuje číslo $K > 0$ takové, že $|a_n (z^* - z_0)^n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a platí

$$|a_n (z - z_0)^n| = |a_n (z^* - z_0)^n| \left| \frac{a_n (z - z_0)^n}{a_n (z^* - z_0)^n} \right| \leq K \left| \frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right|^n,$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Protože platí $\left|\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right| < 1$, je řada $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right|^n$ konvergentní, tudíž podle srovnávacího kriteria jsme pro řadu (2.2) našli konvergentní majorantu, tedy je mocninná řada (2.2) absolutně konvergentní. □

Věta 2.3.2 (Cauchy-Hadamardova věta)**.** *Definujme pro mocninnou řadu (2.2) číslo $R \in \mathbb{R}^*$, $R \geq 0$ předpisem*

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{2.4}$$

Potom platí následující tvrzení:

(i) *Jestliže $R = 0$, pak mocninná řada konverguje pouze ve svém středu z_0, tedy diverguje na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$,*

(ii) *Jestliže $0 < R < \infty$, potom mocninná řada konverguje absolutně pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z - z_0| < R$ a diverguje pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z - z_0| > R$,*

(iii) *Jestliže $R = \infty$, potom mocninná řada konverguje absolutně v každém $z \in \mathbb{C}$.*

Poznámka. Číslo R v (2.4) se nazývá *poloměr konvergence* mocninné řady (2.2). V případě, že $R > 0$, potom množinu

$$\{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < R\}$$

označujeme jako *konvergenční kruh* řady (2.2).

Poznámka. Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, potom poloměr konvergence R řady (2.2) splňuje

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{2.5}$$

Jestliže navíc existuje i $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, pak poloměr konvergence R řady (2.2) lze vyjádřit ve tvaru

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}. \tag{2.6}$$

Lemma 2.3.3. *Mocninná řada konverguje absolutně ve svém konvergenčním kruhu. Navíc může konvergovat v některých bodech tzv. konvergenční kružnice $|z - z_0| = R$.*

Věta 2.3.4. *Mocninná řada* (2.2) *s kladným poloměrem konvergence konverguje absolutně ve svém konvergenčním kruhu. Navíc konverguje stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině svého konvergenčního kruhu, tj. konverguje skoro stejnoměrně ve svém konvergenčním kruhu.*

Příklad 5. Jedním z nejdůležitějších příkladů mocninných řad je *geometrická řada*, jejíž tvar je

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots.$$

Tato řada absolutně konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která platí $|z| < 1$ a diverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která $|z| \geq 1$. Tyto výsledky vyplývají z věty 2.3.2 *(ii)*. Koeficienty dané řady jsou $a_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, tedy poloměr konvergence $R = 1$. V bodech konvergenční kružnice řada diverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence. Pro $|z| < 1$ je součet této řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Příklad 6. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!) z^n.$$

Řešení. Protože existuje limita $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, je poloměr konvergence

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}(n+1)}=0.$$

Podle věty 2.3.2 daná řada konverguje pouze ve svém středu $z_0=0$.

Příklad 7. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n_0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Řešení. Koeficienty a_n jsou rovny $a_n=\frac{1}{n!}$. Limita $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existuje a je rovna

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Poloměr konvergence je roven

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\infty.$$

Daná řada konverguje absolutně v každém bodě $z\in\mathbb{C}$ (viz věta 2.3.2).

Příklad 8. Určete poloměr a obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}[3+(-1)^n]^n z^n.$$

Řešení. Poloměr konvergence R vypočítáme podle věty 2.3.2 následovně

$$R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|[3+(-1)^n]^n|}}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}|3+(-1)^n|}.$$

Posloupnost $|3+(-1)^n|$ má dva hromadné body 2 a 4. Proto

$$\limsup_{n\to\infty}|3+(-1)^n|=4,$$

tudíž $R=\frac{1}{4}$.

Daná mocninná řada absolutně konverguje pro $|z|<\frac{1}{4}$ a diverguje pro $|z|>\frac{1}{4}$. Navíc všude na konvergenční kružnici $|z|=\frac{1}{4}$ řada diverguje, nakolik není splněna nutná podmínka konvergence, neboť pro n sudé platí

$$\left|[3+(-1)^n]^n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\right|=\left[\frac{1}{4}\cdot(3+1)\right]^n=1,$$

a tedy $\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}1\neq 0$, kde c_n je člen mocninné řady.

Oborem konvergence zadané řady je otevřený kruh $|z|<\frac{1}{4}$.

Příklad 9. Určete poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+2)^3 4^n}.$$

Řešení. Koeficienty této řady mají tvar $a_n = \frac{1}{(n+2)^3 4^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+3)^3 4^{n+1}}}{\frac{1}{(n+2)^3 4^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^3 = \frac{1}{4}.$$

Poloměr konvergence je proto $R = 4$. Podle věty 2.3.2 zadaná řada konverguje absolutně na množině $|z+2| < 4$. V případě bodů konvergenční kružnice $|z+2| = 4$ máme

$$\left| \frac{(z+2)^n}{(n+2)^3 4^n} \right| = \frac{|(z+2)|^n}{(n+2)^3 4^n} = \frac{4^n}{(n+2)^3 4^n} = \frac{1}{(n+2)^3}.$$

Z reálné analýzy víme, že řada $\sum \frac{1}{(n+2)^3}$ konverguje. Podle srovnávacího kriteria daná řada konverguje absolutně i na konvergenční kružnici. Obor konvergence je tedy uzavřený kruh $|z+2| \leq 4$.

Následující tvrzení je důsledkem vět 2.2.2 a 2.3.4.

Důsledek 2.3.5. *Má-li mocninná řada (2.2) kladný poloměr konvergence R, pak je funkce $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ v konvergenčním kruhu spojitá.*

Věta 2.3.6. *Má-li mocninná řada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ kladný poloměr konvergence R, pak je tato řada uvnitř konvergenčního kruhu (tj. $|z-z_0| < R$) holomorfní a platí*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-z_0)^n.$$

Věta 2.3.7. *Nechť jsou pro $R_1, R_2 > 0$ dány řady*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ s poloměrem konvergence } R_1$$

a

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ s poloměrem konvergence } R_2.$$

Potom platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n = f(z) \pm g(z), \text{ pro } |z| < \min(R_1, R_2).$$

Důkaz. Tvrzení plyne z věty o součtu nekonečných řad. □

2.4 Taylorův rozvoj

V této kapitole si ukážeme tzv. *Taylorův rozvoj* mocninné řady.

Věta 2.4.1 (Taylorova věta)**.** *Nechť funkce f je pro dané komplexní číslo $z_0 \in \mathbb{C}$ a $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ definovaná a holomorfní na otevřeném kruhu $K(z_0, R)$. Potom platí*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \textit{pro každé } z \in K(z_0, R). \tag{2.7}$$

Vyjádření funkce f ve tvaru (2.7) se označuje jako *Taylorův rozvoj* funkce f *v okolí bodu* z_0, přičemž mocninná řada na pravé straně této rovnosti se nazývá *Taylorova řada* funkce f *se středem v bodě* z_0.

Poznámka. Taylorův rozvoj funkce f v okolí bodu z_0 je, jakožto rozvoj do mocninné řady v okolí bodu z_0, určen jednoznačně. To znamená, že každá mocninná řada se středem v bodě z_0 a součtem f je Taylorovou řadou funkce f na příslušném konvergenčním kruhu. Toto uplatníme zejména při praktickém hledání mocninných rozvojů komplexních funkcí.

Dokážeme jednoznačnost Taylorova rozvoje.

Důkaz. Mějme mocninnou řadu tvaru

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dosazením $z = z_0$ dostáváme

$$f(z_0) = a_0.$$

Nyní si funkci $f(z)$ zderivujme. Máme tedy

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Platí

$$f'(z_0) = a_1, \quad \text{tedy } a_1 = \frac{f'(z_0)}{1!}.$$

Druhou derivací funkce $f(z)$ obdržíme tvar

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z - z_0)^{n-2},$$

$$f''(z_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2, \text{ tedy } a_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}$$

a tak dále. Platí tedy $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

Příklad 10. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{3-z}$ v bodě $z_0 = 0$.

Řešení. Zadaná funkce je holomorfní v celém $\mathbb{C}$ kromě $z = 3$, musíme tedy vzít okolí bodu $z_0 = 0$ takové, aby v něm bod $z = 3$ neležel. Funkce $f(z)$ je holomorfní v okolí $|z| < 3$. Taylorův rozvoj zadané funkce dostaneme převedením na geometrickou řadu

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot z^n,$$

kde $\frac{1}{3^{n+1}}$ je koeficient a_n. Nalezený rozvoj platí v $K(0,3)$.

Příklad 11. Nalezněte první čtyři nenulové členy Taylorova rozvoje pro funkci $f(z) = \log(1+e^z)$ v bodě $z_0 = 0$.

Řešení. Funkce f je holomorfní v kruhu $K(0,\pi)$. Taylorův rozvoj zadané funkce bude ve tvaru

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Hledáme tedy $f(0), f'(0), f''(0)$ a $f'''(0)$. Platí

$$\begin{aligned} f(0) &= \log(1+e^0) = \log 2, \\ f'(z) &= \frac{e^z}{1+e^z}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \\ f''(z) &= \frac{e^z}{(1+e^z)^2}, \quad f''(0) = \frac{1}{4}, \\ f^{(3)}(z) &= \frac{e^z(1-e^z)}{(1+e^z)^3}, \quad f^{(3)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Protože je třetí derivace funkce v bodě $z_0 = 0$ nulová a my hledáme první čtyři nenulové členy Taylorova rozvoje, musíme spočítat další derivaci v tomto bodě. Dostáváme

$$f^{(4)}(z) = \frac{e^z(1-2e^z)(1+e^z)^3 - 3e^{2z}(1-e^z)(1+e^z)^2}{(1+e^z)^6}, \quad f^{(4)}(0) = -\frac{1}{2^3}.$$

Taylorův rozvoj má následující tvar

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + z \cdot f'(0) + \frac{z^2}{2!} f''(0) + \frac{z^4}{4!} f^{(4)}(0) + \cdots = \\ &= \log 2 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^4}{192} + \ldots, \end{aligned}$$

pro $z \in K(0,\pi)$.

Lemma 2.4.2. *Je-li $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ poloměr konvergence řady (2.2), má stejný poloměr konvergence i řada vzniklá derivováním „člen po členu", tedy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Příklad 12. Rozviňte funkci $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$ do Taylorovy řady v bodě $z_0 = 0$ a určete její poloměr konvergence.

Řešení. Funkce $f(z)$ je holomorfní v celém $\mathbb{C}$ vyjma bodu $z=-1$. Funkci si rozložíme na součin

$$\frac{z^2}{(z+1)^2} = z^2 \cdot \frac{1}{(z+1)^2}.$$

Dále potřebujeme najít takovou funkci, jejíž derivací bude funkce $\frac{1}{(z+1)^2}$, např. funkci $-\frac{1}{z+1}$. Funkci $\frac{1}{z+1}$ převedeme na geometrickou řadu následovně

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n, \quad |z|<1,$$

neboť $|-z|<1$. Dále platí

$$\frac{1}{(z+1)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n)' =$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot z^{n-1}.$$

Taylorova řada zadané funkce má tvar

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot z^{n+1}.$$

Je tedy

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot (n-1) \cdot z^n, \text{ pro } |z|<1,$$

kde $(-1)^n \cdot (n-1)$ je koeficient a_n. Pro poloměr konvergence R dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{(-1)^n \cdot (n-1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1.$$

Poloměr konvergence $R=1$. Na konvergenční kružnici řada diverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence. Nalezený rozvoj platí pro $|z|<1$.

Věta 2.4.3. *Nechť funkce f je definovaná na oblasti $G \subseteq \mathbb{C}$. Potom f je holomorfní na G právě tehdy, když je v okolí každého bodu $z_0 \in G$ rozvinutelná do mocninné řady.*

Věta 2.4.4. *Funkce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá právě tehdy, když je v okolí každého bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ rozvinutelná do mocninné řady, která konverguje v celé komplexní rovině.*

Poznámka. Celými funkcemi jsou například všechny polynomy nebo funkce transcendentní jako $e^z, \sin z, \cos z$.

2.5 Cvičení

1. Najděte obor konvergence zadané funkční řady komplexní proměnné $z \in \mathbb{C}$:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \frac{1}{2^n z^n}\right)$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{z \ln n}$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{z^n}\right)$
2. Nalezněte množiny, na kterých dané funkční řady komplexní proměnné $z \in \mathbb{C}$ konvergují stejnoměrně:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \ln n}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2}$
3. Najděte poloměr konvergence dané mocninné řady komplexní proměnné $z \in \mathbb{C}$:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$
   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$
   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2^n}$
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$
4. Zjistěte, pro které body daná mocninná řada komplexní proměnné $z \in \mathbb{C}$ konverguje na konvergenční kružnici $|z| = R$, kde R je poloměr konvergence.
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$
5. Určete obor konvergence pro dané řady komplexní proměnné $z \in \mathbb{C}$:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)} z^n$
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(in+3)^n}$
6. Najděte Taylorův rozvoj funkce $f(z) = \frac{z}{z+2}$ na okolí bodu $z_0 = 1$.

7. Nalezněte první čtyři nenulové členy Taylorova rozvoje funkce $f(z)$ v bodě $z_0 = 0$, jestliže:

   (a) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$

   (b) $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$

   (c) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$

Výsledky

1. (a) $\frac{1}{2} < |z| < 1$,

   (b) $\mathrm{Re}\, z < -1$,

   (c) $\mathrm{Re}\, z \leq 0$,

   (d) $|z| > 1$.

2. (a) $\mathrm{Re}\, z \geq a,\ a > 0$,

   (b) $\mathrm{Re}\, z \geq 1 + a,\ a > 0$,

   (c) $\mathrm{Im}\, z = 0$.

3. (a) $R = 1$,

   (b) $R = 1$,

   (c) $R = 1$,

   (d) $R = \infty$,

   (e) $R = 0$,

   (f) $R = 1$,

   (g) $R = e$.

4. (a) diverguje ve všech bodech konvergenční kružnice $|z| = 1$,

   (b) konverguje ve všech bodech konvergenční kružnice $|z| = 1$ kromě bodu $z = 1$,

   (c) konverguje absolutně ve všech bodech konvergenční kružnice $|z| = 1$,

   (d) konverguje relativně ve všech bodech konvergentní kružnice $|z| = 1$ kromě bodu $z = -1$.

5. (a) $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$,

   (b) oborem konvergence je celá množina $\mathbb{C}$,

   (c) oborem konvergence je celá množina $\mathbb{C}$.

6. $f(z) = 1 - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n, |z-1| < 3$.

7. (a) $f(z) = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{5}{24} z^4 + \frac{61}{720} z^6 + \ldots, R = \frac{\pi}{2}$,

   (b) $f(z) = \sin 1 + z \cos 1 + z^2 \left(\frac{2\cos 1 - \sin 1}{2}\right) + z^3 \left(\frac{5\cos 1 - 6\sin 1}{6}\right) + \ldots, R = 1$,

   (c) $f(z) = e + ez + \frac{3}{2} e z^2 + \frac{13}{6} e z^3 + \ldots, R = 1$.

Kapitola 3

Křivkový integrál

Ve třetí kapitole Křivkový integrál uvádíme nejnutnější definice a věty pro porozumění navazující kapitoly Laurentova řada a teorie reziduí. Nejprve zavedeme pojem křivky v komplexním oboru.

Definice 7. *Křivkou* v $\mathbb{C}$ budeme rozumět spojité zobrazení $\gamma : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$, kde $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktní interval. Množinu

$$[\gamma] = \{z \in \mathbb{C}, z = \gamma(t), t \in \langle a,b\rangle\}$$

nazýváme *graf* křivky γ a body $\gamma(a), \gamma(b)$ nazýváme *krajní body* křivky γ, $\gamma(a)$ *počátečním bodem* a $\gamma(b)$ *koncovým bodem* křivky γ. Samotné zobrazení γ se označuje jako *parametrizace* vzhledem k $\langle a,b\rangle$, nezávisle proměnná t v zobrazení γ se nazývá *parametr*.

Definice 8. Křivku $\gamma : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ nazýváme *uzavřená*, jestliže $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definice 9. Křivka $\gamma : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ se nazývá *hladká*, jestliže funkce γ má spojitou derivaci na $\langle a,b\rangle$, přičemž tato derivace je navíc různá od nuly. Křivka γ se nazývá *po částech hladká*, pokud existuje takové dělení $D : a = d_0 < d_1 < \cdots < d_n = b$ intervalu $\langle a,b\rangle$, že křivka $\gamma|_{\langle d_{k-1},d_k\rangle}$ je hladká pro $k = 1,2,\ldots,n$. Jestliže existuje dělení $D : a = d_0 < d_1 < \cdots < d_n = b$ intervalu $\langle a,b\rangle$ tak, že má funkce $\gamma|_{\langle d_{k-1},d_k\rangle}$ spojitou derivaci na $\langle d_{k-1},d_k\rangle$ pro $k = 1,2,\ldots,n$, řekneme, že křivka γ je *regulární*. Regulární křivku budeme nazývat *cesta*. *Uzavřenou cestou* rozumíme uzavřenou křivku, která je cestou.

Definice 10. Křivka $\gamma : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ se nazývá *jednoduchá*, jestliže pro libovolná dvě čísla $t_1,t_2 \in \langle a,b\rangle, 0 < |t_1 - t_2| < b - a$ platí $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$. Platí-li navíc $\gamma(a) \neq \gamma(b)$, mluvíme o *oblouku*, je-li $\gamma(a) = \gamma(b)$, nazveme křivku γ *Jordanovou křivkou*. Pokud je Jordanova křivka navíc cesta, mluvíme o *Jordanově cestě*.

Definice 11. Pojmem *opačně orientovaná cesta* k cestě $\gamma : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ rozumíme cestu $\dot{-}\gamma$ definovanou vztahem $(\dot{-}\gamma)(t) = \gamma(-t)$ pro $t \in \langle -b,-a\rangle$. Pro graf platí $[\dot{-}\gamma] = [\gamma]$.

Definice 12. *Součtem cest* $\gamma_1 : \langle a_1,b_1\rangle \to \mathbb{C}, \gamma_2 : \langle a_2,b_2\rangle \to \mathbb{C}$, s vlastností $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, rozumíme cestu $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ danou vztahem

$$(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pro } t \in \langle a_1,b_1\rangle, \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{pro } t \in \langle b_1, b_1 + b_2 - a_2\rangle. \end{cases}$$

Poznámka. 1. Pro graf platí $[\gamma_1 \dot{+} \gamma_2] = [\gamma_1] \cup [\gamma_2]$.

2. Součet cest je asociativní, tedy platí $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2) \dot{+} \gamma_3 = \gamma_1 \dot{+} (\gamma_2 \dot{+} \gamma_3)$.

3. Je-li cesta $\gamma_1 \dot{+} (\dot{-}\gamma_2)$ definována, jinými slovy pokud $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$, potom místo $\gamma_1 \dot{+} (\dot{-}\gamma_2)$ píšeme $\gamma_1 \dot{-} \gamma_2$ a tuto cestu nazýváme *rozdíl cest* γ_1, γ_2.

Věta 3.0.1 (Jordanova věta). *Buď γ Jordanova křivka v $\mathbb{C}$. Potom $\tilde{\mathbb{C}} \setminus [\gamma] = G_1 \cup G_2$, kde G_1, G_2 jsou disjunktní oblasti se společnou hranicí $[\gamma]$.*

Definice 13. Nechť interval $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ a $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ je komplexní funkce reálné proměnné $t \in \langle a,b\rangle$. Pro funkci f definujeme *derivaci* $f'(t_0)$ v bodě $t_0 \in (a,b)$ vztahem

$$f'(t_0) = [\mathrm{Re}\, f]'(t_0) + i \cdot [\mathrm{Im}\, f]'(t_0),$$

kde $[\mathrm{Re}\, f]'(t_0)$ a $[\mathrm{Im}\, f]'(t_0)$ jsou (reálné) derivace reálných funkcí $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f$ podle proměnné t. Dále definujme *určitý integrál* komplexní funkce f reálné proměnné t na intervalu $\langle a,b\rangle$ zápisem

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)dt.$$

Definice 14. Nechť $\gamma : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ je cesta a $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. *Křivkový integrál* $\int_\gamma f(z)dz$ funkce f po cestě γ definujeme vztahem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Věta 3.0.2. *Nechť $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ jsou cesty v $\mathbb{C}$ takové, že počáteční bod cesty γ_2 je koncovým bodem cesty γ_1. Potom platí*

(i) Jsou-li funkce $f, g, : [\gamma] \to \mathbb{C}$ spojité, $c \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_\gamma (f(z) + g(z))\, dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz,$$
$$\int_\gamma cf(z)dz = c\int_\gamma f(z)dz,$$
$$\int_{\dot{-}\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

(ii) Je-li funkce $f : [\gamma_1 \dot{+} \gamma_2] \to \mathbb{C}$ spojitá, pak

$$\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Kapitola 4

Laurentova řada a teorie residuí

Další speciální funkční řadou je tzv. *Laurentova řada*. Tato řada má praktické využití, kterému se v této kapitole budeme věnovat.

4.1 Laurentovy řady

Definice 15. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 < R \leq \infty$ budeme pod pojmem *prstencové okolí bodu* z_0 rozumět množinu $K^*(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - z_0| < R\}$. V případě nevlastního bodu $z_0 = \infty$ definujme *prstencové okolí bodu* z_0 jako $K^*(\infty, R) = \left\{z \in \mathbb{C}, |z| > \frac{1}{R}\right\}$.

Holomorfní funkce lze lokálně vyjádřit jako součty mocninných řad. Nyní zavedeme obecnější tzv. *Laurentovy řady*.

Příklad 13. Funkci

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

lze vyjádřit i jinak než řadou $\sum z^n$. A sice

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Tato řada konverguje pro všechna z, pro která je $|z| > 1$.

Definice 16. Nechť $z_0,\ a_n,$ kde $n \in \mathbb{Z}$, jsou pevně daná komplexní čísla. Součet funkčních řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \tag{4.1}$$

nazveme *Laurentovou řadou se středem v bodě* z_0 a s koeficienty a_n. Značíme ji

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{4.2}$$

Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ se nazývá *regulární část* Laurentovy řady (4.2) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ se nazývá *hlavní část*.

Řekneme, že Laurentova řada (4.2) konverguje v bodě $z \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když v z konverguje její hlavní i regulární část. Pro mocninné řady platí, že jsou speciálním případem Laurentovy řady, a sice pro $a_{-n} = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tedy regulární část Laurentovy řady je mocninná řada.

Věta 4.1.1. *Pro každou řadu (4.2) existuje právě jedna dvojice $r \geq 0$, $R \leq \infty$ taková, že řada konverguje v mezikruží*

$$P(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C}, r < |z - z_0| < R\}$$

a diverguje pro $|z - z_0| > R$ a $|z - z_0| < r$.

Jestliže $r > R$, potom řada diverguje v celé komplexní rovině. Jestliže $r = R$, řada může konvergovat maximálně v bodech kružnice $|z - z_0| = r$. Pro $r < R$ je množina $P(z_0, r, R)$ neprázdná a nazýváme ji *mezikruží konvergence* řady (4.2) nebo také *prstenec konvergence* řady (4.2) *o středu z_0, vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R.*

Poznámka. Řada (4.2) může konvergovat i v jistých bodech kružnic $|z - z_0| = r$ a $|z - z_0| = R$.

Věta 4.1.2. *Nechť má Laurentova řada neprázdné mezikruží konvergence $P(z_0, r, R)$, kde $0 \leq r < R \leq \infty$. Potom je řada v tomto mezikruží konvergentní absolutně a skoro stejnoměrně. Její součet je funkce f holomorfní v mezikruží $P(z_0, r, R)$ a platí*

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n \quad \textit{pro každé } z \in P(z_0, r, R).$$

Příklad 14. Zkonstruujte Laurentovu řadu funkce $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ pro

$$\text{a) } 0 < |z| < 1, \quad \text{b) } 0 < |z - 1| < 1.$$

U obou případů stanovte hlavní a regulární část dané řady.

Řešení. (a) Pro $0 < |z| < 1$ platí

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

kde $\frac{1}{z}$ je hlavní část a $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ je regulární část Laurentovy řady.

(b) Pro $0 < |z - 1| < 1$ platí

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-(1-z)} = \\
&= \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^{n-1} = (1-z)^{-1} + \\
&+ (1-z)^0 + (1-z)^1 + (1-z)^2 + (1-z)^3 + \cdots = \\
&= \frac{1}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n,
\end{aligned}$$

kde $-\frac{1}{z-1}$ je hlavní část a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$ je regulární část Laurentovy řady.

Věta 4.1.3 (Laurentova věta)**.** *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ a nechť f je funkce holomorfní v mezikruží $P(z_0, r, R)$. Každou takovou funkci $f(z)$ lze rozvinout v Laurentovu řadu se středem v bodě z_0, která je v tomto mezikruží konvergentní. Pro koeficienty a_n platí*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad \textit{pro každé } n \in \mathbb{Z}, \tag{4.3}$$

kde φ je libovolná kladně orientovaná kružnice $|z - z_0| = \rho$ s $r < \rho < R$.

Poznámka. Vyjádření funkce f ve tvaru Laurentovy řady v předcházející větě se nazývá *Laurentův rozvoj* funkce f a čísla a_n v (4.3) se nazývají *Laurentovy koeficienty* funkce f v $P(z_0, r, R)$. Laurentův rozvoj funkce f na mezikruží $P(z_0, r, R)$ v Laurentově větě je určen jednoznačně. To znamená, že každá Laurentova řada s mezikružím konvergence $P(z_0, r, R)$ je Laurentovým rozvojem svého součtu v tomto mezikruží.

Velmi důležitý je Laurentův rozvoj funkce f na mezikruží typu $P(z_0, 0, R)$, tedy na *prstencovém okolí* $K^*(z_0, R)$ bodu z_0. V takovém případě mluvíme o Laurentově rozvoji funkce f v okolí bodu z_0. Připomeňme, že v souladu s větou 4.1.3 požadujeme, aby funkce f byla holomorfní na množině $K^*(z_0, R)$, nikoliv v samotném bodě z_0 (viz definice 4).

Laurentovu řadu funkce f je možné definovat i se středem v nevlastním bodě ∞. Jestliže funkce $g(z) = f(\frac{1}{z})$ je holomorfní na nějakém mezikruží se středem v bodě $z_0 = 0$, tedy v $P(0, r, R)$ s $0 \leq r < R \leq \infty$, pak je možné podle věty 4.1.3 rozvinout funkci $g(z)$ do Laurentovy řady v mezikruží $P(0, r, R)$ takto

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}, \quad z \in P(0, r, R). \tag{4.4}$$

Řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n$ označujeme jako Laurentovu řadu funkce f se středem v bodě ∞. Protože platí $g(z) = f(\frac{1}{z})$, řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ je její regulární část, zatímto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ je její hlavní část. Laurentova řada se středem v bodě $z_0 = \infty$ má tedy stejný tvar jako Laurentova řada se středem v bodě $z_0 = 0$, jediným rozdílem je označení její regulární a hlavní části. Této informace využijeme v následující kapitole.

Laurentovy koeficienty se dají reprezentovat jako hodnoty určitých komplexních křivkových integrálů. V praxi se uplatňuje opačný postup – znalost Laurentových koeficientů umožňuje určovat hodnoty takových integrálů. Počítání komplexních integrálů se tedy zužuje na hledání Laurentových rozvojů. Je proto nutné umět stanovit koeficienty Laurentova rozvoje pro $k \in \mathbb{Z}$ jiným způsobem než pomocí integrálů.

Ukážeme si využití Laurentových koeficientů z věty 4.1.3 na příkladě, a sice navážeme na příklad 14.

Příklad 15. S využitím Laurentovy řady funkce $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ pro $0 < |z| < 1$ vypočítejte křivkový integrál $\int_\varphi \frac{1}{z^{n+2}(1-z)}dz$.

Řešení. Z příkladu 14 víme, že pro $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, z_0 = 0, r = 0, R = 1$ platí

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

tedy pro koeficienty a_n, kde $n \in \mathbb{Z}$, platí

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq -1, \\ 0 & \text{pro } n < -1. \end{cases}$$

Podle věty 4.1.3 počítáme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{\frac{1}{z(1-z)}}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{z^{n+2}(1-z)} dz = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq -1, n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{pro } n < -1, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pro křivkový integrál $\int_{\varphi} \frac{1}{z^{n+2}(1-z)} dz$ ze zadání máme

$$\int_{\varphi} \frac{1}{z^{n+2}(1-z)} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{pro } n \geq -1, n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{pro } n < -1, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Příklad 16. Najděte Laurentovu řadu funkce $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ pro $0 < |z-1| < \infty$. Vypočítejte pomocí této řady křivkový integrál $\int_{\varphi} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{(z-1)^{n+1}} dz$.

Řešení. Využijeme definici komplexní exponenciální funkce

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Hledanou Laurentovu řadu funkce $f(z)$ dostaneme po dosazení $w = \frac{1}{1-z}$ následovně

$$f(z) = e^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}, \quad 0 < |z-1|.$$

Pro $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}, z_0 = 1, r = 0, R = \infty$ platí

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{-n}}{(-n)!} & n \leq 0, n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & n > 0, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Podle věty 4.1.3 máme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{(z-1)^{n+1}} dz = \begin{cases} \frac{(-1)^{-n}}{(-n)!} & n \leq 0, n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & n > 0, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

tedy pro křivkový integrál ze zadání platí

$$\int_{\varphi} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{(z-1)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i \frac{(-1)^{-n}}{(-n)!} & n \leq 0, n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & n > 0, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

4.2 Izolované singulární body

Z poslední poznámky víme, že Laurentova řada se středem v bodě $z_0 = \infty$ se od Laurentovy řady se středem v bodě 0 liší pouze v označení její hlavní a regulární části. To znamená, že výsledky odvozené pro Laurentovy řady platí i pro případ $z_0 = \infty$ s rozdílem v označení hlavní a regulární části.

Definujme nyní izolovaný singulární bod.

Definice 17. Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v prstencovém okolí $K^*(z_0, R)$ bodu $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$, avšak není holomorfní v bodě $z = z_0$. Bod $z = z_0$ nazýváme *izolovaným singulárním bodem* nebo též *izolovanou singularitou* funkce $f(z)$.

Jestliže je tedy $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ izolovaným singulárním bodem funkce f, pak existuje číslo R, $0 < R \leq \infty$, takové, že lze funkci f rozvinout v prstencovém okolí $K^*(z_0, R)$ do Laurentovy řady (4.2) v okolí bodu z_0 s koeficienty a_n.

Definice 18. Je-li hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v prstencovém okolí $K^*(z_0, R)$ nulová, tedy $a_{-n} = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, potom z_0 nazýváme *odstranitelná singularita* funkce f.

Má-li hlavní část řady (4.1) konečně mnoho nenulových členů, tj. existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-k} \neq 0$ a $a_{-n} = 0$ pro každé přirozené $n > k$, potom se bod z_0 označuje jako *pól řádu k*.

Jestliže hlavní část Laurentovy řady (4.1) má nekonečně mnoho nenulových členů, označujeme bod z_0 funkce f jako *podstatnou singularitu*.

Póly a podstatné singularity se souhrnně označují jako *neodstranitelné singularity*.

Věta 4.2.1 (Liouvilleova věta)**.** *Celá funkce f je holomorfní v bodě ∞, resp. má v ∞ odstranitelnou singularitu právě tehdy, když je konstantní v $\mathbb{C}$.*

Důsledek 4.2.2. *Každá nekonstantní celá funkce f má v bodě ∞ pól nebo podstatnou singularitu.*

Příklad 17. Například polynom stupně $k \geq 1$ má v nevlastním bodě ∞ pól řádu k, naopak celé transcendentní funkce $e^z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$ mají v bodě ∞ podstatnou singularitu.

Následující věta poskytuje kritérium na zjištění typu izolovaného singulárního bodu funkce prostřednictvím zkoumání limity dané funkce v tomto bodě.

Věta 4.2.3. *Nechť $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ je izolovaná singularita funkce f. Podle chování funkce $f(z)$ v okolí bodu $z = z_0$ klasifikujeme izolované singulární body takto:*

1. *Bod $z = z_0$ je odstranitelná singularita funkce $f(z)$ právě tehdy, když existuje vlastní limita*
$$\lim_{z \to z_0} f(z).$$
2. *Bod $z = z_0$ je pól funkce $f(z)$ právě tehdy, když*
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$
3. *Bod $z = z_0$ je podstatná singularita funkce $f(z)$ právě tehdy, když funkce $f(z)$ v tomto bodě nemá limitu.*

Věta 4.2.4. *Izolovaný singulární bod $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól řádu $k \in \mathbb{N}$ funkce f právě tehdy, když*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} \quad \text{na prstencovém okolí bodu } z_0,$$

kde $g(z)$ je funkce holomorfní a nenulová v bodě z_0. Podobně, nevlastní bod ∞ je pól řádu $k \in \mathbb{N}$ funkce f právě tehdy, když $z_0 = 0$ je pól řádu k funkce $f(\frac{1}{z})$, tj.

$$f(z) = z^k h(z) \quad \text{na prstencovém okolí bodu } \infty,$$

kde h je funkce holomorfní a nenulová v ∞.

Poznámka. Důkaz je možné nalézt viz [4], str. 115.

Příklad 18. Najděte všechny konečné izolované singularity funkce $f(z) = \frac{1}{z-z^3}$ a určete jejich typ.

Řešení. Zadaná funkce $f(z)$ se dá napsat jako

$$f(z) = \frac{1}{z-z^3} = \frac{1}{z(1-z)(1+z)}.$$

Podle definice 17 máme tři singulární body $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -1$. Všechny tyto body jsou póly prvního řádu, neboť se funkce $f(z)$ dá vyjádřit ve tvaru $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, kde funkce $g(z)$ je holomorfní (viz definice 4) a nenulová v z_0. Dokažme si to.

Funkce $f(z)$ mají pro naše singulární body z_1, z_2, z_3 podle věty 4.2.4 následující tvar

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\frac{1}{(1-z)(1+z)}}{z}, \\ f_2(z) &= \frac{-\frac{1}{z(1+z)}}{z-1}, \\ f_3(z) = f(z) &= \frac{\frac{1}{z(1-z)}}{z+1}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že funkce $g(z)$ jsou tvaru

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \frac{1}{(1-z)(1+z)}, \\ g_2(z) &= -\frac{1}{z(1+z)}, \\ g_3(z) &= \frac{1}{z(1-z)}. \end{aligned}$$

Funkce $g_1(z)$ je v bodě z_1 nenulová a holomorfní, funkce $g_2(z)$ je nenulová a holomorfní v bodě z_2 a funkce $g_3(z)$ je nenulová a holomorfní v bodě z_3.

Příklad 19. Najděte všechny konečné izolované singulární body funkce $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$ a určete jejich typ.

Řešení. Funkce $f(z)$ má jedinou izolovanou singularitu v bodě $z_0 = 0$. V tomto bodě má zadaná funkce limitu (při výpočtě využijeme l'Hospitalovo pravidlo)

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{(1-\cos z)'}{(z^2)'} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{(\sin z)'}{(2z)'} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2}.$$

Existence konečné limity funkce $f(z)$ v singulárním bodě z_0 podle věty 4.2.3 říká, že bod $z_0 = 0$ je odstranitelná singularita funkce $f(z)$.

4.3 Cauchyova teorie residuí

Nechť f je funkce holomorfní na prstencovém okolí $K^*(z_0, R)$, $R > 0$, bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Podle věty 4.1.3 existuje Laurentův rozvoj (4.1) funkce f v okolí bodu z_0, tedy

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in K^*(z_0, R). \tag{4.5}$$

Definice 19. Laurentův koeficient a_{-1} v řadě (4.5) se nazývá *residuum funkce f v bodě z_0* a označuje se $a_{-1} = \operatorname{res}_{z_0} f$. Pro $z_0 = \infty$ se definuje *residuum funkce f v bodě ∞* jako $\operatorname{res}_\infty f = -a_1$, kde a_1 je koeficient v Laurentově rozvoji

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n$$

funkce f v prstencovém okolí $K^*(\infty, R)$, $R > 0$, bodu ∞.

Poznamenejme, že v obou případech (tj. pro vlastní i nevlastní bod) se residuum funkce určuje pomocí koeficientu stojícím při mocnině $(z-z_0)^{-1}$, resp. při mocnině z^{-1} v příslušném Laurentově rozvoji funkce f.

Příklad 20. Stanovte residua funkce $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ v jejich izolovaných singularitách.

Řešení. Ihned vidíme singulární bod $z_0 = 0$. Limita

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to 0} z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

funkce $f(z)$ v tomto bodě neexistuje, neboť

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{R}^+}} z^2 e^{\frac{1}{z}} = \infty,$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{R}^-}} z^2 e^{\frac{1}{z}} = 0.$$

Bod z_0 je podle věty 4.2.3 podstatnou singularitou $f(z)$. Pro výpočet příslušného residua funkce $f(z)$ je třeba sestavit Laurentův rozvoj funkce $f(z)$ na prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$. Využitím definice komplexní exponenciální funkce dostáváme

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n-2}} =$$
$$= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{720} \cdot \frac{1}{z^4} + \cdots.$$

Pro hledané residuum podle definice 19 platí $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{6}$.

Věta 4.3.1. *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$ a f, g jsou funkce holomorfní v prstencovém okolí bodu $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$, pak*

$$\operatorname{res}_{z_0}(af + bg) = a \cdot \operatorname{res}_{z_0} f + b \cdot \operatorname{res}_{z_0} g.$$

Nechť jsou f, g holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a $g(z_0) = 0 \neq g'(z_0)$, pak

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Věta 4.3.2 (Residuum v odstranitelné singularitě)**.** *Jestliže má funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ odstranitelnou singularitu, resp. je f dokonce holomorfní v z_0, potom $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$.*

Důkaz. Přímo z definice odstranitelné singularity funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ vyplývá, že $\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1} = 0$. Obzvlášť, pokud je f holomorfní v bodě z_0, potom podle poznámky 4.1 její Laurentův rozvoj (4.5) splývá s Taylorovým rozvojem (2.7) v okolí bodu z_0, a tedy opět $\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1} = 0$. □

Poznámka. Věta neplatí v případě odstranitelné singularity v nevlastním bodě $z_0 = \infty$. Např. funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ je holomorfní v bodě ∞, ale platí $\operatorname{res}_\infty f = -1$. Viz [4], str. 119.

Věta 4.3.3 (Residuum v pólech)**.** *Nechť má funkce f v bodě $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ pól řádu $k \in \mathbb{Z}$, potom platí*

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^k f(z)]^{(k-1)} & \text{pro } z_0 \in \mathbb{C}, \\ -\frac{1}{(k+1)!} \lim_{z \to 0} [z^k f\left(\frac{1}{z}\right)]^{(k+1)} & \text{pro } z_0 = \infty. \end{cases} \tag{4.6}$$

Poznámka. Formule (4.6) mají v případě pólů řádu 1 (tzv. *jednoduchých pólů*) tvary

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \begin{cases} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)] & \text{pro } z_0 \in \mathbb{C}, \\ -\frac{1}{2} \lim_{z \to 0} [z f\left(\frac{1}{z}\right)]'' & \text{pro } z_0 = \infty. \end{cases} \tag{4.7}$$

Poznámka. Nechť je funkce g holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a z_0 je jednoduchý pól funkce f, pak

$$\operatorname{res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \operatorname{res}_{z_0} f.$$

Příklad 21. Určete všechny konečné izolované singularity funkce $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ a vypočítejte residua funkce $f(z)$ v těchto bodech.

Řešení. Rozložme funkci $f(z)$ následovně

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1}{(z - i)^2 (z + i)^2}.$$

Na základě tohoto rozkladu vidíme singulární body $z_1 = i$ a $z_2 = -i$. V obou případech se podle věty 4.2.4 jedná o pól řádu 2.

Dále vypočítáme residua funkce $f(z)$ v těchto bodech. Využijme vzorec z věty 4.3.3. Pro $z_1 = i, z_2 = -i$ a $k = 2$ platí

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z_1} f(z) &= \frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to i}\left[(z-i)^2\cdot\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]' = \lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]' = \\
&= \lim_{z\to i}\left[\frac{-2}{(z+i)^3}\right] = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4}.\\
\operatorname{res}_{z_2} f(z) &= \lim_{z\to -i}\left[(z+i)^2\cdot\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]' = \lim_{z\to -i}\left[\frac{1}{(z-i)^2}\right]' = \\
&= \lim_{z\to -i}\left[\frac{-2}{(z-i)^3}\right] = -\frac{2}{(-2i)^3} = \frac{i}{4}.
\end{aligned}$$

Věta 4.3.4 (Residuová věta)**.** *Mějme $G \subseteq \mathbb{C}$ jednoduše souvislou oblast a γ kladně orientovanou Jordanovu cestu ležící v G. Nechť je funkce f holomorfní v množině $G\setminus\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$, kde $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\} \subset \operatorname{Int}\gamma$. Pak platí*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \operatorname{res}_{z_n} f.$$

Důsledek 4.3.5 (Cauchyova věta)**.** *Mějme $G \subseteq \mathbb{C}$ jednoduše souvislou oblast a γ Jordanovu cestu ležící v G. Nechť je funkce f holomorfní v celé množině G. Potom platí*

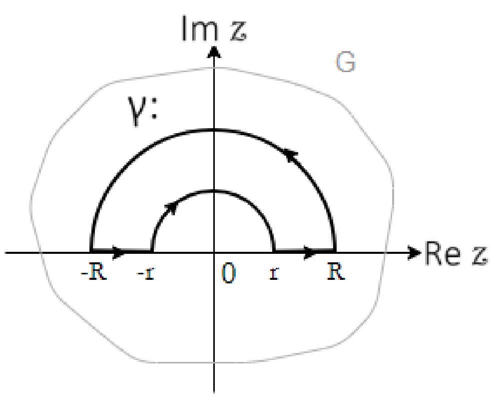
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Věta 4.3.6. *Mějme konečnou množinu $M \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$. Nechť je funkce f holomorfní na $\tilde{\mathbb{C}}\setminus M$. Potom platí*

$$\sum_{z\in M\cup\{\infty\}} \operatorname{res}_z f = 0.$$

Ilustrujme si věty 4.3.4, 4.3.5 na příkladech.

Příklad 22. Vypočítejte komplexní integrál $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz$, cesta γ je zobrazena na obrázku 4.1.

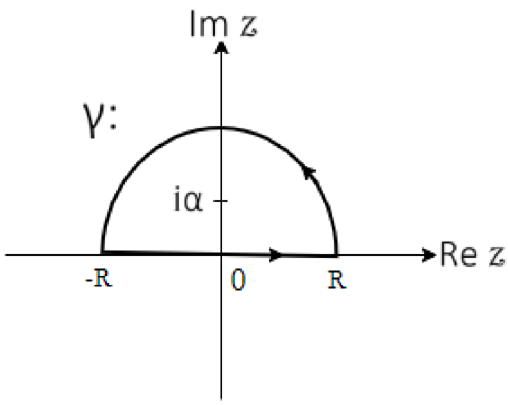


Obr. 4.1

Řešení. Funkce $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti G a γ je kladně orientovaná Jordanova cesta ležící v G. Podle věty 4.3.5 platí $\int_\gamma f(z)dz = 0$, tedy

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Příklad 23. Vypočítejte komplexní integrál $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+\alpha^2} dz, \alpha > 0$, kde γ je zobrazena na obrázku 4.2.



Obr. 4.2

Řešení. Funkce $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+\alpha^2}$ je holomorfní v celé komplexní rovině kromě izolovaných singulárních bodů $z_1 = i\alpha, z_2 = -i\alpha$. Křivka γ je kladně orientovaná Jordanova cesta, přičemž $z_1 \in \operatorname{Int}\gamma$ a jedná se o jednoduchý pól. Podle věty 4.3.4 počítáme integrál $\int_\gamma f(z)dz$ následovně

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+\alpha^2} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{i\alpha} f = 2\pi i \lim_{z \to i\alpha} \left[(z - i\alpha) \frac{e^{iz}}{z^2+\alpha^2} \right] =$$
$$= 2\pi i \lim_{z \to i\alpha} \left(\frac{e^{iz}}{z + i\alpha} \right) = 2\pi i \frac{e^{-\alpha}}{2i\alpha} = \frac{\pi e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

Příklad 24. Vypočítejte komplexní integrál $\int_\gamma \frac{ze^{iz}}{z^2+\alpha^2} dz, \alpha > 0$ podél křivky γ zobrazené na obrázku 4.2.

Řešení. Funkce $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+\alpha^2}$ opět splňuje předpoklady věty 4.3.4, přičemž izolovanými signularitami jsou body $z_1 = i\alpha, z_2 = -i\alpha$. Jedná se o jednoduché póly. Integrál $\int_\gamma f(z)dz$ počítáme následovně

$$\int_\gamma \frac{ze^{iz}}{z^2+\alpha^2} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{i\alpha} f = 2\pi i \lim_{z \to i\alpha} \left[(z - i\alpha) \frac{ze^{iz}}{z^2+\alpha^2} \right] =$$
$$= 2\pi i \lim_{z \to i\alpha} \frac{ze^{iz}}{z + i\alpha} = 2\pi i \frac{i\alpha e^{-\alpha}}{2i\alpha} = \pi i e^{-\alpha}.$$

4.4 Aplikace residuí

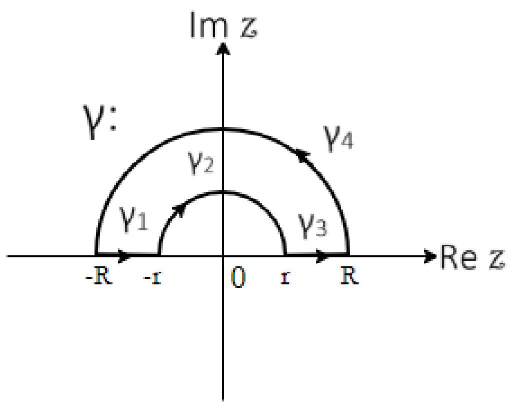
V této kapitole ukážeme aplikaci Cauchyovy teorie na výpočet různých reálných nevlastních integrálů. Pokud to bude možné, porovnáme náročnost výpočtů se standardními metodami z reálného oboru. V minulé kapitole jsme ilustrovali vyžití vět 4.3.5 a 4.3.4. Nyní si ukažme jejich aplikaci.

Příklad 25. Vypočítejte reálný nevlastní integrál: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Řešení. Nejprve z reálného integrálu utvoříme komplexní integrál tak, že proměnnou x nahradíme za komplexní proměnnou z a $\sin x$ za e^{iz}. Dostáváme komplexní funkci

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$$

Musíme se vyhnout singularitě ($z \neq 0$), proto cestu utvoříme jako součet čtyř cest $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \gamma_3 \dot{+} \gamma_4$ viz obrázek 4.3.



Obr. 4.3

Parametrické vyjádření těchto cest je:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: \ z = t,\ t \in \langle -R, -r \rangle, dz = dt,\\
\dot{-}\gamma_2 &: \ z = re^{it},\ t \in \langle 0, \pi \rangle, dz = ire^{it} dt,\\
\gamma_3 &: \ z = t,\ t \in \langle r, R \rangle, dz = dt,\\
\gamma_4 &: \ z = Re^{it},\ t \in \langle 0, \pi \rangle, dz = iRe^{it} dt.
\end{aligned}$$

Naším úkolem je tedy vypočítat následující integrál

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz.$$

Z příkladu 22 je levá strana rovnice rovna nule, tedy $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Pravou stranu rovnice vypočítáme po částech. Nejprve spočítáme součet integrálů přes γ_1 a γ_3. Máme

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_3} f(z)dz &= \int_{-R}^{-r}\frac{e^{it}}{t}dt+\int_r^R\frac{e^{it}}{t}dt = \\ &= -\int_R^r \frac{e^{-it}}{-t}dt+\int_r^R\frac{e^{it}}{t}dt=\int_r^R\frac{e^{it}-e^{-it}}{t}dt = \\ &= \int_r^R\frac{2i\cdot\sin t}{t}dt = 2i\cdot\int_r^R\frac{\sin t}{t}dt.\end{aligned}$$

Výpočet, resp. odhad zbylých integrálů vypadá následovně

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = -\int_{-\gamma_2} f(z)dz = -\int_0^\pi \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}}ire^{it}dt = -i\int_0^\pi e^{ire^{it}}dt, \text{ kde}$$

$$-i\int_0^\pi e^{ire^{it}}dt \xrightarrow{r\to 0} -i\lim_{r\to 0}\int_0^\pi e^{ire^{it}}dt = -i\pi,$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}iRe^{it}dt\right| = \left|i\int_0^\pi e^{iRe^{it}}dt\right| = \left|i\int_0^\pi e^{iR(\cos t+i\sin t)}dt\right| = \\ &= \left|\int_0^\pi e^{iR(\cos t+i\sin t)}dt\right| \le \int_0^\pi \left|e^{iR(\cos t+i\sin t)}\right|dt = \\ &= \int_0^\pi \left|e^{iR\cos t}\cdot e^{-R\sin t}\right|dt = \int_0^\pi e^{-R\sin t}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}dt \le \\ &\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2}{\pi}t}dt = 2\left[\frac{e^{-R\frac{2}{\pi}t}}{-R\frac{2}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\frac{e^{-R\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}}}{-R\frac{2}{\pi}}+\frac{1}{R\frac{2}{\pi}}\right] \le \\ &\le 2\frac{1}{R\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Vypočítali jsme všechny potřebné části pro konečný výpočet. Dostáváme

$$0 = 2i\int_r^R\frac{\sin t}{t}dt - i\int_0^\pi e^{ire^{it}}dt + i\int_0^\pi e^{iRe^{it}}dt.$$

Pro $R\to\infty$ a $r\to 0^+$ platí

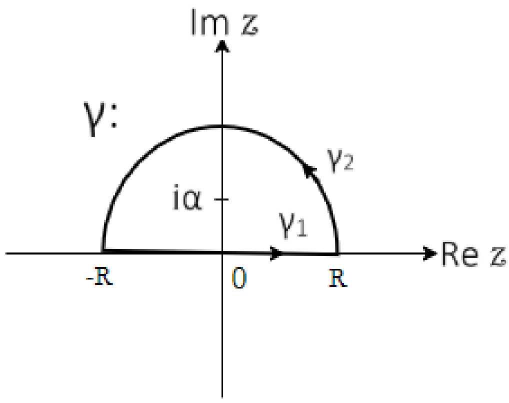
$$\begin{aligned}0 &= 2i\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt - i\pi + 0, \\ i\pi &= 2i\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt, \\ \int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Příklad 26. Vypočítejte reálný nevlastní integrál: $y = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+\alpha^2}dx,\ \alpha > 0.$

Řešení. Postup je podobný jako u předchozího příkladu. Nejprve z reálného integrálu utvoříme komplexní integrál přeměnou proměnné x za komplexní proměnnou z a $\cos x$ za e^{iz}. Dostáváme komplexní funkci

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+\alpha^2}.$$

Cestu utvoříme jako součet dvou cest $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ viz obrázek 4.4.



Obr. 4.4

Parametrické vyjádření těchto cest je:

$$\gamma_1 :\ z = t,\ t \in \langle -R, R\rangle, dz = dt,$$
$$\gamma_2 :\ z = Re^{it},\ t \in \langle 0, \pi\rangle, dz = iRe^{it}dt.$$

Máme tedy

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Z příkladu 23 víme, že pro levou stranu rovnice platí

$$\int_\gamma f(z)dz = \frac{\pi e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

Pravou stranu rovnice vypočítáme postupně. Platí

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{t^2+\alpha^2}dt = \int_{-R}^{R} \frac{\cos t + i\sin t}{t^2+\alpha^2}dt =$$
$$= \int_{-R}^{R}\left(\frac{\cos t}{t^2+\alpha^2} + \frac{i\sin t}{t^2+\alpha^2}\right)dt = \int_{-R}^{R} \frac{\cos t}{t^2+\alpha^2}dt =$$
$$= 2\int_0^R \frac{\cos t}{t^2+\alpha^2}dt \xrightarrow{R\to\infty} 2\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^2+\alpha^2},$$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{e^{iRe^{it}}}{R^2e^{2it}+\alpha^2}iRe^{it}\right|dt = R\int_0^\pi \left|\frac{e^{iR(\cos t+i\sin t)}}{R^2e^{2it}+\alpha^2}\right|dt =$$
$$= R\int_0^\pi \left|\frac{e^{iR\cos t}\cdot e^{-R\sin t}}{R^2e^{2it}+\alpha^2}\right|dt = R\int_0^\pi \frac{e^{-R\sin t}}{|R^2e^{2it}+\alpha^2|}dt \leq$$
$$\leq R\int_0^\pi \frac{e^{-R\sin t}}{R^2-\alpha^2}dt \leq R\int_0^\pi \frac{1}{R^2-\alpha^2}dt = \frac{R}{R^2-\alpha^2}\cdot\pi \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Všechny potřebné části pro konečný výpočet máme. Pokračujeme

$$\frac{\pi e^{-\alpha}}{\alpha} = 2\int_0^R \frac{\cos t}{t^2+\alpha^2}dt + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Pro $R \to \infty$ platí

$$\frac{\pi e^{-\alpha}}{\alpha} = 2\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^2+\alpha^2}dt + 0,$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^2+\alpha^2}dt = \frac{\pi e^{-\alpha}}{2\alpha}.$$

Příklad 27. Vypočítejte reálný nevlastní integrál: $y = \int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+\alpha^2}dx,\ \alpha > 0.$

Řešení. Z reálného integrálu opět utvoříme komplexní integrál přeměnou proměnné x za komplexní proměnnou z a $\sin x$ za e^{iz}. Dostáváme komplexní funkci

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+\alpha^2}.$$

Singulární body jsou $z = \pm i\alpha$. Cestu utvoříme jako součet dvou cest $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ (obrázek 4.4). Parametrické vyjádření těchto cest je:

$$\gamma_1:\ z = t,\ t \in \langle -R, R\rangle, dz = dt,$$
$$\gamma_2:\ z = Re^{it},\ t \in \langle 0, \pi\rangle, dz = iRe^{it}dt.$$

Máme tedy

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Z příkladu 24 víme, že pro levou stranu rovnice platí

$$\int_\gamma f(z)dz = \pi i e^{-\alpha}.$$

Pravou stranu rovnice vypočítáme, resp. odhadneme postupně. Máme

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^R \frac{te^{it}}{t^2+\alpha^2}dt = \int_{-R}^R \frac{t(\cos t + i\sin t)}{t^2+\alpha^2}dt =$$
$$= \int_{-R}^R \left(\frac{t\cos t}{t^2+\alpha^2} + \frac{it\sin t}{t^2+\alpha^2}\right)dt = \int_{-R}^R \frac{it\sin t}{t^2+\alpha^2}dt =$$
$$= 2i\int_0^R \frac{t\sin t}{t^2+\alpha^2}dt \xrightarrow{R\to\infty} 2i\int_0^\infty \frac{t\sin t}{t^2+\alpha^2}.$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{Re^{it}e^{iRe^{it}}}{R^2e^{2it}+\alpha^2}Rie^{it}dt\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{R^2ie^{2it}e^{iRe^{it}}}{R^2e^{2it}+\alpha^2}\right|dt = \\
&= R^2\int_0^\pi \left|\frac{e^{iR\cos t}\cdot e^{-R\sin t}}{R^2e^{2it}+\alpha^2}\right|dt = R^2\int_0^\pi \frac{e^{-R\sin t}}{|R^2e^{2it}+\alpha^2|}dt \le \\
&\le R^2\int_0^\pi \frac{e^{-R\sin t}}{R^2-\alpha^2}dt = 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-R\sin t}}{R^2-\alpha^2}dt \le \\
&\le 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-R\frac{2}{\pi}t}}{R^2-\alpha^2}dt = \frac{2R^2}{R^2-\alpha^2}\cdot\left[\frac{e^{-R\frac{2}{\pi}t}}{-R\frac{2}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cdots = \\
&= \frac{\pi R}{R^2-\alpha^2}\left(1-e^{-R}\right) \xrightarrow{R\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

Všechny potřebné části pro konečný výpočet máme. Pokračujeme

$$
i\pi e^{-\alpha} = 2i\int_0^R \frac{t\sin t}{t^2+\alpha^2}dt + \int_{\gamma_2} f(z)dz.
$$

Pro $R\to\infty$ platí

$$
\begin{aligned}
i\pi e^{-\alpha} &= 2i\int_0^\infty \frac{t\sin t}{t^2+\alpha^2}dt + 0, \\
\int_0^\infty \frac{t\sin t}{t^2+\alpha^2}dt &= \frac{\pi e^{-\alpha}}{2}.
\end{aligned}
$$

Tyto aplikace představují jeden z vrcholů komplexní analýzy. Nejprve nadefinujme nevlastní integrál. Je-li funkce $f : \langle a,\infty) \to \mathbb{C}$, kde $a \in \mathbb{R}$, spojitá, definujeme integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ vztahem

$$
\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^k f(x)dx, \tag{4.8}
$$

pokud limita na pravé straně existuje. Integrál na levé straně rovnice se nazývá *nevlastní*. Je-li limita (4.8) konečná, říkáme, že $\int_a^\infty f(x)dx$ *konverguje*.

Podobně definujme nevlastní integrál $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ jako

$$
\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{k\to-\infty}\int_k^a f(x)dx.
$$

Počítání těchto integrálů je analogické jako u reálných funkcí f. Za předpokladu, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály $\int_{-\infty}^a f(x)dx, \int_a^\infty f(x)dx$, klademe

$$
\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx.
$$

Dále ilustrujeme použití několika vybraných formulí.

4.4.1 Integrál typu $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$

Předpoklady:

- Reálná funkce $R(u,v)$ je racionální lomená funkce proměnných $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Zavedením komplexní proměnné $z = e^{it}$ převedeme daný reálný integrál na komplexní křivkový integrál podél kladně orientované kružnice $|z| = 1$. Využijeme identit

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Potom platí

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int_\gamma R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \cdot (-i)z^{-1}dz.$$

Na výpočet získaného komplexního integrálu aplikujeme Residuovou větu 4.3.4.

Příklad 28. Zjistěte hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^\pi \frac{a}{a^2 + \cos^2 t}dt, \quad a > 0.$$

Řešení. Nejprve zavedeme substituci $t = \frac{u}{2}$, tím převedeme zadaný integrál na integrál typu $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$. Konkrétně

$$\int_0^\pi \frac{a}{a^2 + \cos^2 t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{a}{a^2 + \cos^2 \frac{u}{2}}du = \int_0^{2\pi} \frac{a}{2a^2 + 1 + \cos u}du.$$

Takto jsme získali racionální funkci v $\cos u$. Nyní můžeme integrál převést na komplexní křivkový integrál podél kladně orientované kružnice $|z| = 1$. Pro $z = e^{iu}$ dostáváme

$$\int_0^{2\pi} \frac{a}{2a^2 + 1 + \cos u}du \rightsquigarrow \int_\gamma \frac{a(-i)z^{-1}}{2a^2 + 1 + \frac{z+z^{-1}}{2}}dz = \int_\gamma \frac{-2ai}{z^2 + z(4a^2 + 2) + 1}dz,$$

kde γ je kladně orientovaná kružnice $|z| = 1$. Nyní aplikujeme větu 4.3.4. Funkce

$$f(z) = \frac{-2ai}{z^2 + z(4a^2 + 2) + 1}$$

má izolované singularity v kořenech svého jmenovatele, tj. v bodech

$$z_1 = -2a^2 - 1 + 2a\sqrt{a^2 + 1}, \quad z_2 = -2a^2 - 1 - 2a\sqrt{a^2 + 1}.$$

Oba body jsou jednoduché póly funkce $f(z)$. Dále musíme zjistit, které ze singulárních bodů leží uvnitř kružnice γ. Uvědomme si, že obě čísla z_1, z_2 jsou reálná. Pokud si tyto singularity převedeme na tvar

$$-z_1 = 2a^2 + 1 - 2a\sqrt{a^2 + 1} \quad \text{a} \quad -z_2 = 2a^2 + 1 + 2a\sqrt{a^2 + 1}$$

vidíme, že pro $a > 0$ je

$$2a^2 + 2a\sqrt{a^2+1} > 0, \text{ tedy pro } z_2 \text{ platí } -z_2 > 1 \rightsquigarrow z_2 < -1,$$
$$2a(a - \sqrt{a^2+1}) < 0, \text{ tedy pro } z_1 \text{ platí } -z_1 < 1 \rightsquigarrow z_1 > -1,$$
$$z_1 - 1 = -2a^2 - 2 + 2a\sqrt{a^2+1} = 2\sqrt{a^2+1}(a - \sqrt{a^2+1}) < 0 \rightsquigarrow z_1 < 1.$$

Uvnitř kružnice γ tedy leží pouze singulární bod z_1. Podle věty o residuích je zadaný integrál roven

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{z_1} f(z).$$

Potřebujeme proto stanovit residuum funkce $f(z)$ v singularitě z_1. Použijeme vzorec 4.7 pro jednoduché póly

$$\mathrm{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\cdot f(z) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\cdot \frac{-2ai}{z^2+z(4a^2+2)+1} =$$
$$= \lim_{z\to z_1}\frac{-2ai}{z-z_2} = \frac{-i}{2\sqrt{a^2+1}}.$$

Zadaný integrál můžeme dopočítat jako

$$\int_0^\pi \frac{a}{a^2+\cos^2 t}dt = 2\pi i \cdot \frac{-i}{2\sqrt{a^2+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}.$$

4.4.2 Integrál typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos mt\, dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin mt\, dt$

Předpoklady:

- Komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečně mnoha izolovaných singularit, přičemž na reálné ose připouštíme jako singularity pouze jednoduché póly. Funkce $f(z)$ nabývá na reálné ose pouze reálných hodnot.
- $m > 0$
- Platí $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Jestliže integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos mt dt$ konverguje, potom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos mt dt = \mathrm{Re}\left[2\pi i \cdot \sum_{\mathrm{Im}\, w>0} \mathrm{res}_w f(z)e^{imz} + \pi i \cdot \sum_{\mathrm{Im}\, w=0} \mathrm{res}_w f(z)e^{imz}\right].$$

Jestliže integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin mt dt$ konverguje, potom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin mt dt = \mathrm{Im}\left[2\pi i \cdot \sum_{\mathrm{Im}\, w>0} \mathrm{res}_w f(z)e^{imz} + \pi i \cdot \sum_{\mathrm{Im}\, w=0} \mathrm{res}_w f(z)e^{imz}\right].$$

Znovu si spočítejme příklady 25 a 26 pomocí těchto vzorců.

Příklad 29. Určete hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt.$$

Řešení. Protože je zadaná funkce sudá, spočítejme si hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Platí

$$f(t) = \frac{1}{t}, \quad m = 1 \quad \rightsquigarrow \quad f(z) = \frac{1}{z}.$$

Podmínka $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ je splněna. Singulárním bodem je bod $z_1 = 0$. Jedná se o jednoduchý pól a $\operatorname{Im} z_1 = 0$. Použitím vzorce dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \operatorname{Im}\left[\pi i \cdot \operatorname{res}_0 \left(\frac{1}{z} e^{iz}\right)\right] = \operatorname{Im}\left[\pi i \cdot \lim_{z\to 0} z \left(\frac{1}{z} e^{iz}\right)\right] = \operatorname{Im}[\pi i \cdot 1] = \pi.$$

Díky sudosti zadané funkce platí

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 30. Určete hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^2 + a^2} dt, \ a > 0.$$

Řešení. Opět využijeme sudost zadané funkce spočítáním $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t^2+a^2} dt, \ a > 0$. Máme

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}, \quad m = 1 \quad \longrightarrow \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}.$$

Singulárními body jsou $z_{1,2} = \pm ai$. Zjistěme typ singularit pomocí věty 4.2.3. Platí

$$\lim_{z\to ai} f(z) = \lim_{z\to ai} \frac{1}{z^2 + a^2} = \infty, \qquad \lim_{z\to -ai} f(z) = \lim_{z\to -ai} \frac{1}{z^2 + a^2} = \infty.$$

Obě singularity jsou tedy jednoduché póly. Funkce konverguje, neboť

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^2 + a^2} = 0.$$

Pro $a > 0, z_1 = ai, z_2 = -ai$ je $\operatorname{Im} z_1 > 0, \operatorname{Im} z_2 < 0$. Použitím vzorce dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t^2 + a^2} dt &= \operatorname{Re}\left[2\pi i \cdot \operatorname{res}_{ai}\left(\frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}\right)\right] = \operatorname{Re}\left[2\pi i \cdot \lim_{z\to ai}\left((z - ai)\frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}\right)\right] = \\ &= \operatorname{Re}\left[2\pi i \cdot \lim_{z\to ai} \frac{e^{iz}}{z + ai}\right] = \operatorname{Re}\left[2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{2ai}\right] = \frac{\pi e^{-a}}{a}.\end{aligned}$$

Zbývá jen dopočítat integrál ze zadání

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t^2 + a^2} dt = \frac{\pi e^{-a}}{2a}.$$

4.4.3 Integrál typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{imt}\,dt$

Předpoklady:

- Daný nevlastní integrál je konvergentní.
- Komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečně mnoha izolovaných singularit, přičemž na reálné ose připouštíme jako singularity pouze jednoduché póly. Funkce $f(z)$ nabývá na reálné ose pouze reálných hodnot.
- $m \neq 0$
- Platí $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

V případě jejich splnění platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{imt}dt = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im} w>0} \operatorname{res}_w f(z)e^{imz} + \pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im} w=0} \operatorname{res}_w f(z)e^{imz} \quad \text{pro } m>0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{imt}dt = \overline{2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im} w>0} \operatorname{res}_w f(z)e^{-imz} + \pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im} w=0} \operatorname{res}_w f(z)e^{-imz}} \quad \text{pro } m<0.$$

Příklad 31. Vypočítejte nevlastní integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-4it}}{t^2+4} dt.$$

Řešení. Zadaný integrál konverguje absolutně. Vyplývá to z nerovnosti

$$\left|\frac{e^{-4it}}{t^2+4}\right| = \frac{\left|e^{-4it}\right|}{t^2+4} = \frac{1}{t^2+4}$$

a z identity $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+4} = \frac{\pi}{2}$. Komplexní funkce zadaného integrálu je

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4}$$

a platí

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^2+4} = 0.$$

Funkce $f(z)$ má dva jednoduché póly $z_1 = 2i, z_2 = -2i$. U tohoto typu integrálu nás zajímají pouze singularity s nezápornou imaginární částí, to je v tomto případě pouze bod z_1. Pro $m = -4 < 0$ máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-4it}}{t^2+4} dt = \overline{2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_1} f(z)e^{-imz}} = \overline{2\pi i \cdot \lim_{z\to 2i} (z-2i)\frac{e^{-(-4iz)}}{z^2+4}} =$$

$$= \overline{2\pi i \cdot \lim_{z\to 2i} \frac{e^{4iz}}{z+2i}} = \overline{2\pi i \cdot \frac{e^{-8}}{4i}} = \overline{\frac{\pi}{2e^8}} = \frac{\pi}{2e^8}.$$

4.4.4 Integrál typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$

Předpoklady:

- Daný nevlastní integrál konverguje.
- Komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní pro $\operatorname{Im} z > 0$ a spojitá pro $\operatorname{Im} z \geq 0$ s výjimkou konečně mnoha izolovaných singularit, přičemž žádná z nich neleží na reálné ose.
- Platí $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} z f(z) = 0$.

Potom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im} w>0} \operatorname{res}_w f(z).$$

Příklad 32. Stanovte nevlastní integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t+1}{(t^2+1)^2} dt.$$

Řešení (1). Příslušná komplexní funkce má tvar

$$f(z) = \frac{3z+1}{(z^2+1)^2}$$

a platí

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{3z^2+z}{(z^2+1)^2} = 0.$$

Jedná se o racionální lomenou funkci s izolovanými singularitami v bodech $z_{1,2} = \pm i$, které neleží na reálné ose. Podstatná je singularita $z_1 = i$, protože $\operatorname{Im} z_1 > 0$. V tomto bodě má funkce pól řádu 2. Dosazením do vzorce dostaneme vyjádření

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t+1}{(t^2+1)^2} dt = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_i \frac{3z+1}{(z^2+1)^2} = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \left[(z-i)^2 \frac{3z+1}{(z^2+1)^2} \right]' =$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \left[\frac{3z+1}{(z+i)^2} \right]' = 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \left[\frac{3(z+i)-2(3z+1)}{(z+i)^3} \right] = \frac{\pi}{2}.$$

Řešení (2). Vypočítejme si zadaný integrál i klasickým způsobem. Máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t+1}{(t^2+1)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t dt}{(t^2+1)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \begin{vmatrix} t^2+1 = u \\ 2t dt = du \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2} dt =$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{-1}{t^2+1} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= 0 + [\arctan t]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \cdot t dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} u = t & v' = \frac{t}{(t^2+1)^2} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1} \end{vmatrix} = \\
&= [\arctan t]_{-\infty}^{\infty} - \left(\left[-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} \right) = \\
&= \pi - 0 - \frac{1}{2}[\arctan t]_{-\infty}^{\infty} = \pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

V tomto příkladě si můžeme všimnout, že výpočet pomocí komplexní analýzy je jednodušší než výpočet standardním způsobem (pomocí rozkladu integrandu jako racionální lomené funkce na parciální zlomky).

4.4.5 Integrál typu $\int_0^\infty f(t)t^{a-1}\,dt$

Předpoklady:

- Daný nevlastní integrál konverguje.
- Komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ až na konečný počet izolovaných singularit, přičemž žádná z nich neleží na intervalu $(0,\infty)$.
- Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ platí $\lim_{z\to\infty} |z|^a f(z) = 0, \lim_{z\to 0} |z|^a f(z) = 0$.

Potom platí

$$\int_0^\infty f(t)t^{a-1}dt = \frac{\pi}{\sin \pi a} \cdot \sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{res}_w \left[(-z)^{a-1} f(z)\right],$$

kde symbolem $(-z)^{a-1}$ chápeme jednoznačnou větev mocniny

$$(-z)^{a-1} := e^{(a-1)[\ln|-z| + i\arg(-z)]}.$$

Příklad 33. Najděte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2+1}dt, \quad 0 < a < 1.$$

Řešení. Odpovídající komplexní funkce $f(z)$ má tvar

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

a platí

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} |z|^a f(z) &= \lim_{z\to\infty} \frac{|z|^a}{z^2+1} = \lim_{z\to\infty} \frac{|z|^a}{(|z| \cdot e^{i\arg z})^2 + 1} = \lim_{z\to\infty} \frac{|z|^a}{|z|^2 \cdot e^{2i\arg z} + 1} = \\
&= \lim_{z\to\infty} \frac{|z|^a}{|z|^2 \left(e^{2i\arg z} + \frac{1}{|z|^2}\right)} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{|z|^{2-a} \left(e^{2i\arg z} + \frac{1}{|z|^2}\right)} = 0, \\
\lim_{z\to 0} |z|^a f(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{|z|^a}{z^2+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Funkce $f(z)$ má jednoduché póly v bodech $z_1 = i, z_2 = -i$, které splňují předpoklad, že neleží na nezáporné reálné ose. Potřebujeme stanovit residua funkce $(-z)^{a-1}f(z)$ v těchto bodech. Protože mocninná funkce $(-z)^{a-1}$ je holomorfní na libovolném okolí bodů $\pm i$, které neobsahují 0, platí

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_i(-z)^{a-1}f(z) &= \lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{(-z)^{a-1}}{z^2+1} = \lim_{z\to i}\frac{(-z)^{a-1}}{z+i} = \frac{(-i)^{a-1}}{2i} = \\
&= \frac{e^{(a-1)[\ln|-i|+i\cdot\arg(-i)]}}{2i} = \frac{e^{(a-1)\cdot i\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}{2i} = \frac{e^{-i(a-1)\frac{\pi}{2}}}{2i}. \\
\operatorname{res}_{-i}(-z)^{a-1}f(z) &= \lim_{z\to -i}(z+i)\cdot\frac{(-z)^{a-1}}{z^2+1} = \lim_{z\to -i}\frac{(-z)^{a-1}}{z-i} = \frac{(i)^{a-1}}{-2i} = \\
&= \frac{e^{(a-1)[\ln|i|+i\cdot\arg(i)]}}{-2i} = \frac{e^{(a-1)\cdot i\cdot\frac{\pi}{2}}}{-2i} = -\frac{e^{i(a-1)\frac{\pi}{2}}}{2i}.
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme vypočítané hodnoty dosadit do vzorce. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2+1}dt &= \frac{\pi}{\sin\pi a}\left[\operatorname{res}_i(-z)^{a-1}f(z) + \operatorname{res}_{-i}(-z)^{a-1}f(z)\right] = \\
&= \frac{\pi}{\sin\pi a}\left[\frac{e^{-i(a-1)\frac{\pi}{2}}}{2i} - \frac{e^{i(a-1)\frac{\pi}{2}}}{2i}\right] = -\frac{\pi}{\sin\pi a}\sin\left((a-1)\frac{\pi}{2}\right) = \\
&= -\frac{\pi}{\sin\pi a}\cdot\sin\left(\frac{\pi a}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\pi a}\cdot\cos\frac{\pi a}{2} = \frac{\pi\cos\frac{\pi a}{2}}{2\sin\frac{\pi a}{2}\cos\frac{\pi a}{2}} = \\
&= \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}}.
\end{aligned}
$$

4.4.6 Integrál typu $\int_0^\infty f(t)\ln t\,dt, \int_0^\infty f(t)dt$

Předpoklady:

- Komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ až na konečný počet izolovaných singularit, přičemž žádná z nich neleží na intervalu $(0,\infty)$. Navíc funkce $f(z)$ nabývá na reálné ose pouze reálných hodnot.
- Platí $\lim_{z\to\infty} z\ln^2|z|f(z) = 0, \lim_{z\to 0} z\ln^2|z|f(z) = 0$.

Jestliže integrál $\int_0^\infty f(t)\ln t\,dt$ konverguje, potom platí

$$\int_0^\infty f(t)\ln t\,dt = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\operatorname{res}_w\left[f(z)\log^2_{2\pi}z\right]\right].$$

Jestliže integrál $\int_0^\infty f(t)dt$ konverguje, potom platí

$$\int_0^\infty f(t)dt = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left[\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}\operatorname{res}_w\left[f(z)\log^2_{2\pi}z\right]\right],$$

kde logaritmická funkce $\log_{2\pi} z$ je definovaná předpisem

$$\log_{2\pi} z := \ln|z| + i\varphi \quad \text{pro } \varphi \in [0, 2\pi).$$

V tomto případě platí $(\log_{2\pi} z)' = \frac{1}{z}$ ve všech bodech z, ve kterých je funkce $\log_{2\pi} z$ holomorfní.

Příklad 34. Určete hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t^2+1)^2} dt.$$

Řešení. Komplexní funkce $f(z)$ má tvar

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

Izolované singularity funkce $f(z)$ jsou body $z_{1,2} = \pm i$. Jedná se o póly řádu 2, přičemž žádný z nich neleží na intervalu $(0, \infty)$. Ukážeme si platnost třetí podmínky. Při výpočtu hodnoty

$$\lim_{z \to 0} \frac{z \ln^2 |z|}{(z^2+1)^2}$$

využijeme toho, že pro reálnou funkci $t \ln^2 t$ platí (pomocí l'Hospitalova pravidla)

$$\lim_{t \to 0^+} t \ln^2 t = \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln^2 t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2 \ln t \frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2 \ln t}{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2 \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to 0^+} 2t = 0.$$

Protože $\left| z \ln^2 |z| \right| = |z| \ln^2 |z|$ a $\lim_{t \to 0^+} t \ln^2 t = 0$, platí $\lim_{z \to 0} \left| z \ln^2 |z| \right| = 0$, takže $\lim_{z \to 0} z \ln^2 |z| = 0$. Odtud

$$\lim_{z \to 0} \frac{z \ln^2 |z|}{(z^2+1)^2} = 0.$$

Pro druhou limitu využijeme následujícího rozšíření

$$\lim_{z \to \infty} \frac{z \ln^2 |z|}{(z^2+1)^2} = \lim_{z \to \infty} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \cdot \frac{\ln^2 |z|}{z}$$

a limity reálné funkce $\frac{\ln^2 t}{t}$, tedy

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln^2 t}{t} = \lim_{t \to \infty} 2 \ln t \frac{1}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{2 \ln t}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{2}{t} = 0.$$

Protože platí, že když $\left| \frac{\ln^2 |z|}{z} \right| = \frac{\ln^2 |z|}{|z|}$ a $\lim_{t \to \infty} \frac{\ln^2 t}{t} = 0$, pak je $\lim_{z \to \infty} \left| \frac{\ln^2 |z|}{z} \right| = 0$, takže $\lim_{z \to \infty} \frac{\ln^2 |z|}{z} = 0$, a protože $\lim_{z \to \infty} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = 0$ platí

$$\lim_{z \to \infty} \frac{z \ln^2 |z|}{(z^2+1)^2} = 0.$$

Zajímají nás residua funkce $f(z)\log^2_{2\pi} z$ v singulárních bodech. Funkce $\log_{2\pi} z$ je holomorfní v okolí bodů $\pm i$, která neobsahují 0. Proto máme

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_i f(z)\log^2_{2\pi} z &= \lim_{z\to i}\left[(z-i)^2\cdot\frac{\log^2_{2\pi} z}{(z^2+1)^2}\right]' = \lim_{z\to i}\left[\frac{\log^2_{2\pi} z}{(z+i)^2}\right]' = \\ &= \lim_{z\to i}\frac{2\log_{2\pi} z[\frac{z+i}{z}-\log_{2\pi} z]}{(z+i)^3} = \frac{2\log_{2\pi} i\cdot(2-\log_{2\pi} i)}{(2i)^3}.\end{aligned}$$

Jelikož podle formule u tohoto typu integrálu platí

$$\log_{2\pi} i = \ln|i| + i\cdot\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2},$$

hodnota residua v bodě i je

$$\operatorname{res}_i f(z)\log^2_{2\pi} z = \frac{2\cdot\frac{\pi i}{2}\cdot\left(2-\frac{\pi i}{2}\right)}{-8i} = -\frac{\pi}{4}+i\cdot\frac{\pi^2}{16}.$$

Podobným postupem získáme $\operatorname{res}_{-i} f(z)\log^2_{2\pi} z$. Počítáme

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{-i} f(z)\log^2_{2\pi} z &= \lim_{z\to -i}\left[(z+i)^2\cdot\frac{\log^2_{2\pi} z}{(z^2+1)^2}\right]' = \lim_{z\to -i}\left[\frac{\log^2_{2\pi} z}{(z-i)^2}\right]' = \\ &= \lim_{z\to -i}\frac{2\log_{2\pi} z\cdot[(z-i)\cdot\frac{1}{z}-\log_{2\pi} z]}{(z-i)^3} = \frac{2\log_{2\pi}(-i)\cdot(2-\log_{2\pi}(-i))}{(-2i)^3}.\end{aligned}$$

Zde podle formule u tohoto typu integrálu platí

$$\log_{2\pi}(-i) = \ln|-i| + i\cdot\frac{3\pi}{2} = i\frac{3\pi}{2},$$

hodnota residua v bodě $-i$ je

$$\operatorname{res}_{-i} f(z)\log^2_{2\pi} z = \frac{2\cdot i\frac{3\pi}{2}\cdot\left(2-i\frac{3\pi}{2}\right)}{8i} = \frac{3\pi}{4}-i\cdot\frac{9\pi^2}{16}.$$

Pro zadaný integrál platí

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(t^2+1)^2}dt &= -\frac{1}{2\pi}\cdot\operatorname{Im}[\operatorname{res}_i f(z)\log^2_{2\pi} z + \operatorname{res}_{-i} f(z)\log^2_{2\pi} z] = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left[-\frac{\pi}{4}+i\cdot\frac{\pi^2}{16}+\frac{3\pi}{4}-i\cdot\frac{9\pi^2}{16}\right] = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left[\frac{\pi}{2}-i\cdot\frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

4.5 Cvičení

1. Zkonstruujte Laurentovu řadu funkce $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ a stanovte její hlavní a regulární část pro

   a) $0 < |z| < 1$, b) $0 < |z-1| < 1$.

2. Vypočítejte nevlastní integrály

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos t + b} dt, \quad \text{kde } 0 < a < b < \infty,$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a^2 - 2a\cos t + 1)} dt, \quad \text{kde } 0 < a < 1,$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5t}{t^2 + 4} dt,$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t(t^2 + b^2)} dt, \quad a, b \in \mathbb{R}^+,$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 dt,$$

Nápověda: Využijte goniometrickou identitu $\sin^3 t = \dfrac{3\sin t - \sin 3t}{4}, x \in \mathbb{R}$,

$$I_6 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at}{t^2 + b^2} dt, \quad a > 0, b > 0,$$

$$I_7 = \int_0^{\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + a^2} dt, \quad a > 0,$$

$$I_8 = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{at}}{e^t + 1} dt, \quad \text{kde } 0 < a < 1,$$

$$I_9 = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{dt}{t^4 + 1},$$

$$I_{10} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt,$$

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)^2},$$

$$I_{12} = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{t^{a-1}}{t + 1} dt,$$

$$I_{13} = \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{(t^2 + 1)^2} dt,$$

$$I_{14} = \int_0^{\infty} \frac{t^2 \cdot \ln t}{(t^2 + 1)^2} dt.$$

Výsledky

1. (a) $\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, kde $-\frac{1}{z}$ je hlavní část a $-\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ je regulární část Laurentovy řady,

   (b) $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} [-(z-1)]^n$, $\frac{1}{z-1}$ je hlavní část a $-\sum_{n=0}^{\infty} [-(z-1)]^n$ je regulární část Laurentovy řady.

2. $I_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}$, $I_2 = \frac{2\pi}{1-a^2}$,

   $I_3 = \frac{\pi}{2}e^{-10}$, $I_4 = \frac{\pi(1-e^{-ab})}{2b^2}$,

   $I_5 = \frac{3}{4}\pi$, $I_6 = \frac{\pi}{b}e^{-ab}$,

   $I_7 = \frac{\pi e^{-a}}{2}$, $I_8 = \frac{\pi}{\sin a\pi}$,

   $I_9 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $I_{10} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$,

   $I_{11} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}$, $a > 0,\ b > 0$, $I_{12} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$,

   $I_{13} = -\frac{\pi}{4}$, $I_{14} = \frac{\pi}{4}$.

Závěr

Cílem této práce bylo ukázat aplikaci teorie residuí na několika příkladech a teorii doplnit sbírkou neřešených příkladů.

První a druhá kapitola představuje shrnutí základní teorie nekonečných (číselných a funkčních) řad v komplexním oboru, přičemž jsme se věnovali především mocninným řadám a Taylorově rozvoji.

Ve třetí kapitole jsme stručně uvedli nejnutnější definice a věty křivkového integrálu, které byly potřeba k porozumění následující kapitoly.

V první části poslední kapitoly jsme ukázali Laurentovy řady, vysvětlili pojem izolované singulární body a residua a uvedli jsme Residuovou a Cauchyovu větu spolu s ukázkovými příklady. Ve druhé části této kapitoly jsme ukázali aplikaci Residuové věty na výpočet šesti typů reálných integrálů. Většinu těchto typů integrálů nelze elementárními metodami vypočítat, nebo je to početně zdlouhavé a náročné. V tom spočívá hlavní přínos teorie residuí. Kromě typů integrálů prezentovaných v kapitole 4 se dají odvodit i další formule na základě Residuové věty. Některé z nich lze najít například v [3] spolu s pestrou škálou příkladů.

Seznam použité literatury

[1] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet II: celost. vysokošk. učebnice pro stud. matematicko-fyz. a přírodověd. fakult, skupiny stud. oborů fyzikálně-matem. vědy*. 3. vyd. Praha: Academia, 1976.

[2] JEVGRAFOV, Marat Andrejevič. *Funkce komplexní proměnné*. Přeložil Ladislav PRŮCHA. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1981. Teoretická knižnice inženýra.

[3] JEVGRAFOV, Marat Andrejevič. *Sbírka úloh z teorie funkcí komplexní proměnné*. Přeložil Anna NĚNIČKOVÁ, přeložil Věra MAŇASOVÁ, přeložil Eva NOVÁKOVÁ. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1976.

[4] KALAS, Josef. *Analýza v komplexním oboru*. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2006. ISBN 80-210-4045-9.

[5] LANG, Serge. *Complex analysis*. 4th ed. New York: Springer, c1999. ISBN 0-387-98592-1.

[6] NOVÁK, Vítězslav. *Nekonečné řady*. Brno: Univerzita J. E. Purkyně, 1981.

[7] VESELÝ, Jiří. *Komplexní analýza pro učitele*. Praha: Karolinum, 2000. ISBN 80-246-0202-4.