MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Bakalářská práce

Brno 2020 Markéta Makarová

MASARYKOVA
UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Teorie míry

Bakalářská práce

Markéta Makarová

Vedoucí práce: doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D. **Brno 2020**

Bibliografický záznam

Autor:	Markéta Makarová Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Teorie míry
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
Akademický rok:	2019/2020
Počet stran:	viii + 65
Klíčová slova:	míra; vnější míra; měřitelné funkce; Lebesgueova míra; Lebesgueův integrál; kalibr; Henstockův-Kurzweilův integrál

Bibliographic Entry

Author: Markéta Makarová
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Measure theory

Degree Programme: Mathematics

Field of Study: Financial and Insured Mathematics

Supervisor: doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D.

Academic Year: 2019/2020

Number of Pages: viii + 65

Keywords: measure; outer measure; measurable functions; Lebesgue measure; Lebesgue integral; gauge; Henstock-Kurzweil integral

Abstrakt

Tématem této bakalářské práce je především teorie míry a Lebesgueův integrál. Text je rozdělen do dvou kapitol. První z nich představuje míru, její vlastnosti a postup její konstrukce. Druhá kapitola pojednává o Lebesgueově míře, Lebesgueově integrálu a Henstockovu-Kurzweilovu integrálu. Riemannův, Lebesgueův a Henstock-Kurzweilův integrál jsou porovnány v závěru práce.

Abstract

The subject of this thesis is most importantly the theory of measure and Lebesgue integral. The text is divided into two chapters. First chapter introduces measure, its properties and construction. Second chapter focuses on Lebesgue measure, Lebesgue integral and Henstock-Kurzweil integral. The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock and Kurzweil are compared in the last section of the work.

MUNI
SCI

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KOTLÁŘSKÁ 2, 611 37 BRNO
IČ: 00216224
DIČ: CZ00216224

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2019/2020

Ústav:	Ústav matematiky a statistiky
Studentka:	Markéta Makarová
Program:	Matematika
Obor:	Finanční a pojistná matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce:	Teorie míry
Název práce anglicky:	Measure theory
Jazyk závěrečné práce:	

Oficiální zadání:
Cílem práce je shrnout základy a hlavní definice a tvrzení teorie míry. Měla by být zmíněna i historie této problematiky a souvislosti s teorií integrálu, např. Lebesgueův a Henstockův-Kurzweilův integrál a jejich porovnání.

Literatura:

Handbook of measure theory.. Edited by Endre Pap. First edition. New York: Elsevier, 2002. xi, 786. ISBN 0444502637.

SALAMON, Dietmar. *Measure and integration*. Zürich, Switzerland: European Mathematical Society, 2016. viii, 355. ISBN 9783037191590.

Vedoucí práce:	doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
Datum zadání práce:	10. 6. 2019
V Brně dne:	25. 1. 2020

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

....	....	....
Markéta Makarová **studentka**	doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D. **vedoucí práce**	prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc. **ředitel Ústavu matematiky a statistiky**

Poděkování

Ráda bych poděkovala doc. Mgr. Petru Hasilovi, Ph.D, za čas a cenné připomínky věnované této práci.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, jenž jsou v práci citovány.

Brno 16. srpna 2020 . . . .

Markéta Makarová

Obsah

Přehled použitého značení ... **viii**

Úvod ... **1**

Kapitola 1. Teorie míry ... **2**
- 1.1 Míra ... 2
  - 1.1.1 Úvod do teorie míry ... 2
  - 1.1.2 Zúplnění míry ... 8
  - 1.1.3 Konstrukce míry pomocí vnější míry ... 12
  - 1.1.4 Konstrukce vnější míry ... 16
- 1.2 Měřitelné funkce ... 22
  - 1.2.1 Vlastnosti měřitelných funkcí ... 22
  - 1.2.2 Posloupnosti měřitelných funkcí a jejich konvergence ... 28

Kapitola 2. Integrály ... **32**
- 2.1 Lebesgueova míra a integrál ... 32
  - 2.1.1 Konstrukce Lebesgueovy míry a její vlastnosti ... 33
  - 2.1.2 Lebesgueův integrál ... 38
  - 2.1.3 Porovnání Lebesgueova a Riemannova integrálu ... 53
- 2.2 Henstockův-Kurzweilův integrál ... 54
  - 2.2.1 Definice a vlastnosti Henstockova-Kurzweilova integrálu ... 55
  - 2.2.2 Porovnání Henstockova-Kurzweilova, Lebesgueova a Riemannova integrálu ... 60

Seznam použité literatury ... **64**

Přehled použitého značení

$\emptyset$	prázdná množina
2^X	potenční množina množiny X
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina všech racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{R}^*$	rozšířená množina všech reálných čísel, tj. $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbb{R}^+$	množina všech nezáporných reálných čísel
$\mathscr{G}(\mathscr{A})$	σ-algebra generovaná systémem $\mathscr{A}$
$\overline{\mu}$	úplná míra
μ^*	vnější míra
$\mathscr{M}$	množina všech μ^*-měřitelných množin
$\mathscr{L}$	množina všech lebesgueovsky měřitelných množin
$(\mathscr{R})$	Riemannův integrál
$(\mathscr{L})$	Lebesgueův integrál
$(\mathscr{K})$	Henstockův-Kurzweilův integrál

Úvod

Mohou nastat případy, kdy je vhodné změřit množinu jiným způsobem než například jejím průměrem, který je znám ze základních kurzů matematické analýzy. Na tento problém každý ze studentů matematiky okrajově narazí v kurzech pravděpodobnosti a statistiky. Kolmogorova axiomatická definice pravděpodobnosti vyžaduje znalost pojmu σ-algebra a dalších pojmů teorie míry, viz [7]. To není ojedinělá událost. Výklad pravděpodobnosti a statistiky je propojen s teorií míry a především Lebesgueova integrálu. Tato práce věnuje pozornost těmto tématům, která obvykle nejsou do základních matematických kurzů zahrnuta.

Text je rozdělen do dvou kapitol. První kapitola představuje základní definice a tvrzení teorie míry. Pozornost je zaměřena na konstrukci míry. Jsou zde vysvětleny pojmy *míra*, *vnější míra*, *pramíra* a vztahy mezi nimi. Výsledky této kapitoly jsou nezbytné pro vybudování Lebesgueova integrálu. Druhá kapitola se věnuje integrálu založenému na míře, již zmiňovanému Lebesgueovu integrálu. Dále se práce věnuje Henstockovu-Kurzweilovu integrálu. Oba tyto integrály jsou nadřazeny Riemannovu integrálu v tom smyslu, že jsou nejen schopny integrovat všechny riemanovsky integrovatelné funkce, ale i funkce, které nejsou riemannovsky integrovatelné, což je v práci demonstrováno na příkladech.

Práce je sázena v systému LaTeX.

Kapitola 1

Teorie míry

1.1 Míra

Jako míru si lze představit takovou funkci, jenž přiřazuje každé množině určité nezáporné číslo. Přirozeně by tato funkce měla přiřazovat prázdné množině nulu. Dále uvažujme situaci, ve které množinu rozdělíme na několik částí a ty každou zvlášť změříme. Pak by měl součet měr těchto částí dát míru celé původní množiny, tj. funkce by se měla chovat aditivně. Těmito úvahami se na konci devatenáctého století zabýval francouzský matematik Émile Borel (1871 – 1956) ve své knize *Leçons sur la théorie des fonctions*. Tyto ideje inspirovaly jeho nástupce k vytvoření ucelené teorie míry. Stačí tyto podmínky pro to, aby byla množinová funkce nazývána mírou? Na jakých systémech je tato funkce definována? Tato kapitola je určena k zodpovězení právě těchto otázek, představení míry a vybudování obecné teorie okolo tohoto pojmu.

1.1.1 Úvod do teorie míry

Tato část práce slouží k seznámení čtenáře se základními definicemi a tvrzeními teorie míry, a to především s těmi potřebnými pro konstrukci míry, které bude věnována jedna z následujících podkapitol. Teorie je převzata primárně z [1], [2], [3] a [4], v menší míře z [5], [6], [7], [9], [10], [11], [12] a [13]. Jiné zdroje budou případně citovány přímo v textu.

Definice 1.1. Buď $X \neq \emptyset$. Systém $\mathscr{A}$ podmnožin množiny X nazveme σ-*algebrou*, jestliže platí:

(1) $X \in \mathscr{A}$;

(2) $A \in \mathscr{A} \implies X \setminus A \in \mathscr{A}$;

(3) $A_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Dvojice $(X, \mathscr{A})$ se nazývá *měřitelný prostor*.

Věta 1.2. Buď $\mathscr{A}$ σ-algebra, pak platí:

(1) $\emptyset \in \mathscr{A}$.

(2) $A_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

(3) $A, B \in \mathscr{A} \implies A \setminus B \in \mathscr{A}$.

Důkaz. Ověřme platnost všech tří vlastností.

(1) Protože $X \in \mathscr{A}$, pak také $X \setminus X = \emptyset \in \mathscr{A}$.

(2) Jelikož $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$ a $X \setminus A \in \mathscr{A}$, potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) \in \mathscr{A}$.

(3) Platí $(X \setminus B) \cap A = A \setminus B$. Výše jsme dokázali, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$. Zvolíme-li $A_1 = A, A_2 =$ $= X \setminus B$ a za $n-2$ zbylých množin průniku prázdné množiny, dostáváme uzavřenost σ-algebry vzhledem k rozdílům.

□

Vždy lze σ-algebry uspořádat vzhledem k inkluzi. Nejmenší σ-algebrou na X bude dvouprvkový systém $\{\emptyset, X\}$, největší pak potenční množina 2^X, tj. množina všech podmnožin množiny X. Pokud bychom chtěli ověřit, zda je nějaký systém množin (jiný než systém $\{\emptyset, X\}$ nebo 2^X) σ-algebrou, je nutné ověřit značné množství podmínek. Společně s každou množinou systému musí v σ-algebře ležet i její doplněk (komplement). Dále pak musí sytém obsahovat průniky, sjednocení a rozdíly všech množin systému. Následně i průniky, sjednocení a rozdíly dříve zmíněných komplementů. Jako poslední je třeba ověřit, zda systém obsahuje i průniky rozdílů a sjednocení rozdílů jak původních množin, tak jejich komplementů. Takový proces ověřování může být zdlouhavý a poněkud náročný. Nabízí se otázka, jestli a jak je možné ověřit, zda systém obsahuje všechny množiny potřebné k tomu, aby byl σ-algebrou.

Definice 1.3. Neprázdnou množinu A náležící σ-algebře $\mathscr{A}$ nazveme *atom*, pokud neobsahuje žádnou podmnožinu náležící σ-algebře $\mathscr{A}$ s výjimkou prázdné množiny a sebe sama.

Věta 1.4. Obsahuje-li σ-algebra $\mathscr{A}$ právě n atomů, přičemž n je nějaké konečné přirozené číslo, pak obsahuje právě 2^n množin.

Důkaz. Atomy jsou dle definice disjunktní množiny. Uvažujme tedy, kolik různých sjednocení lze použitím těchto množin získat. Využitím kombinatorických vzorců získáváme $\binom{n}{i}$, $0 \leq i \leq n$, množin. Dostáváme sumu, kterou lze jednoduše upravit využitím binomické věty nebo matematické indukce. Z úpravy plyne, že σ-algebra obsahuje právě

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n, \quad 0 \leq i \leq n,$$

navzájem různých množin. □

Lemma 1.5. Buď $\{\mathscr{A}_i,\ i \in I\}$ systém σ-algeber na měřitelném prostoru $(X, \mathscr{A})$, kde I je libovolná spočetná indexová množina. Pak je jejich průnik $\bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i$ také σ-algebra na měřitelném prostoru $(X, \mathscr{A})$.

Důkaz. Postupně dokážeme všechny vlastnosti definující σ-algebru.

(1) $X \in \mathscr{A}_i$ pro každé $i \in I \implies X \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i$.

(2) Zvolme libovolnou množinu $A \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i$, potom nutně $A \in \mathscr{A}_i$ pro každé $i \in I$. Stejně i její doplněk $X \setminus A \in \mathscr{A}_i$ pro každé $i \in I$.

(3) Zvolme libovolný systém množin $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i$. Pak $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{A}_i$ pro každé $i \in I$. Jelikož $\mathscr{A}_i$ jsou σ-algebry, tak $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}_i$ pro každé $i \in I$.

□

Definice 1.6. Buď $\mathscr{A}$ libovolný systém podmnožin množiny X. Nejmenší σ-algebra obsahující systém $\mathscr{A}$ se nazývá σ-algebra *generovaná* systémem $\mathscr{A}$. Dále budeme σ-algebru generovanou systémem $\mathscr{A}$ značit $\mathscr{G}(\mathscr{A})$.

Je vhodné poznamenat, že σ-algebra $\mathscr{G}(\mathscr{A})$ existuje pro každý množinový systém $\mathscr{A}$. Vždy existuje alespoň jedna σ-algebra obsahující systém $\mathscr{A}$, a to jmenovitě 2^X. Existuje-li více σ-algeber obsahujících $\mathscr{A}$, podle lemmatu 1.5 je jejich průnik opět σ-algebrou.

Definice 1.7. Buď $(X, \mathscr{A})$ měřitelný prostor. Funkci $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ nazveme *mírou* na měřitelném prostoru $(X, \mathscr{A})$, jestliže splňuje:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) $\mu(A) \geq 0$ pro každé $A \in \mathscr{A}$;

(3) $A_n \in \mathscr{A}$, $n \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní, pak platí

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Vlastnost (3) z definice 1.7 budeme nazývat σ-*aditivita*. Trojice $(X, \mathscr{A}, \mu)$ se nazývá *měřitelný prostor s mírou* μ.

Věta 1.8. Buď μ míra na měřitelném prostoru $(X, \mathscr{A})$, pak platí:

(1) $A, B \in \mathscr{A}, A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

(2) $A, B \in \mathscr{A}, A \subseteq B \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(3) $A_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N} \implies$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(4) $A_n \in \mathscr{A}, A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_n \dots, n \in \mathbb{N} \implies$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

(5) $A_n \in \mathscr{A}, \mu(A_1) < \infty, A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_n \dots, n \in \mathbb{N} \implies$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Vlastnost (3) z věty 1.8 budeme nazývat *subaditivita* míry.

Důkaz. Dokažme po sobě jdoucí tvrzení využitím vlastností z definice míry 1.7.

(1) Množinu B můžeme zapsat jako $B = A \cup (B \setminus A)$, přičemž se jedná o sjednocení dvou disjunktních množin. Proto platí

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A), \quad \mu(B \setminus A) \geq 0 \implies \mu(A) \leq \mu(B).$$

(2) Plyne triviálně z důkazu bodu (1).

(3) $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\big(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \big(A_3 \setminus (A_2 \cup A_1)\big) \cup \dots\big) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) +$$
$$+ \mu\big(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)\big) + \cdots \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(4) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\big(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots\big) = \mu\left(A_1 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{n+1} \setminus A_n)\right) =$

$= \mu(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\mu(A_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_{k+1} \setminus A_k)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$

(5) $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_n)\right) =$

$= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$

□

Ze σ-aditivity 1.7 (3) a subaditivity 1.8 (3) míry pro spočetné systémy množin vyplývají obdobné vlastnosti pro sjednocení a průniky konečných systémů množin. Stačí místo libovolného počtu množin sjednocení (popř. průniku) uvažovat prázdné množiny.

Věta 1.9. Buď μ míra na měřitelném prostoru $(X, \mathscr{A})$, pak platí:

(1) $A_n \in \mathscr{A}, A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_n \dots, n \in \mathbb{N} \implies$

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(2) $A_n \in \mathscr{A}, \mu(A_1) < \infty, A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \dots, n \in \mathbb{N} \implies$

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Důkaz. Dokažme obě tvrzení využitím vlastností z definice míry 1.7 a věty 1.8.

(1) Z věty 1.8 víme, že platí rovnost

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Jako první zvažme případ, kdy $\mu(A_m) = \infty$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Pak $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty$. Jelikož $A_m \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, pak platí

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) \geq \mu(A_m) = \infty.$$

Nyní uvažujme případ, kdy $\mu(A_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $A_0 = \emptyset$ a uvažujme disjunktní množiny $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Jelikož platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, můžeme využít σ-aditivity míry a upravovat

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})\big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\mu(A_n) - \mu(A_0)\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(2) Opět si připomeňme, že platí

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

dle věty 1.8. Podobně jako v prvním případě definujeme posloupnost disjunktních množin $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$
$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right). \tag{1.1}$$

Jelikož $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_1$, můžeme rozložit levou stranu rovnice (1.1)

$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right).$$

Nyní rozložme člen $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n+1}) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu(A_n) - \mu(A_{n+1})\big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k+1})\big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \big(\mu(A_1) - \mu(A_{n+1})\big) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1}).$$

Podařilo se nám rozložit obě strany rovnosti (1.1), dostáváme

$$\mu(A_1) - \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1}).$$

Po odečtení $\mu(A_1)$ z obou stran rovnice a změně znaménka dostáváme

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Tím je tvrzení dokázáno.

$\square$

1.1.2 Zúplnění míry

Následující sekce se bude věnovat představení tzv. zúplnění měřitelného prostoru. Podotkněme, že pojem úplnosti, jak jej známe z teorie metrických prostorů, ani v nejmenším nesplývá s úplností měřitelného prostoru.

Definice 1.10. Míra na měřitelném prostoru $(X, \mathscr{A}, \mu)$ se nazývá *úplná*, platí-li

$$N \in \mathscr{A} \text{ libovolné}, \mu(N) = 0 \implies \forall K \subseteq N, K \in \mathscr{A}.$$

Jinak řečeno, míra je úplná právě tehdy, je-li každá podmnožina množiny nulové míry také měřitelná. Úplnou míru budeme značit $\overline{\mu}$. Z definice míry lze lehce ukázat, že bude mít každá podmnožina množiny nulové míry také nutně míru nula. Využijeme vlastností nezápornosti 1.7 (2) a monotonie 1.8 (2). Uvažujme libovolnou množinu nulové míry N náležící σ-algebře $\mathscr{A}$ a její libovolnou podmnožinu M, pak platí

$$0 = \mu(N) \geq \mu(M) \geq 0 \implies \mu(M) = 0.$$

Úplnost měřitelného prostoru zaručuje vyhnutí se patologickým situacím týkající se nalezení neměřitelné množiny vně množiny míry nula.

Definice 1.11. Buď $(X, \mathscr{A}, \mu)$ měřitelný prostor s mírou μ. Označme $\mathscr{N}$ systém všech množin nulové míry z prostoru$(X, \mathscr{A}, \mu)$. Dále označme potenční množinu $2^{\mathscr{N}}$ systému $\mathscr{N}$ jako $\mathscr{K}$. Systém $\overline{\mathscr{A}}$ všech množin typu $A \cup K$, $A \in \mathscr{A}$, $K \in \mathscr{K}$, nazveme *zúplnění* σ-algebry $\mathscr{A}$ vzhledem k míře μ.

Lemma 1.12. Buď $(X, \mathscr{A}, \mu)$ měřitelný prostor s mírou μ a $\overline{\mathscr{A}}$ zúplnění σ-algebry $\mathscr{A}$ vzhledem k míře μ. Pak $\overline{\mathscr{A}}$ je σ-algebra generovaná systémem $\mathscr{A} \cup \mathscr{K}$.

Důkaz. Nejdříve dokažme, že $\overline{\mathscr{A}}$ je σ-algebra. Ověříme postupně všechny tři podmínky z definice 1.1.

(1) $X = X \cup \emptyset, X \in \mathscr{A}, \emptyset \in \mathscr{K} \implies X \in \overline{\mathscr{A}}$.

(2) Nechť $E \in \overline{\mathscr{A}}$, pak můžeme E zapsat jako $E = A \cup K, A \in \mathscr{A}, K \in \mathscr{K}, K \subseteq N \in \mathscr{N}$.
Chceme ukázat, že $X \setminus E \in \overline{\mathscr{A}}$ jako sjednocení množin z $\mathscr{A}$ a $\mathscr{K}$.
Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} X \setminus E = X \setminus (A \cup K) &= (X \setminus A) \cap (X \setminus K) = \\ &= (X \setminus A) \cap \big((X \setminus N) \cup (N \setminus K)\big) = \\ &= \big((X \setminus A) \cap (X \setminus N)\big) \cup \big((X \setminus A) \cap (N \setminus K)\big). \end{aligned}$$

Z vlastností σ-algebry plyne $((X \setminus A) \cap (X \setminus N)) \in \mathscr{A}$.
Dále $\big((X \setminus A) \cap (N \setminus K)\big) \subseteq N \setminus K \subseteq N \in \mathscr{N}$, proto $(X \setminus A) \cap (N \setminus K) \in \mathscr{K}$.
Jelikož jsme ukázali, že $X \setminus E \in \overline{\mathscr{A}}$ lze zapsat jako sjednocení prvků z $\mathscr{K}$ a $\mathscr{A}$, platí, že $X \setminus E \in \overline{\mathscr{A}}$.

(3) Nechť množiny $E_n \in \overline{\mathscr{A}}$, $n \in \mathbb{N}$, pak můžeme každou množinu E_n zapsat jako $E_n = A_n \cup K_n$. Dále platí

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup K_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \right).$$

Víme, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ je sjednocení množin nulové míry, což je opět množina nulové míry, tedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathscr{K}$. Celkem $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \overline{\mathscr{A}}$.

Ukázali jsme tedy, že systém množin $\mathscr{A}$ je skutečně σ-algebrou. Nyní ukažme, že σ-algebra $\overline{\mathscr{A}}$ je vskutku generovaná systémem $\mathscr{A} \cup \mathscr{K}$. Prvotně je třeba ukázat, že σ-algebra $\overline{\mathscr{A}}$ obsahuje systém $\mathscr{A} \cup \mathscr{K}$, a poté, že se jedná o nejmenší σ-algebru obsahující tento systém. Libovolné $A \in \mathscr{A}$ lze zapsat jako $A = A \cup \emptyset$, potom určitě platí

$$A \in \mathscr{A}, \emptyset \in \mathscr{K} \implies A \in \overline{\mathscr{A}} \implies \mathscr{A} \subseteq \overline{\mathscr{A}}.$$

Podobně libovolné $K \in \mathscr{K}$ lze zapsat jako $K = K \cup \emptyset$, proto

$$K \in \mathscr{K}, \emptyset \in \mathscr{A} \implies \mathscr{K} \subseteq \overline{\mathscr{A}}.$$

Celkem $\mathscr{A} \cup \mathscr{K} \subseteq \overline{\mathscr{A}}$. Abychom ukázali, že se jedná o nejmenší σ-algebru obsahující $\mathscr{A} \cup \mathscr{K}$, uvažujme σ-algebru $\overline{\mathscr{A}}_1$ na množině X také obsahující sjednocení $\mathscr{A} \cup \mathscr{K}$. Potom $\overline{\mathscr{A}}_1$ je tedy σ-algebrou obsahující množiny typu $A \cup K, A \in \mathscr{A}, K \in \mathscr{K}$. Nutně tedy platí $\overline{\mathscr{A}} \subseteq \overline{\mathscr{A}}_1$. Celkem je σ-algebra $\overline{\mathscr{A}}$ generovaná systémem $\mathscr{A} \cup \mathscr{K}$. □

Definice 1.13. Buď $(X, \mathscr{A}, \mu)$ měřitelný prostor s mírou μ. Prostor $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ s úplnou mírou $\overline{\mu}$, pro který platí $\mathscr{A} \subseteq \overline{\mathscr{A}}$, $\mu = \overline{\mu}$ na $\mathscr{A}$, budeme nazývat *rozšíření* prostoru $(X, \mathscr{A}, \mu)$ na úplný měřitelný prostor.

Definice 1.14. Rozšíření $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$, pro které platí

$$\overline{\mathscr{A}} \subseteq \overline{\mathscr{A}}_1,\ \overline{\mu} = \overline{\mu_1} \text{ na } \overline{\mathscr{A}} \text{ pro libovolné jiné rozšíření } (X, \overline{\mathscr{A}}_1, \overline{\mu_1})$$

nazveme *zúplnění* prostoru $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Zúplnění měřitelného prostoru je tedy jeho nejmenší možné rozšíření na úplný měřitelný prostor.

Věta 1.15. Buď $(X, \mathscr{A}, \mu)$ měřitelný prostor s mírou μ, pak existuje jeho zúplnění na prostor $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$, přičemž $\overline{\mathscr{A}}$ je zúplnění σ-algebry $\mathscr{A}$ a $\overline{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\mathscr{A}}$ definovaná následujícím způsobem:

$$\overline{\mu}(E) = \begin{cases} \mu(E) & E \in \mathscr{A}; \\ \mu(A) & E \in \overline{\mathscr{A}} \text{ taková, že } E = A \cup K, A \in \mathscr{A}, K \in \mathscr{K}. \end{cases}$$

Důkaz. Dokažme, že množinová funkce $\overline{\mu}$ je definovaná korektně, tj. funkční hodnota nezávisí na vyjádření množiny. Poté ověříme, zda je funkce skutečně mírou. Dle definice platí $\mu = \overline{\mu}$ na $\mathscr{A}$. Ukažme, že míra množiny náležící $\overline{\mathscr{A}}$ vskutku nezáleží na jejím vyjádření. Uvažujme tedy dvě různá vyjádření množiny E,

$$E = A_1 \cup K_1,\ E = A_2 \cup K_2,$$

kde $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$, $K_1, K_2 \in \mathscr{K}$. Připomeňme, že $\mathscr{K}$ je potenční množinou systému všech množin nulové míry $\mathscr{N}$. Díky tomu víme, že existují množiny $N_1, N_2 \in \mathscr{N}$ tak, že $K_1 \subseteq N_1$ a $K_2 \subseteq N_2$. Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} A_1 \cup K_1 &= A_2 \cup K_2 \\ A_1 \cup K_1 \cup N_1 \cup N_2 &= A_2 \cup K_2 \cup N_1 \cup N_2 \\ A_1 \cup N_1 \cup N_2 &= A_2 \cup N_1 \cup N_2 \\ \mu(A_1 \cup N_1 \cup N_2) &= \mu(A_2 \cup N_1 \cup N_2). \end{aligned}$$

Potom jistě platí následující série nerovností,

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_1 \cup N_1 \cup N_2) \leq \mu(A_1) + \mu(N_1) + \mu(N_2) = \mu(A_1).$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} \mu(A_1) &= \mu(A_1 \cup N_1 \cup N_2), \\ \mu(A_2) &= \mu(A_2 \cup N_1 \cup N_2). \end{aligned}$$

Celkem platí $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. Míra libovolné množiny $A \in \overline{\mathscr{A}}$ tedy opravdu nezávisí na jejím vyjádření a množinová funkce je definována korektně. Dále ukažme, že množinová funkce $\overline{\mu}$ je míra. Ověříme postupně vlastnosti míry z definice 1.7.

(1) Pro $\emptyset \in \mathscr{A}$ se míra vždy rovná nule, tj. $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Pro $\emptyset \in \overline{\mathscr{A}}$ známe vyjádření $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$, kde $\emptyset \in \mathscr{A}$ a $\emptyset \in \mathscr{K}$, stále platí $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$.

(2) Dle definice $\overline{\mu}$ určitě platí $\overline{\mu}(E) \geq 0$ pro každé $E \in \overline{\mathscr{A}}$.

(3) Uvažujme $\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$ systém po dvou disjunktních množin z $\overline{\mathscr{A}}$. Každou množinu E_n lze vyjádřit jako $E_n = A_n \cup K_n$, $A_n \in \mathscr{A}$, $K_n \subseteq N_n \in \mathscr{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože jsou množiny E_n po dvou disjunktní, budou po dvou disjunktní i množiny A_n a K_n pro

každé $n \in \mathbb{N}$. Označme $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$, $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathscr{K}$. Postupně upravujme

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \overline{\mu}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)\right) =$$

$$= \overline{\mu}(A \cup K) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(K) = \overline{\mu}(A) = \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n).$$

Tímto jsme dokázali σ-aditivitu množinové funkce $\overline{\mu}$.

Množinová funkce $\overline{\mu}$ je tedy míra. Dále ukažme, že $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ je skutečně rozšířením $(X, \mathscr{A}, \mu)$ na úplný měřitelný prostor. Abychom ukázali, že $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ je úplný měřitelný prostor, je nutné dle definice 1.10 dokázat, že každá podmnožina množiny nulové míry z $\overline{\mathscr{A}}$ je také měřitelná. Je-li tato množina měřitelná, víme, že její míra bude také nulová. Ověříme tedy, zda tyto podmnožiny také leží v σ-algebře $\overline{\mathscr{A}}$. Uvažujme proto libovolnou množinu nulové míry $E \in \overline{\mathscr{A}}$. Množinu E můžeme vyjádřit jako sjednocení $E = A \cup K$, $A \in \mathscr{A}$, $K \subseteq N \in \mathscr{N}$. Podle definice míry $\overline{\mu}$ je $\overline{\mu}(E) = \mu(A) = 0$. Dále uvažujme libovolnou podmnožinu F množiny nulové míry E. Platí

$$F \subseteq E = A \cup K \subseteq A \cup N.$$

Pro $A \cup N$ určitě platí $\mu(A \cup N) \leq \mu(A) + \mu(N) = 0$. Zároveň z definice míry víme, že je míra každé množiny nezáporná. Tedy $A \cup N$ je množina nulové míry, proto $A \cup N \in \mathscr{N}$. Připomeňme, že systém množin $\mathscr{N}$ jsme zadefinovali jako systém všech množin nulové míry měřitelného prostoru $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Systém podmnožin množin nulové míry jsme označili $\mathscr{K}$ a víme, že $\mathscr{K} \subseteq \overline{\mathscr{A}}$. Ukázali jsme, že množina F je opravdu podmnožinou množiny nulové míry, má proto také nutně míru nula a náleží σ-algebře $\overline{\mathscr{A}}$. Míra $\overline{\mu}$ je tedy úplná. Jelikož $\mathscr{A} \subseteq \overline{\mathscr{A}}$ a $\mu = \overline{\mu}$ na $\mathscr{A}$ je $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ rozšířením $(X, \mathscr{A}, \mu)$ na úplný měřitelný prostor.

Jako poslední je třeba ukázat, že $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ je zúplněním $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Představme si proto jiné rozšíření prostoru $(X, \mathscr{A}, \mu)$, označme jej $(X, \overline{\mathscr{A}}_1, \overline{\mu}_1)$. Ukažme, že $\overline{\mathscr{A}} \subseteq \overline{\mathscr{A}}_1$ a $\overline{\mu} = \overline{\mu}_1$ na $\overline{\mathscr{A}}$. Je-li $\overline{\mathscr{A}}_1$ zúplněním σ-algebry $\mathscr{A}$, pak musí $\mathscr{A} \cup \mathscr{K} \subseteq \overline{\mathscr{A}}_1$. Z lemmat 1.5 a 1.12 víme, že nejmenší σ-algebra generovaná systémem $\mathscr{A} \cup \mathscr{K}$ je právě $\overline{\mathscr{A}}$, tedy $\overline{\mathscr{A}} \subseteq \overline{\mathscr{A}}_1$. Libovolnou množinu $E \in \mathscr{A}$ můžeme vyjádřit jako

$$E = A \cup K = A \cup (K \setminus A), A \in \mathscr{A}, K \in \mathscr{K}.$$

Toto vyjádření množiny E je ekvivalentní, jelikož $K \setminus A \in \mathscr{K}$. To znamená, že se jedná se o podmnožinu nulové míry a z úplnosti měřitelného prostoru víme, že tyto podmnožiny mají také nulovou míru. Proto $A \cap (K \setminus A) = \emptyset$. Protože tyto množiny mají prázdný průnik, platí

$$\overline{\mu}_1(E) = \overline{\mu}_1\big(A \cup (K \setminus A)\big) = \overline{\mu}_1(A) + \overline{\mu}_1(K \setminus A).$$

Neboť $A \in \mathscr{A}$ platí $\overline{\mu}_1(A) = \overline{\mu}(A) = \mu(A)$. Množina je podmnožinou množiny nulové míry, tedy $\overline{\mu}_1(K \setminus A) = \overline{\mu}(K \setminus A) = 0$. Proto $\overline{\mu} = \overline{\mu}_1$ na σ-algebře $\overline{\mathscr{A}}$. Množina E byla volena libovolně, takže můžeme tvrdit, že $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ je nejmenším možným rozšířením měřitelného prostoru $(X, \mathscr{A}, \mu)$, a tedy je jeho zúplněním. □

1.1.3 Konstrukce míry pomocí vnější míry

Jak název napovídá, kapitolu začneme definováním nové množinové funkce, vnější míry. Nabízí se otázka, je-li možné vnější míru přetvořit na míru. Ukážeme, jak je možné tohoto docílit a jaké vlastnosti bude poté míra mít.

Definice 1.16. Buď $X \neq \emptyset$. Funkce $\mu^* : 2^X \to \mathbb{R}^+$ se nazývá *vnější míra* na X, splňuje-li:

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(2) $A, B \subseteq X, A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(3) $A_n \subseteq X, n \in \mathbb{N} \implies$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Tato definice je téměř totožná s definicí míry, viz 1.7. Změna nastává ve vlastnosti (3), kde je vynechána podmínka vzájemné disjunkce množin a rovnost je nahrazena nerovností. Tuto vlastnost budeme nazývat *subaditivita* vnější míry. Je zřejmé, že se jedná o vlastnost slabší, než je σ-aditivita míry. Případné průniky množin mají dle definice míry nezápornou míru, tudíž bude suma měr množin určitě větší, než míra jejich sjednocení. Tím pádem můžeme tvrdit, že každá míra je současně i vnější mírou. Opačné tvrzení samozřejmě neplatí.

Definice 1.17. Množinu A nazveme μ^*-*měřitelnou* vzhledem k vnější míře μ^*, platí-li

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) = \mu^*(T) \quad \forall T \subseteq X.$$

Systém všech μ^*-*měřitelných* množin budeme značit $\mathscr{M}$.

Tuto podmínku budeme nazývat *Carathéodoryho kritérium* nebo *Carathéodoryho podmínka měřitelnosti*. Ověřování této rovnosti si můžeme usnadnit. Dle definice vnější míry díky její subaditivitě 1.16 (3) vždy platí nerovnost

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) \geq \mu^*(T).$$

Proto se při dokazování μ^*-měřitelnosti množiny stačí omezit na ověřování opačné nerovnosti, což je postačující podmínkou pro μ^*-měřitelnost množiny.

Lemma 1.18. Systém všech μ^*-měřitelných množin $\mathscr{M}$ je σ-algebra.

Důkaz. Ověřme vlastnosti definující σ-algebru a zároveň otestujme i měřitelnost všech množin tohoto systému.

(1) Lze snadno ukázat, že množina X splňuje Caratheodoryho podmínku pro libovolnou množinu T. Podmínku ověříme z definice 1.17, tedy

$$\mu^*(T\cap X)+\mu^*(T\setminus X)=\mu^*(T)+\mu^*(\emptyset)=\mu^*(T).$$

(2) Ukažme, že pro libovolnou množinu $A\in\mathscr{M}$ leží i její komplement v $\mathscr{M}$. Opět jednoduše upravujeme

$$\mu^*\big(T\cap(X\setminus A)\big)+\mu^*\big(T\setminus(X\setminus A)\big)=\mu^*(T\setminus A)+\mu^*(T\cap A)=\mu^*(T).$$

(3) Nejdříve uvažujme pouze konečné sjednocení dvou množin. Nechť $A, B\in\mathscr{M}$. Otestujme měřitelnost množiny B pomocí množiny $T\setminus A$,

$$\mu^*\big((T\setminus A)\cap B\big)+\mu^*\big((T\setminus A)\setminus B\big)=\mu^*(T\setminus A). \tag{1.2}$$

Pro první člen součtu (1.2) poznamenejme, že $T\cap(A\cup B)=(T\cap A)\cup((T\setminus A)\cap B)$. Ze subaditivity vnější míry 1.16 (3) plyne

$$\mu^*\big(T\cap(A\cup B)\big)\leq\mu^*(T\cap A)+\mu^*\big((T\setminus A)\cap B\big). \tag{1.3}$$

Pro druhý člen součtu (1.2) platí následující rovnost

$$\mu^*\big((T\setminus A)\setminus B\big)=\mu^*\big(T\setminus(A\cup B)\big). \tag{1.4}$$

Zkombinováním (1.3) a (1.4) v součtu (1.2) dostáváme

$$\mu^*\big(T\cap(A\cup B)\big)+\mu^*\big(T\setminus(A\cup B)\big)\leq$$
$$\leq\mu^*(T\cap A)+\underbrace{\mu^*\big((T\setminus A)\cap B\big)+\mu^*\big((T\setminus A)\setminus B\big)}_{\mu^*(T\setminus A)}=\mu^*(T).$$

Lze snadno ukázat, že pro disjunktní A, B platí

$$\mu^*\big(T\cap(A\cup B)\big)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap B). \tag{1.5}$$

Otestujme množinu A a za testovací množinu zvolme $T\cap(A\cup B)$,

$$\mu^*\big(T\cap(A\cup B)\big)=\mu^*\Big(\big(T\cap(A\cup B)\big)\cap A\Big)+\mu^*\Big(\big(T\cap(A\cup B)\big)\setminus A\Big)=$$
$$=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap B).$$

Pro spočetné sjednocení po dvou disjunktních μ^*-měřitelných množin A_n, $n\in\mathbb{N}$, tj. $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, můžeme díky rovnosti (1.5) tvrdit

$$\mu^*(T\cap A)=\mu^*\left(T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\geq\mu^*\big(T\cap(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(T\cap A_n).$$

Zároveň ze subadivity vnější míry 1.16 (3) plyne

$$\mu^*(T \cap A) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(T \cap A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(T \cap A_n).$$

Celkem $\mu^*(T \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(T \cap A_n)$. Také platí

$$\mu^*(T) = \mu^*\big(T \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n)\big) + \mu^*\big(T \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)\big) \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n}\mu^*(T \cap A_i) + \mu^*(T \setminus A_i).$$

Z limitního přechodu $n \to \infty$ vyplývá, že disjunktní sjednocení množin náleží systému $\mathscr{M}$. Abychom přešli k obecnému sjednocení ne nutně disjunktních množin, je třeba ukázat, zda je systém $\mathscr{M}$ uzavřený vůči rozdílům. Rozdíl dvou množin lze jednoduše zapsat jako doplněk sjednocení dvou měřitelných množin, tedy

$$A \setminus B = X \setminus \big((X \setminus A) \cup B\big) \in \mathscr{M}.$$

Sjednocení spočetně mnoha (ne nutně disjunktních) množin A_n, $n \in \mathbb{N}$, můžeme zapsat jako sjednocení spočetně mnoha disjunktních množin

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \big(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)\big) \cup \ldots,$$

které, jak jsme již dokázali, náleží systému $\mathscr{M}$.

Tím jsme dokázali, že $\mathscr{M}$ je σ-algebra. □

Definice 1.19. Vnější míru budeme nazývat *regulární*, pokud pro každou množinu $A \subseteq X$ existuje μ^*-měřitelná množina B, $A \subset B$, taková, že platí $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.

Lemma 1.20. Buď μ^* regulární vnější míra na X, $\mu^*(X) < \infty$. Pak lze zeslabit Carathéodoryho podmínku měřitelnosti libovolné množiny $A \subseteq X$ následovně:

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu^*(X).$$

Důkaz. Uvažujme libovolnou množinu $T \subseteq X$ a její μ^*-měřitelnou nadmnožinu B takovou, že platí $A \subset B$ a $\mu^*(T) = \mu^*(B)$. Pokusme se ukázat, že množina A je měřitelná, tzn. dokažme nerovnost

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) \quad \forall T \subseteq X.$$

Díky měřitelnosti množiny B platí rovnosti

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B),$$
$$\mu^*(X \setminus A) = \mu^*\big((X \setminus A) \cap B\big) + \mu^*\big((X \setminus A) \setminus B)\big).$$

Dále poznamenejme, že ze subaditivity vnější míry 1.16 (3) plyne následující nerovnost

$$\mu^*(A \setminus B) + \mu^*\big((X \setminus A) \setminus B\big) \geq \mu^*(X \setminus B). \tag{1.6}$$

Celkem

$$\begin{aligned}\mu^*(X) &= \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) + \mu^*\big((X \setminus A) \cap B\big) + \mu^*\big((X \setminus A) \setminus B\big) \geq \\ &\geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(X \setminus B) + \mu^*\big((X \setminus A) \cap B\big) \geq \mu^*(B) + \mu^*(X \setminus B) = \mu^*(X).\end{aligned}$$

Jelikož se na obou stranách série nerovnic objevuje tentýž výraz, nastávají ve všech nerovnostech rovnosti. Uvažujme první rovnost

$$\mu^*(X) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) + \mu^*\big((X \setminus A) \cap B\big) + \mu^*\big((X \setminus A) \setminus B\big)$$

a odečtěme od této rovnosti nerovnost (1.6). Dostáváme nerovnost

$$\mu^*(X) - \mu^*(X \setminus B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*\big((X \setminus A) \cap B\big).$$

Tuto nerovnost můžeme upravit do tvaru

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B).$$

Z předpokladů víme, že platí $\mu^*(B) = \mu^*(T)$. Proto dostáváme

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).$$

Tím jsme ukázali, že A je měřitelná i za použití slabší podmínky. □

Věta 1.21. Buď μ^* vnější míra na 2^X. Vnější míra μ^* je na σ-algebře $\mathscr{M}$ úplnou mírou. Označme toto zúžení na σ-algebru $\overline{\mu}_{\mathscr{M}}$, $\overline{\mu}_{\mathscr{M}}(M) = \mu^*(M)$ pro každé $M \in \mathscr{M}$. Prostor $(X, \mathscr{M}, \overline{\mu}_{\mathscr{M}})$ je úplný měřitelný prostor.

Důkaz. Nejdříve ukažme, že $\overline{\mu}_{\mathscr{M}}$ je míra dle definice.

(1) $\overline{\mu}_{\mathscr{M}}(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$.

(2) Dle definice vnější míry je i její zúžení nezáporné.

(3) Z důkazu lemmatu 1.18 víme, že platí $\mu^*\left(T \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(T \cap A_n)$.

Volbou $T = X$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$, $n \in \mathbb{N}$, dostáváme σ-aditivitu míry $\overline{\mu}_{\mathscr{M}}$.

Ukažme, že μ^* je úplná míra. Uvažujme libovolné $A \subseteq 2^X$, $\mu^*(A) = 0$. Dle monotonie vnější míry 1.16 (2) pro libovolnou podmnožinu množiny A, označme ji A_0, platí

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_0) \implies \mu^*(A_0) = 0 = \overline{\mu}_{\mathscr{M}}(A_0).$$

Proto libovolná podmnožina množiny nulové míry splňuje Carathéodoryho podmínku měřitelnosti $\mu(T \cap A_0) + \mu(T \setminus A_0) \leq \mu(A_0) + \mu(T) = \mu(T)$. Tím pádem je $\overline{\mu}_{\mathscr{M}}$ úplná míra. □

1.1.4 Konstrukce vnější míry

Nyní, když už víme, jak z vnější míry zkonstruovat míru, se budeme zabývat tím, z jakých funkcí jsme schopni vytvořit vnější míru. Tímto vytřídíme funkce, ze kterých jsme schopni vytvořit míru na určité σ-algebře. Budeme uvažovat nejen nad tím, jaké požadavky musíme na takovou funkci klást, ale i nad tím, zda není možné oslabit požadavky na systém množin, na kterém je funkce definována. Toto nás přivede k jednomu z velmi důležitých tvrzení teorie míry, a to k Carathéodoryho větě o rozšíření, kterou později využijeme ke konstrukci Lebesgueovy míry a z ní vycházejícího Lebesgueova integrálu.

Definice 1.22. Buď $X \neq \emptyset$. Systém $\mathscr{A}$ podmnožin množiny X nazveme *okruh*, jestliže platí

(1) $A, B \in \mathscr{A} \implies A \setminus B \in \mathscr{A}$;

(2) $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cup B \in \mathscr{A}$.

Definice 1.23. Množinovou funkci $\vartheta : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ definovanou na okruhu $\mathscr{A}$ nazveme *pra-míra*, splňuje-li:

(1) $\vartheta(\emptyset) = 0$;

(2) $\vartheta(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathscr{A}$;

(3) $A_n \in \mathscr{A}$, $n \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$, pak platí

$$\vartheta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(A_n).$$

Věta 1.24. Buď $\mathscr{A}$ systém podmnožin množiny X obsahující prázdnou množinu. Buď $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+$ množinová funkce, pro kterou platí $\nu(\emptyset) = 0$. Potom je množinová funkce

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n),\ A_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}$$

vnější míra na X.

Důkaz. Postupně dokažme všechny vlastnosti vnější míry dle definice 1.16.

(1) $\mu^*(\emptyset) \leq \nu(\emptyset) = 0 \implies \mu^*(\emptyset) = 0$.

(2) Nechť A, $B \in \mathscr{A}$, $A \subseteq B$. Pak pokrytí množiny B dokáže jistě pokrýt i množinu A. Množinová funkce ν je nezáporná, a proto $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(3) Nechť $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \infty$, bude vlastnost subaditivity 1.16 (3) splněna triviálně.
Uvažujme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ konverguje. Volme $n \in \mathbb{N}$ libovolné, ale pevné, $\varepsilon > 0$ a pokryjme každého ze členů řady množinami A_n^m, $m \in \mathbb{N}$. Postupně upravujeme

$$A_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_n^m, \quad \mu^*(A_n) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \nu(A_n^m) < \mu^*(A_n) + \tfrac{\varepsilon}{2^n},$$

$$A \subseteq \bigcup_{m,n=1}^{\infty} A_n^m, \quad \mu^*(A) \leq \sum_{m,n=1}^{\infty} \nu(A_n^m) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon,$$

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Tímto jsme dokázali všechny vlastnosti z definice vnější míry včetně subaditivity. □

V důkazu věty používáme pojem *pokrytí*, který jsme dosud korektně nezadefinovali. Nicméně lze tento pojem pochopit velmi intuitivně. Systém podmnožin $\{A_i\}, i \in I$, kde I je libovolná spočetná indexová množina, nazýváme *pokrytí* množiny A, platí-li $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Jednoduše řečeno se jedná o systém množin pokrývající danou množinu. Vnější míra je tedy dle věty 1.24 dána hodnotou funkce ν pro nejmenší ze všech možných pokrytí dané množiny. Pramíra splňuje požadavky kladené na tuto funkci. Poznamenejme, že klademe $\inf(\emptyset) = \infty$.

Věta 1.25. Buď ν pramíra definovaná na okruhu $\mathscr{A}$ na X. Pak z ní lze dle věty 1.24 zkonstruovat vnější míru, pro kterou platí:

(1) $\mu^*(A) = \nu(A)$ pro každé $A \in \mathscr{A}$.

(2) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}$.

Důkaz. Obě tvrzení dokážeme přímo.

(1) Nerovnost $\mu^*(A) \leq \nu(A)$ platí pro každé $A \in \mathscr{A}$ z definice. Ukažme opačnou nerovnost. Pro $\mu^*(A) = \infty$ nastává rovnost triviálně. Uvažujme tedy $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathscr{A}$, $\mu^*(A) < \infty$ a upravujme

$$\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap A\right) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Jelikož je vnější míra μ^* infimem sumy těchto množin, dokázali jsme opačnou nerovnost $\nu(A) \leq \mu^*(A)$. Hodnoty funkcí μ^* a ν tedy na σ-algebře $\mathscr{A}$ splývají.

(2) Uvažujme libovolnou množinu $A \in \mathscr{A}$. Dokažme její μ^*-měřitelnost dle věty 1.17. Vyberme testovací množinu T, $\nu(T) < \infty$ a pokryjme ji množinami $T \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tak, aby platilo $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \leq \mu^*(T) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Potom platí

$$\mu^*(T) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\nu(A_n \cap A) + \nu(A_n \setminus A)\big) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).$$

Tím pádem libovolná množina $A \in \mathscr{A}$ náleží systému měřitelných množin $\mathscr{M}$, tedy $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}$.

□

Definice 1.26. Množinovou funkci μ definovanou na systému $\mathscr{A}$ podmnožin množiny X nazveme *σ-konečnou*, existuje-li posloupnost množin taková, že platí

$$X_n \in \mathscr{A},\ \mu(X_n) < \infty \text{ pro každé } n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Věta 1.27. Buď μ^* regulární, σ-konečná vnější míra na 2^X, pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(1) $\mathscr{M} = 2^X$.

(2) $A \subseteq X, B \in \mathscr{M}, A \subseteq B, \mu^*(A) = \mu^*(B) < \infty \implies \mu^*(B \setminus A) = 0$.

Důkaz. Ověříme oba směry ekvivalence. Nejdříve dokažme implikaci mezi prvním a druhým tvrzením. Předpokládejme tedy $\mathscr{M} = 2^X$. Nechť A, B jsou libovolné množiny splňující předpoklady 1.27 (2). Jelikož jsou obě množiny A a B měřitelné vzhledem k vnější míře μ^*, platí

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \setminus A) + \mu^*(A).$$

Z předpokladu $\mu^*(B) = \mu^*(A)$ plyne $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

Dokažme opačnou implikaci. Buď A, B libovolné množiny splňující předpoklady věty 1.27 (2), pro které navíc platí $\mu^*(B \setminus A) = 0$. Ze σ-konečnosti vnější míry plyne existence množin $E_n \in \mathscr{A}$ takových, že

$$\mu^*(E_n) < \infty \text{ pro každé } n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n) = X.$$

Buď $A_n = A \cap E_n$, pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n) = A$ a $\mu^*(A_n) \leq \mu^*(E_n)$. Z regularity vnější míry plyne existence množin $B_n \in \mathscr{M}$ takových, že $A_n \subseteq B_n$, $\mu^*(A_n) = \mu^*(B_n)$ a $\mu^*(B_n \setminus A_n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jako množina nulové míry $B_n \setminus A_n \in \mathscr{M}$. Proto i $B_n \setminus (B_n \setminus A_n) = A_n$ je jako rozdíl dvou měřitelných množin měřitelná. Z σ-aditivity σ-algebry $\mathscr{M}$, viz lemma 1.18, dostáváme $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathscr{M}$. □

Definice 1.28. Buď $X \neq \emptyset$. Systém $\mathscr{A}$ podmnožin množiny X nazveme *algebra*, jestliže platí

(1) $X \in \mathscr{A}$;

(2) $A, B \in \mathscr{A} \implies A \setminus B \in \mathscr{A}$;

(3) $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cup B \in \mathscr{A}$.

Věta 1.29. Buď ϑ pramíra definovaná na algebře $\mathscr{A}$ na X. Pak existuje míra μ definovaná na σ-algebře generované algebrou $\mathscr{A}$ taková, že $\mu = \vartheta$ na $\mathscr{A}$. Toto rozšíření je jednoznačné, je-li pramíra ϑ σ-konečná.

Tuto větu lze v literatuře (např. v [1], [3], [5], [7] nebo [8]) najít pod názvem Hopfova věta o rozšíření, Carathéodoryho věta o rozšíření, Hahnova-Carathédoryho nebo Hahnova-Kolmogorova věta. Je na místě poznamenat, že přívlastek Carathéodoryho věta bývá užíván i pro označení věty, kterou lze v tomto textu nalézt pod číslem 1.21. Zde uvedené znění věty 1.29 je, jak v česky, tak i v anglicky psaných publikacích, nejčastější. Čtenář může ovšem narazit i na oslabení předpokladů této věty, primárně v matematických textech zabývajících se teorií míry ve vztahu k teorii pravděpodobnosti, a to následujícím způsobem.

Věta 1.30. Buď ϑ pramíra definovaná na okruhu $\mathscr{A}$ na X. Pak existuje míra μ definovaná na σ-algebře generované okruhem $\mathscr{A}$ taková, že $\mu = \vartheta$ na $\mathscr{A}$. Toto rozšíření je jednoznačné, je-li pramíra ϑ σ-konečná.

Dle definice je každá algebra zároveň okruhem, a proto dostáváme o něco silnější tvrzení. Tuto obměnu lze v literatuře najít většinou opět pod názvem Carathéodoryho věta, například v [9]. Jelikož je změna v předpokladech relativně malá, nenastávají prakticky žádné změny ani v důkazech obou tvrzení a důkaz věty 1.29 uvedený v této práci na straně 20 lze aplikovat téměř beze změn.
Další úpravou předpokladů, na kterou je možné narazit, např. v [10], obvykle pod názvem Hahnova-Kolmogorova věta, je následující.

Věta 1.31. Buď ϑ nezáporná, σ-aditivní funkce definovaná na algebře $\mathscr{A}$ na X. Pak existuje míra μ definovaná na σ-algebře generované algebrou $\mathscr{A}$ taková, že $\mu = \vartheta$ na $\mathscr{A}$. Toto rozšíření je jednoznačné, je-li množinová funkce ϑ σ-konečná.

Po krátkém zamyšlení lze snadno ukázat, že předpoklady této věty lze přeformulovat na předpoklady věty 1.29. Tvrzení jsou samozřejmě opět ekvivalentní. Jediným přímo chybějícím předpokladem pro to, abychom mohli nezápornou σ-aditivní funkci ϑ definovanou na algebře označit za pramíru, je $\vartheta(\emptyset) = 0$. Platnost této rovnosti vyplývá ze σ-aditivity funkce ϑ. Jelikož je funkce ϑ definována na algebře, musí být její hodnota definovaná pro prázdnou množinu (způsob, jakým ukázat, že prázdná množina náleží algebře, je ekvivalentní jako v důkazu 1.2 (1)). Aby platila vlastnost σ-aditivity pro libovolný systém n po dvou disjunktních množin algebry (uvažujme například libovolnou množinu A a $n-1$ prázdných množin), je nutné, aby $\vartheta(\emptyset) = 0$. Uvažovaná funkce je tedy pramírou a tvrzení jsou opravdu ekvivalentní.

Důkaz věty 1.29. Systém množin měřitelných vzhledem k míře μ^* je σ-algebrou (viz větu 1.24) obsahující algebru $\mathscr{A}$, tím pádem i σ-algebru generovanou algebrou $\mathscr{A}$. Existence míry na σ-algebře generované algebrou $\mathscr{A}$ poté plyne z tvrzení 1.24 a 1.25.

Za předpokladu σ-konečnosti pramíry ϑ dokažme jednoznačnost rozšíření. Buď μ_1 míra na σ-algebře generované algebrou $\mathscr{A}$ taková, že platí $\mu_1 = \vartheta$ na $\mathscr{A}$. Uvažujme $A \in \mathscr{G}(\mathscr{A})$, $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in \mathscr{A}$. Víme, že platí

$$\mu_1(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta(A_k).$$

Potom dle konstrukce z věty 1.24 dostáváme nerovnost

$$\mu_1(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathscr{G}(\mathscr{A}).$$

Pro $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in \mathscr{A}$, platí

$$\mu_1(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_1\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \vartheta\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_n\right) = \mu(A).$$

Uvažujme $A \in \mathscr{G}(\mathscr{A})$, $\mu(A) < \infty$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existují množiny $A_n \in \mathscr{A}$ pokrývající A, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, pro které platí $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \mu(A) + \varepsilon$. Dostáváme

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu_1(A) + \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) \leq$$
$$\leq \mu_1(A) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) \leq \mu_1(A) + \varepsilon.$$

Z toho plyne shoda μ a μ_1 na $\mathscr{G}(\mathscr{A})$ pro množiny konečné míry.
Pro libovolnou množinu $A \in \mathscr{G}(\mathscr{A})$ (ne nutně konečné míry) využijme σ-konečnosti množinové funkce ϑ. To ukazuje platnost série rovností

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A \cap X_n) = \mu_1(A),$$

která dokazuje jednoznačnost. □

Podmínku σ-konečnosti pramíry nelze vynechat, chceme-li zachovat jednoznačnost.

Věta 1.32. Buď $\mathscr{A}$ algebra na X a ϑ pramíra na ní definovaná. Pak pro vnější míru zkonstruovanou dle věty 1.24 lze zeslabit Caratheodoryho podmínku měřitelnosti následovně. Buď $B \subseteq X$, $B \in \mathscr{M}$, $\mu^*(B) < \infty$. Pak je množina A, $A \subseteq B$, měřitelná vzhledem k vnější míře μ^* právě tehdy, když

$$\mu^*(A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B).$$

Důkaz. Nejdříve dokažme, že je A vskutku měřitelná,

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) \quad \forall T \subseteq X.$$

Pro $\mu^*(T) = \infty$ rovnost určitě platí. Uvažujme $\mu^*(T) < \infty$ následovně jako sjednocení dvou disjunktních množin

$$T = (T \cap B) \cup (T \setminus B).$$

Díky měřitelnosti množiny B platí

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \setminus B),$$

$$\mu^*(T \setminus A) = \mu^*\big((T \setminus A) \cap B\big) + \mu^*\big((T \setminus A) \setminus B\big) = \mu^*\big((T \cap B) \setminus A\big) + \mu^*(T \setminus B).$$

Díky faktu, že $A \subseteq B$, dále také platí $\mu^*(T \cap A) = \mu^*\big((T \cap A) \cap B\big)$. Proto stačí jako testovací množinu uvažovat pouze $T \subseteq B$, tedy $T \setminus B = \emptyset$ a $T = T \cap B$.
Uvědomme si vyjádření míry množiny $T \subseteq X$ plynoucí z konstrukce dle věty 1.24, tedy

$$T \subseteq X \implies \mu^*(T) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n), C_n \in \mathscr{A}, T \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right\}.$$

Dále uvažujme pro $\varepsilon > 0$ existenci množiny C, $T \subseteq C$ takové, že

$$\mu^*(C) \leq \mu^*(T) + \varepsilon.$$

Položme $D = C \cap B$, pak $D \in \mathscr{M}$, $T \subseteq D$ a $\mu^*(D) \leq \mu^*(T) + \varepsilon$. Předpokládáme-li

$$\mu^*(D) = \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \setminus A),$$

dostáváme

$$\mu^*(T) + \varepsilon = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).$$

Při limitním přechodu $\varepsilon \to 0$ rovnost dokazuje měřitelnost množiny A. Nyní dokažme zeslabení podmínky měřitelnosti. Uvědomme si, že

$$\mu^*(B) = \mu^*(D) + \mu^*(B \setminus D).$$

Pokusme se slabší podmínku postupně rozepsat,

$$\begin{aligned} \mu^*(A) + \mu^*(B \setminus A) \leq& \\ &\leq \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \setminus A) + \mu^*\big(B \setminus D) \cap A\big) + \mu^*\big(B \setminus D) \setminus A\big) = \\ &= \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \setminus A) + \mu^*\big(B \setminus A) \cap D\big) + \mu^*\big(B \setminus A) \setminus D\big) = \\ &\qquad\qquad = \mu^*(A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B). \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali korektnost slabší podmínky pro testování měřitelnosti množin. $\square$

1.2 Měřitelné funkce

Nyní se zaměříme na měřitelnost funkcí, vlastnosti měřitelných funkcí a popsání termínu *skoro všude*. Tímto uzavřeme přípravné práce pro vybudování integrálu na základě míry.

1.2.1 Vlastnosti měřitelných funkcí

Definice 1.33. Buď $(X, \mathscr{A})$ měřitelný prostor. Funkce $f : A \to \mathbb{R}^*$, $A \in \mathscr{A}$, je *$\mathscr{A}$-měřitelná*, platí-li

$$\{x \in A, f(x) > a\} \in \mathscr{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Můžeme si všimnout, že v definici měřitelnosti funkce se sama míra jako taková nevyskytuje. Měřitelnost je vázána na σ-algebru, kterou je definován měřitelný prostor. V publikacích se ovšem přívlastek $\mathscr{A}$-měřitelná nebo měřitelná vzhledem k σ-algebře $\mathscr{A}$ často vynechává. Zpravidla se prostor uvažuje se σ-algebrou $\mathscr{M}$ měřitelných množin. Nyní zadefinujeme měřitelnost funkce v měřitelném prostoru vzhledem k dané míře.

Definice 1.34. Buď $(X, \mathscr{A}, \mu)$ měřitelný prostor s mírou μ, $\mathscr{M}$ množina všech měřitelných množin σ-algebry $\mathscr{A}$. Funkce $f : A \to \mathbb{R}^*$, $A \in \mathscr{M}$, je *μ-měřitelná*, platí-li

$$\{x \in A, f(x) > a\} \in \mathscr{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Tyto dvě definice jsou si velmi podobné. Můžeme tvrdit, že funkce je μ-měřitelná, je-li $\mathscr{A}$-měřitelná vzhledem k σ-algebře $\mathscr{M}$ všech měřitelných množin. Následující tvrzení budeme dokazovat na měřitelném prostoru $(X, \mathscr{A})$ pro $\mathscr{A}$-měřitelné množiny, pokud nebude k tvrzení míra potřeba. Při záměně σ-algeber $\mathscr{A}$ a $\mathscr{M}$ jsou platná i pro μ-měřitelnost množin na měřitelném prostoru $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Dále budeme pracovat s funkcemi definovanými na nějaké podmnožině $A \subseteq X$. Proto se v důkazech objeví navíc krok, kde budeme ukazovat, zda skutečně platí $A \in \mathscr{A}$, popř. $A \in \mathscr{M}$. Tento krok je někdy v literatuře vynecháván, a to zcela korektně, jelikož se pracuje s funkcemi definovanými na celé množině X. V následující části si naformulujeme a dokážeme několik lemmat, která ilustrují, jak můžeme s měřitelnými funkcemi manipulovat.

Lemma 1.35. Je-li funkce $f : A \to \mathbb{R}^*$ $\mathscr{A}$-měřitelná, pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) $\{x \in A, f(x) > a\} \in \mathscr{A}$,

(2) $\{x \in A, f(x) \geq a\} \in \mathscr{A}$,

(3) $\{x \in A, f(x) < a\} \in \mathscr{A}$,

(4) $\{x \in A, f(x) \leq a\} \in \mathscr{A}$.

Navíc vrstevnice měřitelné funkce jsou vždy měřitelné, tj.

$$\{x \in A, f(x) = a\} \in \mathscr{A}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Postupně se pokusme propojit implikace. Ve všech úvahách bereme v potaz libovolné $a \in \mathbb{R}$. Jako první dokažme, že druhé tvrzení vyplývá z prvního. Nepochybně platí

$$f(x) \geq a \implies f(x) > a - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proto dostáváme

$$\{x \in A, f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ x \in A, f(x) > a - \frac{1}{n} \right\} \right) \in \mathscr{A}, \tag{1.8}$$

což jako spočetný průnik množin náleží σ-algebře $\mathscr{A}$. Dále dokažme, že druhé tvrzení implikuje třetí. Uvažujme množinu

$$\{x \in A, f(x) < a\} = X \setminus \{x \in A, f(x) \geq a\} \in \mathscr{A},$$

což jako komplement dvou množin σ-algebry $\mathscr{A}$, také náleží σ-algebře $\mathscr{A}$. Implikace mezi třetím a čtvrtým tvrzením se dokáže velmi podobným způsobem, jakým byla rozepsána rovnost (1.8). Opět platí

$$f(x) \leq a \implies f(x) < a + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proto dostáváme

$$\{x \in A, f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ x \in A, f(x) > a + \frac{1}{n} \right\} \right) \in \mathscr{A}$$

náležící σ-algebře $\mathscr{A}$ ze stejných důvodů jako výše (viz (1.8)). Poslední implikaci, kterou je potřeba dokázat, aby se okruh tvrzení uzavřel, dokážeme znovu pomocí doplňku množiny, o které víme, že náleží σ-algebře $\mathscr{A}$. Upravujeme množinu

$$\{x \in A, f(x) > a\} = X \setminus \{x \in A, f(x) \leq a\} \in \mathscr{A}.$$

Měřitelnost vrstevnic ukážeme ještě jednou jako výsledek množinové operace mezi množinami σ-algebry,

$$\{x \in A, f(x) \leq a\} \cap \{x \in X, f(x) \geq a\} = \{x \in A, f(x) = a\} \in \mathscr{A}.$$

Průnik přirozeně náleží σ-algebře $\mathscr{A}$. Tím je okruh tvrzení uzavřen a je dokázáno, že jsou ekvivalentní. □

Lemma 1.36. Buď $(X, \mathscr{A})$ měřitelný prostor. Pak je konstantní funkce $f : A \to \mathbb{R}^*, A \in \mathscr{A}$ měřitelná.

Důkaz. Předpokládáme, že funkce je konstantní, tj. $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}^*$ na celém svém definičním oboru. Dle definice měřitelnosti platí

$$\{x \in X, c > a\} = \begin{cases} A & \text{pro } c > a \\ \emptyset & \text{pro } c \leq a. \end{cases}$$

Toto můžeme tvrdit pro libovolné $a \in \mathbb{R}$. Množina A náleží σ-algebře $\mathscr{A}$ dle předpokladů a prázdnou množinu libovolná σ-algebra vždy obsahuje. Tím je tvrzení dokázáno. □

Lemma 1.37. Buď $(X, \mathscr{A})$ měřitelný prostor, funkce $f : A \to \mathbb{R}^*$, $A \in \mathscr{A}$ měřitelná. Pak je funkce f měřitelná i na libovolné podmnožině $B \subseteq A$, $B \in \mathscr{A}$.

Důkaz. Funkce je tedy definována na podmnožině náležící σ-algebře $\mathscr{A}$. Měřitelnost ukážeme tak, že množinu $\{x \in B, f(x) > a\}$ vyjádříme jako průnik dvou množin náležících σ-algebře. Upravujeme

$$\{x \in B, f(x) > a\} = \{x \in A, f(x) > a\} \cap B \in \mathscr{A}.$$

Toto platí pro každé $a \in \mathbb{R}$. □

Věta 1.38. Buď $(X, \mathscr{A})$ měřitelný prostor. Jsou-li funkce $f : A \to \mathbb{R}^*$, $g : A \to \mathbb{R}^*, A \in \mathscr{A}$ měřitelné, jsou pak měřitelné i funkce

(1) $c \cdot f(x)$, $c \in \mathbb{R}^*$.

(2) $f(x) \pm g(x)$.

(3) $f(x) \cdot g(x)$.

(4) $\frac{1}{f(x)}$, $f(x) \neq 0$.

Důkaz. Postupně dokažme jednotlivá tvrzení. Ve všech následujících úvahách bereme v potaz každé $a \in \mathbb{R}$.

(1) Nejprve ukažme, že funkce $c \cdot f$ je definována na množině náležící σ-algebře. Uvažme případy $c = 0$ a $c \neq 0$. Je-li $c \neq 0$, pak je definičním oborem stále množina A a ta dle předpokladů náleží σ-algebře $\mathscr{A}$. Je-li $c = 0$, pak je funkce definovaná pouze pro hodnoty $f(x) \in \mathbb{R}$. Vyhýbáme se tím neurčitým výrazům $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$. Jelikož $\mathbb{R} \subset \subset \mathbb{R}^*$, je funkce měřitelná díky lemmatu 1.37. Nyní dokažme měřitelnost dle rovnosti (1.7) z definice měřitelnosti funkce 1.33. Uvažujme postupně případy $c = 0$, $c > 0$ a $c < 0$. Pokud $c = 0$, tak je funkce konstantní. Měřitelnost konstantní funkce jsme dokázali v lemmatu 1.36. V případě, kdy $c > 0$, měřitelnost dokážeme jednoduchou úpravou

$$\{x \in X, c \cdot f(x) > a\} = \left\{x \in X, f(x) > \frac{a}{c}\right\} \in \mathscr{A}.$$

V případě, kdy $c < 0$, si musíme dát pozor na otočení znaménka nerovnosti

$$\{x \in X, c \cdot f(x) > a\} = \left\{x \in X, f(x) < \frac{a}{c}\right\} \in \mathscr{A}.$$

Z lemmatu 1.35 víme, že otočení znaménka nerovnosti nemá na měřitelnost funkce vliv.

(2) Důkaz provedeme nejdříve pro funkci $f+g$. Jelikož jsou funkce definovány na rozšířené množině reálných čísel, opět si musíme musíme situaci rozdělit na několik případů. Uvažujme množiny

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{x \in A, f(x) \in \mathbb{R}\} \cap \{x \in A, g(x) \in \mathbb{R}\} \in \mathscr{A}, \\
A_2 &= \{x \in A, f(x) \in \mathbb{R}\} \cap \{x \in A, g(x) = \pm\infty\} \in \mathscr{A}, \\
A_3 &= \{x \in A, f(x) = \pm\infty\} \cap \{x \in A, g(x) \in \mathbb{R}\} \in \mathscr{A}, \\
A_4 &= \{x \in A, f(x) = \pm\infty\} \cap \{x \in A, g(x) = \pm\infty\} \in \mathscr{A}, \\
A_5 &= \{x \in A, f(x) = \pm\infty\} \cap \{x \in A, g(x) = \mp\infty\} \in \mathscr{A}.
\end{aligned}$$

Tyto množiny jsou disjunktní a jejich sjednocení dává celou množinu A, tj. $\bigcup_{n=1}^{5} A_n = A$. Funkce $f+g$ je definovaná na množinách $A_1, \dots, A_4$ a není definovaná na množině A_5, jelikož ta je tvořena neurčitým výrazem $\infty - \infty$. Definiční obor funkce $f+g$ bude tedy množina $\bigcup_{n=1}^{4} A_n$ a ta jako konečné sjednocení množin náležících σ-algebře $\mathscr{A}$ také náleží σ-algebře $\mathscr{A}$. Měřitelnost funkce na sjednocení $\bigcup_{n=1}^{4} A_n$ dokážeme tak, že nejdříve dokážeme její měřitelnost na jednotlivých množinách $A_1, \dots, A_4$. Poté ukážeme, že funkce je měřitelná i na jejich sjednocení. Začněme měřitelností na množině A_1,

$$\{x \in A_1, f(x) + g(x) > a\} = \{x \in A_1, f(x) > a - g(x)\}.$$

Víme, že platí-li $f(x) > a - g(x)$, pak existuje nějaké $q \in \mathbb{Q}$ takové, že

$$f(x) > q > a - g(x).$$

Vyjádřeme proto předešlý výraz pomocí sjednocení přes všechna racionální čísla.

$$\begin{aligned}
\{x \in A_1, f(x) > a - g(x)\} &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in A_1, f(x) > q > a - g(x)\} = \\
&= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(\{x \in A_1, f(x) > q\} \cap \{x \in A_1, q > a - g(x)\} \Big) = \\
&= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(\{x \in A_1, f(x) > q\} \cap \{x \in A_1, g(x) > a - q\} \Big).
\end{aligned}$$

Funkce f a g jsou měřitelné dle předpokladů. Tedy celý výraz je spočetným sjednocením průniku dvou množin náležících σ-algebře $\mathscr{A}$, proto také náleží σ-algebře $\mathscr{A}$.

Na množinách A_2, A_3, A_4 funkce nabývá konstantních hodnot ∞ nebo $-\infty$. Z lemmatu 1.36 víme, že funkce je na těchto množinách měřitelná. Jako poslední nám zbývá ukázat, že funkce je měřitelná i na sjednocení množin, na kterých je měřitelná. Stačí ukázat, že

$$\left\{x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, f(x)+g(x) > a\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\{x \in A_n, f(x)+g(x) > a\}\Big) \tag{1.9}$$

platí pro každé $a \in \mathbb{R}$. Toto sjednocení je konečné, popř. spočetné, proto náleží σ-algebře $\mathscr{A}$. Pro měřitelnost funkce $f(x) - g(x)$ se důkaz provede analogicky, jelikož funkce $-g(x)$ je měřitelná dle (1).

(3) Podobně jako v předchozím tvrzení se musíme vyhnout případům vedoucím k neurčitým výrazům, v tomto případě $0 \cdot (\pm\infty)$. Takovou množinu označme

$$\begin{aligned} A_0 = \big(\{x \in A, f(x) = \pm\infty\} \cap \{x \in A, g(x) = 0\}\big) \cup \\ \cup \big(\{x \in A, f(x) = 0\} \cap \{x \in A, g(x) = \pm\infty\}\big) \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Definiční obor funkce $f \cdot g$ bude $B = A \setminus A_0 \in \mathscr{A}$. Na této množině znovu rozdělíme případy podle funkčních hodnot funkcí f a g. Označme

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in B, f(x) = 0\} \in \mathscr{A}, \\ A_2 &= \{x \in B, f(x) = \pm\infty\} \cap \{x \in B, g(x) > 0\} \in \mathscr{A}, \\ A_3 &= \{x \in B, f(x) = \pm\infty\} \cap \{x \in B, g(x) < 0\} \in \mathscr{A}, \\ A_4 &= \{x \in B, 0 < f(x) < \infty\} \in \mathscr{A}, \\ A_5 &= \{x \in B, -\infty < f(x) < 0\} \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Množiny $A_1, \ldots, A_5$ jsou disjunktní a platí $\bigcup\limits_{n=1}^{5} A_n = B$. Stejně jako v předchozím případě k dokázání měřitelnosti funkce $f \cdot g$ stačí dokázat její měřitelnost na těchto jednotlivých množinách. To, že je měřitelná na jejich sjednocení, jsme ukázali rovností (1.9). Na množinách A_1, A_2, A_3 se jedná o konstantní funkci, která je dle lemmatu 1.36 měřitelná. Množinami A_5 a A_6 je třeba se zabývat o něco důkladněji. Dokažme měřitelnost funkce na množině A_5, měřitelnost na množině A_6 se poté dokáže analogicky,

$$\{x \in A_5, f(x) \cdot g(x) > a\} = \left\{x \in A_5, f(x) > \frac{a}{g(x)}\right\}.$$

Pak existuje $q \in \mathbb{Q}$ tak, že platí $f(x) > q > \frac{a}{g(x)}$. Uvažujme sjednocení přes všechna racionální čísla, tj.

$$\begin{aligned} \{x \in A_5, f(x) \cdot g(x) > a\} = \left\{x \in A_5, f(x) > \frac{a}{g(x)}\right\} = \\ = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left\{x \in A_5, f(x) > q > \frac{a}{g(x)}\right\} = \\ = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big(\{x \in A_5, f(x) > q\} \cup \{x \in A_5, q \cdot g(x) > a\} \Big) \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno. Poznamenejme, že množina $\{x \in A_5, q \cdot g(x) > a\}$ náleží σ-algebře $\mathscr{A}$ dle (1).

(4) Definičním oborem funkce f^{-1} je množina $B = A \setminus \{x \in A, f(x) = 0\}$. Tato množina náleží σ-algebře $\mathscr{A}$, jelikož se jedná o vrstevnici měřitelné funkce. Abychom ukázali, že funkce f^{-1} je měřitelná, tj.

$$\{x \in B, f^{-1}(x) > a\} \in \mathscr{A},$$

zamysleme se postupně nad variantami, kdy $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$. Začněme s $a = 0$,

$$\{x \in B, f^{-1}(x) > 0\} = \{x \in B, f(x) > 0\} \setminus \{x \in B, f(x) = \infty\} \in \mathscr{A}.$$

První množina náleží σ-algebře $\mathscr{A}$ dle předpokladu, druhá proto, že $f(x) = \infty$ je konstantní funkce. Pro $a > 0$ platí

$$\begin{aligned}\{x \in B, f^{-1}(x) > a\} &= \left\{x \in B, \frac{1}{a} > f(x) > 0\right\} = \\ &= \left\{x \in B, \frac{1}{a} > f(x)\right\} \cap \{x \in B, f(x) > 0\} \in \mathscr{A}.\end{aligned}$$

Pro $a < 0$ podobně platí

$$\begin{aligned}&\{x \in B, f^{-1}(x) > a\} = \\ &= \left\{x \in B, \frac{1}{a} > f(x), f(x) > 0\right\} \cup \left\{x \in B, \frac{1}{a} > f(x), f(x) < 0\right\} \in \mathscr{A}.\end{aligned}$$

Tím jsme vyčerpali všechny varianty, proto tedy platí $\{x \in B, f^{-1}(x) > a\} \in \mathscr{A}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$ a funkce je měřitelná.

□

Není těžké dále odvodit, že měřitelné jsou i funkce typu $f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, nebo $\frac{f(x)}{g(x)}$ pro $g(x) \neq 0$ či $|f(x)|$. Těmito důkazy se ale již zabývat nebudeme. Čtenář je může najít v [3] nebo [4].

Definice 1.39. Buď $(X, \mathscr{A}, \mu)$ měřitelný prostor s mírou μ, funkce $f, g : A \to \mathbb{R}^*$. Funkce f a g se rovnají *skoro všude*, platí-li

$$\mu\big(\{x \in A, f(x) \neq g(x)\}\big) = 0.$$

Pojem *skoro všude* se nevztahuje pouze k rovnosti dvou funkcí. O libovolné vlastnosti lze říct, že platí *skoro všude* na dané množině, neplatí-li pouze na podmnožinách míry nula. Množin, kde je vlastnost porušena, může být skutečně více, ale míra jejich sjednocení musí být nulová. Například o posloupnosti měřitelných funkcí $f_n : A \to \mathbb{R}^*$ můžeme tvrdit, že *konverguje skoro všude*, pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathbb{R}$ na $X \setminus N$, kde N je množina nulové míry.

Věta 1.40. Buď $(X, \mathscr{A}, \mu)$ úplný měřitelný prostor s mírou μ, funkce $f, g : A \to \mathbb{R}, A \in \mathscr{A}$. Je-li funkce f měřitelná a $f = g$ skoro všude, pak je funkce g měřitelná.

Důkaz. Předpokládejme, že funkce f je měřitelná, tedy platí

$$\{x \in A, f(x) > a\} \in \mathscr{M}$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$. Dále předpokládáme, že se funkce f a g rovnají skoro všude, označme

$$N = \{x \in A, f(x) \neq g(x)\}.$$

Platí $\mu(N) = 0$. Ověřme měřitelnost funkce g dle definice 1.33,

$$\{x \in A, g(x) > a\} = \big(\{x \in A, g(x) > a\} \setminus N\big) \cup \{x \in N, g(x) > a\}$$

Jelikož je funkce f měřitelná na množině A, je měřitelná i na její podmnožině $A \setminus N$. Navíc na množině $A \setminus N$ se funkce f a g rovnají. Funkce g je proto také měřitelná na $A \setminus N$. Množina $\{x \in N, g(x) > a\}$ je podmnožinou množiny nulové míry, takže je v úplném prostoru měřitelná. Jedná se tedy o sjednocení dvou měřitelných množin, a tím je měřitelnost funkce g dokázána. □

1.2.2 Posloupnosti měřitelných funkcí a jejich konvergence

Vzápětí se budeme věnovat posloupnostem měřitelných funkcí a již zmiňované konvergenci skoro všude. Představíme nový druh konvergence, a to *konvergenci v míře*. Ukážeme, jaký je vztah mezi konvergencí skoro všude a v míře, popř. jinými druhy konvergence.

Věta 1.41. Buď $(X, \mathscr{A})$ měřitelný prostor. Dále nechť je $f_n : A \to \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{A}$, posloupnost měřitelných funkcí. Existuje-li limita f této posloupnosti funkcí, pak je také měřitelná.

Důkaz. Předpokládejme, že limita existuje, potom určitě platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Uvažujme funkci g definovanou jako

$$g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n.$$

Pokusme se dokázat její měřitelnost. Upravujme

$$\left\{x \in A, \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > a\right\} = \{x \in A, \exists n \in \mathbb{N} : f_n > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A, f_n > a\} \in \mathscr{A}.$$

Jedná se o spočetné sjednocení množin náležících σ-algebře, proto také náleží σ-algebře. Díky větě 1.38 je funkce $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$ také měřitelná. Potom můžeme tvrdit, že je měřitelná i funkce

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Důkaz by se provedl analogicky, kdybychom za funkci g zvolili funkci $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$. □

Věta 1.42. Buď $(X,\mathscr{A},\mu)$ měřitelný prostor s mírou μ, která nabývá pouze konečných hodnot. Dále nechť $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost měřitelných funkcí a nechť skoro všude existuje konečná limita $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $E_\varepsilon \in \mathscr{A}$ taková, že platí $\mu(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ a funkce f_n konvergují stejnoměrně na množině E_ε.

Důkaz. Uvažujme množiny

$$E_n^m = \bigcap_{i\geq n} \left\{ x \in X, |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Tyto množiny jsou měřitelné a uspořádané vzhledem k inkluzi, platí $E_n^m \subseteq E_{n+1}^m$ pro každé m, $n \in \mathbb{N}$. Zafixujeme-li m, tak pro libovolné $x \in A$ existuje přirozené číslo n takové, že platí nerovnost

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad \text{pro } i \geq n. \tag{1.10}$$

Proto lze množinu X pokrýt množinami E_n^m, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^m$. Díky tomuto faktu a spočetné aditivitě míry můžeme tvrdit následující. Pro každé m existuje $k \in \mathbb{N}$, pro které platí $\mu(X \setminus E_k^m) < \varepsilon 2^{-m}$. Položme $E_\varepsilon = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_k^m$. Ukažme, že pro takto zvolenou množinu E_ε platí $\mu(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$,

$$\mu(X \setminus E_\varepsilon) = \mu\left(X \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E_k^m\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (X \setminus E_k^m)\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(X \setminus E_k^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-m} = \varepsilon.$$

Tím je dokázána první část tvrzení. Nyní je třeba ověřit, zda funkce skutečně konvergují stejnoměrně. Připomeňme definici stejnoměrné konvergence na množině X, pozornost věnujme pořadí kvantifikátorů

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Jak již bylo zmíněno výše, pro pevně zvolené m platí (1.10) pro každé $x \in E_\varepsilon$, $i \geq k$. Toto pořadí kvantifikátorů dokazuje, že se nejedná pouze o běžnou bodovou konvergenci, ale o konvergenci stejnoměrnou. □

Definice 1.43. Buď $(X, \mathscr{A}, \mu)$ měřitelný prostor s mírou μ. Dále nechť je $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{M}$, posloupnost měřitelných funkcí. Posloupnost funkcí f_n *konverguje v míře* právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in A, |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}\big) = 0.$$

Věta 1.44. Buď $(X, \mathscr{A}, \mu)$ měřitelný prostor s mírou μ, která nabývá pouze konečných hodnot. Dále nechť je $f_n : A \to \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{M}$, posloupnost měřitelných funkcí konvergujících skoro všude k funkci f. Pak posloupnost funkcí f_n konverguje k f v míře.

Důkaz. Pro $\varepsilon > 0$ uvažujme množiny

$$E_n = \{x \in A, |f_i(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall i \geq n\}.$$

Tyto množiny jsou měřitelné a lze je uspořádat vzhledem inkluzi následovně, $E_n \subseteq E_{n+1}$. Připomeňme, že dle věty 1.8 víme, že platí

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \tag{1.11}$$

Sjednocení těchto množin určitě obsahuje veškeré body, ve kterých posloupnost funkcí f_n konverguje k f. Jelikož díky předpokladu konvergence skoro všude víme, že míra sjednocení bodů, ve kterých posloupnost funkcí nekonverguje, je nulová, platí

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Nabízí se možnost využít rovnost (1.11). Dostáváme rovnost

$$\mu(A) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Tím pádem také platí

$$\lim_{n\to\infty} \mu(X \setminus E_n) = 0. \tag{1.12}$$

Množina $X \setminus E_n$ obsahuje množiny typu

$$\{x \in A, |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$$

a jak jsme ukázali v (1.12), míra těchto množin se limitně blíží nule. Posloupnost funkcí f_n proto konverguje v míře k funkci f. $\square$

Věta 1.45. Buď $(X, \mathscr{A}, \mu)$ měřitelný prostor s mírou μ, která nabývá pouze konečných hodnot. Dále nechť je $f_n : A \to \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{A}$, posloupnost měřitelných funkcí konvergujících v míře k funkci f. Pak existuje podposloupnost f_{n_k}, která konverguje skoro všude.

Důkaz. Předpokládejme tedy, že posloupnost funkcí f_n konverguje v míře, to znamená, že platí
$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\{x\in A,\,|f(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon\}\right)=0.$$
Dokážeme najít posloupnost indexů n_j takovou, že platí
$$\mu\left(\{x\in A,\,|f(x)-f_{n_j}(x)|\geq\frac{1}{j}\}\right)<\frac{1}{2^j}. \tag{1.13}$$
Uvažujme množiny
$$A_j=\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x\in A,|f(x)-f_{n_k}(x)|\geq\frac{1}{k}\}.$$
Množiny lze uspořádat vzhledem k inkluzi $A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq\cdots$. Míra těchto množin je konečná, protože dle (1.13) a subaditivitě míry platí
$$\mu(A_i)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty \text{ pro libovolné } i\in\{1,2,\ldots,j\}.$$
Dle věty 1.8 víme, že míra spočetného průniku množin A_j se rovná limitě míry množiny A_j pro $j\to\infty$. Upravujme tento výraz
$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\lim_{j\to\infty}\left(\mu(A_j)\leq\lim_{j\to\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{j-1}}=0.$$
Využili jsme vzorec pro součet geometrické řady s kvocientem $\frac{1}{2}$ a prvním členem $\frac{1}{2^j}$. Nyní ukážeme, že na množině $X\setminus\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j$ posloupnost funkcí f_{n_k} konverguje k funkci f. Je-li $x\in X\setminus\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j$ a $\varepsilon>0$, pak existuje $j\in\mathbb{N}$ takové, že
$$x\in X\setminus\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j=\bigcap_{k=j}^{\infty}\left\{y\in X,|f(y)-f_{n_k}(y)|<\frac{1}{k}\right\}.$$
Zvolíme-li $k_0\geq\max\{j,\frac{1}{\varepsilon}\}$, pak pro $k\geq k_0$ platí
$$|f(x)-f_{n_k}|<\frac{1}{k}\leq\varepsilon.$$
Tedy posloupnost funkcí konverguje k f na $X\setminus\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j$ a nekonverguje na $\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j$, což je množina nulové míry. Posloupnost tedy konverguje skoro všude. $\square$

Kapitola 2

Integrály

V této kapitole si představíme Lebesgueův a Henstockův-Kurzweilův integrál. Dále zde budou představeny vlastnosti těchto integrálů, které klasický Riemannův integrál postrádá. Na závěr každé z podkapitol budou jednotlivé integrály porovnány s Riemannovým integrálem.

2.1 Lebesgueova míra a integrál

Potom, co jsme představili základní definice a tvrzení teorie míry, použijeme tyto poznatky ke konstrukci integrálu založeného na míře. Konkrétně Lebesgueova integrálu vycházejícího z Lebesgueovy míry. Stěžejním úkolem této kapitoly je osvětlení toho, jak je integrál za pomoci míry budován.

Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941) byl francouzský matematik, který na základě Borelových idejí vybudoval teorii míry a integrálu. Ve své knize *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France* se zabývá jednak problémem míry a měřitelných funkcí, avšak také analytickou definicí integrálu, který dnes známe pod názvem Lebesgueův integrál.

Tento integrál srovnáme s již známým Riemannovým integrálem. Dále se zamyslíme nad tím, jak vypadají množiny integrovatelných funkcí obou integrálů, případně, zda se liší. Předpokladem pro četbu této kapitoly je znalost teorie Riemannova integrálu. Není-li tomu tak, či pokud by měl čtenář zájem si toto téma připomenout, může využít zdrojů [21] a [22].

Při zmínce o Riemannově integrálu je vhodné poznamenat, že se nejedná o integrál založený na míře, jak ji známe dle definice 1.7. Víme, že Riemannův integrál je vystavěn za pomoci *Jordanovy míry*. Jordanova míra, známá také jako *Jordanova-Peanova míra* nebo *Jordanův objem*, ačkoliv splňuje první dvě podmínky z definice 1.7, není σ-aditivní. Toto lze ukázat na jednoduchém příkladu.

Uvažujme množinu racionálních čísel, tato množina je spočetná. Proto by se suma měr množin, obsahujících jednotlivé body, měla rovnat míře jejich sjednocení, tj. míře celé množiny racionálních čísel. Jordanova míra množin obsahujících jednotlivá racionální čísla je nulová. Suma jejich měr taktéž. Ověřme, zda se míra celé množiny racionálních čísel také rovná nule. Horní Jordanova míra této množiny je nekonečná, zatímco dolní se rovná nule. Nesouhlasí-li horní a dolní míra, množina není měřitelná vzhledem k Jordanově míře. Tím je porušena vlastnost σ-aditivity a množinová funkce nemůže být mírou.

Zdroji k vypracování této kapitoly byly především publikace [1], [4], [11], [14], [15] a [20].

2.1.1 Konstrukce Lebesgueovy míry a její vlastnosti

Při konstrukci Lebesgueovy míry budeme postupovat tak, jako bylo ukázáno v podkapitolách 1.1.3 a 1.1.4. Nejdříve definujeme vhodnou množinovou funkci, pramíru, z níž vytvoříme vnější míru dle věty 1.24. Poté ji zúžíme na míru na σ-algebře všech množin měřitelných dle Carathéorodoryho kritéria 1.17. Fakt, že množina všech měřitelných množin skutečně tvoří σ-algebru jsme dokázali ve větě 1.18.

Definice 2.1. *Uzavřený interval* $I = [a,b]$ v $\mathbb{R}^n$ je množina tvaru

$$[a,b] = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1,2,\dots,n\},$$

kde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, přičemž $a_i < b_i$ pro $i = 1,\dots,n$. *Objem uzavřeného n-rozměrného intervalu* definujeme jako

$$\operatorname{vol}([a,b]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\,.$$

Objem otevřeného n-rozměrného intervalu (a,b),

$$(a,b) = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1,2,\dots,n\},$$

kde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, přičemž $a_i < b_i$ pro $i = 1,\dots,n$ definujeme jako

$$\operatorname{vol}\big((a,b)\big) = \operatorname{vol}\big([a,b]\big).$$

Doplňme, že $\operatorname{vol}(\emptyset) = 0$. Označíme-li $\mathscr{I}$ množinu všech uzavřených n-rozměrných intervalů $[a,b]$, pak množinová funkce $\operatorname{vol}: \mathscr{I} \to [0,\infty)$ splňuje předpoklady kladené na množinovou funkci ve větě 1.24. Lze z ní tedy vytvořit vnější míru.

Definice 2.2. Funkci $\lambda^*: 2^{\mathbb{R}^n} \to [0,\infty)$ definovanou jako

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_i),\ I_i \in \mathscr{I},\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\}$$

pro $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme *Lebesgueovou vnější mírou.*

Lebesgueova vnější míra množiny A je tedy vytvořena z takového spočetného pokrytí, jenž má nejmenší součet objemů intervalů tvořících toto pokrytí. To, že uvažujeme spočetná, a ne konečná pokrytí, jak tomu bylo u Jordanovy míry, je zásadní. Je na místě poznamenat, že v definici 2.2 není zásadní, zda $\mathscr{I}$ je množinou všech uzavřených, nebo otevřených n-rozměrných intervalů. Jelikož je dle definice množinové funkce vol jejich objem stejný, zůstává stejná i výsledná vnější míra.

V podkapitole 1.1.3 jsme dokázali, že vnější míru lze zúžit na míru na σ-algebře všech μ^*-měřitelných množin, viz věta 1.21. Míra je poté navíc úplná. Označme $\mathscr{L}$ množinu všech λ^*-měřitelných množin. Tyto množiny nazveme lebesgueovsky měřitelné. Dále v této kapitole, pokud nebude řečeno jinak, budeme tyto množiny označovat jen názvem měřitelné.

Definice 2.3. Nechť $\lambda^* : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0,\infty)$ je Lebesgueova vnější míra, $\mathscr{L}$ σ-algebra všech lebesgueovsky měřitelných množin. Potom funkci $\lambda : \mathscr{L} \to [0,\infty)$ definovanou jako

$$\lambda(A) = \lambda^*(A)$$

pro všechna $A \in \mathscr{L}$ nazveme *Lebesgueova míra* a trojici $(\lambda, \mathscr{L}, \mathbb{R}^n)$ měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou.

Uvědomme si, že Lebesgueova míra a Lebesgueova vnější míra se shodují na lebesgueovsky měřitelných množinách, zatímco na lebesgueovsky neměřitelných množinách je definována pouze Lebesgueova vnější míra. Připomeňme, že dle věty 1.21 je Lebesgueova míra úplná a $(\lambda, \mathscr{L}, \mathbb{R}^n)$ je úplný měřitelný prostor.

Pokud na konstrukci pohlédneme za pomoci Hopfovy věty o rozšíření 1.29, uvidíme, že Lebesgueova míra je jednoznačným rozšířením pramíry vol z definice 2.1 na míru. Osvětleme, že jsou opravdu splněny předpoklady věty. Množinová funkce vol je definovaná na algebře obsahující otevřené (analogicky uzavřené) intervaly v $\mathbb{R}^n$. Je také σ-konečná. Prostor $\mathbb{R}^n$ lze získat například jako sjednocení spočetně mnoha uzavřených intervalů tvaru $[a_i, a_{i+1}]$, kde $a_i = (1+i, \ldots, 1+i) \in \mathbb{R}^n$ pro $i \in \mathbb{Z}$. Tím jsou splněny požadavky kladené na pramíru. Lebesguoeva míra je tedy mírou, která se shoduje s objemem množiny na σ-algebře $\mathscr{B}$ generované otevřenými (uzavřenými) intervaly. Tuto σ-algebru $\mathscr{B}$ nazýváme *Borelova σ-algebra* a její prvky borelovské množiny. Proto platí $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{L}$. Lze dokázat, že existují lebesgueovsky měřitelné množiny, které nejsou borelovské, platí tedy $\mathscr{B} \subset \mathscr{L}$.

Příklad 2.4. Uvažujme interval $[0,1]$. Definujme posloupnost množin C_n, $n \in \mathbb{N}$, následovně:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= [0,1],\\
C_1 &= \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right],\\
C_2 &= \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right],\\
&\vdots\\
C_n &= \bigcup_{i=0}^{3^{k-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^k},\frac{3i+1}{3^k}\right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^k},\frac{3i+3}{3^k}\right] \right).
\end{aligned}
$$

Množina $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ se nazývá *Cantorovo diskontinuum*. Jelikož platí $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \dots$ můžeme za pomoci věty 1.8 vyvodit, že

$$
\lambda(C) = \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lambda\left(\lim_{n\to\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0.
$$

Lebesgueova míra množiny je tedy nulová. Označme $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Uvědomíme-li si, že platí

$$
G = [0,1] \cap \big([0,1] \setminus C\big),
$$

množiny G a C jsou disjunktní a zároveň $[0,1] = G \cup C$, ihned vyplývá, že tato množina má míru rovnou jedné. Nyní na množině G uvažujme systém intervalů

$$
I_{1,1}, I_{2,1}, I_{2,2}, I_{3,1}, I_{3,2}, I_{3,3}, I_{3,4}, \dots, I_{k,1}, \dots, I_{k,2^{k-1}} \dots
$$

délky $\frac{1}{3^k}$ pro $I_{j,k}$, $j = 1, \dots, 2^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Na těchto intervalech definujme funkci

$$
\varphi_0(x) = \begin{cases}
\frac{1}{2} & x \in I_{1,1}\\
\frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^2} & x \in I_{2,1}, I_{2,2}\\
\frac{1}{2^3}, \frac{3}{2^3}, \frac{5}{2^3}, \frac{7}{2^3} & x \in I_{3,1}, I_{3,2}, I_{3,3}, I_{3,4}\\
\vdots & \\
\frac{1}{2^k}, \dots, \frac{2^k-1}{2^k} & x \in I_{k,1}, \dots, I_{k,2^{k-1}},\\
\vdots &
\end{cases}
$$

Tato funkce je rostoucí a stejnoměrně spojitá na množině G. Jelikož je množina G hustá v $[0,1]$, tj. $\overline{G} = [0,1]$, lze tuto funkci spojitě rozšířit na celý interval $[0,1]$. Tuto funkci nazveme *Cantorova funkce*. Dále definujme funkci $\varphi:\ [0,1] \to [0,2]$ jako

$$
\varphi(x) = \varphi_0(x) + x.
$$

Stejně jako Cantorova funkce $\varphi_0(x)$ je funkce $\varphi(x)$ spojitá a rostoucí pro $x \in [0,1]$. Navíc jde o bijektivní zobrazení, ke kterému existuje inverzní funkce, která je taktéž spojitá. Důležité je, že se jedná homomorfismus. Lze ukázat, že existuje množina $A \subseteq \varphi(C)$, taková že $A \notin \mathscr{L}$ a zároveň $\varphi^{-1}(A) \in \mathscr{L}$. Ukažme, že $\varphi^{-1}(A) \notin \mathscr{B}$. Homomorfismus $\varphi: [0,1] \to [0,2]$ zobrazuje borelovské množiny opět na borelovské množiny, tj. $\varphi(B) \in \mathscr{B}$ pro každé $B \in \mathscr{B}$. Pokud je množina $\varphi^{-1}(A)$ borelovská, platí

$$\varphi\big(\varphi^{-1}(A)\big) = A \in \mathscr{B}.$$

To je spor s předpokladem $A \notin \mathscr{L}$. Našli jsme tedy množinu $\varphi^{-1}(A)$, které je lebesgueovská ale není borelovská. Proto platí $\mathscr{B} \subset \mathscr{L}$.

Vrátíme-li se k příkladu určení míry množiny racionálních čísel, lze snadno ukázat, že Lebesgueova míra této množiny je rovna nule. Jednobodové množiny mají Lebesgueovu míru rovnou nule. Jelikož je Lebesgueova míra dle definice σ-aditivní, bude mít jejich sjednocení také nulovou míru. Tato množina je lebesgueovsky měřitelná. Její vnější míru můžeme určit například pokrytím množinami $A_i = (q_i - \varepsilon 2^{-i}, q_i + \varepsilon 2^{-i})$, kde $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost racionálních čísel.

Příklad 2.5. Nechť $A \in \mathscr{L}$ je měřitelná množina kladné míry. Uvažujme relaci ekvivalence na $\mathbb{R}$ definovanou jako

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

pro $x, y \in \mathbb{R}$. Dle axiomu výběru existuje množina $C \subset \mathbb{R}$, která obsahuje právě jeden prvek každé třídy ekvivalence. Proto pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $x - q \in C$. Navíc pokud jsou x a y dva různé body množiny C, potom $x - y \notin \mathbb{Q}$. Pro bod $q \in \mathbb{Q}$ definujme množinu

$$A_q = A \cap (C + q) = \{x \in A,\ x - q \in C\}.$$

Poté jistě sjednocením těchto množin pro všechna $q \in \mathbb{Q}$ dostáváme

$$A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q. \tag{2.1}$$

Zafixujme libovolné racionální číslo $q \in \mathbb{Q}$. Jsou-li množiny A_q měřitelné, je jejich míra nulová. Poté pro $n \in \mathbb{N}$ definuje množinu

$$A_{q,q',n} = \big(A_q \cap [-n,n]\big) + q' = \big\{x + q',\ x \in A_q \cap [-n,n]\big\}$$

pro $q' \in \mathbb{Q}$. Tato množina je lebesgueovsky měřitelná a její míra nezáleží na bodu q'. Také platí

$$A_{q,q',n} \cap A_{q,q'',n} = \emptyset$$

pro každá dvě různá racionální čísla q' a q''. Jelikož $A_{q,q',n} \subseteq [-n, n+1]$ pro $q' \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, můžeme tvrdit, že

$$\sum_{q' \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \lambda(A_{q,q',n}) \leq 2n + 1.$$

Tato suma je nekonečná a všechny její sčítance se rovnají. Z toho plyne

$$\lambda(A_q \cap [-n,n]) = 0$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Opravdu je míra množin A_q nulová. Jsou-li tedy množiny A_q lebesgueovsky měřitelné pro každé $q \in \mathbb{Q}$, poté z (2.1) plyne, že A je množinou nulové míry, což je spor. Tím jsme dokázali, že jedna z podmnožin množiny A, A_q, $q \in \mathbb{Q}$, není lebesgueovsky měřitelná.

Lemma 2.6. Pro každou borelovskou množinu $B \in \mathscr{B}$ a $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina O taková, že platí $B \subseteq O$ a

$$\lambda^*(B) \le \lambda^*(O) \le \lambda^*(B) + \varepsilon.$$

Důkaz. Nechť $B \in \mathscr{B}$ a $\varepsilon > 0$. Je-li $\lambda^*(B) = \infty$ pak je vhodnou otevřenou množinou celý prostor $\mathbb{R}^n$,

$$\lambda^*(B) \le \lambda^*(\mathbb{R}^n) = \infty = \lambda^*(B) + \varepsilon.$$

Uvažujme množinu $B \in \mathscr{B}$ takovou, že $\lambda^*(B) < \infty$. Dle definice je vnější míra množiny B rovna infimu sjednocení objemů posloupností intervalů, které ji pokrývají. Jistě existuje nějaké pokrytí množiny B otevřenými intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, pro které platí

$$\lambda^*(B) \le \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_n) < \lambda^*(B) + \varepsilon.$$

Položme $O = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Taková množina O je jako sjednocení spočetně mnoha otevřených množin určitě otevřená a splňuje

$$\lambda^*(B) \le \lambda^*(O) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_n) < \lambda^*(B) + \varepsilon.$$

V úpravách jsme postupně využili subaditivitu vnější míry a fakt, že vnější míra borelovských množin se rovná jejich objemu. $\square$

Věta 2.7. Pro každou borelovskou množinu $B \in \mathscr{B}$ existuje množina $G \supset B$, která je spočetným sjednocením otevřených množin a pro kterou platí

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(G).$$

Lebesgueova vnější míra je tedy regulární pro borelovské množiny.

Důkaz. Nechť $B \in \mathscr{B}$. Potom dle lemmatu 2.6 pro libovolné $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, existuje otevřená množina O_n taková, že $B \subseteq O_n$ splňující

$$\lambda^*(B) \leq \lambda^*(O_n) \leq \lambda^*(B) + \frac{1}{n}.$$

Položme $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, poté je B podmnožinou G. Jelikož platí $G \subset O_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí také

$$\lambda^*(B) \leq \lambda^*(G) \leq \lambda^*(B) + \frac{1}{n}.$$

Protože tato nerovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, je $\lambda^*(B) = \lambda^*(G)$. To kompletuje důkaz. □

2.1.2 Lebesgueův integrál

V této kapitole představíme Lebesgueův integrál. Popíšeme jeho výstavbu za pomocí jednoduchých a nezáporných měřitelných funkcí a uvedeme poznatky, které demonstrují jeho výhody.

Definice 2.8. Nechť X je množina a $A \subseteq X$. Funkci $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ definovanou jako

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

nazveme *charakteristickou funkcí* množiny A.

Definice 2.9. Buď $f : A \to \mathbb{R}$ funkce, kterou lze zapsat jako konečnou lineární kombinaci charakteristických funkcí po dvou disjunktních podmnožin množiny A,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \neq a_j$ pro $i \neq j$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy nabývá-li $f(x)$ pouze konečného počtu různých konečných hodnot na po dvou disjunktních množinách tvořících množinu A, pak $f(x)$ nazveme *jednoduchá funkce*.

Jednoduchá funkce je obecně μ-měřitelná právě tehdy, když jsou množiny A_i měřitelné vzhledem k míře μ pro každé i.

Definice 2.10. Nechť $(\mathbb{R},\mathscr{L},\lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou, $A \in \mathscr{L}$ a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ nezáporná měřitelná jednoduchá funkce. Pak číslo

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(A \cap A_i)$$

nazveme *Lebesgueovým integrálem jednoduché funkce $f(x)$ na množině A.*

V souladu s definicí je Lebesgueův integrál jednoduché funkce vždy nezáporný.

Věta 2.11. Nechť $(\mathbb{R},\mathscr{L},\lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou a $f : X \to \mathbb{R}$ libovolná nezáporná funkce. Potom je funkce f měřitelná právě tehdy, když existuje posloupnost nezáporných měřitelných jednoduchých funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že platí

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

pro každé $x \in X$.

Důkaz. Je-li funkce f limitou posloupnosti měřitelných funkcí, je také měřitelná, viz větu 1.41. To dokazuje jednu implikaci. Nyní předpokládejme, že funkce f je měřitelná a najděme posloupnost jednoduchých měřitelných funkcí, jejíž je limitou. Definujme nezápornou jednoduchou funkci $g_n(t) : \ [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$g_n(t) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \frac{k}{2^n} \le t < \frac{k+1}{2^n}, \quad k = 0,1,\dots,n2^n - 1, \\ n & t \ge n, \end{cases}$$

která je měřitelná dle definice 2.9 pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nadále platí $g_n(0) = 0$ a $g_n(\infty) = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Navíc je-li $0 < t \le n$, pak

$$t - \frac{1}{2^n} \le g_n(t) \le g_{n+1}(t) \le t.$$

Proto limitním přechodem $n \to \infty$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = t.$$

pro každé $t \in [0,\infty)$. Funkce $f_n = g_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, tvoří hledanou posloupnost nezáporných jednoduchých měřitelných funkcí. $\square$

Definice 2.12. Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou, $A \in \mathscr{L}$ a $f(x)$ nezáporná měřitelná funkce. Pak číslo

$$\int_A f(x) = \sup_{s(x) \le f(x)} \int_A s(x) \, \mathrm{d}\lambda,$$

kde supremum uvažujeme přes všechny nezáporné jednoduché měřitelné funkce $s(x)$, pro které platí $s(x) \le f(x)$ na A, nazveme *Lebesgueovým integrálem nezáporné funkce* $f(x)$ *na množině* A.

Opět si lze snadno uvědomit, že v souladu s definicí je Lebesgueův integrál nezáporné měřitelné funkce vždy nezáporný.

Lemma 2.13. Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou, $A \in \mathscr{L}$ a $f(x)$, $g(x)$ nezáporné jednoduché měřitelná funkce. Potom platí

(1) $\displaystyle\int_A f(x) + g(x) \, \mathrm{d}\lambda = \int_A f(x) \, \mathrm{d}\lambda + \int_A f(x) \, \mathrm{d}\lambda.$

(2) Je-li E_n, $n \in \mathbb{N}$, posloupnost po dvou disjunktních měřitelných množin takových, že $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, potom platí

$$\int_E f(x) \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x) \, \mathrm{d}\lambda.$$

Důkaz. Dokažme obě tvrzení.

(1) Funkce $f(x), g(x)$ jsou jednoduché, dle definice je lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \quad g(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j},$$

kde $a_i, b_j \in [0, \infty)$, množiny A_i a B_j jsou měřitelné, po dvou disjunktní a platí

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j = X.$$

Potom lze zapsat

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Upravujme

$$\int\limits_A f(x)+g(x)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(a_i+b_j\right)\lambda\left(A_i\cap B_j\cap A\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m}\lambda\left(A_i\cap B_j\cap A\right) + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n}\lambda\left(A_i\cap B_j\cap A\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda\left(A_i\cap A\right) + \sum_{j=1}^{m} b_j\lambda\left(B_j\cap A\right) = \int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda + \int\limits_A g(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

(2) Nechť $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i}$. Postupně upravujme

$$\int\limits_E f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^{m} a_i\lambda\left(E\cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left(E_n\cap A_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} a_i \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\lambda\left(E_n\cap A_i\right) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{n=1}^{k}\lambda\left(E_n\cap A_i\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} a_i\lambda\left(E_n\cap A_i\right) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int\limits_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

□

Lemma 2.14. Nechť $(\mathbb{R},\mathscr{L},\lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou, $A\in\mathscr{L}$ a $f(x)$, $g(x)$ nezáporné měřitelné funkce. Potom platí

(1) Je-li $f(x)\le g(x)$ pro každé $x\in A$, potom $\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda \le \int\limits_A g(x)\,\mathrm{d}\lambda$.

(2) $\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_X f(x)\chi_A\,\mathrm{d}\lambda$.

(3) Je-li $f(x)=0$ pro všechna $x\in A$, potom $\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = 0$.

(4) Je-li $\lambda(A)=0$, potom $\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = 0$.

(5) Je-li $B\subseteq A$, $B\in\mathscr{L}$, potom $\int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}\lambda \le \int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda$.

(6) Je-li $c \in [0,\infty)$, potom $\int\limits_A cf(x)\,\mathrm{d}\lambda = c\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda$.

Důkaz. Po řadě dokažme tvrzení.

(1) Je-li $s(x)$ nezáporná jednoduchá měřitelná funkce taková, že $s(x) \le f(x)$, platí $s(x)\chi_A \le g(x)$. Poté v souladu s definicí integrálu nezáporné měřitelné funkce je

$$\int\limits_A s(x)\,\mathrm{d}\lambda \le \int\limits_A s(x)\chi_A\,\mathrm{d}\lambda \le \int\limits_A g(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Uvažujeme-li supremum přes všechny nezáporné jednoduché měřitelné funkce $s(x)$, $s(x) \le f(x)$ dostáváme

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda \le \int\limits_A g(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

(2) Nechť jsou $s(x)$, $t(x)$ nezáporné jednoduché měřitelné funkce splňující nerovnosti $s(x) \le f(x)$ a $t(x) \le f(x)\chi_A$. V souladu s definicí integrálu nezáporné měřitelné funkce platí následující rovnosti

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \sup_{s(x)\le f(x)} \int\limits_A s(x)\,\mathrm{d}\lambda = \sup_{s(x)\le f(x)} \int\limits_X s(x)\chi_A\,\mathrm{d}\lambda =$$
$$= \sup_{t(x)\le f(x)\chi_A} \int\limits_X t(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_X f(x)\chi_A\,\mathrm{d}\lambda.$$

Suprema jsou uvažována přes všechny nezáporné jednoduché měřitelné funkce $s(x)$, resp. $t(x)$.

(3) Víme, že Lebesgueův integrál nezáporné měřitelné funkce je vždy nezáporný. Potom dle tvrzení 2.14 (1), přičemž uvažujeme $g(x) = 0$ pro každé $x \in A$, plyne

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

(4) Dle definice integrálu nezáporné jednoduché měřitelné funkce 2.10 je integrál libovolné nezáporné jednoduché měřitelné funkce na množině nulové míry nulový. Z toho vyplývá, že i integrál nezáporné měřitelné funkce bude roven nule.

(5) Je-li $B \subseteq A$, je $\chi_B \le \chi_A$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Proto díky 2.14 (1) a 2.14 (2) platí

$$\int\limits_B f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\chi_B\,\mathrm{d}\lambda \le \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\chi_A\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

(6) Při pohledu na definici 2.10 není těžké vyvodit, že jistě platí

$$\int_A cs(x)\,\mathrm{d}\lambda = c\int_A s(x)\,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou nezápornou jednoduchou měřitelnou funkci a nezáporné číslo c. Tím pádem tvrzení platí také pro nezáporné měřitelné funkce.

$\square$

Věta 2.15. Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost nezáporných měřitelných funkcí taková, že

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Je-li funkce $f(x)$ limitou této posloupnosti funkcí,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

je také měřitelná a platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Důkaz. Je-li $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, potom je i

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda \le \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}\lambda$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ dle 2.14 (1). Proto existuje nezáporná limita

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Dle důkazu věty 1.41 je funkce $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ měřitelná a samozřejmě také nezáporná. Navíc jistě platí $f_n(x) \le f(x)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Proto platí nerovnost

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda \le \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Limitním přechodem $n \to \infty$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda \le \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda\,. \tag{2.2}$$

Nyní zafixujme nezápornou jednoduchou měřitelnou funkci $s(x)$ takovou, že $s(x) \leq f(x)$. Definujme zobrazení $\lambda_s : \mathscr{L} \to [0,\infty)$,

$$\lambda_s(A) = \int_A s(x)\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Není složité ukázat, že toto zobrazení je míra. Jde o nezáporné zobrazení. Dle 2.14 (4) víme, že platí $\lambda_s(\emptyset) = 0$. Vlastnost σ-aditivity jsme ukázali v lemmatu 2.13. Zafixujme konstantu $0 < c < 1$ a definujeme množiny

$$A_n = \{x \in X,\ cs(x) \leq f_n(x)\}$$

pro $n \in \mathbb{N}$. Poté jsou množiny A_n měřitelné a lze je uspořádat vzhledem k inkluzi, $A_n \subseteq A_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Kromě toho také platí

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}.$$

Poněvadž je $cs(x) \leq f_n(x)$ na odpovídajících množinách A_n, potom s využitím 2.14 (1), 2.14 (6) a nerovnosti 2.2 dostáváme

$$c\lambda_s(A_n) = c\int_{A_n} s(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{A_n} cs(x)\,\mathrm{d}\lambda \leq \int_{A_n} f_n\,\mathrm{d}\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda \leq \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Vydělíme-li obě strany nerovnosti číslem c, platí

$$\lambda_s(A_n) \leq \frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jelikož množinová funkce λ_s je míra, pak dle věty 1.9 a faktu, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$, dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}} s(x)\,\mathrm{d}\lambda = \lambda_s(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty}\lambda_s(A_n) \leq \frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda$$

pro libovolnou konstantu $0 < c < 1$. Proto pro libovolnou nezápornou jednoduchou měřitelnou funkci $s(x)$, $s(x) \leq f(x)$ na $\mathbb{R}$ platí

$$\int_{\mathbb{R}} s(x)\,\mathrm{d}\lambda \leq \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Uvažujeme-li supremum přes všechny takové nezáporné jednoduché měřitelné funkce, dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \sup_{s(x)\leq f(x)}\int_{\mathbb{R}} s(x)\,\mathrm{d}\lambda \leq \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda\,. \tag{2.3}$$

Jelikož na $\mathbb{R}$ platí obě nerovnosti (2.2) a (2.3), platí i

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda\,,$$

což je přesně tvrzením, jenž jsme chtěli dokázat. $\square$

Tato věta je známá pod názvem *Lebesgueova věta o monotónním limitním přechodu* nebo *Lebesgueova věta o monotónní konvergenci*. Je jedním z klíčových tvrzení teorie Lebesgueova integrálu, jelikož pro klasický Riemannův integrál neplatí.

Příklad 2.16. Uvažujme posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ racionálních čísel na intervalu $[0,1]$ a funkce

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{q_1, q_2, \dots, q_{n-1}\} \\ 0 & x \in \{q_n, q_{n+1}, \dots\} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pro posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ platí $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ a funkce jsou riemannovsky integrovatelné, jelikož jsou ohraničené a nespojité pouze v konečně mnoha bodech. Limitou této posloupnosti funkcí na intervalu $[0,1]$ je Dirichletova funkce, která ovšem rimannovsky integrovatelná není.

Věta 2.17. Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou, $A \in \mathscr{L}$ a $f_n(x)$, $f(x)$ a $g(x)$ nezáporné měřitelné funkce pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

(1) $\displaystyle\int_A f(x) + g(x)\, \mathrm{d}\lambda = \int_A f(x)\, \mathrm{d}\lambda + \int_A g(x)\, \mathrm{d}\lambda.$

(2) Platí-li $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$, potom $\displaystyle\int_A f(x)\, \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x)\, \mathrm{d}\lambda.$

(3) Je-li A_n, $n \in \mathbb{N}$, posloupnost po dvou disjunktních množin, pro které platí $A = \displaystyle\bigcup_n^{\infty} A_n$, potom $\displaystyle\int_A f(x)\, \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\, \mathrm{d}\lambda.$

Důkaz. Po řadě dokažme jednotlivá tvrzení

(1) Víme, že existují posloupnosti nezáporných jednoduchých měřitelných funkcí $f_n(x)$ a $g_n(x)$ takových, že

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad g_n(x) \leq g_{n+1}(x),$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, jejichž limitami jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ pro každé $x \in A$. Poté je posloupnost funkcí $f_n(x) + g_n(x)$ také neklesající a její limitou je funkce $f(x) + g(x)$

pro každé $x \in A$. Proto platí

$$\int_A f(x) + g(x)\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x) + g_n(x)\,\mathrm{d}\lambda =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda + \int_A g_n(x)\,\mathrm{d}\lambda \right) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda + \lim_{n\to\infty} \int_A g_n(x)\,\mathrm{d}\lambda =$$
$$= \int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda + \int_A g(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Při úpravách jsme využili Lebesgueovy věty o monotónním přechodu 2.15 a aditivity jednoduchých funkcí.

(2) Definujme neklesající posloupnost nezáporných měřitelných funkcí $g_n(x)$ jako

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Tato posloupnost konverguje k funkci $f(x)$, která je díky tomu, jako limita posloupnosti měřitelných funkcí, také měřitelná. Můžeme tedy použít Lebesgueovu větu o monotónním přechodu 2.15 a výše dokázané tvrzení 2.17 (1), dostáváme

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n(x)\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,\mathrm{d}\lambda =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_A f_k(x)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

(3) Definujme

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x)\chi_{A_k}.$$

Díky vlastnostem integrálu nezáporných měřitelných funkcí a tvrzení 2.17 (1) můžeme upravovat

$$\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_A \sum_{k=1}^{n} f(x)\chi_{A_k}\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^{n} \int_A f(x)\chi_{A_k}\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Posloupnost $f_n(x)$ je neklesající posloupností měřitelných funkcí, která konverguje k funkci $f(x)\chi_A$. S využitím Lebesgueovy věty o monotónním přechodu dostáváme

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_A f(x)\chi_A\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Důkaz je nyní kompletní. □

Lemma 2.18 (Fatouvo lemma). Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou a $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na $\mathbb{R}$. Potom platí

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, \mathrm{d}\lambda.$$

Důkaz. Definujme nezáporné funkce $g_n(x) = \inf_{n\leq i} f_i(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Tyto funkce jsou měřitelné dle důkazu věty 1.41 a platí

$$g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots$$
$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Platí nerovnost $g_n(x) \leq f_i(x)$ pro všechna $n \leq i$. Dle tvrzení 2.14 (1) víme, že stejnou nerovnost dodržují i Lebesgueovy integrály těchto funkcí

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x) \, \mathrm{d}\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_i(x) \, \mathrm{d}\lambda$$

pro všechna $n \leq i$. Díky tomu platí i

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x) \, \mathrm{d}\lambda \leq \inf_{n\leq i} \int_{\mathbb{R}} f_i(x) \, \mathrm{d}\lambda \tag{2.4}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Využitím nerovnosti (2.4) a Lebesgueovy věty o monotónním přechodu 2.15 dostáváme tvrzení věty

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) \, \mathrm{d}\lambda \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{n\leq i} \int_{\mathbb{R}} f_i(x) \, \mathrm{d}\lambda = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, \mathrm{d}\lambda.$$

□

Definice 2.19. Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou. Měřitelnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme *lebesgueovsky integrovatelnou*, je-li

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}\lambda < \infty.$$

Definice 2.20. Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou, $A \in \mathscr{L}$ a $f(x)$ je lebesgueovsky integrovatelná funkce. Pak číslo

$$\int_A f(x) \, \mathrm{d}\lambda = \int_A f^+(x) \, \mathrm{d}\lambda - \int_A f^-(x) \, \mathrm{d}\lambda,$$

kde funkce $f^+(x)$, $f^-(x)$ jsou nezáporné integrovatelné funkce definované jako

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}, \quad f^- = \max\{-f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2},$$

nazveme *Lebesgueovým integrálem funkce* $f(x)$ *na množině* A.

Věta 2.21. Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou, $A \in \mathscr{L}$ a $f(x), g(x)$ integrovatelné funkce. Potom platí

(1) $\displaystyle\int_A f(x) + g(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda + \int_A g(x)\,\mathrm{d}\lambda.$

(2) $\displaystyle\int_A cf(x)\,\mathrm{d}\lambda = c\int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda,\ c \in \mathbb{R}.$

(3) $\displaystyle\int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \chi_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda.$

(4) Je-li $A_1, A_2, \dots$ posloupnost po dvou disjunktních měřitelných množin a $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_i$, potom

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

(5) Je-li $\lambda(A) = 0$, potom

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

(6) Platí-li $f(x) = g(x)$ skoro všude, potom

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_A g(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Důkaz. Postupně dokažme všechna tvrzení.

(1) Jelikož víme, že $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, je díky vlastnosti 2.14 (1) funkce $f(x)+g(x)$ integrovatelná. Označme $h(x) = f(x) + g(x)$, poté

$$h^+(x) - h^-(x) = f^+(x) - f^-(x) + g^+(x) - g^-(x).$$

Tudíž platí

$$\int_A h^+(x)\,\mathrm{d}\lambda + \int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\lambda + \int_A g^-\,\mathrm{d}\lambda = \int_A h^-\,\mathrm{d}\lambda + \int_A f^+\,\mathrm{d}\lambda + \int_A g^+\,\mathrm{d}\lambda.$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned}\int_A h(x)\,\mathrm{d}\lambda &= \int_A h^+(x)\,\mathrm{d}\lambda - \int_A h^-(x)\,\mathrm{d}\lambda = \\ &= \int_A f^+(x)\,\mathrm{d}\lambda + \int_A g^+(x)\,\mathrm{d}\lambda - \int_A f^-(x)\,\mathrm{d}\lambda - \int_A g^-(x)\,\mathrm{d}\lambda = \\ &= \int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda + \int_A g(x)\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

(2) Podobně jako v předchozím případě využijeme nerovnosti $|cf(x)| \leq |c||f(x)|$, proto je funkce $cf(x)$ integrovatelná. Nejdříve uvažme případ, kdy $c \geq 0$. Využitím tvrzení 2.14 (6) dostáváme

$$\int\limits_A cf(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_A cf^+(x)\,\mathrm{d}\lambda - \int\limits_A cf^-(x)\,\mathrm{d}\lambda = \\ = c\int\limits_A f^+(x)\,\mathrm{d}\lambda - c\int\limits_A f^-(x)\,\mathrm{d}\lambda = c\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

V případě, kdy $c < 0$, si stačí uvědomit, že

$$\big(cf(x)\big)^+ = -cf^-(x), \quad \big((cf(x)\big)^- = -cf^+(x).$$

Upravujme

$$\int\limits_A cf(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_A -cf^-(x)\,\mathrm{d}\lambda - \int\limits_A -cf^+(x)\,\mathrm{d}\lambda = \\ = -c\int\limits_A f^-(x)\,\mathrm{d}\lambda - (-c)\int\limits_A f^+(x)\,\mathrm{d}\lambda = c\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

(3) Toto tvrzení jsme dokázali pro nezáporné měřitelné funkce ve větě 2.14 (2). Tudíž ho lze aplikovat na nezáporné měřitelné funkce $f^+(x)$ a $f^-(x)$. Tím pádem platí i pro funkci $f(x)$ dle definice integrálu.

(4) Tvrzení platí pro nezáporné měřitelné funkce $f^+(x)$ a $f^-(x)$ dle věty 2.17, tím pádem i pro funkci $f(x)$ dle definice integrálu.

(5) Je-li $\lambda(A) = 0$, potom jsou $\int\limits_A f^+(x)\,\mathrm{d}\lambda$ a $\int\limits_A f^-(x)\,\mathrm{d}\lambda$ nulové. Dle definice je i integrál funkce $f(x)$ nulový.

(6) Označme množinu míry nula, na které se funkce nerovnají,

$$N = \{x \in A,\ f(x) \neq g(x)\}.$$

Potom lze integrál rozdělit následovně:

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{A\setminus N} f(x)\,\mathrm{d}\lambda + \int\limits_{A\cap N} f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{A\setminus N} f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_X \chi_{A\setminus N} f(x).$$

Zde jsme uplatnili tvrzení 2.21 (3), 2.21 (4) a 2.21 (5). Tím je důkaz kompletní.

□

Věta 2.22. Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou, $A \in \mathscr{L}$. Měřitelná funkce $f(x)$ je integrovatelná, právě když je funkce $|f(x)|$ integrovatelná. Potom navíc platí

$$\left|\int_A f(x)\ \mathrm{d}\lambda\right| \leq \int_A |f(x)|\ \mathrm{d}\lambda.$$

Důkaz. Dle definice 2.19 je funkce $f(x)$ integrovatelná, mají-li funkce $f^+(x)$ a $f^-(x)$ konečné integrály. Proto i pro integrovatelnost funkce $|f(x)|$ je nutná stejná podmínka. Jsou tedy ekvivalentní. Nerovnost dokážeme následovně dle definice:

$$\left|\int_A f(x)\ \mathrm{d}\lambda\right| = \left|\int_A f^+\ \mathrm{d}\lambda - \int_A f^-\ \mathrm{d}\lambda\right| \leq \int_A f^+\ \mathrm{d}\lambda + \int_A f^-\ \mathrm{d}\lambda = \int_A |f|\ \mathrm{d}\lambda.$$

□

Věta 2.23. Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí definovaných na $\mathbb{R}$ taková, že

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\ \mathrm{d}\lambda > -\infty,$$

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Je-li funkce $f(x)$ limitou této posloupnosti funkcí skoro všude, je také měřitelná a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{d}\lambda.$$

Důkaz. Tvrzení jsme dokázali pro nezáporné měřitelné funkce, které konvergují všude, viz věta 2.15. Předefinujme tedy funkce $f(x)$ a $f_n(x)$ na množinách míry nula takovým způsobem, aby posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergovala k $f(x)$ všude na $\mathbb{R}$. Položme

$$g_n(x) = f_n(x) + f_1^-(x). \tag{2.5}$$

Takto definované funkce $g_n(x)$ jsou jako součet měřitelných funkcí měřitelné. Posloupnost funkcí $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ zachovává uspořádání $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Jelikož tato posloupnost konverguje k funkci $f(x) + f_1^-(x)$, můžeme na ní aplikovat větu 2.15, platí tedy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n\ \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x) + f_1^-(x)\ \mathrm{d}\lambda.$$

Využitím (2.5) dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\ \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) + f_1^-(x)\ \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ \mathrm{d}\lambda + \int_{\mathbb{R}} f_1^-(x)\ \mathrm{d}\lambda.$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Věta 2.24. Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou a $A \in \mathscr{L}$. Dále nechť je $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost integrovatelných funkcí, která na množině A konverguje skoro všude k funkci $f(x)$. Pokud existuje integrovatelná funkce $g(x)$ taková, že

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $x \in A$, potom je funkce $f(x)$ integrovatelná a platí

$$\int_A f(x)\, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, \mathrm{d}\lambda.$$

Tato věta je známá pod názvem *Lebesguoeva věta o majorizované konvergenci* nebo také *Lebesgueova věta o majorizovaném limitním přechodu.*

Důkaz. Množiny, na kterých posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje k funkci $f(x)$, mají nulovou míru. Na těchto množinách funkce $f_n(x)$ položíme rovny nule. Dle věty 1.41 je limitní funkce $f(x)$ měřitelná. Již víme, že

$$\int_A |f(x)|\, \mathrm{d}\lambda \leq \int_A g(x)\, \mathrm{d}\lambda < \infty.$$

Proto je funkce $|f(x)|$, stejně jako funkce $f(x)$, dle věty 2.22 integrovatelná. Dále, jelikož $g(x) + f_n(x) \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in A$, můžeme využít Fatouova lemmatu 2.18. Upravujme

$$\int_A g(x)\, \mathrm{d}\lambda + \int_A f(x)\, \mathrm{d}\lambda = \int_A g(x) + f(x)\, \mathrm{d}\lambda = \int_A \liminf_{n\to\infty} \big(g(x) + f_n(x)\big)\, \mathrm{d}\lambda \leq$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_A g(x) + f_n(x)\, \mathrm{d}\lambda = \liminf_{n\to\infty} \left(\int_A g(x)\, \mathrm{d}\lambda + \int_A f_n(x)\, \mathrm{d}\lambda \right) =$$
$$= \int_A g(x)\, \mathrm{d}\lambda + \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, \mathrm{d}\lambda.$$

Odečtením $\int_A g(x)\, \mathrm{d}\lambda$ z obou stran nerovnosti dostáváme

$$\int_A f(x)\, \mathrm{d}\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, \mathrm{d}\lambda.$$

Jelikož je i funkce $g(x) - f_n(x)$ nezáporná pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in A$, můžeme opět využít Fatouova lemmatu 2.18. Upravujme

$$\int_A g(x)\, \mathrm{d}\lambda - \int_A f(x)\, \mathrm{d}\lambda = \int_A g(x) - f(x)\, \mathrm{d}\lambda = \int_A \liminf_{n\to\infty} \big(g(x) - f_n(x)\big)\, \mathrm{d}\lambda \leq$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_A g(x) - f_n(x)\, \mathrm{d}\lambda = \liminf_{n\to\infty} \left(\int_A g(x)\, \mathrm{d}\lambda - \int_A f_n(x)\, \mathrm{d}\lambda \right) =$$
$$= \int_A g(x)\, \mathrm{d}\lambda - \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, \mathrm{d}\lambda.$$

Po odečtení $\int\limits_A g(x)\,\mathrm{d}\lambda$ z obou stran nerovnosti dostáváme

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda \geq \limsup_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Nerovnosti 2.1.2 a 2.1.2 dokazují, že

$$\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

□

Lemma 2.25. Nechť $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ je měřitelný prostor s Lebesgueovou mírou, $A \in \mathscr{L}$. Buď $f(x)$ nezáporná měřitelná nebo integrovatelná funkce. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní

(1) $f = 0$ skoro všude.

(2) $\int\limits_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda = 0.$

(3) $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda = 0.$

Důkaz. Po řadě dokažme ekvivalence tvrzení. Implikace mezi prvním a druhým tvrzením platí dle věty 2.21.

Nyní dokažme, že třetí tvrzení plyne z druhého. Definujme měřitelné množiny

$$A^+ = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\}, \quad A^- = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0\}.$$

Potom platí $f^+ = f\chi_{A^+}$ a $f^- = f\chi_{A^-}$. Opět využijme tvrzení věty 2.21,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} f^+(x)\,\mathrm{d}\lambda + \int\limits_{\mathbb{R}} f^-(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{A^+} f(x)\,\mathrm{d}\lambda - \int\limits_{A^-} f(x)\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

To dokazuje implikaci druhého a třetího tvrzení.

Implikaci třetího a prvního tvrzení, které kompletuje důkaz věty, dokážeme pro nezáporné měřitelné funkce. Poté lze důkaz aplikovat na funkci $|f(x)|$, která je nezáporná a měřitelná nebo integrovatelná dle předpokladu. Definujme měřitelné množiny

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R},\ f(x) > 2^{-n}\right\}$$

pro $n \in \mathbb{N}$. Poté platí

$$2^{-n}\lambda\,(A_n) = \int\limits_{\mathbb{R}} 2^{-n}\chi_{A_n}\,\mathrm{d}\lambda \leq \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

Z toho plyne, že množiny A_n mají nulovou míru. Nulovou míru má potom i jejich sjednocení $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0\}$. Tudíž je tvrzení dokázáno. □

2.1.3 Porovnání Lebesgueova a Riemannova integrálu

Nyní srovnáme Lebesgueův integrál s Riemannovým integrálem a dokážeme, že třída lebesgueovsky integrovatelných funkcí je bohatší než třída riemannovsky integrovatelných funkcí.

Věta 2.26. Nechť je $f(x)$ riemannovsky integrovatelná funkce na intervalu $I = [a,b]$. Potom je na tomto intervalu i lebesgueovsky integrovatelná a integrály se rovnají, tj.

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat $b-a=1$. Interval $[a,b]$ rozdělme pro každé $n \in \mathbb{N}$ na disjunktní intervaly

$$[a, a+2^{-n}), \ldots, [b-2^{-n}, b]$$

délky 2^{-n}. Tyto intervaly označme I_i pro $i = 1, \ldots, 2^n$. Uvažujme jednoduché funkce

$$f_k(x) = \inf_{x \in I_i} f(x), \quad g_k(x) = \sup_{x \in I_i} f(x),$$

na příslušných intervalech I_i pro $k = 1, \ldots, 2^n$. Jistě platí

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq f(x) \leq g_{k+1}(x) \leq g_k(x).$$

Limity posloupností těchto funkcí existují a zachovávají nerovnost

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) \leq f(x) \leq \lim_{k \to \infty} g_k(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Absolutní hodnoty funkcí $f_k(x)$ a $g_k(x)$ jsou ohraničené (omezené) funkcí $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \chi_A$, která je nejen měřitelná, ale i lebesgueovsky integrovatelná. Proto jsou funkce $f_k(x)$ a $g_k(x)$ integrovatelné dle věty 2.24, taktéž jejich limity. Proto platí

$$\int_I \lim_{k \to \infty} f_k(x)\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{k \to \infty} \int_I f_k(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_I g_k(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_I \lim_{k \to \infty} g_k(x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Z toho vyplývá, že identity

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x) = \lim_{k \to \infty} g_k(x)$$

platí skoro všude. Tím pádem je funkce $f(x)$ lebesgueovsky integrovatelná a

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}\lambda = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Postačující podmínkou pro to, aby byla funkce lebesgueovsky integrovatelná, je tedy riemannovská integrovatelnost. Víme tedy, že funkce ohraničené na kompaktním intervalu, které jsou spojité skoro všude, jsou lebesgueovsky integrovatelné. Množiny riemannovsky a lebesgueovsky integrovatelných funkcí však nesplývají. Opačná implikace tvrzení věty 2.26 neplatí, což lze ukázat na jednoduchém příkladu.

Příklad 2.27. Typickým příkladem funkce, jejíž Riemannův integrál není definován, je *Dirichletova funkce*, která je na intervalu $[0,1]$ definována následovně

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Horní Riemannův integrál Dirichletovy funkce na intervalu $[0,1]$ se rovná jedné, zatímco dolní Riemannův integrál je roven nule. Funkce tedy není riemannovsky integrovatelná. Avšak se jedná o jednoduchou funkci. Dle definice 2.10 je tedy její Lebesgueův integrál roven

$$\int_0^1 \chi(x)\,\mathrm{d}\lambda = 0 \cdot \lambda\left([0,1] \setminus \mathbb{Q}\right) + 1 \cdot \lambda\left(\mathbb{Q} \cap [0,1]\right) = 0.$$

Zde jsme využili úvahy ze strany 37, kde jsme ukázali, že míra množiny racionálních čísel bude nulová.

2.2 Henstockův-Kurzweilův integrál

Henstockův-Kurzweilův integrál, také známý pod názvem zobecněný Riemannův integrál nebo Denjoyův-Perronův integrál, je integrál konstruovaný podobně jako klasický Riemannův integrál. Při zachování názorné konstrukce je ovšem schopen integrovat bohatší třídu funkcí. Součástí této kapitoly bude vystavění tohoto integrálu a porovnání s Riemannovým a Lebesgueovým integrálem.

Autory teorie tohoto integrálu jsou anglický matematik Ralph Henstock (1923 – 2007) a český matematik Jaroslav Kurzweil (1926). Jaroslav Kurzweil integrál zavedl ve své práci *Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter*, ale nebyla mu věnována zvláštní pozornost. O několik let později, nezávisle na Kurzweilovi, přichází s toutéž definicí Ralph Henstock. Ani jeden z autorů neupozornili na fakt, že se jedná o integrál, který je přinejmenším ekvivalentní Lebesgueovu integrálu a zároveň zachovává názorný Riemannův přístup konstrukce.

Kapitola byla sepsána s využitím literárních zdrojů [1], [16], [17], [18], [19] a [20].

2.2.1 Definice a vlastnosti Henstockova-Kurzweilova integrálu

Definice 2.28. Buď $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Systém D intervalů $[a_{i-1},a_i]$ s vybranými body $x_i \in [a_{i-1},a_i]$ pro $i = 1,\dots,n$ takový, že

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

nazveme *dělení* intervalu $[a,b]$.

Definice 2.29. Libovolnou kladnou funkci $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ nazveme *kalibr*.

Definice 2.30. Dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že

$$[a_{i-1},a_i] \subseteq [x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)]$$

pro každé $i = 1,\dots,n$ nazveme *δ-jemné dělení* nebo *dělení podřízené kalibru δ.*

Lemma 2.31 (Cousinovo lemma)**.** Nechť $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ je libovolný kalibr, potom k tomuto kalibru existuje dělení, které je δ-jemné.

Důkaz. Označme $\mathscr{D}(\delta,[a,b])$ množinu všech δ-jemných dělení intervalu $[a,b]$. Dále uvažme množinu

$$M = \{x \in (a,b], \mathscr{D}(\delta,[a,b]) \neq \emptyset\}.$$

Množina M je neprázdná, pro interval $[a,x]$ čísla

$$a = a_0 = x_1 < a_1 = \min(a+\delta(a),b) = x$$

určují δ-jemné dělení intervalu. Nyní dokažme, že číslo $y = \sup M$ náleží množině M. Jelikož $y \in [a,b]$, je číslo $\delta(y)$ kladné. Dle definice suprema existuje číslo

$$x \in M \cap (y-\delta(y), y].$$

Je-li $x = y$, pak $y \in M$. Předpokládejme $x < y$. Uvažujme δ-jemné dělení D intervalu $[a,x]$ přičemž položme $x_{n+1} = a_{n+1} = y$ a interval $(x_{n+1},[a_m,a_{m+1}])$ s vybraným bodem x_{n+1} přidejme do dělení. Toto rozšířené dělení je dělením intervalu $[a,y]$. Protože platí $[x,y] \subset (y-\delta(y),y]$, je takto definované dělení intervalu $[a,y]$ δ-jemné a $y \in M$. Zbývá dokázat, že $y = b$. Předpokládejme, že $y < b$. Jelikož existuje δ-jemné dělení intervalu $[a,y]$, můžeme je doplnit o body

$$x_{m+1} = a_m = d, \quad a_{m+1} = \min(b, y+\delta(y)).$$

Tím vytvoříme dělení intervalu $[a,x]$, kde $x = \min(b,y+\delta(y)) > y$, které je δ-jemné. Tudíž je prvkem $\mathscr{D}(\delta,[a,x])$ kde $x > y = \sup M$, což je ve sporu s definicí suprema. Platí tedy $y = b$. Dokázali jsme, že je množina $\mathscr{D}(\delta,[a,b])$ všech δ-jemných dělení intervalu $[a,b]$ neprázdná. $\square$

Henstockův-Kurzweilův integrál se tvoří velmi podobně jako Riemannův integrál. Proto pro dělení intervalu $[a,b]$ vytvoříme klasický integrální součet

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}).$$

Definice 2.32. Nechť je dána funkce $f(x):\ [a,b] \to \mathbb{R}$, potom číslo $\int\limits_I f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$ nazveme *Henstockovým-Kurzweilovým integrálem* funkce $f(x)$ na intervalu $I = [a,b]$, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta:\ [a,b] \to (0,\infty)$ tak, že pro každé δ-jemné dělení D platí

$$\left| S(f,D) - \int\limits_I f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Lemma 2.33. Pokud Henstockův-Kurzweilův integrál existuje, je určen jednoznačně.

Důkaz. Tvrzení dokažme sporem. Předpokládejme, že existují dva různé Henstockovy-Kurzweilovy integrály K_1, K_2. Položme

$$\varepsilon = \frac{|K_1 - K_2|}{2} > 0.$$

Dle definice pro $i = 1,2$ existují kalibry δ_i definované na intervalu $[a,b]$ takové, že pro každé δ_i-jemné dělení D_i intervalu $[a,b]$ platí

$$|S(f,D_i) - K_i| < \varepsilon.$$

Položíme-li $\delta(s) = \min\big(\delta_1(s), \delta_2(s)\big)$ pro $s \in [a,b]$, jedná se opět o kalibr a platí $\delta(s) \leq$ $\leq \delta_i(s)$ pro $s \in [a,b]$, $i = 1,2$. Buď D nějaké dělení intervalu $[a,b]$, které je δ-jemné. Existenci toho dělení D jsme dokázali v lemmatu 2.31. Toto dělení je současně δ_1-jemné a δ_2-jemné, proto platí

$$|S(f,D) - K_1| < \varepsilon, \quad |S(f,D) - K_2| < \varepsilon.$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} 2\varepsilon = |K_1 - K_2| = |K_1 - S(f,D) + S(f,D) - K_2| \leq& \\ \leq |S(f,D) - K_1| + |S(f,D) - K_2| &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Z toho plyne spor, který dokazuje tvrzení lemmatu. □

Funkce, pro které existuje Henstockův-Kurzweilův integrál, budeme dále nazývat jen integrovatelné, nebude-li řečeno jinak.

Věta 2.34. Nechť jsou $f(x), g(x)$ reálné funkce integrovatelné na intervalu $I = [a,b]$. Potom platí

(1) $\displaystyle\int_I f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x + \int_I g(x)\,\mathrm{d}x.$

(2) $\displaystyle\int_I cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$

(3) Je-li $f(x) \geq 0$ na intervalu I, potom $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$

(4) Je-li $f(x) \geq g(x)$ na intervalu I, potom $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$

(5) $\displaystyle\left|\int_I f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

Důkaz. Dokažme všechna čtyři tvrzení.

(1) Označmě $K_1 = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ a $K_2 = \int_I g(x)\,\mathrm{d}x$. Zafixujme $\varepsilon > 0$. Uvažme kalibry δ_1 and δ_2 na intervalu I takové, že pro δ_1-jemné dělení D platí

$$|S(f,D) - K_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

a pro každé δ_2-jemné dělení D platí

$$|S(f,D) - K_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definujme kalibr $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ jako $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$. Nechť D je δ-jemné dělení intervalu I. Existence tohoto dělení plyne z lemmatu 2.31. Dle definice kalibru δ je potom toto dělení jak δ_1-jemné, tak δ_2-jemné. Proto platí

$$\begin{aligned}|S(f+g,D) - (K_1+K_2)| &= |S(f,D) - K_1 + S(g,D) - K_2| \leq \\ &\leq |S(f,D) - K_1| + |S(g,D) - K_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dle definice integrálu tedy $\int_I f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a platí rovnost 2.34 (1).

(2) Je-li $c = 0$, je důkaz triviální. Uvažujme $c \neq 0$ a označmě $K = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$. Pro $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$, pro který platí

$$|S(f,D) - K| \leq \frac{\varepsilon}{|c|}$$

pro každé δ-jemné dělení D intervalu I. Potom pro každé δ-jemné dělení D intervalu I dostáváme

$$|S(cf,D) - cK| = |cS(f,D) - cK| = |c||S(f,D) - K| \leq |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

To kompletuje důkaz.

(3) Nechť je $\varepsilon > 0$. Pak existuje kalibr $\delta: [a,b] \to (0,\infty)$ na intervalu I, pro který platí

$$\left| S(f,D) - \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon$$

pro každé δ-jemné dělení D intervalu I. Tudíž

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \geq S(f,D) - \varepsilon \geq -\varepsilon.$$

Jelikož jsme ε volili libovolně, platí $S(f,D) \geq 0$ a také $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(4) K důkazu tohoto tvrzení stačí aplikovat tvrzení 2.34 (3) na funkci $g(x) - f(x)$.

(5) Použijme znalost tvrzení 2.34 (4). Platí

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

tudíž

$$-\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 2.35. Nechť je $f(x)$ reálná funkce integrovatelná na intervalech $[a,c]$ a $[c,b]$. Potom existuje integrál na intervalu $[a,b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_1: [a,c] \to (0,\infty)$, pro který platí

$$\left| S(f,D_1) - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každé δ_1-jemné dělení D_1 intervalu $[a,c]$. Stejně tak pro interval $[c,b]$ a dané $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_2 : [c,b] \to (0,\infty)$, pro který platí

$$\left| S(f,D_2) - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každé δ_2-jemné dělení D_2 intervalu $[c,b]$. Definujme kalibr $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ jako

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), c-x\} & \text{pro } a \le x < c \\ \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\} & \text{pro } x = c \\ \min\{\delta_2(x), x-c\} & \text{pro } c < x \le b. \end{cases}$$

Nechť D je δ-jemné dělení intervalu $[a,b]$ (existence plyne z lemmatu 2.31). Z definice kalibru δ plyne, že některé z bodů dělení D, a_i a a_{i+1}, $i = 0,\ldots n-1$, budou splývat s bodem c. Z toho můžeme vyvodit, že $D = D_1 \cup D_2$ pro nějaká δ-jemná dělení příslušných intervalů $[a,c]$ a $[c,b]$. Z toho plyne

$$\left| S(f,D) - \left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \right) \right| \le$$
$$\le \left| S(f,D_1) - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| S(f,D_2) - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Jelikož jsme ε volili libovolně, je tím tvrzení dokázáno. □

Věta 2.36. Nechť je $f(x)$ reálná funkce definovaná na intervalu $I = [a,b]$. Potom je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $[a,b]$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ takový, že pokud jsou D_1, D_2 δ-jemná dělení intervalu $[a,b]$, potom je

$$|S(f,D_1) - S(f,D_2)| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Důkaz. Nejdříve předpokládejme, že je funkce $f(x)$ integrovatelná na $I = [a,b]$. Potom dle definice 2.32 ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ takový, že pro každé δ-jemné dělení D intervalu I platí nerovnost

$$\left| S(f,D) - \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Uvažujme dvě δ-jemná dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$, potom

$$|S(f,D_1) - S(f,D_2)| = \left| S(f,D_1) + \int_I f(x)\,\mathrm{d}x - \int_I f(x)\,\mathrm{d}x - S(f,D_2) \right| \le$$
$$\le \left| S(f,D_1) - \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| S(f,D_2) - \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tím jsme dokázali jeden směr ekvivalence.

Nyní předpokládejme, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ takový, že pokud jsou D_1, D_2 δ-jemná dělení intervalu $[a,b]$, potom je

$$|S(f,D_1) - S(f,D_2)| < \varepsilon.$$

Označme M množinu všech $t \in \mathbb{R}$, pro než existuje kalibr takový, že pro každé δ-jemné dělení D platí nerovnost

$$t \leq S(f,D).$$

Nechť je $\varepsilon > 0$ libovolné. Dle předpokladu pro ε existuje kalibr $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$, pro než platí (2.6). Buď D_0 libovolné δ-jemné dělení intervalu $[a,b]$. Potom pro každé δ-jemné dělení D intervalu $[a,b]$ platí

$$S(f,D_0) - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,D) < S(f,D_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z toho ovšem plyne

$$\left(-\infty, S(f,D_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq M, \quad \left(-\infty, S(f,D_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \supseteq M.$$

Množina M je tím pádem neprázdná a shora omezená číslem $S(f,D_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Tudíž existuje supremum množiny M, pro které platí

$$S(f,D_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sup M \leq S(f,D_0) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.7}$$

Z nerovností (2.2.1) a (2.7) dostáváme

$$|S(f,D) - \sup M| < \varepsilon$$

pro každé δ-jemné dělení D intervalu $[a,b]$. To je v souladu s definicí 2.32. Henstockův-Kurzweilův integrál funkce $f(x)$ na I tedy existuje a je roven $\sup M$. □

2.2.2 Porovnání Henstockova-Kurzweilova, Lebesgueova a Riemannova integrálu

Cílem této podkapitoly je ukázat, že množina funkcí integrovatelných v Henstockově-Kurzweilově smyslu je nadmnožinou lebesgueovsky a v důsledku i riemannovsky integrovatelných funkcí. Integrály budeme rozlišovat značením $(\mathscr{R})$ pro Riemannův, $(\mathscr{L})$ pro Lebesgueův a $(\mathscr{K})$ pro Henstockův-Kurzweilův.

Věta 2.37. Nechť je $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkce mající Riemannův integrál. Poté má funkce i Henstockův-Kurzweilův integrál na intervalu $I = [a,b]$ a platí

$$(\mathscr{R}) \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{K}) \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Z definice Riemannova integrálu víme, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení D intervalu I s normou $\max\limits_{i=1,\dots,n}(a_i - a_{i-1}) < \delta$, platí

$$\left| S(f,D) - (\mathscr{R})\int\limits_I f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Nechť je $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ kalibr takový, že $\delta(x) = \frac{\delta}{3}$ pro každé $x \in I$. Dále uvažujme libovolné δ-jemné dělení D intervalu $[a,b]$ s vybranými body $x_1,\dots,x_n$. Potom platí

$$[a_{i-1},a_i] \subseteq \left(x_i - \frac{\delta}{3}, x_i + \frac{\delta}{3}\right)$$

pro $i = 1,\dots,n$. Z toho plyne, že pro normu tohoto dělení platí

$$\max_{i=1,\dots,n}(a_i - a_{i-1}) < \frac{2\delta}{3} < \delta.$$

Tudíž platí nerovnost (2.8). Jelikož jsme ε volili libovolně, existuje v souladu s definicí Henstockův-Kurzweilův integrál, který je roven Riemannovu integrálu. □

Definice 2.38. Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ se nazývá *zdola polo-spojitá*, jestliže je množina

$$\{x \in \mathbb{R},\ f(x) > c\}$$

otevřená pro každé $a \in \mathbb{R}$. Obdobně funkci $f(x)$ nazveme *shora polo-spojitou*, jestliže je množina

$$\{x \in \mathbb{R},\ f(x) < c\}$$

otevřená pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Věta 2.39. Nechť je $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkce mající Lebesgueův integrál. Poté má funkce i Henstockův-Kurzweilův integrál na intervalu $I = [a,b]$ a platí

$$(\mathscr{L})\int\limits_I f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{K})\int\limits_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Mějme libovolné $\varepsilon > 0$. Poté existují zdola polo-spojitá funkce $s(x) > f(x)$ a shora polo-spojitá funkce $t(x) < f(x)$, které jsou lebesgueovsky integrovatelné na intervalu I a splňují nerovnost

$$(\mathscr{L})\int\limits_a^b s(x) - t(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Ke každému $x \in [a,b]$ najděme $\delta(x)$ takové, že splňuje nerovnosti

$$t(x) \le f(x) \le s(x)$$

na intervalu $\big(x-\delta(x), x+\delta(x)\big) \cap [a,b]$. Uvažujme δ-jemné dělení D intervalu $[a,b]$ s vybranými body $x_1, \dots x_n$. Poté platí

$$(\mathscr{L}) \int_{a_i}^{b_i} t(x)\,\mathrm{d}x \le f(x_i)(b_i - a_i) \le (\mathscr{L}) \int_{a_i}^{b_i} s(x)\,\mathrm{d}x.$$

pro každé $i = 1, \dots n$. Sečtením dostáváme

$$(\mathscr{L}) \int_{a}^{b} t(x)\,\mathrm{d}x \le S(f,D) \le (\mathscr{L}) \int_{a}^{b} s(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zároveň také platí

$$(\mathscr{L}) \int_{a}^{b} t(x)\,\mathrm{d}x \le (\mathscr{L}) \int_{a}^{b} f(x) \le (\mathscr{L}) \int_{a}^{b} s(x)\,\mathrm{d}x.$$

Díky předpokladu (2.9) dostáváme

$$\left| S(f,D) - (\mathscr{L}) \int_{a}^{b} f(x) \right| < 2\varepsilon.$$

V souladu s definicí 2.32 existuje Henstockův-Kurzweilův integrál funkce $f(x)$, který je navíc rovný Lebesgueovu integrálu této funkce. □

Existenci funkcí $t(x)$ a $s(x)$ splňujících podmínku (2.9) jsme v důkazu vynechali. Důkaz jejich existence lze dohledat v [1]. Alternativní verzi důkazu, která využívá Lebesgueovy věty o monotónní konvergenci a Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci, lze najít v [20]. Popišme si alespoň postup tohoto důkazu. Při dokazování se využívá následujícího pomocného tvrzení.

Věta 2.40. Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce, $A \in \mathscr{L}$. Potom existuje posloupnost jednoduchých funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, která konverguje k funkci $f(x)$ skoro všude na množině A. Navíc je-li funkce $f(x)$ omezená číslem $m \in \mathbb{R}$ na množině A, potom jsou i funkce f_n omezené na množině A stejným číslem m pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Následovně dokážeme, že nezáporná měřitelná funkce je lebesguoevsky integrovatelná právě tehdy, když je integrovatelná v Henstockově-Kurzweilově smyslu a integrály se poté rovnají. V důkazu využíváme jak věty 2.40, tak Lebesgueovy věty o monotónní konvergenci a Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci, které platí pro oba typy integrálu

(Lebesgueův i Henstockův-Kurzweilův). Důkaz těchto vět pro Henstockův-Kurzweiův integrál lze dohledat v [16] nebo [20]. Máme-li dokázanou ekvivalenci Lebesgueova a Henstockova-Kurzweilova integrálu pro nezáporné měřitelné funkce, není těžké z definice Lebesgueova integrálu pro měřitelné funkce vyvodit ekvivalenci těchto integrálu i pro libovolné měřitelné funkce. Platí tedy následující věta.

Věta 2.41. Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce. Poté je funkce lebesgueovsky integrovatelná, právě když je integrovatelná v Henstockově-Kurzweilově smyslu. Potom platí

$$(\mathscr{L}) \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{K}) \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zbývá ukázat, že podmínku měřitelnosti funkce lze vypustit. Tím dostaneme tvrzení shodující se s větou 2.39.

Věta 2.42. Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ je funkce mající Henstockův-Kurzweilův integrál na intervalu I, potom je na tomto intervalu měřitelná.

Důkazy těchto tvrzení lze také najít v [20]. Ukázali jsme tedy, že množina riemannovsky integrovatelných funkcí je podmnožinou množiny lebesgueovsky integrovatelných funkcí, která je podmnožinou množiny funkcí integrovatelných v Henstockově-Kurzweilově smyslu. Navíc se jedná o podmnožiny vlastní. To jsme pro riemannovsky a lebesgueovsky integrovatelné funkce ukázali v příkladu 2.27. Příklady funkcí, které jsou integrovatelné v Henstockově-Kurzweilově smyslu, ale ne lebesgueovsky integrovatelné, lze nalézt v [24].

Seznam použité literatury

[1] LUKEŠ, Jaroslav a Jan MALÝ. *Míra a integrál.* 2. vyd. Praha: Karolinum, 2002. Učební texty Univerzity Karlovy v Praze. ISBN 8024605430.

[2] NELSON, Gail S. *A user-friendly introduction to Lebesgue measure and integration.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2015. ISBN 9781470421991.

[3] YEH, James. *Real analysis: Theory of measure and integration.* 2nd ed. Singapore: World Scientific Publishing, 2006. ISBN 9812566546.

[4] BOGACHEV, Vladimir I. *Measure theory.* New York: Springer, 2007. ISBN 3540345132.

[5] DOLÉANS-DADE, Catherine A. a Robert B. ASH. *Probability and measure theory.* 2nd ed. San Diego: Academic Press, 2000. ISBN 0120652021.

[6] FORBELSKÁ, Marie a Jan KOLÁČEK. *Pravděpodobnost a statistika I* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2013 [cit. 2019-10-27]. Elportál. Dostupné z: http://is.muni.cz/elportal/?id=1130308. ISBN 9788021067103.

[7] TAYLOR, Michael E. *Measure Theory and Integration.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2006. Graduate Studies in Mathematics. ISBN 0821841807.

[8] FOLLAND, Gerald B. *Real analysis: Modern Techniques and Their Applications.* 2nd ed. New York: Wiley, 1999. Pure and applied mathematics. ISBN 0471317160.

[9] HALMOS, Paul R. *Measure theory.* 2nd ed. New York: Springer, 1974. Graduate Texts in Mathematics. ISBN 0387900888.

[10] TAO, Terence. *An introduction to measure theory.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2011. Graduate Studies in Mathematics. ISBN 0821869191.

[11] SALAMON, Dietmar A. *Measure and Integration.* Zürich, Switzerland: European Mathematical Society, 2016. ISBN 9783037191590.

[12] SCHILLING, René L. *Measures, integrals and martingales.* New York: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521615259.

[13] SCHILLING, René L. *Measures, Integrals and Martingales Solution Manual* [online]. Dresden, May 2017 [cit. 12-02-2020]. Dostupné z: http://motapa.de/measures_integrals_and_martingales/index.shtml.

[14] BARTLE, Robert G. *The elements of integration and Lebesgue measure.* New York: Wiley, 1995. ISBN 0471042226.

[15] KRANTZ, Steven G. *Elementary Introduction to the Lebesgue Integral.* Boca Raton: Taylor & Francis, 2018. ISBN 1138482765.

[16] FONDA, Alessandro. *The Kurzweil-Henstock integral for undergraduates: a promenade along the marvelous theory of integration.* Compact Textbooks in Mathematics. Switzerland: Birkhäuser, 2018. ISBN 3319953206.

[17] LEE, Tuo Y. *Henstock-Kurzweil integration on Euclidean spaces.* Singapore: World Scientific Publishing, 2011. Series in Real Analysis. ISBN 9814324582.

[18] SCHWABIK, Štefan. *Integrace v R (Kurzweilova teorie).* Praha: Karolinum, 1999. ISBN 8071849677.

[19] TVRDÝ, Milan. *Stieltjesův integrál: Kurzweilova teorie*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2012. ISBN 8071849677.

[20] KURTZ, Douglas S. a Charles W. SWARTZ. *Theories of integration: The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane.* 2nd ed. Singapore: World Scientific Publishing, 2012. Series in Real Analysis. ISBN 9812388435.

[21] DOŠLÝ, Ondřej a Petr ZEMÁNEK. *Integrální počet v R.* Brno: Masarykova univerzita, 2011. ISBN 9788021056350.

[22] KALAS, Josef a Jaromír KUBEN. *Integrální počet funkcí více proměnných.* Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 9788021049758.

[23] SCHWABIK, Štefan a Petra ŠARMANOVÁ. *Malý průvodce historií integrálu.* Praha: Prometheus, 1996. Dějiny matematiky. ISBN 8071960381.

[24] TURNER, J. *An analysis of the Henstock-Kurzweil integral* [online]. Muncie, 2015 [cit. 29-07-2020]. Dostupné z: https://cardinalscholar.bsu.edu/handle/123456789/199870.